F2557
R
F2557
101

1

TOMUL 30

1971

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

1970 MAR 15

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI — *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU — *redactor responsabil adjunct*,
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. N. TIPEI, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVLESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea de comerț exterior „Libri", căsuța poștală 134—135 (Calea Victoriei 126), București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția: București,

Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 30, nr. 1 1971

SUMAR

Pag.

STUDII

C. TEODORESCU-ŢINTEA, Efecte acustice datorite jeturilor de gaze 3
VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Asupra unor condiţii la limită în dezlocuirea necapilară în medii poroase 25
ŞTEFAN STAICU, Mişcarea supersonică în jurul unui ampenaj cruciform avînd planul orizontal cu bordul de atac supersonic, considerînd desprinderile de curent de la bordurile de atac subsonice ale plăcii 39
CHR. PELECUDI, Determinarea matriceală a deplasărilor în mecanismele spaţiale 53
PĂUN ANTONESCU, Calculul cursei elementului condus la mecanismele spaţiale cu patru elemente 73
A. RAICU, Variante structurale ale mecanismelor tip $nc = 04.05$ 89
GHEORGHE ZĂTREANU, Soluţii dinamice raţionale la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri 101
STELIAN CETĂŢEANU, Problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate poligonale 131
L. LIBRESCU, ELEONORA MALAIU, Stabilitatea aeroelastică a structurilor plane de tip sandviş, plasate într-un curent de gaz supersonic 171
S. RĂUŢU, VETURIA CHIROIU, V. BĂNUŢ, Determinarea sarcinii de stabilizare a deformaţiilor structurilor formate din bare supuse la sarcini repetate 197
CORNELIU BOB, Starea de solicitare limită a elementelor de beton armat încovoiate 209
R. MARINOV, Determinarea eforturilor de legătură în sistemele statice combinate prin utilizarea modelelor reduse 225
GHEORGHE ZGURĂ, CONSTANTIN ISPAS, Cercetări privind construcţia unui dinamometru pentru studierea celor trei componente ale forţei de aşchiere . . . 237

RECENZII 251

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI
1848
KÖNYVTÁRA

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratkölcsönzés
527/1972

EFECTE ACUSTICE DATORITE JETURILOR DE GAZE

de C. TEODORESCU-ŢINTEA
I.M.F.C.A.

În lucrare se prezintă rezultatele unor cercetări originale privind structura jetului liber şi cauzalitatea fenomenelor aeroacustice în jeturi.
Pe baza concluziilor desprinse de autor este subliniată corelaţia „zgomot — turbulenţă" şi analizate particularităţilor cîmpurilor acustice „apropiat" şi „îndepărtat", generate de jeturile de gaze la regimuri subsonice şi critice.

Jetul liber turbulent are proprietatea de a emite în spaţiu unde de presiune, care se percep sub formă de zgomote. Natura acestor zgomote este pur gazodinamică, spre deosebire de a altor zgomote, a căror provenienţă poate fi mecanică (zgomotul produs de talere, ciocan, mori cu bile etc.), aerodinamică (sunetul fluierului şi al tuburilor de orgă, zgomotul vîntului şi dîrelor etc.), aeroelastică (sunetele acordeonului, vocea, zgomotul rotoarelor cu palete etc.), magnetodinamică, electrodinamică etc.

Progresul rapid înregistrat în ultimele două decenii în domeniul proiectării şi construcţiei de avioane aeroreactive şi de rachete, precum şi necesitatea creării unui climat acceptabil în vecinătatea instalaţiilor industriale care produc zgomote gazodinamice, au sporit considerabil interesul pentru cunoaşterea mecanismului zgomotului produs de jetul liber şi găsirea mijloacelor de combatere a acestuia.

Totalitatea studiilor efectuate pînă în prezent au evidenţiat ca sursă primară a zgomotului gazodinamic amestecul turbulent care se produce în toate jeturile gazoase (cu excepţia numerelor Re foarte mici), căruia i se adaugă, în cazul jeturilor supersonice sau subexpandate, zgomotul generat de undele de şoc.

1. ZGOMOTUL JETURILOR SUBSONICE

Experimental s-a constatat [1] — [4] că frecvenţele sunetelor care intră în structura zgomotului de jet acoperă o bandă largă, care se întinde de la cîţiva herţi pînă la 20 000 Hz. Frecvenţele înalte sînt generate în apropierea ajutajului, unde grosimea stratului-limită este redusă (fig. 1); pe măsura depărtării de secţiunea iniţială către aval, devin predominante frecvenţele joase.

Din păcate, actuala teorie a jetului liber nu poate explica satisfăcător natura și spectrul zgomotului emis de jeturi, deorece ipotezele sale de calcul se bazează în exclusivitate pe mărimi ale structurii turbulente, neglijînd complet formarea vîrtejurilor periodice toroidale pe frontierele jetului [5]. Astfel, din analiza acestor ipoteze rezultă următoarele :

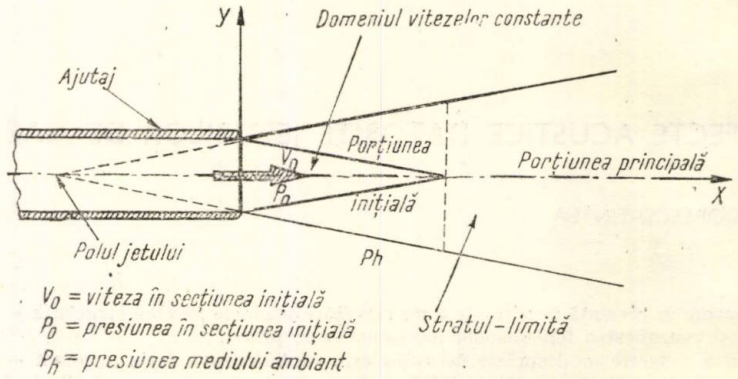


Fig. 1. — Schema jetului liber.

1) frontierele jetului liber sînt linii drepte care pornesc divergent de la muchiile ajutajului și se întind pînă la infinit aval (fig. 1). Viteza pe axa jetului scade treptat începînd din secțiunea de trecere pînă la infinit aval, unde se anulează. Această scădere se face pe seama creșterii masei fluide care constituie jetul și care la infinit aval devine infinit de mare. Domeniul în care se face simțită acțiunea jetului este, așadar, nelimitat în sensul axei, cu alte cuvinte „bătaia" jetului este infinită;

2) presiunea statică pe frontierele jetului este pretutindeni constantă și egală cu presiunea mediului ambiant, de unde rezultă că mediul fluid situat în afara frontierelor jetului rămîne imobil, ceea ce face imposibilă alimentarea jetului cu masă de aport. Această ipoteză este, de fapt, în contradicție cu prima.

Referitor la prima concluzie, experiența arată că „bătaia" oricărui jet este finită, ea fiind cu atît mai mare cu cît impulsul inițial al jetului este mai mare.

Referitor la a doua concluzie, cercetările noastre [6], [7] au arătat că orice jet determină în mediul ambiant mișcarea particulelor fluide după un spectru a cărui formă depinde substanțial de valoarea numărului Reynolds al curgerii. Pentru evidențierea acestui spectru au fost efectuate mai multe vizualizări, care au dus la următoarele concluzii :

a) liniile de curent sînt curbe care izvorăsc din partea posterioară a jetului și se închid pe granițele acestuia în partea sa anterioară (fig. 2). Forma acestor curbe este variată și depinde în primul rînd de mărimea numărului $\mathcal{R}e$ (fig. 3*a*, *b*,*c*). Fotografiile din figurile 2 și 3 au o importanță deosebită, întrucît cu ajutorul lor poate fi elaborată o nouă schemă a jetului liber, mai apropiată de realitate ((fig. 4), a cărui aliură este sensibil diferită de cea furnizată de teoria clasică (fig. 5).

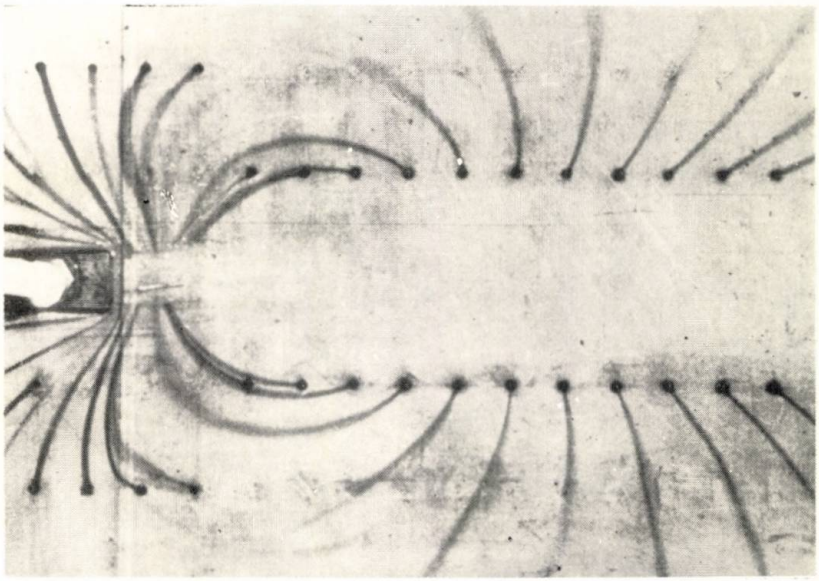
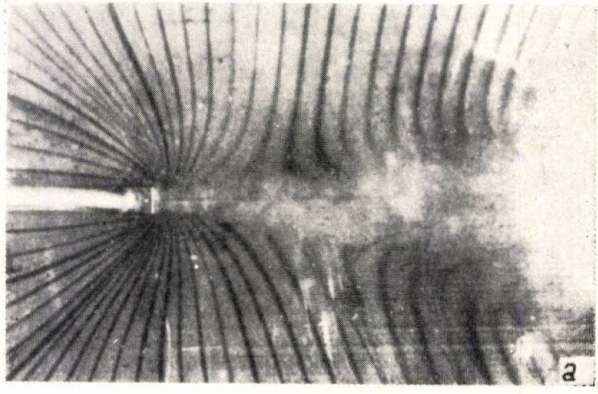
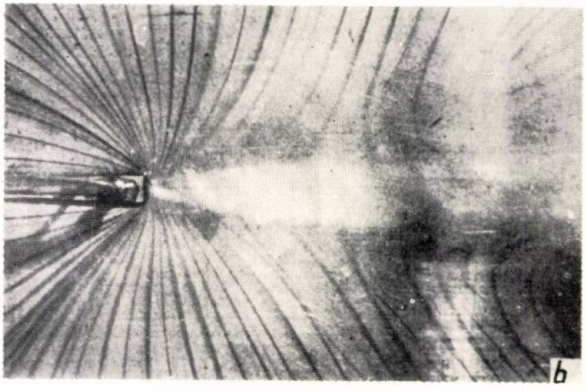


Fig. 2. — Spectrul hidrodinamic generat de jetul liber în mediul ambiant.





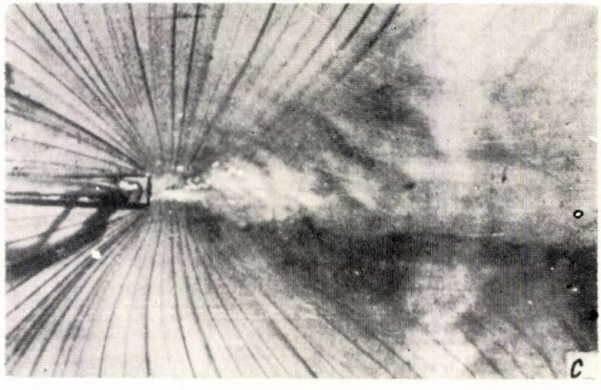


Fig. 3. — Spectrul hidrodinamic generat de jetul liber în mediul ambiant pentru diverse viteze inițiale : $(U_0)\ a < (U_0)\ b < (U_0)\ c$.

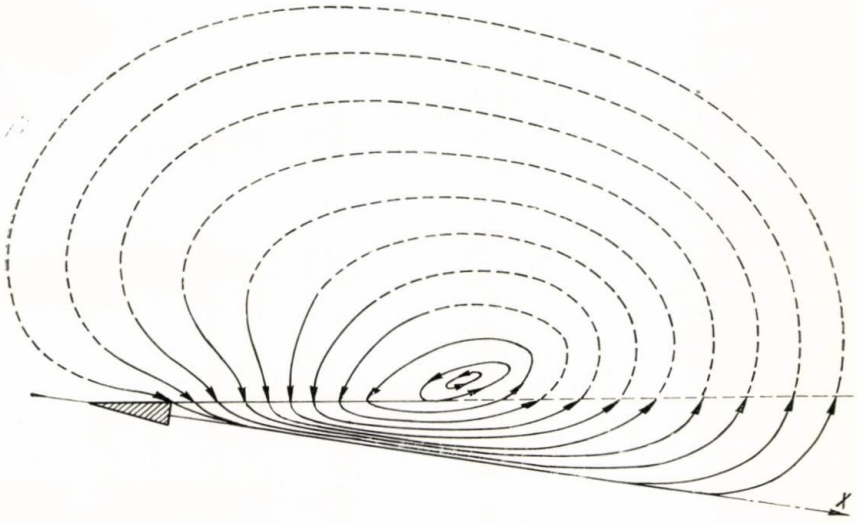


Fig. 4. — Schema reală a jetului liber.

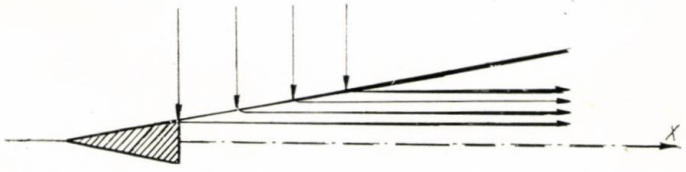


Fig. 5. — Schema jetului liber după teoria clasică.

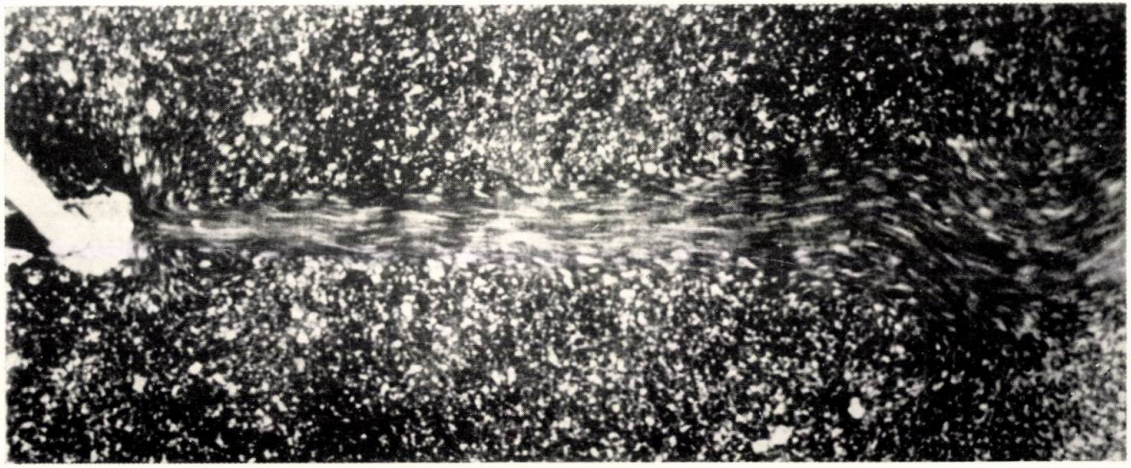


Fig. 6. — Jetul liber vizualizat cu pulbere de licopodiu.

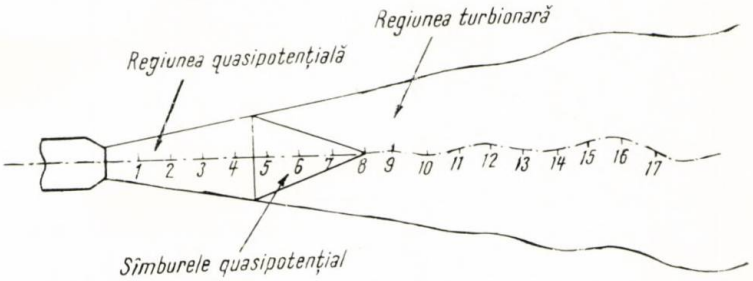


Fig. 7. — Schema structurală a jetului liber, după autor.

Fig. 8. — Regiunea cvasipotențială și prima parte a regiunii turbionare.

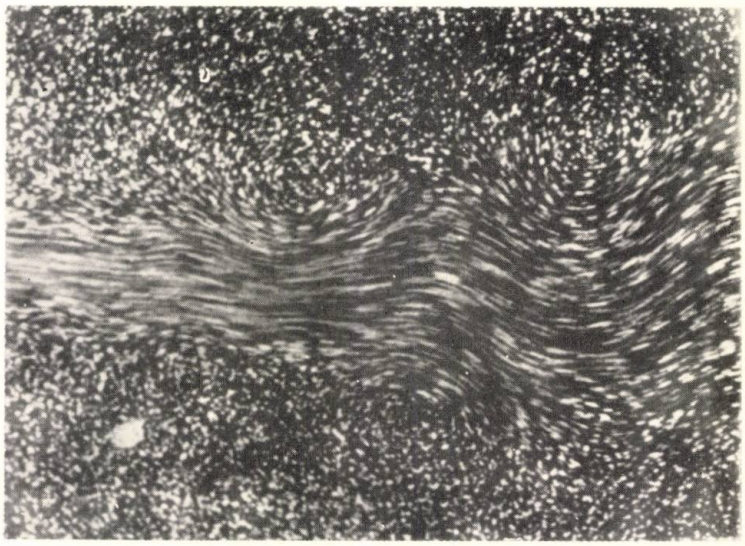


Fig. 9. — O porțiune din regiunea turbionară a jetului.

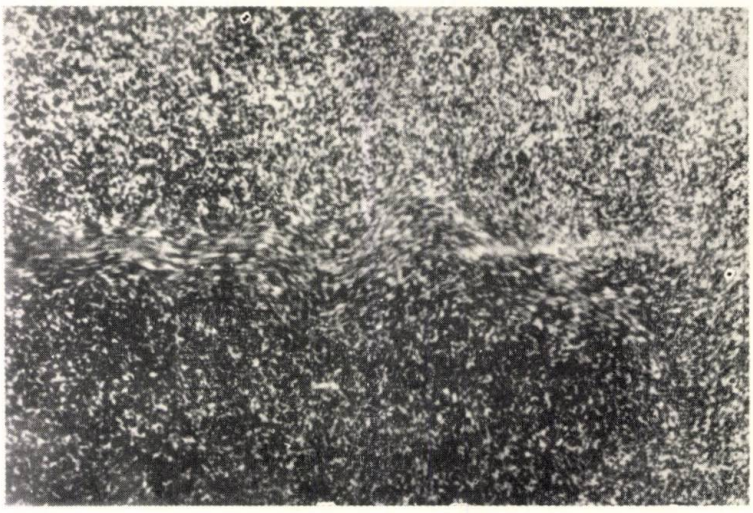


Fig. 10. — Partea finală a jetului.

b) În structura jetului (fig. 6,7) se disting două regiuni, şi anume :

— o regiune cu un pregnant caracter de puţ, situată în prima parte a jetului (la frontiere) şi caracterizată prin lipsa vîrtejurilor, a cărei lungime raportată la dimensiunea caracteristică a ajutajului este aproximativ 4,5 (fig. 8) ;

— o regiune în interiorul căreia există numeroase vîrtejuri libere care se dezvoltă către aval, afectînd progresiv masa jetului de la periferie spre centru ; fotografia din figura 9 reprezintă o parte din această regiune.

În concepţia noastră, prima regiune a jetului se numeşte cvasipotenţială, iar cea de-a doua turbionară (fig. 7).

Vîrtejurile caracteristice regiunii turbionare se prezintă sub forma a două lanţuri Kármán, cu originea în stratul-limită al jetului la frontiera dintre cele două regiuni (fig. 6).

Regiunii turbionare îi sînt proprii două zone :

— un sîmbure cvasipotenţial, situat în centru, neafectat de vîrtejurile periferice, care se îngustează treptat spre aval pînă la lichidare ; în această zonă, a cărei lungime raportată este aproximativ 8, axa jetului se menţine rectilinie ;

— o zonă în care jetul este integral afectat de vîrtejuri şi în care axa jetului este ondulată, prezentînd curburi din ce în ce mai accentuate spre aval.

c) La o distanţă suficient de mare de secţiunea iniţială, energia jetului este complet dispersată şi mişcarea particulelor încetează (fig. 10).

Densitatea liniilor de curent în spectrul generat de jet şi însăşi structura jetului atestă faptul că presiunea pe frontierele jetului şi în interiorul său este variabilă. Astfel, în regiunea cvasipotenţială presiunea este mai mică decît presiunea ambiantă, această diferenţă accetuîndu-se pe măsura apropierii de secţiunea iniţială. În regiunea turbionară, presiunea creşte treptat pînă la atingerea presiunii ambiante şi chiar depăşirea acesteia.

Pe baza noilor concluzii referitoare la structura jetului liber poate fi explicat atît mecanismul apariţiei zgomotului radiat de jet, cît şi spectrul acestuia.

Astfel, în prima regiune a jetului (regiunea cvasipotenţială), zgomotul apare ca o consecinţă directă a turbulenţei şi se datoreşte pulsaţiilor vitezei, care provoacă în mediul ambiant pulsaţii ale presiunii. Întrucît valoarea numărului $\mathcal{R}e$ în această regiune este ridicată, frecvenţa pulsaţiilor rezultă mare şi de aceea tonurile zgomotelor emise sînt înalte.

În regiunea turbionară a jetului se disting două surse de zgomot : pe de o parte, pulsaţiile vitezei caracteristice turbulenţei, iar pe de altă parte vîrtejurile libere care evoluează către aval. Existenţa acestor vîrtejuri conferă presiunii un caracter pulsatoriu, cu o frecvenţă mult mai mică decît aceea a pulsaţiilor vitezei cauzate de turbulenţă. Din această cauză, tonurile zgomotelor turbionare sînt mai joase.

Datorită amestecului cu mediul ambiant, numărul $\mathcal{R}e$ al curgerii scade către aval şi, implicit, scad pulsaţiile vitezei atît ca intensitate, cît şi ca frecvenţă. În consecinţă, pe măsura depărtării de secţiunea iniţială, zgomotele cauzate de turbulenţă îşi pierd din intensitate, iar zgomotele turbionare devin predominante.

1.1. CÎMPUL ACUSTIC GENERAT DE JET

Exploatarea cîmpului acustic generat de jet în mediul ambiant evidenţiază existenţa a două domenii caracteristice, cu proprietăţi radical deosebite. Astfel, în imediata apropiere a jetului se pot determina intensitatea şi spectrul zgomotului radiat de orice punct al frontierei, fără a obţine însă vreo informaţie asupra direcţiei în care se propagă sunetul. Acest domeniu se numeşte cîmpul acustic apropiat al jetului.

Pe de altă parte, măsurătorile efectuate la distanţe mari de jet în comparaţie cu lungimea zonei de radiaţie acustică şi cu cele mai mari lungimi de undă ale sunetelor emise oferă informaţii asupra directivităţii zgomotului, dar nu şi asupra originii sale. Acest domeniu se numeşte cîmpul acustic îndepărtat al jetului.

Între cîmpul apropiat şi cel îndepărtat se află o regiune de tranziţie complicată, a cărei interpretare este foarte dificilă.

1.1.1. Cîmpul acustic apropiat

Natura complexă a amestecului turbulent înlătură apriori ipoteza că fiecare componentă a frecvenţei zgomotului produs de jeturi ar putea fi asociată în mod precis cu un anumit punct sau o anumită secţiune a jetului, deşi, fără îndoială, în orice secţiune dată predomină o anumită frecvenţă.

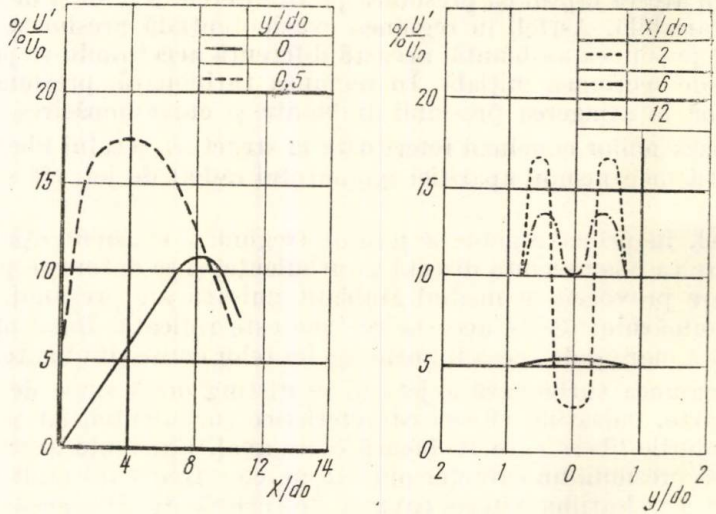


Fig. 11. — Profilele fluctuaţiilor turbulente într-un jet de aer cu $d_0 = 76$ mm.

În diagrama din figura 11 sînt reprezentate profilele fluctuaţiilor turbulente, determinate de Hubbard şi Lassiter [1] cu ajutorul anemometrului cu fir cald într-un jet de aer cu diametrul secţiunii iniţiale de

76 mm. În această diagramă, fluctuațiile turbulente sînt înscrise sub forma raportului adimensional u'/u_0, unde u' este componenta axială a fluctuației, iar u_0 viteza medie la ieșirea din ajutaj. Deoarece fluctuațiile turbulente sînt maxime pentru $y/d_0 \simeq 0{,}5$ (fig. 12), în figura 11 *a* s-au trasat profilele axiale atît pentru $y/d_0 = 0$, cît și pentru $y/d_0 = 0{,}5$.

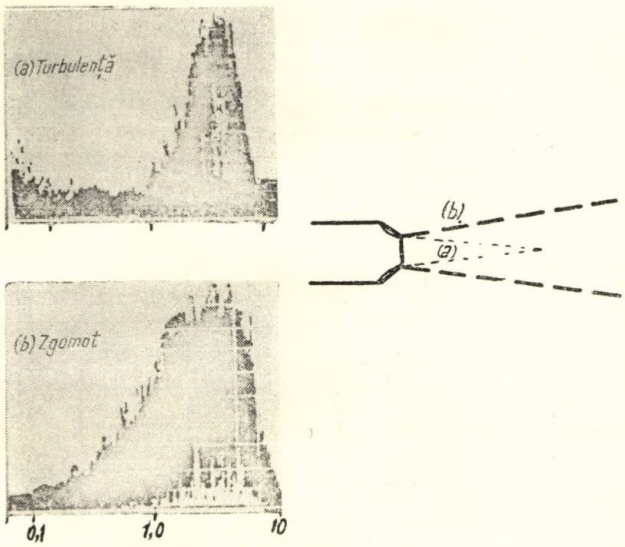


Fig. 12. — Comparație între spectrul turbulenței pe axa jetului și spectrul zgomotului în imediata vecinătate a frontierelor jetului.

Intensitatea mare a fluctuațiilor turbulente este caracteristică domeniilor cu gradienți mari ai vitezelor, situate în așa-numita porțiune de amestec [8] a jetului (fig. 11*b*).

Comparînd spectrele fluctuațiilor turbulente cu acelea ale zgomotului determinate în imediata vecinătate a frontierelor jetului (fig. 12), apare evidentă o anumită corelație între turbulență și zgomotul radiat în cîmpul acustic apropiat al jetului. Această corelație devine și mai clară dacă se iau în considerație frecvențele corespunzătoare intensităților maxime din spectrele determinate.

Reprezentarea acestor frecvențe în funcție de viteza jetului a permis trasarea diagramei din figura 13, a cărei interpretare duce la următoarele concluzii : pentru o secțiune dată, frecvența predominantă a fluctuațiilor turbulente crește direct proporțional cu creșterea vitezei inițiale a jetului (linia punctată) ; frecvența predominantă a zgomotului în aceeași secțiune crește de asemenea o dată cu creșterea vitezei inițiale a jetului, urmînd aproximativ aceeași lege.

În figura 14 sînt prezentate rezultatele măsurătorilor efectuate asupra frecvențelor predominante ale zgomotului și fluctuațiilor turbulente de-a lungul jetului, pentru o viteză inițială constantă și egală cu 213 m/s. Înregistrările acustice s-au făcut în vecinătatea frontierelor jetului, iar spectrele de turbulență au fost determinate de-a lungul unei linii paralele

cu frontiera jetului, distanțată de aceasta cu o rază de ajutaj. Se observă și în acest caz tendințe similare de variație a celor două frecvențe predominante, în funcție de parametrul geometric considerat.

Explorarea cîmpului acustic apropiat al jetului a relevat existența unei zone situate în apropierea secțiunii inițiale a jetului, în care intensi-

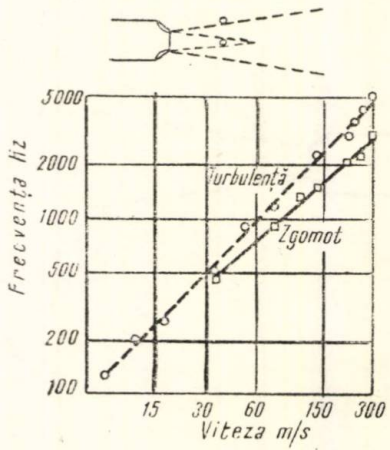


Fig. 13. — Variația frecvențelor predominante ale zgomotului și turbulenței în funcție de viteza inițială a jetului.

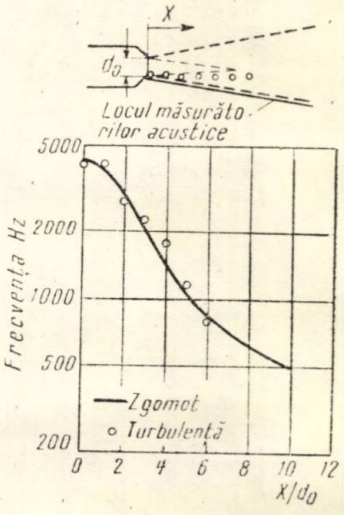


Fig. 14. — Variația frecvențelor predominante ale zgomotului și turbulenței de-a lungul jetului.

tatea fluctuațiilor presiunii este deosebit de mare. Examinarea acestei zone pe un jet model cu diametrul de 25,4 mm a furnizat date interesante care pot lămuri cauzele unor ruperi ale structurilor secundare de aripi și fuselaje, întîlnite la avioanele cu reacție.

Rezultatele obținute sînt ilustrate grafic în diagramele din figurile 15—16, în care s-a considerat valoarea totală a amplitudinii presiunii din spectrul de frecvență (20 — 38 000 Hz). Se observă că presiunea crește inițial în lungul jetului pînă atinge un maxim la circa 2 diametre depărtare de secțiunea inițială, după care scade lent. În direcția radială, presiunile descresc rapid cu distanța, devenind practic nule pentru $y/d_0 = 3$.

Deoarece în domeniul vibrațiilor frecvența forței de excitație poate fi mai importantă decît amplitudinea ei, este interesant de determinat modul de variație a frecvențelor de-a lungul frontierelor jetului. Punctul $\bar{a}$ corespunde punctului în care s-au măsurat amplitudinile maxime și se pare că în spectru există un vîrf mai ascuțit în vecinătatea frecvenței de 3 000 Hz. În punctele mai depărtate de secțiunea inițială, presiunile sînt ceva mai scăzute, iar energia pare să se fi deplasat rapid către frecvențele mai joase, pînă ce în punctul $\bar{c}$ banda de frecvențe se contractă în jurul frecvenței de 400 Hz.

Distribuția surselor acustice. Măsurătorile efectuate în cîmpul acustic apropiat au relevat existența unei legături funcționale între distribuția surselor sonore elementare în jet, spectrul puterii totale radiate și frecvența surselor.

S-a stabilit [8] că frecvența predominantă a zgomotului într-o secțiune oarecare a jetului este proporțională cu viteza la ieșirea din ajutaj

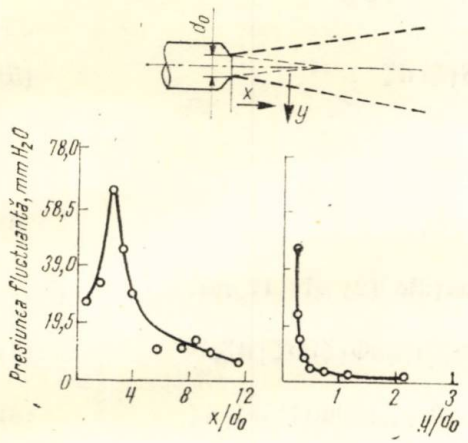


Fig. 15. — Variația presiunii fluctuante totale, în funcție de distanțele axială și radială la un jet de aer (model).

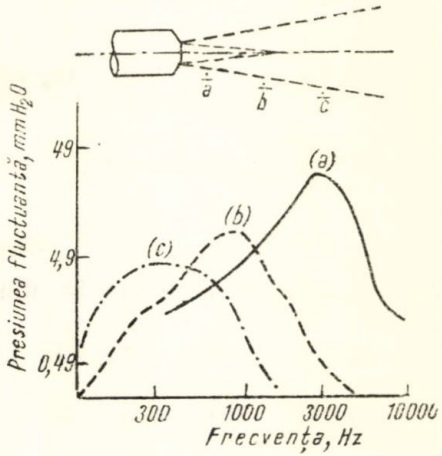


Fig. 16. — Spectrele presiunii fluctuante determinate în trei puncte distincte de-a lungul frontierelor unui jet de aer (model).

și invers proporțională cu diametrul ajutajului, conformîndu-se relației lui Strouhal:

$$f = \mu \frac{u_0}{d_0}, \tag{1}$$

unde μ este un parametru adimensional a cărui valoare depinde de poziția secțiunii considerate (fig. 17).

Notînd cu $F(\mu)$ puterea acustică pe unitatea de bandă a spectrului de frecvențe, diferențiala dW a puterii acustice radiate se exprimă prin relația

$$dW = F(\mu)\, d\mu. \tag{2}$$

Evident, puterea acustică totală radiată va fi

$$W_0 = \int_0^\infty F(\mu)\, d\mu. \tag{3}$$

În mod similar, considerînd distribuția spațială a surselor acustice, se poate scrie

$$d\zeta = S(\zeta)\, d\zeta, \tag{4}$$

unde $S(\zeta)$ reprezintă puterea acustică pe unitatea de lungime a surselor distribuite, iar

$$\zeta = \frac{x}{d_0}.$$

Puterea acustică totală radiată de jet va fi

$$W_0 = \int_0^\infty S(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta. \tag{5}$$

Avînd în vedere relaţia funcţională

$$\mu = \Phi(\zeta), \tag{6}$$

exprimată grafic în figura 18, din ecuaţiile (2) şi (4) rezultă, respectiv,

$$\mathrm{d}W_\mu = F(\mu)\,\mathrm{d}\mu = F[\Phi(\zeta)]\,[\partial\Phi(\zeta)/\partial\zeta]\,\mathrm{d}\zeta, \tag{7}$$

$$\mathrm{d}W_\zeta = S(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta = -\,S[\Phi(\zeta)]\,[\partial\Phi(\zeta)/\partial\zeta]\,\mathrm{d}\zeta, \tag{8}$$

semnul minus indicînd faptul că $\Phi(\zeta)$ este o funcţie descrescătoare de ζ

Deoarece

$$\mathrm{d}W_\mu = -\,\mathrm{d}W_\zeta,$$

semnul minus indicînd sensul descrescător al funcţiei $\Phi(\zeta)$ cu ρ, rezultă în cele din urmă

$$S(\zeta) = -\,F[\Phi(\zeta)]\,[\partial\Phi(\zeta)/\partial\zeta]. \tag{9}$$

Prin urmare, puterea acustică radiată pe unitatea de lungime de către jetul de gaze este egală cu puterea acustică pe unitatea de bandă a spectrului de frecvenţe înmulţită cu raportul negativ dintre variaţia parametrului frecvenţei şi aceea a distanţei axiale.

Valorile funcţiilor $F[\Phi(\zeta)]$, $S(\zeta)$ şi $\partial\Phi/\partial\zeta$ au fost determinate [8] pe baza unui mare număr de măsurători acustice în cîmpul jeturilor de aer şi gaze (rachete şi turboreactoare) şi sînt reprezentate grafic în figurile 18, 19, şi 23. În figura 20 sînt indicate, de asemenea, rezultatele determinărilor teoretice efectuate de Ribner şi Sanders. Pentru mai multă comoditate în folosirea datelor din aceste figuri, valorile funcţiilor respective sînt raportate la puterea acustică totală radiată de jet.

Din figura 20 rezultă că intensitatea surselor distribuite este aproximativ constantă în porţiunea iniţială a jetului ($\zeta = 4 \ldots 5$ diametre) şi scade proporţional cu ζ^{-7} în porţiunea principală. De aceea se poate considera că puterea acustică totală radiată de jet este generată de sursele dispuse între ajutaj şi circa 10 diametre în avalul acestuia.

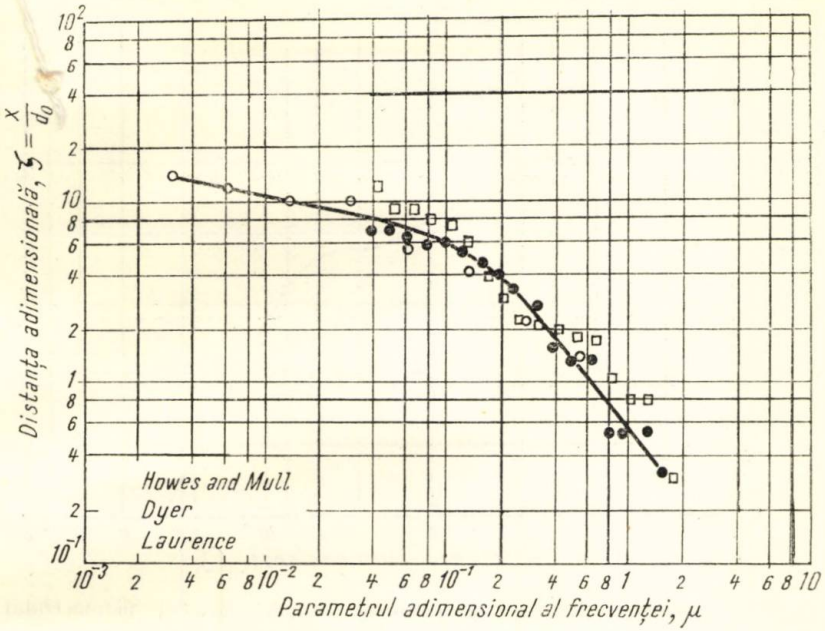


Fig. 17. — Variația parametrului adimensional al frecvenței în funcție de distanța adimensională ζ, pentru trei jeturi turbulente.

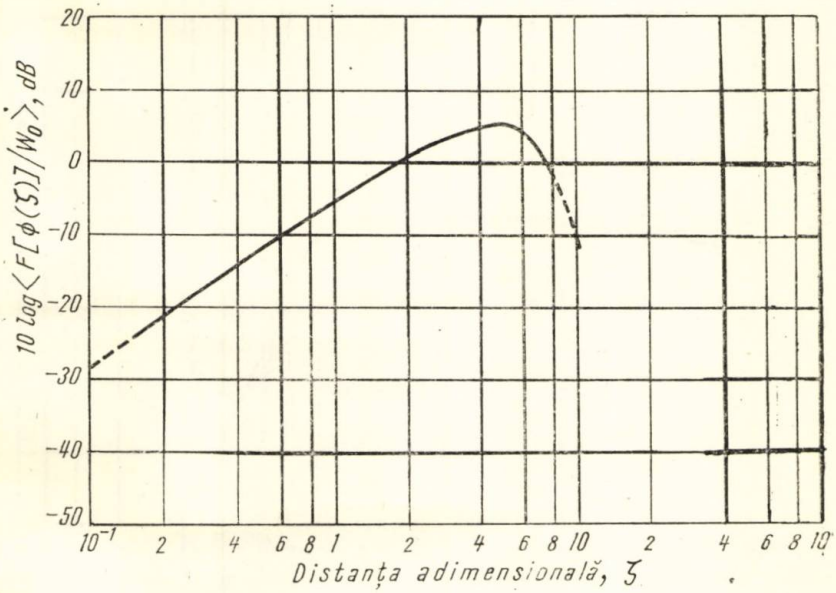


Fig. 18. — Influența distanței adimensionale ζ, asupra distribuției spectrale a puterii acustice.

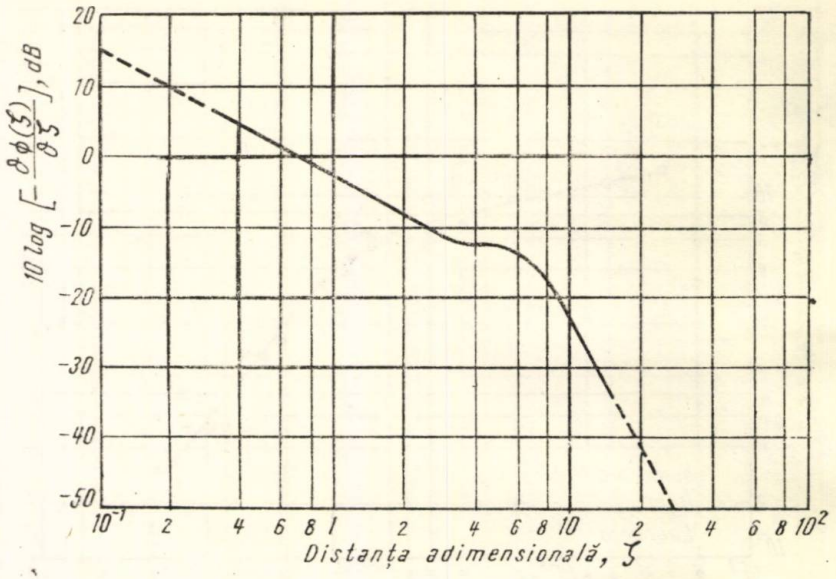


Fig. 19. — Influența distanței adimensionale asupra variației parametrului adimensional al frecvenței.

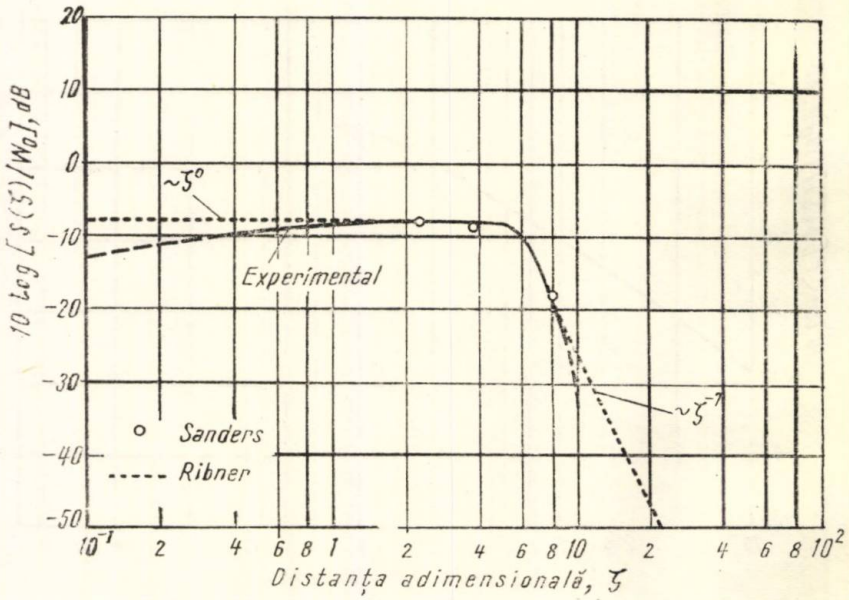


Fig. 20. — Influența distanței adimensionale ζ asupra intensității surselor distribuite de-a lungul jetului.

1.1.2. Cîmpul acustic îndepărtat

La distanțe mari, jetul se prezintă, în esență, ca o sursă punctiformă, bine definită în ceea ce privește nivelul intensității acustice și spectrul de frecvențe. Curbele izofone care indică adevăratele proprietăți direcționale ale zgomotului radiat de jet sînt cele corespunzătoare unei distanțe de circa 10 ori mai mare decît lungimea sursei distribuite. Această distanță este considerabil mai mare decît aceea la care s-au făcut pînă în prezent majoritatea măsurărilor, mai ales dacă se au în vedere frecvențele joase. În acest caz este necesară o distanță de circa 30—40 de ori mai mare decît lungimea sursei de distribuție.

De aceea majoritatea proprietăților direcționale găsite pot fi utilizate numai pentru a indica tendințele generale și nu pot fi rupte de poziția în care s-au făcut măsurătorile.

Parametrii geometrici frecvent folosiți pentru definirea poziției diverselor puncte în cîmpul acustic îndepărtat sînt (fig. 21) unghiul de azimut β și mărimea adimensională z/C_0, unde C_0 reprezintă diametrul secțiunii inițiale în cazul jetului circular (d_0) și lățimea secțiunii inițiale în cazul jetului (b_0), iar z distanța din centrul secțiunii inițiale pînă la punctul considerat.

Directivitatea după azimut. În cîmpul acustic îndepărtat, directivitatea este o caracteristică atît a zgomotului global, cît și a fiecărei componente a spectrului de frecvențe, considerată individual. Experiențele au relevat că unghiul radiației maxime (βrm) crește sistematic cu

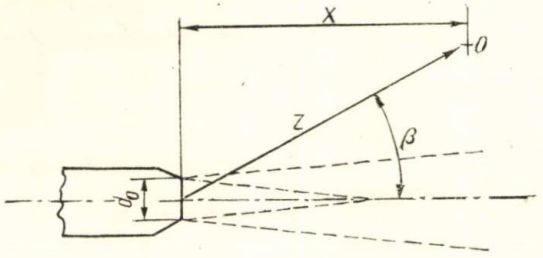


Fig. 21. — Parametri geometrici care definesc poziția punctelor în cîmpul acustic îndepărtat.

viteza jetului (fig. 22 și 23) de la circa 25 pînă la 45° și scade o dată cu micșorarea frecvenței componentei considerate din spectru (fig. 24 și 25). Astfel, nivelul zgomotului în benzile 6 400 — 12 800 și 1 200 — — 2 400 Hz prezintă maximum de radiație pentru unghiuri egale aproximativ cu 60 și 45°. Pentru banda 75 — 150 Hz, maximum de radiație corespunde unui unghi de 22° sau chiar mai puțin. Frecvențele foarte joase sînt radiate după direcții aproximativ paralele cu axa jetului, iar cele situate la limita superioară a spectrului audibil după o direcție normală la această axă.

Viteza jetului și turbulența inițială. S-a constatat pe cale experimentală că puterea acustică totală radiată de jetul liber este proporțională cu viteza jetului ridicată la o putere mare. Valoarea acestei puteri, determinată de diverși cercetători, variază între limitele extreme 6 și 9. Acest

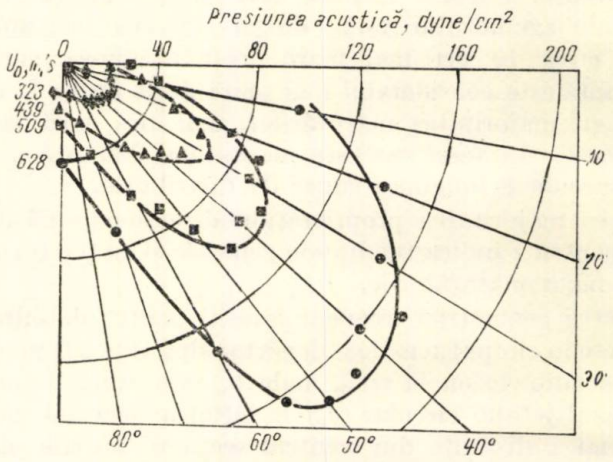


Fig. 22. — Caracteristica de directivitate a zgomotului global radiat de jetul cu $d_0 = 100$ mm, în funcție de viteza aerului în secțiunea de ieșire a ajutajului.

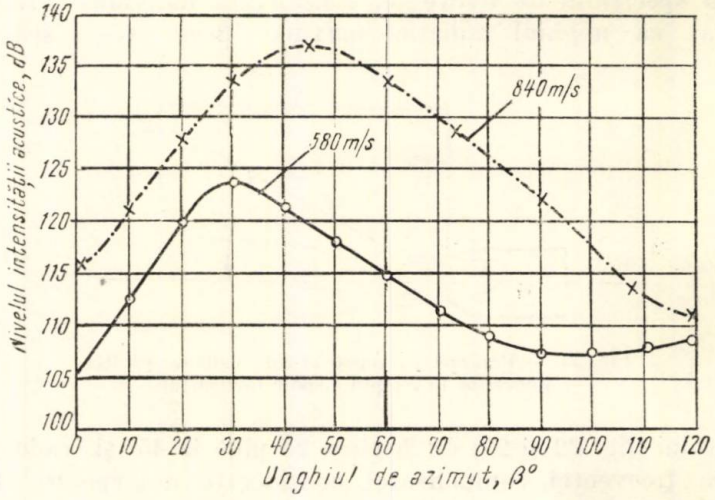


Fig. 23. — Caracteristica de directivitate a zgomotului radiat de două jeturi cu viteze diferite în secțiunea inițială.

efect este ilustrat în diagrama din figura 26, datorită lui Powell [3], în care liniile întrerupte corespund puterii 8 a vitezei. Fitzpatrick și Lee [9] au găsit prin integrare directă a puterii acustice radiate de-a lungul frontierelor jetului valoarea 8 pentru exponentul vitezei.

urbulența curentului în secțiunea de ieșire a ajutajului constituie menea un factor care influențează caracteristicile zgomotului generat tul liber.

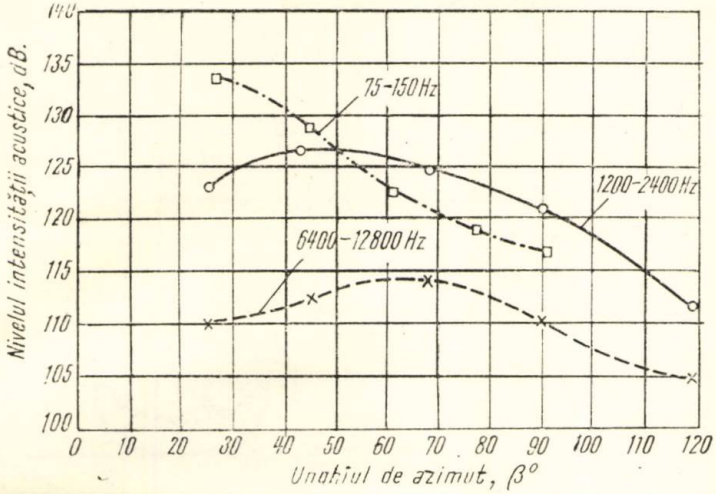


Fig. 24. — Caracteristica de directivitate a cîtorva benzi de octavă din spectrul zgomotului generat de jetul liber.

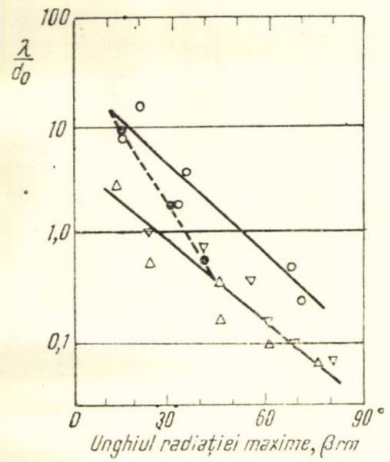


Fig. 25. — Caracteristica de directivitate a componentelor zgomotului radiat de un jet liber: λ — lungimea de undă a componentei considerate; d_0 — diametrul secțiunii de ieșire a ajutajului.

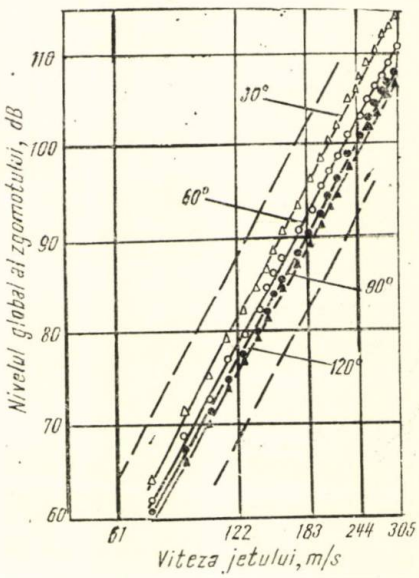


Fig. 26. — Variația nivelului global al zgomotului radiat de jetul liber, în funcție de viteza gazelor în secțiunea de ieșire a ajutajului, după diverse unghiuri de azimut, la distanța $z/d_0 = 24$.

Pentru a determina influența acestui factor s-au efectuat încercări pe un ajutaj cu diametrul secțiunii de ieșire de 25,4 mm, realizat în două

variante în scopul modificării profilului vitezei inițiale (fig. 27). ... *A* constă dintr-un ajutaj convențional prelungit în aval cu o țeav... drică scurtă (avînd lungimea egală cu un diametru). Varianta *B* ...

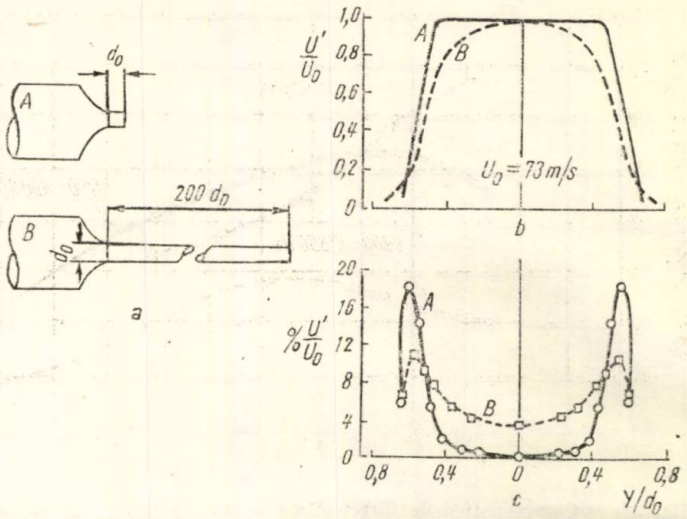


Fig. 27. — Profilele de viteze și de turbulență, pentru un jet de aer circular avînd două lungimi diferite ale conductei de evacuare ($U_0 = 73$ m/s ; $d_0 = 25{,}4$ mm ; $x/d_0 = 0{,}5$).

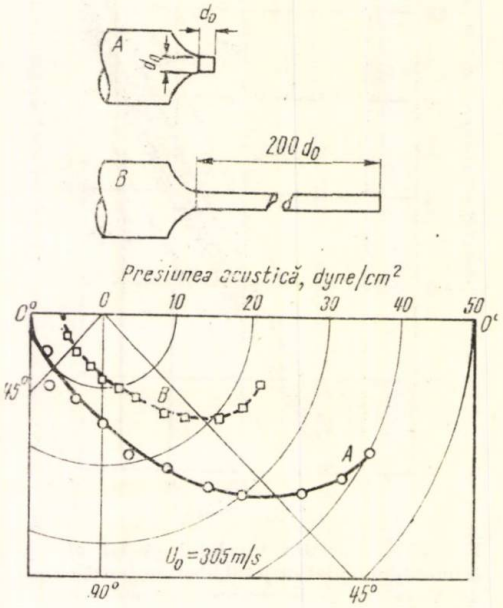


Fig. 28. — Caracteristica de directivitate a zgomotului global generat de două jeturi de aer, avînd profile de viteze diferite ($U_0 = 305$ m/s ; $d_0 = 25{,}4$ mm ; $z/d_0 = 72°$).

același ajutaj, prelungit însă cu o țeavă avînd lungimea egală cu 200 de diametre.

Profilele de viteză și de turbulență asociate cu aceste două construcții sînt ilustrate în figura 27 pentru o poziție axială situată la 1/2 diametre

în avalul secțiunii de ieșire a ajutajului și o viteză a aerului pe axa țevii egală cu 73 m/s.

Figura 28 compară caracteristicile zgomotului generat de jet în cele două cazuri pentru o viteză axială a aerului de 305 m/s. Viteza mai mare

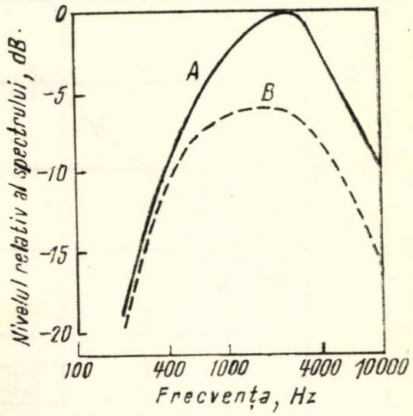


Fig. 29. — Spectrele zgomotului generat de două jeturi de aer cu profile de viteze diferite ($U_0 = 305$ m/s; $d_0 = 25{,}4$ mm; $z/d_0 = 72°$).

în cazul determinării zgomotului a fost necesară în scopul de a obține semnale suficiente la distanțe destul de mari pentru evitarea efectelor cîmpului apropiat.

Comparația celor două repartiții unghiulare din figura 28 arată că la toate unghiurile de azimut presiunea sonoră totală în varianta *B* este cu circa 40% mai mică decît aceea corespunzătoare variantei A. Analiza spectrelor a relevat că această descreștere se datorește în primul rînd reducerii componentelor din banda frecvențelor înalte (fig. 29). În banda frecvențelor joase, diminuarea zgomotului datorită rotunjirii profilului de viteze este neînsemnată.

Este evident că o parte din reducerea presiunii acustice observată între cele două construcții trebuie pusă pe seama micșorării debitului de fluid în varianta B, datorită pierderilor suplimentare în conducta alungită. Măsurătorile efectuate pentru condiția de încercare cu viteze axiale egale au indicat că debitul în varianta *B* reprezintă numai 88% din cel corespunzător variantei *A*. Totuși, după cum s-a remarcat de către Powell [3], aceasta nu ar putea conduce la o diminuare a nivelului intensității acustice mai mare de 2—3 decibeli din reducerea totală măsurată de 5 decibeli. Prin urmare, rotunjirea profilului de viteze pare să producă o ușoară atenuare (2—3 decibeli) a zgomotului global, care se manifestă mai ales în domeniul frecvențelor înalte. Este interesant de subliniat că această atenuare a zgomotului s-a produs în condițiile intensificării turbulenței în zona centrală a jetului și micșorării ei cu circa 35% în stratul-limită (fig. 27 *c*). Se poate conchide astfel că, practic, radiația acustică a jetului liber nu depinde de modificarea turbulenței în miez, dar este puternic afectată de schimbarea aceluiași parametru în stratul-limită.

Dimensiunile ajutajului. În punctele determinate ale cîmpului acustic și pentru parametri gazodinamici dați, intensitatea și spectrul zgomotului generat de jetul liber depind de dimensiunile și de forma secțiunii de ieșire a ajutajului. Figura 30 ilustrează variația nivelului intensității zgomotului

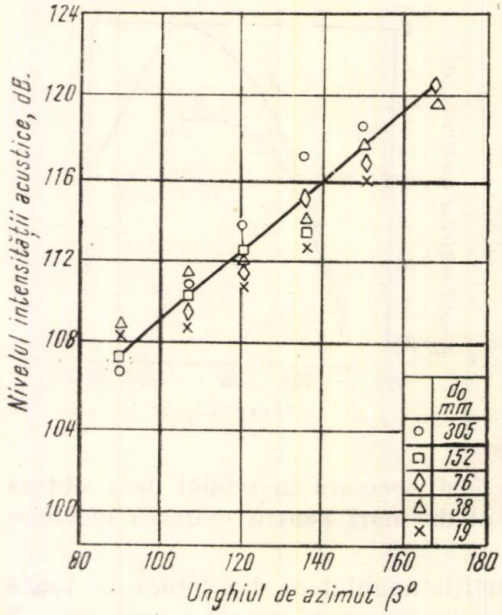


Fig. 30. — Variația nivelului intensității zgomotului global generat de jetul circular, în funcție de unghiul de azimut, pentru aiverse diametre ale secțiunii de ieșire a ajutajului ($U_0 = 300$ m/s; $z/d_0 = 16$).

generat de cinci jeturi circulare cu diametrul secțiunii inițiale cuprins între 19 și 305 mm, în funcție de unghiul de azimut, pentru z/d, $= 16$ și $u_0 = 300$ m/s. După cum se observă în această figură, nivelul intensității zgomotului global generat de jeturi cu diverse dimensiuni este practic neschimbat (în limitele împrăștierii posibile a datelor experimentale) la aceleași rapoarte z/d_0. Prin urmare, intensitatea zgomotului într-un punct dat al cîmpului este direct proporțională cu dimensiunile secțiunii de ieșire a ajutajului în condiții determinate ale curentului de gaze.

Deși spectrul zgomotului radiat de jeturile libere are un maxim aplatisat, frecvențele corespunzătoare acestui maxim diferă totuși în funcție de dimensiunile secțiunii inițiale. În general, la jeturile subțiri predomină frecvențele înalte, în timp ce jeturile groase sînt relativ bogate în componente de frecvență joasă.

Spectrul de frecvențe. Pe baza unui mare număr de determinări experimentale s-a constatat că zgomotul generat de jeturi are un spectru, universal asemănător, exprimat prin curba din figura 31. Mărimea f_{max} de pe desen reprezintă frecvența la care nivelul intensității acustice atinge valoarea maximă. Dacă se cunosc valorile acestor două mărimi, cu ajutorul curbei din figura 31, definită de funcția (14)

$$\psi(\xi) = \frac{\theta^3 \xi^2}{(5 + 4\xi^{1{,}5})^3}, \qquad (10)$$

în care

$$\xi = \frac{f}{f_{max}},$$

pot fi uşor determinate nivelele relative ale intensităţii acustice corespunzătoare diverselor frecvenţe din spectru.

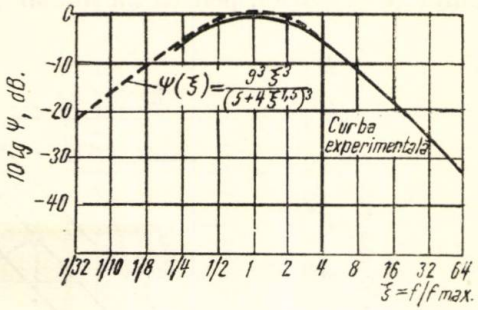


Fig. 31. — Caracteristica universală a spectrului zgomotului generat de jetul liber.

Frecvenţa f_{max} se determină cu formula (1), în care $\mu = 0{,}15$, şi este radiată din secţiunea $x \simeq 5\, d_0$ (fig. 15). Frecvenţa medie în banda nivelului maxim de putere se determină cu ajutorul aceleiaşi formule, în care $\mu = 0{,}2$.

Corelaţia energie cinetică — energie acustică. Din punct de vedere teoretic este interesant de cunoscut cîte procente din energia cinetică iniţială a jetului se transformă în energie acustică.

Deoarece în procesul apariţiei energiei acustice există ca verigă intermediară mişcarea turbulentă, a cărei energie reprezintă circa 1% din energia cinetică a jetului, este evident că randamentul conversiei acustice, definit de relaţia

$$\eta = \frac{W_0}{E_j},$$

în care E_j este energia cinetică a jetului, va fi totdeauna $\eta \leqslant 10^{-2}$.

Acceptînd formula lui Lighthill, [10]

$$W_0 = K' \frac{\rho_H A U_0^8}{a^5}, \tag{11}$$

în care

ρ_H este densitatea mediului ambiant,
A — aria secţiunii de ieşire a ajutajului,
K' — constantă adimensională,
u_0 — viteza jetului la ieşirea din ajutaj,
a — viteza sunetului în mediul ambiant,

atunci randamentul conversiei acustice este egal cu

$$\eta_a = K \frac{\rho_H}{\rho_j} M_0^5, \tag{12}$$

unde M_0 reprezintă numărul M al jetului în secțiunea inițială, iar K o constantă adimensională, a cărei valoare este în cazul jeturilor subsonice de ordinul 10^{-4}. Astfel, pentru un număr $M = 1$, randamentul conversiei

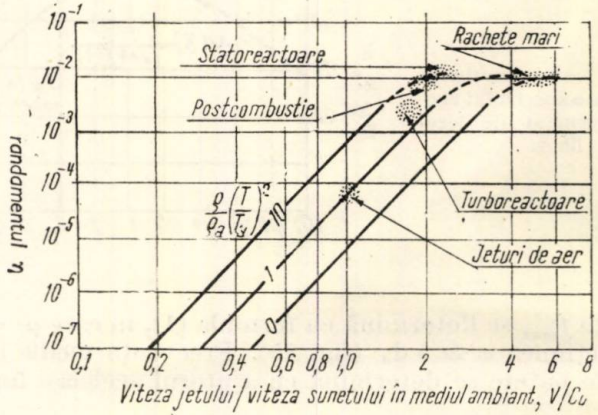


Fig. 32. — Randamentul conversiei acustice a energiei jetului.

acustice a jetului este circa 0,01%. Pentru celelalte valori ale numărului M, randamentul conversiei acustice se determină cu ajutorul diagramei din figura 32.

2. ZGOMOTUL JETURILOR SUBEXPANDATE

Experiențele pe modele [12], [3] au arătat că energia acustică radiată de jetul liber crește procentual mult mai repede îndată ce raportul presiunilor a depășit valoarea critică. Schimbarea bruscă a pantei curbei nivelului intensității acustice o dată cu depășirea valorii critice a raportului presiunilor este ilustrată prin liniile continue în figura 33.

Pentru explicarea acestui fenomen este necesar a examina mai întîi schimbările fizice care se produc în structura jetului și particularitățile zgomotului radiat în condițiile curgerii subexpandate.

În acest scop se consideră un ajutaj convergent racordat la un rezervor cu presiune P^* constantă, care debitează într-o cameră mare a cărei presiune P_H poate fi micșorată succesiv pe diverse căi. Concomitent cu micșorarea presiunii P_H, raportul presiunilor P^*/P_H crește, iar viteza inițială a jetului se mărește pînă la atingerea vitezei sunetului. În cazul acesta, presiunea statică în ajutaj capătă o valoare determinată. Deoarece jetul evoluează cu viteza sunetului, variația presiunii ambiante nu se poate propaga în amontele curentului și de aceea curgerea din ajutaj nu va fi afectată de micșorarea ulterioară a presiunii din cameră.

Rezultatul este același dacă presiunea ambiantă rămîne constantă, iar presiunea din rezervorul ajutajului se mărește treptat.

În avalul secțiunii de ieșire a ajutajului, viteza curentului crește de la sonică la supersonică în timpul traversării undelor de expansiune sau

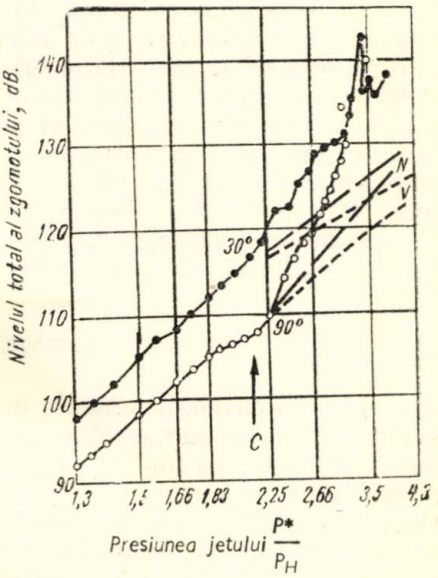


Fig. 33. — Efecte acustice suplimentare ce se produc la valori supracritice ale raportului presiunilor (linie plină). Zgomot diminuat prin utilizarea ajutajelor (linie întreruptă). Zgomot diminuat prin utilizarea reflectoarelor (linie punctată).

a liniilor Mach, care formează sistemul de caracteristici ilustrat în figura 34. Unghiul α format de frontierele jetului în secțiunea inițială cu axa ajutajului depinde de valoarea raportului P^*/P_H, crescînd o dată cu aceasta.

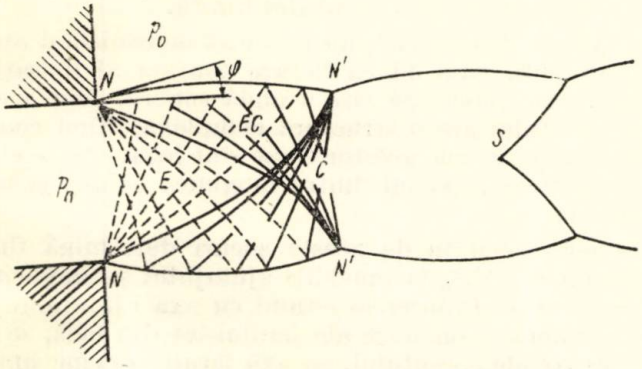


Fig. 34. — Schema jetului liber subexpandat.

Undele de expansiune (liniile punctate) care pornesc de la muchiile ajutajului sînt reflectate de frontierele jetului sub forma undelor de compresiune (liniile continue). Din această cauză, frontierele se curbează către interior, astfel încît în secțiunea $N'N'$ curgerea revine foarte aproape de condițiile inițiale (secțiunea $N - N$). Regiunea E a jetului este o regiune de expan-

siune şi compresiune, iar regiunea C este în întregime compresivă. În zona centrală a regiunii E, curgerea este superexpandată, presiunea statică a fluidului fiind mai mică decît aceea existentă în afara jetului. Cele trei tipuri de regiuni sînt clar evidenţiate de fotografia din figura 35, obţinută prin metoda Schlieren.

Întrucît condiţiile existente la extremitatea regiunii (secţiunea $N'N'$) sînt asemănătoare cu cele de la ieşirea din ajutaj, întregul proces este reluat, repetîndu-se de mai multe ori, pînă ce amestecul turbulent care se dezvoltă începînd de la frontiere afectează întregul jet. Deoarece amestecul turbulent la jetul supersonic se produce mai lent decît la jetul subsonic, viteza curentului în apropierea axei se menţine supersonică pînă la distanţe apreciabile de la orificiu. În cazul jeturilor de aer de dimensiuni mici, Powell [3] a evidenţiat cu ajutorul metodei Schlieren 12 „celule" (ansamblul celor patru regiuni caracteristice formează o „celulă"), distribuite pe o distanţă de 10 diametre de la orificiu.

2.1. PARTICULARITĂŢILE ZGOMOTULUI

Jeturile subexpandate produc, în sfara zgomotului datorat amestecului turbulent, un zgomot specific, cauzat, pe de o parte, de interferenţa pulsaţiilor turbulente cu undele de şoc şi, pe de altă parte, de oscilaţiile transversale ale frontierelor.

Dezvoltarea turbulenţei la frontierele jetului poate fi uşor urmărită în fotografia Schlieren din figura 36. Se observă că în imediata apropiere a secţiunii iniţiale stratul-limită al jetului are un caracter cvasilaminar (pot fi distinse numai perturbaţii de mică amplitudine), dar după un parcurs egal cu circa o treime din diametrul ajutajului el se rupe şi devine turbulent, prezentînd la exterior o învelitoare zdrenţuită. Undele sonore propagîndu-se cu o directivitate de 45°, pot fi distinse ca emanînd din regiunea unde începe turbulenţa stratului-limită.

Lighthill [10] şi Ribner [13] au explicat mecanismul apariţiei zgomotului de interferenţă, arătînd că fiecare contact al pulsaţiilor turbulente cu undele de şoc generează cîte o undă sonoră. Din această cauză, cîmpul acustic al jetului are o structură complexă, fiind constituit din radiaţiile multor surse. Fazele acestor surse sînt legate între ele şi depind de viteza curgerii şi de raportul dintre lungimea celulei şi lungimea de undă a perturbaţiei.

Undele sonore generate de aceste şocuri determină fluctuaţii ale raportului presiunilor P^*/P_H la muchiile ajutajului şi, implicit, fluctuaţii ale unghiului α făcut de frontierele jetului cu axa ajutajului. Pe măsură ce fluctuaţiile în punctele omologe ale jetului ies din fază, se produc devieri corespunzătoare ale curentului, iar axa jetului devine sinuoasă. Dacă frecvenţa acestor oscilaţii atinge o anumită valoare, ele se amplifică în formaţii de vîrtejuri, care, traversînd undele de şoc, generează unde sonore, perpetuînd astfel procesul.

Directivitatea după azimut. Proprietăţile direcţionale ale zgomotului generat de jeturile subexpandate sînt cu totul diferite de acelea ale zgomotului datorat amestecului turbulent. Fotografia din figura 36 reprezintă

Fig. 35. — Dezvoltarea turbulenței la frontierele jetului subexpandat.

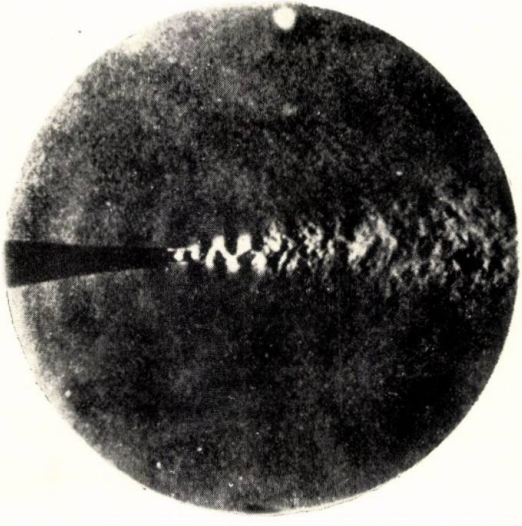


Fig. 36. — Cimpul acustic generat de un jet bidimensional subexpandat.

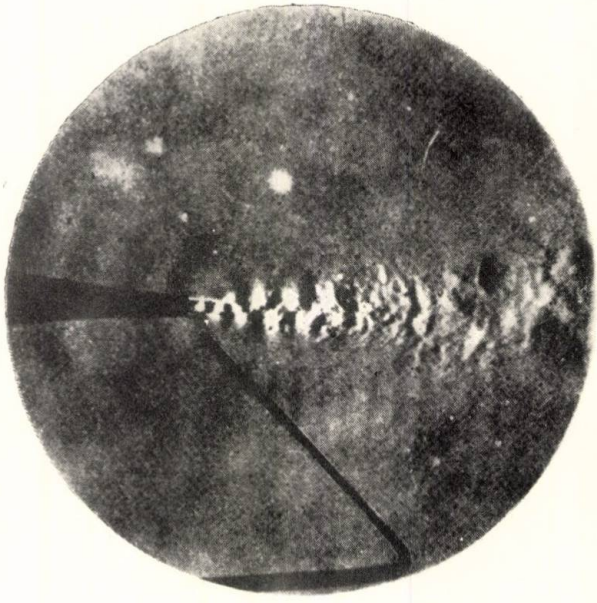


Fig. 37. — Cîmpul acustic al unui jet bidimensional în prezența unui reflector înclinat la 45°.

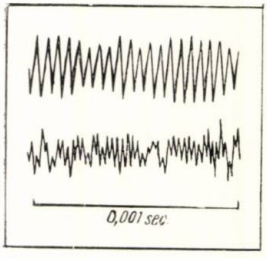


Fig. 38. — Structura undelor acustice produse de jetul subexpandat în direcția amonte (sus) și în direcția perpendiculară pe axa jetului (jos).

cîmpul acustic al unui jet bidimensional, evidențiat cu ajutorul metodei Schlieren. Se remarcă, pe de o parte, forma regulată a undelor sonore, iar pe de altă parte că radiația maximă se produce în direcția amonte la circa 60° de axa jetului.

O altă radiație intensă se produce în direcție perpendiculară pe axa jetului, invizibilă în figura 36, datorită lipsei de sensibilitate a sistemului Schlieren în această direcție. Prin folosirea unui ecran înclinat la 45° față de axa jetului, această radiație a fost reflectată în direcția curgerii și vizualizată (fig. 37). Se observă că frecvența acestei radiații are o valoare exact dublă celei corespunzătoare zgomotului din amonte (fig. 38).

Frecvența. Spectrul zgomotului produs de jeturile subexpandate este constituit din frecvențe distincte, legate armonic între ele.

În cazul jeturilor bidimensionale reci, frecvența este o funcție continuă de raportul presiunilor P^*/P_H și are valoarea [3]

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{b_0} \left(\frac{P^*}{P_H} - \pi_{c\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{13}$$

unde a reprezintă viteza sunetului, b_0 lățimea secțiunii de ieșire a ajutajului, iar $\pi_{c\sigma}$ raportul critic al presiunilor.

Pentru jeturile axial-simetrice reci, valoarea frecvenței este dată de relația

$$f = \frac{1}{5} \cdot \frac{a}{d_0} \left(\frac{P^*}{P_H} - \pi_{c\sigma} \right)^{-\frac{1}{2}}, \tag{14}$$

în care d_0 reprezintă diametrul secțiunii de ieșire a ajutajului.

Intensitatea. Zgomotul specific jeturilor subexpandate apare la atingerea unui raport al presiunilor puțin superior celui critic. După depășirea acestei valori, intensitatea zgomotului crește, iar frecvența scade (conform formulelor anterioare) pe măsură ce se mărește raportul presiunilor. S-a stabilit experimental că panta suplimentară a curbei nivelului intensității acustice din figura 33 este foarte susceptibilă la modificarea parametrilor geometrici caracteristici secțiunii inițiale a jetului. Prin utilizarea unor ajutaje speciale, valoarea acestei pante a putut fi redusă la jumătate comparativ cu aceea din figura 33.

Primită la redacție la 21 iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. H. H. Hubbard L. W. Lassiter, *Experimental studies of jet noise,* The Journal of the Acoustical Society of America, **25** (1953).
2. L. W. Lassiter, H. H. Hubbard, *Some results of experiment relating to the generation of noise in jets.* The Journal of the Acoustical Society of America, **27** (1955).
3. A. Powell, *A survey of experiments on jet noise,* Aircraft Engineering, January 1954.

4. H.E. VON GIERKE *Physical characteristics of aircraft noise sources*, The Journal of the Acoustical Society of America, **25** (1953).
5. G. N. ABRAMOVICI, *Teoria turbulentnîh strui, Gosudarstvennoe izdatelstvo fiziko-matematiceskoi literaturî*, Moskva, 1960.
6. C. TEODORESCU — ȚINTEA, *Contribuții la studiul efectului Coandă și al aplicațiilor sale practice*, teză de doctorat, Institutul politehnic București, 1962.
7. C. TEODORESCU — ȚINTEA, *Contribuții la studiul zgomotului produs de jetul liber*, Revista transporturilor, *10* (1961).
8. IRA DYER, *Distribution of sound sources in a jet stream*, The Journal of the Acoustical Society of America, **31** (1959).
9. H. M. FITZPATRICK, R. LEE, *Measurements of noise radiated by subsonic air jets*, David W. Taylor Model Basin, Report 835, 1952.
10. M. J. LIGHTHILL, *An sound generated aerodynamically*, Proc. Roy. Soc., **211** (1952).
11. A. POWELL, *The noise of choked jets*, The Journal of the Acoustical Society of America, **25** (1953).
12. R. WESTLEY, G. M. LILLEY, *An investigation of the noise field from a small jet and methods for its reduction*, College of Aeronautics Report, **53** (1952).
13. H. A. RIBNER, *Convection of a pattern of vorticity through a shock wave*, NACA Tech. Note 2864, 1953.
14. UNO INGARD, *Attenuation and Regeneration of Sound in Duets and Jet Diffuses*, The Journal of the Acoustical Society of America, **31** (1959).

ASUPRA UNOR CONDIȚII LA LIMITĂ ÎN DEZLOCUIREA NECAPILARĂ ÎN MEDII POROASE

de VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA
Centrul de cercetări hidraulice

În lucrare se reia problema dezlocuirii plane, negravitaționale și necapilare, în medii poroase omogene, abordată într-un studiu anterior. Se aplică în rezolvarea problemei metoda aproximațiilor succesive, propusă în lucrarea citată, dar se schimbă condițiile la limită pe linia de salt a saturației după apariția lui; condiția de egalitate a presiunilor și a debitelor este înlocuită cu condiția de egalitate a vitezelor totale. Această condiție simplifică foarte mult rezolvarea problemei. Se obține o problemă la limită de tip Riemann pentru funcții analitice generalizate, spre deosebire de cealaltă condiție, care conducea la o ecuație integrală singulară. Aplicarea procedeului iterativ este astfel mult ușurată.

1. INTRODUCERE

Cu toate că într-o altă lucrare [1] ne-am mai ocupat de problema dezlocuirii necapilare în medii poroase omogene, revenim asupra acestei chestiuni pentru a sublinia unele dificultăți în aplicarea metodei propuse și a o înlocui cu alta mai simplă. Ceea ce avem în vedere în primul rînd este condiția la limită pe linia de salt a saturației, cu consecințele pe care le implică în rezolvarea problemei la limită care decurge din ea. Vom analiza de asemenea modul de rezolvare a ei, dar nu ne vom opri în mod special asupra consecințelor și compatibilității ei fizice, lucru care depășește cadrul propus.

În [1] arătam că problema dezlocuirii necapilare și negravitaționale în medii poroase omogene poate fi redusă la o dezlocuire integrală într-un mediu neomogen cu salt variabil de permeabilitate pe o linie necunoscută, pe care în cursul lucrării o vom nota C. Mișcarea în ansamblu este determinată de poziția succesivă a saltului de saturație și de variația saturației în domeniul de mișcare la orice moment. În mediul neomogen, problema se modifică numai prin schimbarea coeficienților, specificul ei rămînînd același. Pentru studiul mișcării astfel concepute am propus în lucrarea citată

egalitatea presiunii și a debitelor drept condiție la limită pe linia de salt a saturației, ajungînd în acest fel la o problemă a lui Riemann cu termeni conjugați în clasa funcțiilor analitice generalizate. La aceeași problemă la limită am ajuns și în studiul dezlocuirii întegrale în medii neomogene, cu diferența că saltul permeabilității pe C era constant [2] și [3].

Dacă în cazul dezlocuirii integrale sau al mișcării în medii omogene sau neomogene pe porțiuni condițiile de egalitate a presiunii și a debitului nu atrag atenția în mod deosebit prin consecințele lor, în cazul dezlocuirii cu saturație variabilă lucrurile se schimbă. După cum am mai arătat și în [2], [3], liniile de curent ale mișcării se frîng la trecerea peste linia de salt, ca urmare a faptului că viteza tangențială pe această linie nu este continuă. Din punct de vedere fizic, aceasta înseamnă că pe linia de discontinuitate a saturației stratele de fluid, deși vîscos, alunecă unul peste altul cu viteze diferite. Dacă însă această anomalie fizică poate fi trecută mai ușor cu vederea, alte dificultăți sînt mai supărătoare pentru rezolvarea problemei la diferite momente la care este considerată mișcarea.

Am arătat în [1] că după apariția liniei de salt considerarea unei anume cantități continue pe această linie echivalează cu o schimbare a coeficienților ecuației. Am arătat apoi că pentru integrarea ecuației de dezlocuire este necesară trecerea la un sistem de coordonate ortogonale din care să facă parte curba C, ceea ce este un lucru destul de supărător, mai ales că aceasta trebuie făcută la toate momentele t_j următoare apariției saltului. În sfîrșit, problema la limită a lui Riemann, la care este redus studiul mișcării, conduce la integrarea unei ecuații singulare, ceea ce nu este un lucru simplu pentru aplicații.

Toate cele expuse pun problema găsirii unei condiții la limită pe linia de discontinuitate care să conducă la o problemă la limită mai simplă, respectînd totuși specificul fizic al mișcării. Vom impune pe linia de salt condiția de egalitate a vitezelor totale, relație vectorială echivalentă cu două relații scalare. Chiar de acum se poate vedea că această condiție înlătură fenomenul de refracție a liniilor de curent, dar implică salt de presiune pe linia de salt a saturației, lucru care va rezulta din formularea problemei la limită. Această condiție are, în schimb, avantajul că ne conduce la o problemă a lui Riemann obișnuită, a cărei soluție este mult mai simplă ca problema lui Riemann cu valori conjugate.

2. APROXIMAȚII SUCCESIVE. APARIȚIA SALTULUI DE SATURAȚIE

În lucrarea [1] am arătat că presiunea $p(x, y, t)$ și saturația $S(x, y, t)$ în dezlocuirea plană, necapilară și negravitațională a fluidelor în medii poroase omogene satisfac sistemul neliniar

$$\begin{aligned} &\Delta p(x, y, t) + \alpha(S)\, \nabla S(x, y, t)\, \nabla p(x, y, t) = 0, \\ &\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta(s)\, \nabla S(x, y, t)\, \nabla p(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $\alpha(S)$ și $\beta(S)$ sînt funcții cunoscute de saturație prin permeabilitățile relative $k_{ra}(S)$ și $k_{rt}(S)$; în $\alpha(S)$ și $\beta(S)$ intervin de asemenea porozitatea, permeabilitatea monofazică a mediului și viscozitățile celor două fluide. În ceea ce privește condițiile la limită și inițiale, am presupus că dezlocuirea este determinată de o singură sondă de injecție plasată în origine (cea de extracție la infinit) și că la momentul inițial este cunoscută saturația inițială $S_0(x, y) = S(x, y, 0)$. Pentru rezolvarea sistemului (1) am propus un procedeu iterativ de aproximații care folosește condițiile inițiale și la limită ale mișcării. Introducerea saturației inițiale în prima ecuație a sistemului (1) conduce la

$$\Delta p(x, y) + \alpha [S_0(x, y)] \nabla S_0(x, y) \nabla p(x, y) = 0. \tag{2}$$

Așa cum am arătat în [1] și mai amănunțit în [3], ecuația precedentă se poate integra după procedeele expuse în [4] și [5]. Soluția ei, $p_0(x, y) = p(x, y, 0)$, o introducem în cea de-a doua ecuație a sistemului (1), care devine

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta [S(x, y, t)] \nabla p_0(x, y) \nabla S(x, y, t) = 0. \tag{3}$$

Ținînd seama că la $t = 0$ trebuie să avem $S(x, y, 0) = S_0(x, y)$, la $t = t_1$ se obține $S_1(x, y) = S(x, y, t_1)$; aceasta este saturația în prima aproximație, pe care o introducem din nou în prima ecuație a sistemului (1). Obținem, analog cu (2),

$$\Delta p(x, y) + \alpha[S_1(x, y)] \nabla S_1(x, y) \nabla p(x, y) = 0, \tag{2'}$$

care ne dă $p_1(x, y) = p(x, y, t_1)$, presiunea în prima aproximație corespunzătoare saturației $S_1(x, y)$.

Introducînd în a doua ecuație a sistemului (1) $p_1(x, y)$, obținem

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta[S(x, y, t)] \nabla p_1(x, y) \nabla S(x, y, t) = 0, \tag{3'}$$

similară cu (3), care se integrează prin aceleași metode, considerînd $S_1(x, y)$ ca saturație inițială; se obține astfel $S_2(x, y) = S(x, y, t_2)$. Procedînd în continuare în același mod, se obțin saturația și presiunea la orice moment t_j: $S_j(x, y) = S(x, y, t_j)$ va satisface ecuația

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta[S(x, y, t)] \nabla p_{j-1}(x, y) \nabla S(x, y, t) = 0, \tag{3''}$$

iar $p_j(x, y) = p(x, y, t_j)$ va satisface ecuația

$$\Delta p(x, y) + \alpha[S_j(x, y)] \nabla S_j(x, y) \nabla p(x, y) = 0. \tag{2''}$$

Este de la sine înțeles că rezultatele vor fi cu atît mai aproape de soluția exactă, cu cît intervalele de timp (t_j, t_{j+1}) vor fi mai scurte.

În cazul dezlocuirii necapilare de care ne ocupăm, procedeul expus nu poate fi utilizat în orice moment al mișcării, deoarece, așa cum am arătat în [1], urmînd un raționament folosit de D. A. Efros [6], la un anumit moment t_e, care depinde de saturația inițială și de modul de injecție, apare în cîmpul fluid o zonă în care saturația are valoare triplă. Fenomenul este bine cunoscut în teoria dezlocuirii necapilare și a preocupat pe mulți cercetători, mai ales în cazul unidimensional, imediat după ce a fost remarcat de Buckley și Leverett [7]. Este probabil că el apare datorită simplificărilor introduse în legile fundamentale de mișcare care au condus la sistemul (1) și neglijării unor factori importanți care influențează mișcarea. Se crede că neglijarea capilarității ar fi elementul determinant în apariția acestor anomalii fizice, cu toate că în unele lucrări, ca în [8], se menționează că acest lucru nu este demonstrat; ceva mai mult, alți cercetători, cum este [9], arată că și în cazul în care capilaritatea are valori foarte mici apare tripla valoare. În lucrarea de față nu ne ocupăm de această problemă, deoarece depășește cadrul propus, ci reținem numai că în limitele adoptate de noi există un moment critic t_e de la care tripla valoare a saturației ocupă o anumită zonă în jurul sondei de injecție.

Pentru înlăturarea acestui paradox, Buckley și Leverett propun înlocuirea curbei care ar reprezenta saturația în funcție de distanță (în cazul unidimensional) printr-alta, obținută din aceasta prin secționare după principiul balanței materiale. Metoda poate fi extinsă și la cazul bidimensional, urmărind dezlocuirea pe liniile de curent. În urma acestui procedeu se obține în jurul sondei de injecție o curbă C, pe care saturația are un salt de la $S^+(s)$ la $S^-(s)$ ($\tau \in C$, s este abscisa sa curbilinie, iar $S^+(s)$ se referă la D^+ și $S^-(s)$ la D^-), ca în figura 1. Diferența $S^+(s) - S^-(s)$

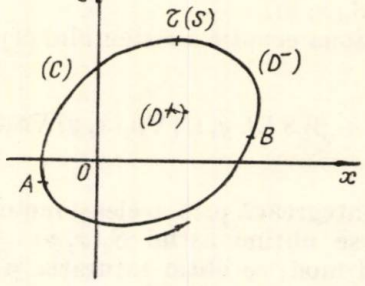


Fig. 1

este continuă pe C și poate să se și anuleze în unele porțiuni, ca, de exemplu, pe porțiunea BA, urmărită în sens trigonometric; aceasta depinde de saturația inițială. În [1] am prezentat aceste lucruri mai în detaliu.

Din momentul apariției saltului de saturație, ecuația (2″) nu se mai poate integra cu mijloacele folosite pînă la apariția lui, deoarece coeficienții ei sînt discontinui. Problema poate fi totuși rezolvată în clasa funcțiilor analitice generalizate pe porțiuni, ținînd seama de condițiile la limită

pe C, expresia matematică a condițiilor mecanice pe linia de salt. Din acest moment apare condiția la limită, care de fapt formează obiectul studiului nostru.

3. CONDIȚIILE PE LINIA DE SALT

Pentru motivele arătate în [1] și repetate succint în introducere, vom înlocui condiția la limită pe linia de salt a saturației:

$$p^+(s) = p^-(s); \qquad V_n^+(s) = V_n^-(s), \tag{4}$$

care se pune de obicei în cazul existenței unor discontinuități în mișcare, prin condiția vectorială

$$\overrightarrow{V^+(s)} = \overrightarrow{V^-(s)}, \tag{5}$$

unde $\overrightarrow{V(s)}$ este viteza totală pe C. Admitem, așadar, că la traversarea saltului se conservă nu numai viteza normală, ci și viteza totală ca vector. Relația de condiție (5), echivalentă cu două relații scalare, asigură atît continuitatea componentei normale a vitezei, cît și a celei tangențiale. Din punct de vedere fizic, aceasta se traduce prin eliminarea efectului de refracție a liniilor de curent pe C. În schimb, ea pierde continuitatea presiunii pe C, după cum vom arăta mai departe.

Pentru stabilirea condiției la limită pe C, vom explicita termenii în (5). Avem

$$\left\{\frac{k_{ra}[S^+(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S^+(s)]}{\mu_t}\right\} \nabla p^+(s) = \left\{\frac{k_{ra}[S^-(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S^-(s)]}{\mu_t}\right\} \nabla p^-(s). \tag{6}$$

Proiectată pe cele două axe de coordonate, această relație vectorială este suficientă pentru rezolvarea problemei la limită a mișcării, de care ne vom ocupa în punctul următor al lucrării. Remarcăm deocamdată că (6) realizează nu continuitatea derivatelor parțiale ale lui $p\,(x, y)$, de care am avea nevoie pentru integrarea ecuației (3″) în procesul de aproximații succesive propus, ci a expresiei

$$\overrightarrow{E(S)} = \left\{\frac{k_{ra}[S(x, y)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S(x, y)]}{\mu_t}\right\} \nabla p \equiv G[S(x, y)]\, \nabla p,$$

unde, evident,

$$G[S(x, y)] = \frac{k_{ra}[S(x, y)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S(x, y)]}{\mu_t} \tag{6'}$$

este continuă de S. Această condiție este suficientă pentru integrarea ecuației (3″), scrisă sub forma

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\beta(S)}{G(S)} \overrightarrow{E[S(x, y)]}\, \nabla S = 0, \tag{7}$$

deoarece $E(S)$ este o funcție continuă la trecerea lui C din condiția (5), iar $\frac{\beta(S)}{G(S)}$ de asemenea. Dacă admitem că factorul $\overrightarrow{E[S(x, y)]}$ este calculat cu elementele din aproximația anterioară, ceea ce revine la schimbarea coeficienților ecuației (7), condiția (5) asigură integrabilitatea ei și deci posibilitatea continuării procesului iterativ și după apariția saltului de saturație. Aceeași ipoteză era necesară și în cazul condiției (4) din [1]. O verificare experimentală a rezultatelor obținute în cele două cazuri ar putea aduce clarificări asupra ordinului de mărime al erorii introduse de această ipoteză.

4. PROBLEMA LA LIMITĂ ÎN PREZENȚA LINIEI DE SALT

Alegem pe C sensul trigonometric de parcurs și notăm în (2'')$S_j^+(x, y)$, distribuția de saturație în domeniul D^+, și $S_j^-(x, y)$, distribuția de saturație în D^-. Integrarea ecuației (2'') în plan revine la integrarea simultană a sistemului

$$\begin{aligned} \Delta p^+ + \alpha(S^+)\,\nabla S^+ \nabla p^+ &= 0, \\ \Delta p^- + \alpha(S^-)\,\nabla S^- \nabla p^- &= 0, \end{aligned} \tag{8}$$

respectiv în D^+ și D^- (am renunțat pentru simplificare la indicii j). Pe C trebuie să adăugăm condiția la limită pe care o vom stabili în acest punct. Pentru comoditatea calculelor următoare vom scrie sistemul (8) în formă complexă. Facem pentru aceasta notațiile

$$f^+(x, y) = \int \alpha(S^+)\mathrm{d}S^+\,;\; f^-(x, y) = \int \alpha(S^-)\,\mathrm{d}S^-,$$

$$u^+ = \frac{\partial p^+}{\partial x};\quad v^+ = -\frac{\partial p^+}{\partial y};\quad u^- = \frac{\partial p^-}{\partial x};\quad v^- = -\frac{\partial p^-}{\partial y}, \tag{9}$$

$$U^+(z) = u^+(x, y) + \mathrm{i}v^+(x, y);\qquad U^-(z) = u^-(x, y) + \mathrm{i}v^-(x,y).$$

Funcțiile $f^{\pm}(x, y)$ trebuie interpretate ca primitive ale funcțiilor de sub integralele respective, iar $U^{\pm}(z)$ sînt funcții complexe de z și $\bar{z}$, neolomorfe, în care pentru simplificarea notației am păstrat ca argument numai pe z. Cu acestea sistemul (8) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^+(z)}{\partial \bar{z}} &= A^+(z)U^+(z) + \overline{A^+(z)}\,\overline{U^+(z)} \qquad \text{în } D^+, \\ \frac{\partial U^-(z)}{\partial \bar{z}} &= A^-(z)U^-(z) + \overline{A^-(z)}\,\overline{U^-(z)} \qquad \text{în } D^-, \end{aligned} \tag{10}$$

unde am notat

$$A^{\pm}(z) = -\frac{1}{4}\left(\frac{\partial f^{\pm}}{\partial x} + \mathrm{i}\,\frac{\partial f^{\pm}}{\partial y}\right) = -\frac{1}{2}\,\frac{\partial f^{\pm}}{\partial \bar{z}} = -\frac{1}{2}\,\alpha(S^{\pm})\,\frac{\partial S^{\pm}}{\partial \bar{z}}.$$

În expresiile de mai sus semnele se corespund.

Vom aduce sistemul (10) la forma canonică prin schimbarea de funcție

$$U^{\pm}(z) = V^{\pm}(z)\,\mathrm{e}^{\omega^{\pm}(z)}, \tag{11}$$

respectiv în cele două domenii complementare, unde $\omega^{\pm}(z)$ au expresiile

$$\omega^{\pm}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \frac{A^{\pm}(\xi, \eta)}{\zeta - z}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta,$$

iar $\zeta = \xi + \mathrm{i}\eta$. Se știe [5] că $\omega^{\pm}(z)$ satisfac în D^{+}, respectiv în D^{+}, ecuațiile

$$\frac{\partial \omega^{\pm}(z)}{\partial \bar{z}} = A^{\pm}(z).$$

Cu schimbarea de funcție (11), sistemul (10) devine

$$\frac{\partial V^{\pm}(z)}{\partial \bar{z}} = B^{\pm}(z)\overline{V^{\pm}(z)}, \tag{12}$$

unde am notat

$$B^{\pm}(z) = A^{\pm}(z)\,\mathrm{e}^{\overline{\omega^{\pm}(z)} - \omega^{\pm}(z)}.$$

Problema s-a redus, așadar, la integrarea sistemului (12) în D^{+}, respectiv D^{-}, cu condiția ca $V^{+}(\tau)$ și $V^{-}(\tau)$ să satisfacă pe C o condiție dedusă din (6), pe care o proiectăm pe cele două axe. Obținem

$$\begin{aligned} G^{+}(s)\,\frac{\partial p^{+}}{\partial x} &= G^{-}(s)\,\frac{\partial p^{-}}{\partial x} \quad \text{pe } C, \\ G^{+}(s)\,\frac{\partial p^{+}}{\partial y} &= G^{-}(s)\,\frac{\partial p^{-}}{\partial y} \quad \text{pe } C, \end{aligned} \tag{13}$$

unde $G^{\pm}(s)$ au, respectiv, expresiile

$$G^{+}(s) = \frac{k_{ra}\,[S^{+}(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}\,[S^{+}(s)]}{\mu_t},$$

$$G^{-}(s) = \frac{k_{ra}\,[S^{-}(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}\,[S^{-}(s)]}{\mu_t}.$$

Dacă ţinem seama în (13) de notaţiile (9), avem

$$G^+(s)u^+(s) = G^-(s)u^-(s); \qquad G^+(s)v^+(s) = G^-(s)v^-(s).$$

Înmulţind a doua relaţie cu i şi adunînd cu prima, obţinem pe C

$$G^+(\tau)U^+(\tau) = G^-(\tau)U^-(\tau). \tag{14}$$

Relaţia (11) dintre $U^{\pm}(z)$ şi $V^{\pm}(z)$ ne permite să găsim relaţia dintre $V^+(\tau)$ şi $V^-(\tau)$. Condiţia (14) devine pe C

$$G^+(\tau)V^+(\tau)\,e^{\omega^+(\tau)} = G^-(\tau)V^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)}$$

sau încă sub forma

$$V^+(\tau) = \frac{G^-(\tau)}{G^+(\tau)}\,e^{\omega^-(\tau)-\omega^+(\tau)}V^-(\tau), \tag{15}$$

adică o relaţie care defineşte o problemă a lui Riemann pentru funcţia analitică generalizată pe porţiuni $V(z)$, care satisface sistemul (12).

În fapt, formularea problemei trebuie modificată, deoarece în domeniul de mişcare există o singularitate în sonda de injecţie. Pentru a o înlătura se face o schimbare de funcţie în (12) de forma

$$V_1(z) = V(z) - \frac{A_1}{z},$$

unde $V_1(z)$ este noua funcţie necunoscută, iar $\frac{A_1}{z}$ potenţialul vitezelor în mişcarea unui fluid monofazic prin mediul poros (pentru detalii vezi [3]). Ecuaţia (12) devine neomogenă, dar poate fi făcută omogenă printr-o nouă schimbare de funcţie. De toate aceste transformări trebuie să se ţină seama şi în exprimarea condiţiei la limită, care îşi păstrează caracterul, dar devine neomogenă.

Cu acestea studiul problemei poate fi considerat încheiat, căci soluţia problemei lui Riemann, definită de (15), este o chestiune rezolvată. Ea poate fi exprimată direct în funcţie de coeficienţii sistemului (12) şi ai condiţiei (15), mult mai simplu decît în cazul problemei la limită uilizată în lucrarea [1], unde studiul se reducea la rezolvarea unei ecuaţii integrale singulare. Legitimitatea condiţiei de egalitate a vitezelor la trecerea lui C, neutilizate pînă în prezent în literatură, ar trebui fundamentată prin verificări experimentale. Utilizarea acestei condiţii uşurează în mod considerabil aplicarea procedeului iterativ. Chestiunea mai delicată ce se ridică în această situaţie este însă că se pierde continuitatea presiunii pe C. Este un rezultat greu de acceptat din punct de vedere fizic, deşi se întîl-

neşte şi în alte fenomene, dar nu apare pentru prima dată în fenomenele de dezlocuire. Vom arăta în punctul următor că oriunde se aplică principiul balanței materiale apare discontinuitatea presiunii.

5. SALTUL DE PRESIUNE ÎN DEZLOCUIREA UNIDIMENSIONALĂ

Vom urmări această chestiune pentru cazul dezlocuirii unidimensionale (liniară şi radială), unde se cunosc soluțiile exacte ale problemei. Vom arăta că, dacă se consideră ca soluție o funcție cu salt pentru saturație, în punctul de salt presiunea prezintă de asemenea o discontinuitate.

În cazul dezlocuirii liniare, ecuația cu derivate parțiale pe care o satisface saturația este [10], [11]

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{V}{m} f'(s) \frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{16}$$

unde

$$f(S) = \frac{k_{ra}(S)}{\mu_a G(S)},$$

$G(S)$ fiind definit de (6′). În (16), V este modulul vitezei totale, același în orice secțiune transversală pe direcția mişcării, iar m porozitatea constantă a mediului. Soluția ecuației (16), în care presupunem că distribuția inițială a saturației (curba S_0 în fig. 2),

$$S_0(x) = S(x, 0) \tag{17}$$

este cunoscută, va fi dată de

$$x = f'(S)\, t + x_0(S) \tag{18}$$

obținută prin integrarea sistemului caracteristic, $x_0(S)$ fiind obținut prin inversarea relației (17).

Distribuția de presiuni în acest caz va fi dată de formula fundamentală

$$V = -kG(S) \frac{\partial p}{\partial x}, \tag{19}$$

de unde deducem prin integrare

$$p(x) = -\frac{V}{k} \int_0^x \frac{dx}{G(S)} + p_A, \tag{20}$$

p_A fiind presiunea în galeria de injecție. Pentru a evita exprimarea lui S în funcție de x din relația (18), facem în (20) schimbarea de variabilă (18). Expresia lui $p(S)$ va fi

$$p(S) = -\frac{V}{k} \int_1^S \frac{f''(S)t + x_0'(S)}{G(S)}\, dS + p_A, \tag{21}$$

cu ajutorul căreia presiunea poate fi calculată în orice punct al domeniului de mişcare în funcţie de saturaţie.

După apariţia triplei valori, curba reală S_j va fi înlocuită prin curba $AM \cup \bar{N}B$, obţinută prin secţionarea lui S_j după principiul balanţei mate-

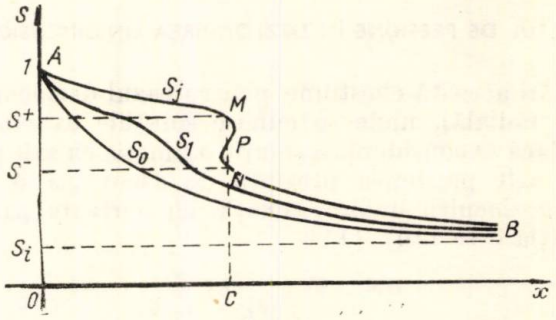


Fig. 2

riale. În punctul de abscisă c, distribuţia de saturaţie are un salt de la S^+ la S^-. Aceasta înseamnă că în mediul poros nu există nici un punct care să aibă saturaţia cuprinsă între S^+ şi S^-. Expresia (21) nu mai este valabilă, aşadar, pentru orice $S \in [S_i, 1]$, ci din acest interval trebuie exclus segmentul $[S^-, S^+]$. Pe intervalul $[1, S^+]$, presiunea va avea expresia

$$p^+(S) = -\frac{V}{k}\int_1^S \frac{f''(S)t + x_0'(S)}{G(S)}\,dS + p_A, \qquad S \in [1, S^+], \tag{22}$$

iar pe intervalul $[S_i, S^-]$ expresia

$$p^-(S) = -\frac{V}{k}\int_{S_i}^S \frac{f''(S)t + x_0'(S)}{G(S)}\,dS + p_B, \qquad S \in [S_i, S^-], \tag{22'}$$

p_B fiind presiunea în galeria de extracţie. În punctul c de salt al saturaţiei vom avea, aşadar, două valori ale presiunii :

$$p_c^+ = -\frac{V}{k}\int_1^{S^+} \frac{f''(S)t + x_0'(S)}{G(S)}\,dS + p_A,$$

respectiv

$$p_c^- = -\frac{V}{k}\int_{S_i}^{S^-} \frac{f''(S)t + x_0'(S)}{G(S)}\,dS + p_B.$$

Vom arăta că $p_c^+ - p_c^- \neq 0$. Avem

$$p_c^+ - p_c^- = \frac{V}{k}\left[\int_1^{S^+} \frac{f''(S)t + x_0'(S)}{G(S)}\,dS - \int_{S_i}^{S^-} \frac{f''(S)\,t + x_0'(S)}{G(S)}\,dS\right] + p_A - p_B. \tag{23}$$

Pe de altă parte,

$$-\frac{V}{k}\int_1^{S_i}\frac{f''(S)t+x_0'(S)}{G(S)}\,dS+p_A-p_B=0, \tag{24}$$

după cum rezultă din (22). Scăzînd (23) din (24), obținem

$$p_c^+-p_c^-=\frac{V}{k}\int_{S-}^{S+}\frac{f''(S)t+x_0'(S)}{G(S)}\,dS. \tag{24'}$$

Integrala din membrul drept al relației precedente nu poate fi nulă. Observăm pentru aceasta că funcțiile $f''(S)$ și $G(S)$ nu depind de configurația inițială a mișcării și de modul de injecție, ci sînt determinate de caracteristicile mediului și ale fluidelor în mișcare. În plus, ele sînt univalente. În integrandul din (24'), funcția $x_0'(S)$ este în schimb arbitrară, căci saturația inițială însăși este arbitrară. Aceasta arată că diferența $p_c^+ - p_c^-$ nu poate fi nulă în cazul general și afirmația noastră este demonstrată.

La același rezultat se poate ajunge și pentru cazul dezlocuirii radiale, urmînd același raționament. În acest caz, ecuația de dezlocuire la care satisface $S(r,t)$ se deduce din sistemul (1), scris în coordonate polare. Avînd în vedere că mișcarea va fi radială dacă saturația inițială este radială, mediul fiind omogen, sistemul (1) devine

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^2 p}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial r}+\alpha(S)\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial S}{\partial r}=0,\\ &\frac{\partial S}{\partial t}+\beta(S)\frac{\partial p}{\partial r}\cdot\frac{\partial S}{\partial r}=0,\end{aligned} \tag{25}$$

care poate fi redus la o singură ecuație prin eliminarea presiunii. Să observăm pentru aceasta că din expresia debitului printr-un cerc de rază r cu centrul în origine deducem

$$\frac{\partial p}{\partial r}=-\frac{Q}{2\pi rk}G^{-1}(S), \tag{26}$$

care verifică prima ecuație a sistemului (25); ea este deci o integrală primă a ei. Introducînd această relație în cea de-a doua ecuație a sistemului, obținem relația la care trebuie să satisfacă $S(r,t)$:

$$\frac{\partial S}{\partial t}+\frac{1}{r}\gamma(S)\frac{\partial S}{\partial r}=0, \tag{27}$$

unde am notat

$$\gamma(S)=\frac{Q\beta(S)}{2\pi k}G^{-1}(S).$$

Ecuația (26) este de același tip cu (16), cu diferența că apare factorul r^{*1}. Raționînd ca și în cazul liniar, se obține imediat soluția ecuației (27) sub forma

$$r^2 = 2\gamma(S)\, t + r_0^2(S), \tag{28}$$

unde am notat $r_0(S)$ saturația inițială. Spre deosebire de cazul dezlocuirii liniare, cînd caracteristicile ecuației (16) erau drepte, (vezi (18)), în acest caz se vede că ele sînt parabole care se intersectează în planul (r, t), formînd saltul de saturație datorită faptului că $\gamma(S)$ este multiform.

Ca și în cazul liniar, se poate arăta că în punctul de salt al saturației avem și salt de presiune. Formula (20) devine în acest caz

$$p(r) = -\frac{1}{k}\int_0^r \frac{V\mathrm{d}r}{G(S)} + p_A,$$

unde p_A este presiunea în sonda de injecție, iar formula (21) devine

$$p(S) = -\frac{Q}{2\pi k}\int_1^S \frac{\gamma'(S)\, t + r_0(S)\, r_0'(S)}{r^{3/2}(S)\, G(S)}\,\mathrm{d}S,$$

căci în acest caz V (viteza radială) depinde de r și are expresia $V = Q/2\pi r$, Q fiind debitul de injecție. Raționînd ca în cazul precedent, ajungem la relația

$$p_c^+ - p_c^- = \frac{Q}{2\pi k}\int_{S^-}^{S^+} \frac{\gamma'(S)\, t + r_0(S)\, r'(S)}{r^{3/2}(S)\, G(S)}\,\mathrm{d}S,$$

în care urmează să arătăm că integrala din membrul drept nu poate fi nulă. Acest lucru este evident pe baza unui raționament similar cu cel utilizat în cazul dezlocuirii liniare.

Acestea fiind stabilite, faptul că prin condiția de egalitate a vitezei pe C nu se asigură continuitatea presiunii nu surprinde; este o concluzie la care conduce aplicarea principiului de balanță materială în cazul dezlocuirii unidimensionale, pe care sîntem nevoiți s-o adoptăm drept condiție la limită în dezlocuirea bidimensională pentru facilitarea calculelor. Dacă ea a fost acceptată pînă acum înseamnă că rezultatele obținute pe baza ei sînt suficient de apropiate de cele experimentale și că pot satisface necesitățile practice imediate.

Pe de altă parte, extinderea la cazul bidimensional a metodelor de integrare a ecuației de dezlocuire din cazul unidimensional se face prin sacrificiul rigurozității matematice sau al concordanței fizice, așa cum rezultă din [1] și din prezenta lucrare. După cum am mai spus, verificările experimentale vor fi capabile să arate dacă rezultatele teoretice reprezintă suficient de bine fenomenul real ca să poată fi acceptate în această formă de necesitățile practice. O altă metodă matematică de studiu a problemei care să evite aceste inconveniente ar fi deosebit de utilă.

Primită la redacție la 16 iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, C. Cozma, *Dezlocuirea necapilară a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **29** *5* (1970).
2. — *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **27**, *6* (1968).
3. — *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **28**, *6* (1969).
4. N. I. Vekua, *Obobșcionnîe analiticeskie funkții*, Moskva, 1959.
5. F. D. Gahov, *Kraevîe zadaci*, Moskva, 1963.
6. D. A. Efros, *Issledovaniia filtrații neodnorodnîh sistem*, Leningrad, Gostoptehizdat, 1963.
7. S. E. Buckley, M. C. Leverett, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans. AIME, **195** (1942).
8. W. T. Jr. Cardwell, *The meaning of the triple value in noncapillary Buckley-Leverett theory*, Trans, AIME, **216** (1959).
9. D. W. Peacemann, *Numerical solution of the non-liniar equations for two-phase flow through porous media. Non-linear partial differential Equat-Sympos.* Methods Solution, 1967, Esso Production Reaserch Company Houston-Texas.
10. J. W. Sheldon, B. Zondek, W. T. Jr. Cardwell, *One-dimensional incompressible, noncapillary, two-phase fluid flow in a porous medium*, Trans. AIME, **216** (1959).
11. Th. Oroveanu. *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București Edit. Academiei, 1966.

MIŞCAREA SUPERSONICĂ ÎN JURUL UNUI AMPENAJ CRUCIFORM AVÎND PLANUL ORIZONTAL CU BORDUL DE ATAC SUPERSONIC, CONSIDERÎND DESPRINDERILE DE CURENT DE LA BORDURILE DE ATAC SUBSONICE ALE PLĂCII

de ŞTEFAN STAICU
Institutul Politehnic Bucureşti

În această lucrare se studiază scurgerea supersonică în jurul unui ampenaj cruciform subţire, cu incidenţele planului vertical antisimetrice, planul orizontal avînd bordul de atac supersonic, luînd în consideraţie separaţia curentului la bordurile de atac ale plăcii.
Ca şi la aripa delta subţire, cu incidenţa egală şi de semn contrar pe cele două jumătăţi ale sale, în cazul ampenajului cruciform cu trei braţe curentul se separă la bordurile plăcii sub forma unor cornete conice.
Tratînd problema indirect, ca la aripile delta simple, se reuşeşte să se creeze şi aici un model teoretic de studiu, prin care se ajunge la distribuţia de presiuni şi la caracteristicile aerodinamice ale ampenajului cruciform.

1. CONSIDERAŢII INTRODUCTIVE

În cele ce urmează vom studia scurgerea în regim supersonic în jurul unui ampenaj cruciform subţire, avînd incidenţele planului vertical antisimetrice, planul orizontal avînd bordul de atac supersonic, luînd în consideraţie separaţia curentului la bordurile de atac ale plăcii. Vom nota cu α incidenţa aripii orizontale, cu β incidenţa pentru partea superioară a plăcii şi cu $-\beta$ incidenţa pentru cea inferioară.

Vom considera ampenajul cruciform raportat la un sistem de axe trirectangulare $Ox_1x_2x_3$ (fig. 1) cu originea în vîrful său, avînd axa Ox_1, orientată după direcţia curentului neperturbat U_∞.

Ca şi în cazul aripii delta simple [3], curentul se separă la bordurile de atac subsonice ale plăcii, dînd naştere unui sistem de vîrtejuri care se situează la stînga şi la dreapta plăcii, în funcţie de semnele incidenţelor α şi β, producînd o mişcare antisimetrică. Astfel, scurgerea este modificată de existenţa a două cornete de vîrtejuri, situate antisimetric faţă de axa de simetrie, de aceeaşi intensitate şi acelaşi semn (fig. 1).

Vom nota cu $(-r_0', t_0')$, în planul fizic yOz, coordonatele nucleului de vîrtej sub care se concentrează cornetul la bordul plăcii și vom lua efectul acestor vîrtejuri chiar pe suprafața ampenajului. Aceasta se va

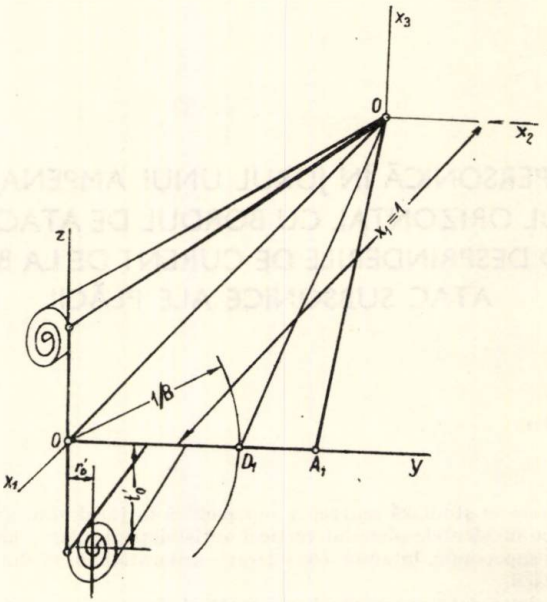


Fig. 1

manifesta prin modificarea cîmpului de viteze verticale și orizontale pe placă sau pe aripă și prin evitarea vitezelor infinite la bordurile planului vertical prevăzute de teoria clasică liniară.

Făcînd aceste considerații, scurgerea rămîne mai departe conică și se poate trata utilizînd aceleași metode cunoscute din teoria aripilor în regim supersonic [2] în ipoteza neglijării separației curentului la bordurile plăcii. Pentru aceasta vom considera că ampenajul cruciform este echivalent din punct de vedere aerodinamic cu un altul subțire fictiv, cu o variație convenabilă de incidențe. Pentru a ușura studiul se descompune aripa în trei aripi componente fictive :

a) aripa cruciformă subțire, avînd incidențele pe placă antisimetrice și astfel variabile, încît să urmărească oarecum fenomenul modificării presiunilor și vitezelor de perturbație pe placă în apropierea bordului de atac. Se obține un ampenaj cruciform subțire fictiv cu viteze finite la bordurile subsonice ale plăcii, dar egale și de semn contrar pe cele două fețe, ceea ce nu concordă cu indicațiile experimentale;

b) aripa cruciformă de „grosime simetrică", avînd pantele plăcii egale și de același semn cu incidențele primei aripi componente. Această aripă combinată cu a) va crea o altă aripă cruciformă, care va avea presiunile diferite pe cele două jumătăți de placă, apropiindu-ne oarecum de situația reală;

c) aripa a treia va avea „grosimea simetrică" cu panta variabilă, însă astfel încît, combinată cu aripa b), să se obțină o pantă medie nulă, corespun-

zătoare unui ampenaj subțire. Această aripă va avea rolul de a compensa global efectul aerodinamic al celei de la b) privitor la cîmpul vitezelor normale de perturbație.

Prin suprapunerea celor trei aripi reușim să însumăm efectele aerodinamice ale lor, obținînd în felul acesta un ampenaj cruciform echivalent cu cel real, la care s-a considerat fenomenul desprinderii curentului la borduri.

2. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

În cele ce urmează vom determina pentru cele trei ampenaje componente fictive vitezele axiale de perturbație. Pentru aceasta vom indica mai întîi variabilele curente și planele utilizate.

Pornind de la planul fizic yOz (fig. 1) de coordonate

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \qquad z = \frac{x_3}{x_1} \tag{1}$$

și făcînd transformarea

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2z^2}, \qquad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2z^2} \qquad (B = \sqrt{M_\infty^2 - 1}), \tag{2}$$

se obține planul auxiliar

$$x = \eta + i\zeta. \tag{3}$$

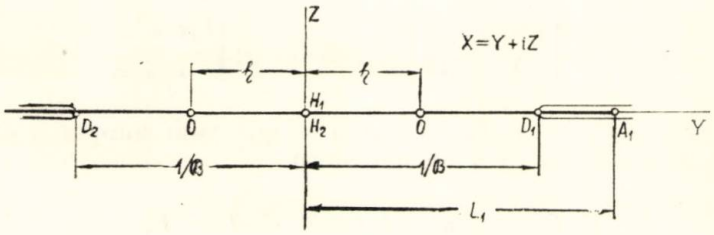


Fig. 2

Pornind de la aceste relații, putem deduce înălțimea plăcii și ordonata poziției nucleului de vîrtej creat de bordul de atac al plăcii din planul x:

$$\eta = \frac{h}{\sqrt{1 - B^2h^2}}, \qquad \tau_0' = \frac{t_0'}{\sqrt{1 - B^2t_0'^2}}. \tag{4}$$

Vom trece din planul x în planul complex X (fig. 2) prin intermediul transformării conforme

$$X^2 = x^2 + \eta^2, \tag{5}$$

în care vom scrie expresiile vitezelor axiale de perturbație.

2.1. *Ampenaj cruciform subțire antisimetric cu incidența variabilă pe suprafața plăcii.* Vom considera că, datorită existenței vîrtejurilor, viteza verticală pe aripa cu bordul supersonic nu se modifică, iar cea laterală pe placă v' va avea variația

$$v_0 = -\beta_0 U_\infty \qquad (y = 0, \quad -t_0 \leqslant z \leqslant t_0), \tag{6}$$

$$v' = v'(z) = -\beta'(z)\, U_\infty, \qquad [z = 0,\ y \in (-h, -t_0)\ U(h, t_0)], \tag{6'}$$

astfel încît la bordurile plăcii să obținem viteza

$$v_1 = -\beta_1 U_\infty. \tag{7}$$

Datorită variației vitezei laterale pe placă, vom considera o distribuție de muchii elementare care vor induce în punctul de afixă χ din planul complex χ, obținut prin intermediul transformării conforme

$$\chi^2 = \frac{\mathcal{B}^2(\eta^2 + X^2)}{1 - \mathcal{B}X}, \tag{8}$$

următoarea expresie a vitezei axiale de perturbație:

$$\mathrm{d}\mathcal{U}_i = q_i'(\chi_i') \ln \frac{\chi - \chi_i'}{\chi + \chi_i'}\,\mathrm{d}\chi_i' - q_i''(\chi_i'') \ln \frac{\chi - \chi_i''}{\chi + \chi_i''}\,\mathrm{d}\chi_i'', \tag{9}$$

în care

$$\chi_i' = \pm \sqrt{\frac{\mathcal{B}(\eta + T)}{1 - \mathcal{B}T}}, \qquad \chi_i'' = \pm \sqrt{\frac{B(\eta - T)}{1 + \mathcal{B}T}}. \tag{10}$$

Pentru a obține rezultate cît mai simple vom adopta o distribuție de surse în planul de lucru X cît mai simplă:

$$q_i'(T) = \pm q_i \qquad (-T_0 \leqslant T \leqslant T_0). \tag{11}$$

Pornind de la această relație de repartiție a intensității surselor, vom putea deduce viteza axială a primei aripi componente dacă vom considera și contribuțiile bordurilor de atac subsonice ale plăcii și supersonic al planului orizontal:

$$\mathcal{U}_i = A_{10} \frac{\sqrt{(X + \eta)(1 - \mathcal{B}X)}}{X\sqrt{\mathcal{B}}} + \frac{2}{\pi} K_{10} \cos^{-1} \sqrt{\frac{(L + \eta)\ (1 - \mathcal{B}X)}{(L - X)\,(1 + \mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} q_i \int_{T_0}^{0} \left(\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(X + \eta)\,(1 - \mathcal{B}T)}{(X - T)\,(1 + \mathcal{B}\eta)}} - \right.$$

$$\left. - \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(X + \eta)\,(1 + \mathcal{B}T)}{(X + T)\,(1 + \mathcal{B}\eta)}} \right) \mathrm{d}T, \tag{12}$$

care, în urma efectuării calculelor, devine

$$\mathcal{U}_i = A_{10}\frac{\sqrt{(X+\eta)(1-\mathcal{B}X)}}{X\sqrt{\mathcal{B}}} + \frac{2}{\pi}K_{10}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L+\eta)(1-\mathcal{B}X)}{(L-X)(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}q_i\Bigg[(X-T_0)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T_0)}{(X-T_0)(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+(X+T_0)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T_0)}{(X+T_0)(1+\mathcal{B}\eta)}} - 2X\cos h^{-1}\sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} -$$

$$-\frac{\sqrt{(X+\eta)(1-\mathcal{B}X)}}{\sqrt{\mathcal{B}}}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}T_0}{1+\mathcal{B}\eta}} +\right.$$

$$\left.+\cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\mathcal{B}T_0}{1+\mathcal{B}\eta}} - \cos^{-1}\frac{1-\mathcal{B}\eta}{1+\mathcal{B}\eta}\right)\Bigg]. \tag{13}$$

2.2. *Ampenaj cruciform avînd placa de grosime simetrică cu pantele egale cu incidențele primei aripi componente.* Vom introduce cel de-al doilea ampenaj cruciform, avînd placa de grosime simetrică pentru a înlătura vîrfurile accentuate de presiuni pe intradosul său. Procedînd la fel ca la aripa delta simplă (3), vom obține în planul X următoarea expresie a vitezei axiale de perturbație:

$$\mathcal{U}_i = \frac{2}{\pi}Q_{10}\cos h^{-1}\sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}q_i\int_{T_0}^{0}\left(\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T)}{(X-T)(1+\mathcal{B}\eta)}} + \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T)}{(X+T)(1+\mathcal{B}\eta)}}\right)\mathrm{d}T, \tag{14}$$

care devine

$$\mathcal{U}_i = \frac{2}{\pi}Q_{10}\cos h^{-1}\sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}q_i\Bigg[(X-T_0)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T_0)}{(X-T_0)(1+\mathcal{B}\eta)}} -$$

$$-(X+T_0)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T_0)}{(X+T_0)(1+\mathcal{B}\eta)}} -$$

$$-\frac{\sqrt{(X+\eta)(1-\mathcal{B}X)}}{\sqrt{\mathcal{B}}}\left(\cos^{-1}\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}T_0}{1+\mathcal{B}\eta}} - \cos^{-1}\sqrt{\frac{1+\mathcal{B}T_0}{1+\mathcal{B}\eta}}\right)\Bigg]. \tag{15}$$

2.3. *Ampenajul cruciform de grosime simetrică cu rolul de a compensa panta plăcii de la 2. 2.* În acest scop vom introduce pe suprafaţa aripii o nouă distribuţie de surse, care va reduce aripa la grosimea medie nulă corespunzătoare unei aripi subţiri.

Se alege ca distribuţie a intensităţii surselor funcţia

$$q_i''(T) = k_i \frac{T}{\eta} \qquad (-\eta \leqslant T \leqslant \eta) \tag{16}$$

şi vom obţine, analog cu (15), următoarea expresie a vitezei axiale de perturbaţie :

$$\mathcal{U}_e = -\frac{2}{\pi} Q_{10} \cos h^{-1} \sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \frac{k_i}{\eta} \int_{\eta}^{0} T \left[\cos h^{-1} \sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T)}{(X-T)(1+\mathcal{B}\eta)}} + \right.$$

$$\left. + \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T)}{(X+T)(1+\mathcal{B}\eta)}} \right] \mathrm{d}T = -\frac{2}{\pi} Q_{10} \cos h^{-1} \sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+ \frac{k_i}{\pi\eta} \left\{ (X^2 - \eta^2) \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}\eta)}{(X-\eta)(1+\mathcal{B}\eta)}} - \right.$$

$$- 2X^2 \cos h^{-1} \sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+ \frac{\sqrt{(X+\eta)(1-\mathcal{B}X)}}{2\mathcal{B}\sqrt{\mathcal{B}}} \left[\sqrt{2\mathcal{B}\eta} \left(\sqrt{1-\mathcal{B}\eta} - \sqrt{2} \right) + \right.$$

$$\left. \left. + (1-\mathcal{B}\eta+2\mathcal{B}X) \left(\cos^{-1} \frac{1-\mathcal{B}\eta}{1+\mathcal{B}\eta} - \cos^{-1} \sqrt{\frac{1-\mathcal{B}\eta}{1+\mathcal{B}\eta}} \right) \right] \right\}. \tag{17}$$

Prin suprapunerea celor trei ampenaje cruciforme realizăm un sistem cruciform cu trei braţe, pentru care viteza axială de perturbaţie va avea expresia

$$\mathcal{U} = \mathcal{U}_i + \mathcal{U}_t + \mathcal{U}_e. \tag{18}$$

3. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Utilizînd condiţiile la limită pentru vitezele de perturbaţie pe suprafaţa ampenajului cruciform, vom determina constantele A_{10} şi K_{10} care apar în expresia vitezei axiale de perturbaţie (13). Considerînd nişte

surse concentrate în locul celor distribuite, de intensitate Q_t și poziție $Y = T_0'$,

$$Q_t = q_t T_0, \quad T_0' = \frac{1}{2} T_0, \tag{19}$$

vom porni de la relațiile de compatibilitate ale vitezelor de perturbație:

$$\mathrm{d}\mathcal{U} = -x\mathrm{d}\mathcal{V} = \frac{\mathrm{i}x}{\sqrt{1 - B^2x^2}}\mathrm{d}\mathcal{W}, \tag{20}$$

și vom scrie ecuațiile de condiții la limită a vitezelor normale de perturbație în planul X:

$$\mathrm{Re}\, B\int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \sqrt{\frac{1/\mathcal{B}^2 - X^2}{\eta^2 - X^2}}\,\mathrm{d}\mathcal{U}_t' = \alpha U_\infty, \tag{21}$$

$$\mathrm{Re}\int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \frac{1}{\sqrt{X^2 - \eta^2}}\,\mathrm{d}\mathcal{U}_t' = v_0, \tag{21'}$$

în care $\mathcal{U}_t'$ este viteza axială de perturbație a primei aripi componente în cazul sursei concentrate în $Y = T_0'$:

$$\mathcal{U}_t' = A_{10}\frac{\sqrt{(X+\eta)(1-\mathcal{B}X)}}{X\sqrt{\mathcal{B}}} + \frac{2}{\pi}K_{10}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L+\eta)(1-\mathcal{B}X)}{(1+\mathcal{B}\eta)(L-X)}} +$$

$$+ \frac{2}{\pi}Q_t\left(\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T_0')}{(X-T_0')(1+\mathcal{B}\eta)}} - \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T_0')}{(X+T_0')(1+\mathcal{B}\eta)}}\right). \tag{22}$$

Din (21) și (21') deducem, efectuînd calculele,

$$K_{10} = \frac{\alpha l U_\infty}{\sqrt{B^2l^2 - 1}}, \tag{23}$$

$$\frac{Q_t}{\alpha U_\infty} = \sqrt{2\eta(1+\mathcal{B}\eta)}\,\frac{\dfrac{v_0}{\alpha U_\infty} + \sqrt{\dfrac{1-\mathcal{B}^2\eta^2}{\mathcal{B}^2L^2-1}} - \sqrt{\dfrac{(L-\eta)(1-\mathcal{B}\eta)}{2\eta(1+\mathcal{B}L)}}}{\sqrt{\dfrac{1+\mathcal{B}T_0'}{\eta - T_0'}} - \sqrt{\dfrac{1-\mathcal{B}T_0'}{\eta + T_0'}}}. \tag{23'}$$

Condiția de viteză finită la bordurile plăcii ($X = 0$) determină constanta A_{10}:

$$A_{10} = 0. \tag{24}$$

Mai departe, pentru calculul constantei q_t, vom porni de la relaţia

$$q_t'(t) = \frac{t}{\sqrt{1 - B^2t^2}} \frac{dv'}{dt}, \tag{25}$$

cunoscută în teoria mişcărilor conice, şi vom scrie ecuaţiile

$$v_1 - v_0 = -q_t \sqrt{1 - B^2h^2} \int_{h_0}^{h} \frac{dt}{(1 - B^2t^2)\sqrt{h^2 - t^2}}, \tag{26}$$

$$v_0t_0 + v't\Big|_{t_0}^{h} - \int_{t_0}^{h} t\,dv' = vh, \tag{26'}$$

din care deducem relaţiile următoare:

$$v_0 - v_1 = q_t \cos^{-1}\frac{t_0}{h} \sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2t_0^2}}, \tag{27}$$

$$Bh(v - v_1) = q_t \cos^{-1} \sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2t_0^2}}. \tag{27'}$$

Din (19), (27) şi (27') deducem constanta q_t:

$$\frac{q_t}{U_\infty} = \frac{\sqrt{2\mathfrak{h}(1 + \mathcal{B}\mathfrak{h})}}{2T_0'} \left\{\alpha\left[\sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}^2\mathfrak{h}^2}{\mathcal{B}^2L^2 - 1}} - \right.\right.$$

$$\left. - \sqrt{\frac{(L - \mathfrak{h})(1 - \mathcal{B}\mathfrak{h})}{2\mathfrak{h}(1 + \mathcal{B}L)}}\right] + \beta\left\}\left[\sqrt{\frac{1 + \mathcal{B}T_0'}{\mathfrak{h} - T_0'}} - \sqrt{\frac{1 - \mathcal{B}T_0'}{\mathfrak{h} + T_0'}} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\sqrt{2\mathfrak{h}(1 + \mathcal{B}\mathfrak{h})}}{2T_0'}\left(\cos^{-1}\frac{t_0}{h}\sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2t_0'^2}} - \frac{1}{Bh}\cos^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2t_0'^2}}\right)\right]\right\}^{-1}. \tag{28}$$

Constanta k_t din expresia vitezei axiale (13) o vom calcula pornind de la o relaţie similară cu (26') pentru viteza laterală a plăcii celei de-a treia aripi componente:

$$v''\,t\Big|_0^h - \int_0^h t\,dv'' = -vh, \tag{29}$$

şi vom deduce

$$5B^2h^2(v_1 - v) = k_t \sqrt{1 - B^2h^2}\,[1 - (1 - B^2h^2)^{5/2}]. \tag{30}$$

Această relaţie, împreună cu (27), determină constanta k_t:

$$k_t = -\frac{5Bh\,q_t}{\sqrt{1 - B^2h^2}[1 - (1 - B^2h^2)^{5/2}]} \cos^{-1}\sqrt{\frac{1 - B^2h^2}{1 - B^2t_0^2}}. \tag{31}$$

4. DISTRIBUȚIA DE PRESIUNI ȘI CARACTERISTICILE AERODINAMICE

Determinarea coeficientului de presiune pe aripă și pe placă se face utilizînd formulele

$$C_{pa} = -2\frac{u_a}{U_\infty}, \qquad C_{pp} = -2\frac{u_p}{U_\infty}, \tag{32}$$

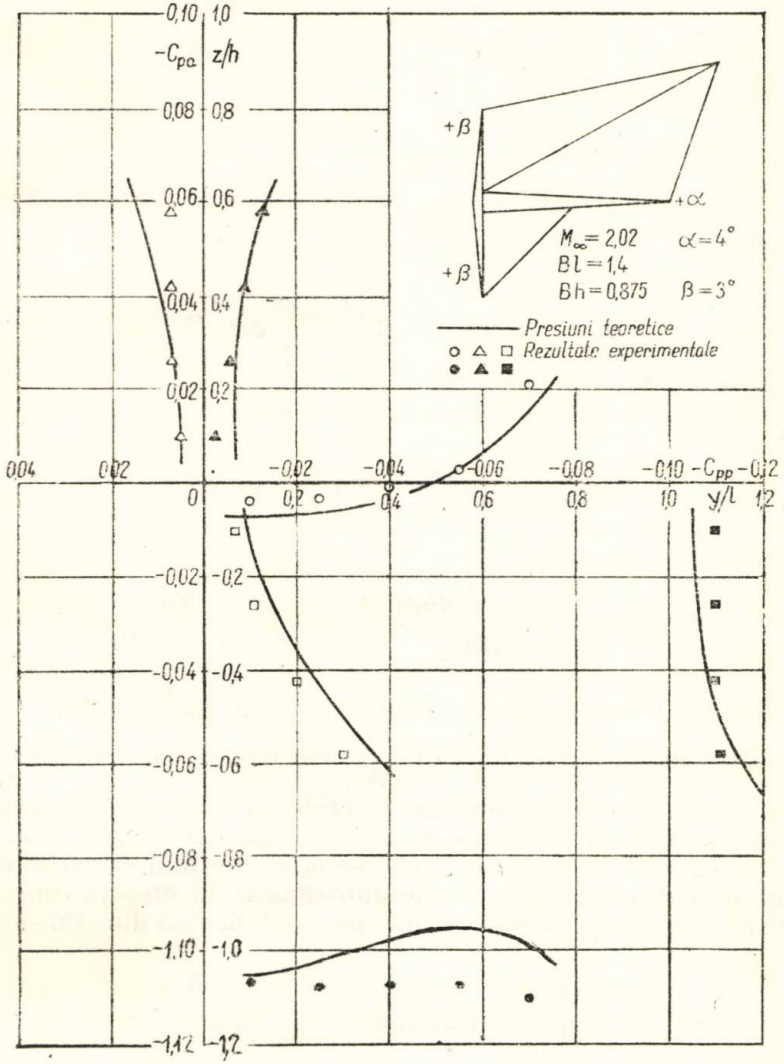


Fig. 3

în care se introduc expresiile vitezelor axiale de perturbație date de (18) (fig. 3).

Coeficienţii de portanţă pentru aripă sau jumătate de placă se obţin din formulele

$$\frac{1}{2B} C_{zma} = \frac{2}{U_\infty} \int_{\eta}^{1/\mathcal{B}} u_{ta}(Y) \frac{Y dY}{\sqrt{Y^2 - \eta^2}} \tag{33}$$

pentru regiunea (m) cuprinsă în interiorul cercului Mach,

$$\frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{B}\right) C_{zca} = \frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{B}\right) \frac{4\alpha}{B} \tag{34}$$

pentru cea din afară,

$$C_{zp} = \frac{2(1 - \mathcal{B}^2\eta^2)^{3/2}}{hU_\infty} \int_{-\eta}^{\eta} u_{tp}(Y) \frac{Y dY}{(1 - \mathcal{B}^2 Y^2)\sqrt{(1 - \mathcal{B}^2 Y^2)(\eta^2 - Y^2)}} \tag{35}$$

pentru placă şi

$$\frac{1}{2} l C_{za} = \frac{1}{2}\left(l - \frac{1}{B}\right) C_{zca} + \frac{1}{2B} C_{zma} \tag{36}$$

pentru întreaga aripă orizontală.

Coeficienţii de moment de ruliu vor fi daţi de formulele următoare :

$$HC_{ma} = \frac{8}{3U_\infty \sqrt{L^2 - \eta^2}} \int_{\eta}^{L} u_{ta}(Y)\, Y dY \tag{37}$$

pentru planul orizontal şi

$$HC_{mp} = -\frac{4(1 - \mathcal{B}^2\eta^2)}{3hU_\infty} \int_{-\eta}^{\eta} u_{tp}(Y) \frac{Y dY}{(1 - \mathcal{B}^2 Y^2)^2} \tag{38}$$

pentru planul vertical, în care $u_{ta}(Y)$ şi $u_{tp}(Y)$ sînt date de (18).

Pentru definirea parametrului $\frac{t_0}{h}$ vom remarca mai întîi că poziţia de maxim a distribuţiei de presiuni coincide cu cea a centrului nucleului de vîrtej, aşa cum se constată de altfel şi din experienţe. Însă, făcînd calculul pe baza distribuţiei de surse alese, se constată că vîrful depresiunilor de pe extradosul plăcii cade aproximativ în dreptul centrului de greutate al intensităţii surselor, avînd poziţia t_0 dedusă din (19) sub forma

$$t_0' = \sqrt{\frac{3h^2(1 - B^2 t_0^2) + t_0^2(1 - B^2 h^2)}{3(1 - B^2 t_0^2) + 1 - B^2 h^2}}. \tag{39}$$

Vom utiliza, prin urmare, formula

$$\frac{t_0'}{h} = \frac{1}{1 + 1{,}7(\beta \pm \Delta\beta)^{1/2}} \tag{40}$$

pentru definirea poziției centrului nucleului de vîrtej, în care β este incidența plăcii, iar $\Delta\beta$ incidența suplimentară creată de interferența dintre aripă și placă și care este proporțională cu α. Așadar, dacă $\alpha \to 0$, atunci $\Delta\beta \to 0$.

5. CAZUL SURSELOR CONCENTRATE

Vom căuta să soluționăm problema într-un mod simplificat, presupunînd că viteza verticală pe placă prezintă un salt brusc în dreptul nucleului de vîrtej. Acest lucru se rezolvă din punct de vedere hidrodinamic prin introducerea unor surse concentrate în punctele corespunzătoare pozițiilor centrelor vîrtejurilor : t'_0 și $-t'_0$, de intensități Q_t și $-Q_t$.

Expresiile vitezelor axiale de perturbație vor fi următoarele :

$$\mathcal{U}'_i = A_{10}\frac{\sqrt{(X+\eta)\,(1-\mathcal{B}X)}}{X\sqrt{\mathcal{B}}} + \frac{2}{\pi}K_{10}\cos^{-1}\sqrt{\frac{(L+\eta)\,(1-\mathcal{B}X)}{(1+\mathcal{B}\eta)\,(L-X)}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}Q_t\left[\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T'_0)}{(X-T'_0)(1+\mathcal{B}\eta)}} - \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T'_0)}{(X+T'_0)(1+\mathcal{B}\eta)}}\right] \tag{41}$$

pentru aripa portantă,

$$\mathcal{U}'_t = \frac{2}{\pi}Q_{10}\cos h^{-1}\sqrt{\frac{X+\eta}{X(1+\mathcal{B}\eta)}} +$$

$$+\frac{2}{\pi}Q_t\left[\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1-\mathcal{B}T'_0)}{(X-T'_0)(1+\mathcal{B}\eta)}} + \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(X+\eta)(1+\mathcal{B}T'_0)}{(X+T'_0)(1+\mathcal{B}\eta)}}\right] \tag{42}$$

pentru aripa de grosime simetrică de la 2.2. și

$$\mathcal{U}'_o \equiv \mathcal{U}_c \tag{43}$$

pentru a treia aripă componentă.

Distribuția de presiuni se obține substituind în (32) expresia lui $\mathcal{U}$ dată de (18).

Coeficienții aerodinamici se deduc în același mod ca în cazul sursei distribuite, în care apar constantele A_{10}, K_{10}, Q_t, k_t deduse din ecuațiile

$$A_{10} = 0, \tag{44}$$

$$v_0 t'_0 + v_1(h - t'_0) = vh, \tag{44'}$$

$$Q_t = \frac{(v_1 - v_0)\,t'_0}{\sqrt{1 - B^2 t'^2_0}} \tag{44''}$$

şi din (23'), (30)

$$\frac{Q_t}{U_\infty}=\frac{\sqrt{2\bar{h}(1+\mathcal{B}\bar{h})}\left\{\alpha\left[\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}^2\bar{h}^2}{\mathcal{B}^2L^2-1}}-\sqrt{\frac{(L-\bar{h})(1-\mathcal{B}\bar{h})}{2\bar{h}(1+\mathcal{B}L)}}\right]+\beta\right\}}{\sqrt{\frac{1+\mathcal{B}T_0'}{\bar{h}-T_0'}}-\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}T_0'}{\bar{h}+T_0'}}-\frac{h-t_0'}{ht_0'}(1+\mathcal{B}\bar{h})\sqrt{2\bar{h}(1-\mathcal{B}\bar{h})}}, \tag{45}$$

$$\frac{k_t}{Q_t}=\frac{5B^2h}{(1-B^2h^2)^{5/2}-1}\sqrt{\frac{1-B^2t_0'^2}{1-B^2h^2}}, \tag{45'}$$

iar constanta K_{10} este aceeaşi cu cea dată de (23).

OBSERVAŢII

a) Existenţa şi poziţiile vîrtejurilor sînt în funcţie atît de β, cît şi de α.

b) Pentru cazul plăcii fără incidenţă ($\beta = 0$), aripa avînd însă incidenţa α, se obţine de asemenea o scurgere antisimetrică cu vîrtejuri.

c) Făcînd $A_{10} = 0$, obţinem din expresia constantei A_{10}, calculată în cadrul teoriei liniare (11):

$$A_{10}=\frac{2\bar{h}\sqrt{2\mathcal{B}\bar{h}}\,U_\infty}{\pi\sqrt{1+\mathcal{B}\bar{h}}}\left\{\beta+\alpha\left[\sqrt{\frac{(L-\bar{h})(1-\mathcal{B}\bar{h})}{2\bar{h}(1+\mathcal{B}L)}}-\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}^2\bar{h}^2}{\mathcal{B}^2L^2-1}}\right]\right\}, \tag{46}$$

cu condiţia ca ampenajul cruciform cu placă antisimetrică să aibă viteze finite la borduri, evitînd apariţia vîrtejurilor în formă de cornet:

$$\frac{\beta}{\alpha}=\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}^2\bar{h}^2}{\mathcal{B}^2L^2-1}}-\sqrt{\frac{(L-\bar{h})(1-\mathcal{B}\bar{h})}{2\bar{h}(1+\mathcal{B}L)}}. \tag{47}$$

Din această relaţie putem deduce incidenţa suplimentară $\Delta\beta$ indusă de aripă pe placă oricare ar fi incidenţa reală β a plăcii ampenajului:

$$\Delta\beta=\left[\sqrt{\frac{1-\mathcal{B}^2\bar{h}^2}{\mathcal{B}^2L^2-1}}-\sqrt{\frac{(L-\bar{h})(1-\mathcal{B}\bar{h})}{2\bar{h}(1+\mathcal{B}L)}}\right]\alpha, \tag{48}$$

pe care o vom introduce în (40) pentru definirea poziţiei nucleului de vîrtej.

Primită la redacţie la 3 Iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, High *Speed Aerodynamics, București*, Ed. Tehnică, 1956.
2. E. Carafoli, *Wing Theory in Supersonic Flow*, Londra, Pergamm Press, 1969.
3. E. Carafoli, Șt. Staicu, *Sur un modèle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque.* Journal de Mécanique, Vol. 6, No. 2, Juin 1967, Paris.
4. — *On the flow separation from the edges of the antisymetrical delta wing in supersonic regime*, prof. L. I. Sedov, » *Problems of hydrodynamics and continuum mechanics*", S.I.A.M., p. 115—136; Philadelphia, Pennsylvania, 1969, „Nauka", Moscova, 1969, 257—272.
5. M. Roy, *Sur la théorie de l'aile delta. Tourbillons d'apex et nappes en comets*, C.R.Ac Sc.; R. A. **56** (1957).
6. L. C. Squire, *The estimation of the non-linear lift of delta wings at the supersonic speed*, J.R.A.S. (1963).
7. R. Legendre, *Vortex Sheets Rolling-up along Leading Edges of Delta Wings*, Progr.Aeronaut. Sci, V. 7, p. 7—33, 1966.
8. E. Carafoli, Șt. Staicu, *Antisymetrical thin delta wing with flow separation at the leading edges*, Rev. Roum. Sc. Techn. — Mécanique Appliq., **XI**, *6* (1966).
9. — *L'écoulement supersonique autour de l'aite delta arquée et gauchie symétriquement, compte tenu de la separation du courant aux bords d'ataque*, Rom. Journ. of Techn. Sc. — Applied Mechanics **XIV**, *3* (1969).
10. K. W. Mangler, J. H. Smith, *A theory of the flow past a slender delta wing with leading edge separation*, Proc. Roy. Soc. (1959).
11. Șt. Staicu, *Studiul scurgerii supersonice în jurul unui ampenaj cruciform*, Bul. Inst. politehnic, București, **29**, *2* (1967).

DETERMINAREA MATRICEALĂ A DEPLASĂRILOR ÎN MECANISMELE SPAȚIALE

de CHR. PELECUDI
Institutul Politehnic București

Se determină funcțiile de rotații și de translații pentru deplasările mecanismelor spațiale utilizînd diverse triedre naturale de referință. Se întrebuințează transformarea bazelor de versori ale triedrelor succesive și transformarea componentelor vectorilor de poziție în diverse triedre. Ecuațiile sînt adaptate pentru calcule simetrice la parcurgerea în sens direct (notația simplă) sau invers (notația stelată) a celor două jumătăți în care se secționează lanțul cinematic închis. Se pune în evidență determinarea celor cinci ecuații independente ale deplasărilor în mecanismele spațiale.

În două lucrări anterioare [1], [2] s-a dezvoltat analiza vectorială și matriceală în studiul mecanismelor tridimensionale pe baza alegerii unor triedre oblice, deformabile sau nedeformabile, formate cu axele naturale ale elementelor. S-a convenit ca elementul E_i să fie schematizat prin normala $\overline{n}_i$, cuprinsă între axele cuplelor de versori $\overline{e}_{i-1}$ și $\overline{e}_i$ sau $\overline{e}_i$ și $\overline{e}_{i+1}$ (fig. 1,2).

Dacă θ și α sînt unghiurile de rotație și, respectiv, de încrucișare, avem pentru cele două notații anterioare relațiile

$$\begin{aligned} \cos\alpha_i &= \overline{e}_{i-1}\cdot\overline{e}_i\,; & \cos\alpha_i &= \overline{e}_i\cdot\overline{e}_{i+1}\,,\\ \cos\theta_i &= \overline{n}_i\cdot\overline{n}_{i+1}\,; & \cos\theta_i &= \overline{n}_{i-1}\cdot\overline{n}_i\,,\\ \sin\alpha_i\,\overline{n}_i &= \overline{e}_{i-1}\times\overline{e}_i\,; & \sin\alpha_i\,\overline{n}_i &= \overline{e}_i\times\overline{e}_{i+1}\,,\\ \sin\theta_i\,\overline{e}_i &= \overline{n}_i\times\overline{e}_{i+1}\,; & \sin\theta_i\,\overline{e}_i &= \overline{n}_{i-1}\times\overline{n}_i\,. \end{aligned} \qquad (1)$$

Împreună cu deplasarea de translație $s_i\,\overline{e}_i$ și cu lungimea elementului $\sigma_i\,\overline{n}_i$ se constată că relațiile celor două cazuri se pot transforma unele în

altele prin corespondentele

$$\bar{e}_i \longleftrightarrow \bar{n}_i\,; \qquad \alpha_i \longleftrightarrow \theta_i\,; \qquad \sigma_i \longleftrightarrow s_i\,, \tag{2}$$

adică în continuare se poate studia un singur caz.

Pentru simplificarea calculelor și obținerea unor simetrii în ecuațiile de mișcare s-a considerat lanțul cinematic simplu, închis, format din două părți, notate prin indici simpli și stelați, cu un element sau cuplă comune și legate între ele pe axa cuplei i sau j^*. Pe cale vectorială [1], cele cinci ecuații independente ale cazului general spațial sînt obținute din egalarea componentelor a doi versori contrari $\bar{e}$ și $\bar{e}^*$ ai oricărei axe de cuplă (două ecuații, pentru că a treia ecuație este neindependentă, versorul avînd mărimea egală cu unitatea) și din egalarea componentelor a doi vectori de poziție $\bar{R}$ și $\bar{R}^*$ (fig. 1,2) ai unui punct de pe axa cuplei utilizate (trei ecuații), care de altfel reprezintă însumările vectoriale ale celor două părți ale lanțului cinematic. În mod similar, pe cale matriceală [2] se fac transformările bazelor de versori ale triedrelor T și T^*, păstrîndu-se din ecuațiile care exprimă egalitatea componentelor lor în triedrul de referință numai pe acelea care se referă la versorul comun triedrelor considerate, adică $\bar{e}$ și $\bar{e}^*$. Totodată se utilizează transformările și egalitatea componentelor vectorilor de poziție ale triedrelor succesive în cele două sensuri de parcurgere ale lanțului cinematic, corespunzînd însumărilor vectoriale $\bar{R}$ și $\bar{R}^*$.

În general, ca triedru de referință pentru exprimarea egalității componentelor se poate alege triedrul oricărui element sau cuplă. Practic este indicat să se aleagă triedrul bazei B ($\bar{n}_0\ \bar{e}_0\ \bar{e}_1$, fig. 1) sau triedrul manivelei M, deoarece pozițiile acestora se presupun cunoscute. Aceste triedre sînt nedeformabile și, utilizînd convenția $\bar{e}_i\ E_i\ \bar{e}_{i+1}$, suma indicilor axelor cuplelor pentru notațiile directă simplă sau inversă stelată este $i + j = p + 1$ (p numărul de axe de cuple ale lanțului cinematic). Se pot utiliza de asemenea triedrele deformabile ale axei motoare A ($\bar{e}_0\ \bar{n}_0\ \bar{n}_1$, fig. 2) sau ale bazei și manivelei BM ($\bar{e}_{-1}\ \bar{e}_0\ \bar{e}_1$, fig. 2), în care caz pentru convenția $\bar{e}_i\ E_i\ \bar{e}_i$ suma indicilor axelor cuplelor în cele nouă notații este $i + j = p$.

Vom putea utiliza două feluri de triedre. Pentru convenția $\bar{e}_i\ E_i\ \bar{e}_{i+1}$, triedrul T_i, față de care elementul E_i are mișcare relativă, este așezat în punctul A pe axa $\bar{e}_i$ (fig. 3). Triedrul T_i are axele $x_i(\bar{n}_{i-1})\ z_i(\bar{e}_i)$ și poate avea axa y_i după perpendiculara $\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1}$, după oblica nedeformabilă $\bar{e}_{i-1}$ sau după oblica deformabilă $\bar{n}_i$. În cazul convenției $\bar{e}_{i-1}\ E_i\ \bar{e}_i$, triedrul $\mathcal{T}_i$ (fig. 4) este solidar cu elementul E_i și este așezat în punctul $\mathcal{A}$ pe axa $\bar{e}_{i-1}$. Triedrul $\mathcal{T}_i$ are axele $x_i(\bar{e}_{i-1})\ z_i(\bar{n}_i)$, iar axa y_i poate fi îndreptată după perpendiculara $\bar{n}_i \times \bar{e}_{i-1}$ după oblica deformabilă $\bar{n}_{i-1}$ sau după oblica nedeformabilă $\bar{e}_{i+1}$. Astfel avem

$$\begin{aligned} &T_i\ \bar{e}_i\ E_i\ \bar{e}_{i+1}\,; \qquad && T_i\,[\bar{n}_{i-1}]\,[\bar{e}_i \times \bar{n}_{i-1},\ \bar{e}_{i-1},\ \bar{n}_i]\,[\bar{e}_i], \\ &\mathcal{T}_i\ \bar{e}_{i-1}\ \mathcal{E}_i\ \bar{e}_i\,; && \mathcal{T}_i\,[\bar{e}_{i-1}]\,[\bar{n}_i \times \bar{e}_{i-1},\ \bar{n}_{i-1},\ \bar{e}_i]\,[\bar{n}_i]. \end{aligned} \tag{3}$$

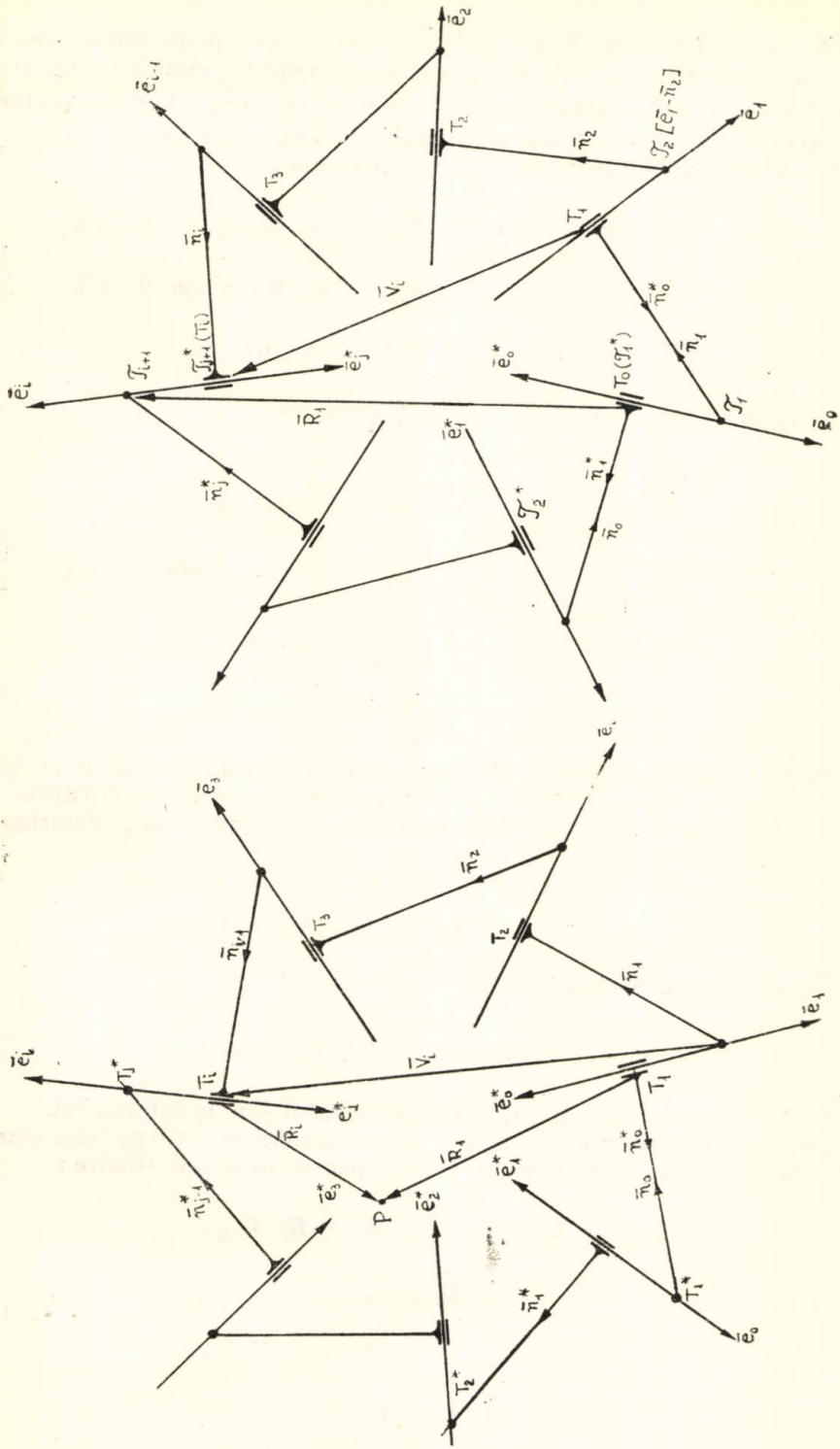


Fig. 1

Fig. 2

Vectorul de poziție $T_i\ T_{i+1}$ este $\overline{R}_i^0$ dacă are componentele cunoscute pe axele triedrului T_i și $\overline{R}_i^+$ dacă are componentele cunoscute pe axele triedrului T_{i+1}. Se va adopta *notația* similară $\overline{\mathcal{R}}_i^0$ și $\overline{\mathcal{R}}_i^+$ pentru vectorul de poziție $\overline{\mathcal{T}_i\ \mathcal{T}_{i+1}}$ dacă are componentele cunoscute în $\mathcal{T}_i$ sau $\mathcal{T}_{i+1}$ (fig. 5). Avem explicitările (fig. 3,4,5) următoare :

$$T_i\,[\overline{n}_{i-1},\ \overline{e}_i \times \overline{n}_{i-1},\ \overline{e}_i]; \qquad \begin{matrix}\overline{R}_i^+\,[\sigma_i,\ s_i \sin \alpha_i,\ s_i \cos \alpha_i],\\ \overline{R}_i^0\,[\sigma_i \cos \theta_i,\ \sigma_i \sin \theta_i,\ s_i],\end{matrix} \tag{4}$$

$$T_i\,[\overline{n}_{i-1},\ \overline{e}_{i-1},\ \overline{e}_i]; \qquad \overline{R}_i^+\,[\sigma_i,\ s_i,\ 0], \tag{5}$$

$$T_i\,[\overline{n}_{i-1},\ \overline{n}_i,\ \overline{e}_i]; \qquad \overline{R}_i^0\,[0,\ \sigma_i,\ s_i] \tag{6}$$

și

$$\mathcal{T}_i\,[\overline{e}_{i-1},\ \overline{n}_i \times \overline{e}_{i-1},\ \overline{n}_i]; \qquad \begin{matrix}\overline{\mathcal{R}}_i^+\,[s_i,\ \sigma_i \sin \theta_i,\ \sigma_i \cos \theta_i],\\ \overline{\mathcal{R}}_i^0\,[s_i \cos \alpha_i,\ s_i \sin \alpha_i,\ \sigma_i],\end{matrix} \tag{7}$$

$$\mathcal{T}_i\,[\overline{e}_{i-1},\ \overline{n}_{i-1},\ \overline{n}_i]; \qquad \overline{\mathcal{R}}_i^+\,[s_i,\ \sigma_i,\ 0], \tag{8}$$

$$\mathcal{T}_i\,[\overline{e}_{i-1},\ \overline{e}_i,\ \overline{n}_i]; \qquad \overline{\mathcal{R}}_i^0\,[0,\ s_i,\ \sigma_i]. \tag{9}$$

Se pot obține componentele simple ale vectorului de poziție al triedrelor succesive dacă triedrele T_i sînt așezate în $\mathcal{A}_i$, iar triedrele $\mathcal{T}_i$ în A_{i-1}. Într-adevăr, pentru toate triedrele T_i, drept, oblic, deformabil sau nedeformabil, avem

$$T_i\,[\overline{n}_{i-1},\ -,\ \overline{e}_i]\ \mathcal{A}_i; \qquad \overline{\mathcal{R}}_i^+\,[\sigma_i,\ 0,\ s_{i+1}]. \tag{10}$$

De asemenea, pentru triedrele $\mathcal{T}_i$ avem

$$\mathcal{T}_i\,[\overline{e}_{i-1},\ -,\ \overline{n}_i]\,A_{i-1}; \qquad \overline{\mathcal{R}}_i^0\,[s_{i-1},\ 0,\ \sigma_i], \tag{11}$$

indiferent că triedrul este drept, oblic, deformabil sau nedeformabil.

Determinarea funcțiilor de rotații. Aceste funcții se obțin pe baza transformărilor succesive ale bazelor de versori pentru diversele triedre :

$$\begin{matrix} T_{i+1} = A_i\ T_i; \qquad T_i = B_i\ T_{i+1}, \\ A_i\ B_i = 1, \\ \mathcal{T}_{i+1} = \mathcal{A}_i\,\mathcal{T}_i; \qquad \mathcal{T}_i = \mathcal{B}_i\,\mathcal{T}_{i+1}, \\ \mathcal{A}_i\,\mathcal{B}_i = 1. \end{matrix} \tag{12}$$

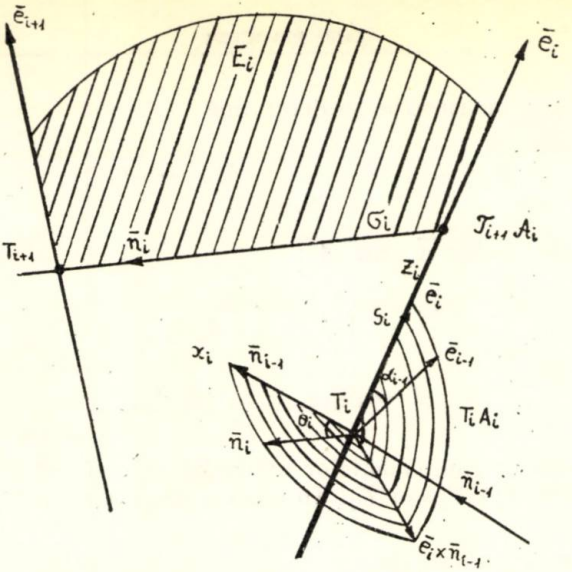


Fig. 3

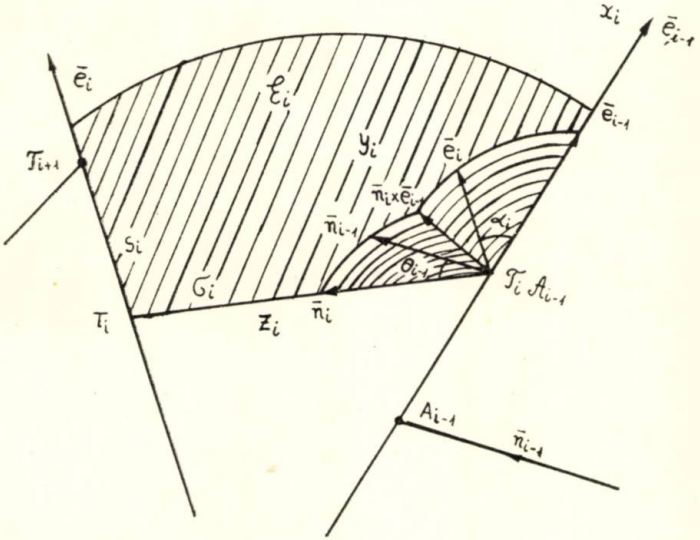


Fig. 4

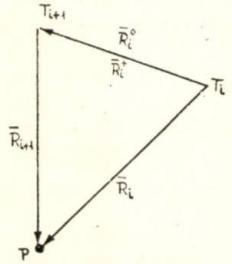


Fig. 5

Din aproape în aproape se determină

$$T_{i+1} = \overline{A}_i\, T_1; \qquad \mathcal{T}_{i+1} = \overline{\mathcal{A}}_i\, \mathcal{T}_1, \tag{13}$$

în care matricele-produs $\overline{A}_i$ sau $\overline{\mathcal{A}_i}$:

$$\begin{aligned} \overline{A}_i &= A_i A_{i-1} \dots A_2 A_1 , \\ \overline{\mathcal{A}_i} &= \mathcal{A}_i \mathcal{A}_{i-1} \dots \mathcal{A}_2 \mathcal{A}_1 , \end{aligned} \tag{14}$$

ajută la explicitarea componentelor versorilor T_{i+1} sau $\mathcal{T}_{i+1}$ față de axele triedrului de referință T_1 sau $\mathcal{T}_1$. În continuare se vor exemplifica diferite triedre

a_1) Triedrele ortogonale:

$$T_{i+1} \begin{vmatrix} \overline{n}_i \\ \overline{e}_{i+1} \times \overline{n}_i \\ \overline{e}_{i+1} \end{vmatrix} = A_i T_i \begin{vmatrix} \overline{u}_{i-1} \\ \overline{e}_i \times \overline{n}_{i-1} \\ e_i \end{vmatrix}; \tag{15}$$

— matriceal:

$$A_i = \begin{vmatrix} \overline{\theta}_i & \theta_i & 0 \\ -\theta_i \overline{\alpha}_i & \overline{\theta}_i \overline{\alpha}_i & \alpha_i \\ \theta_i \alpha_i & -\overline{\theta}_i \alpha_i & \overline{\alpha}_i \end{vmatrix};$$

$$B_i = \begin{vmatrix} \overline{\theta}_i & -\theta_i \overline{\alpha}_i & \theta_i \alpha_i \\ \theta_i & \overline{\theta}_i \overline{\alpha}_i & -\overline{\theta}_i \alpha_i \\ 0 & +\alpha_i & \overline{\alpha}_i \end{vmatrix} \tag{16}$$

(pentru elementele matricelor formate din funcții trigonometrice s-a adoptat notația $\sin \alpha \to \alpha$ și $\cos \alpha \to \overline{\alpha}$, $\sin \theta \to \theta$ și $\cos \theta \to \overline{\theta}$);
— vectorial:

$$\overline{n}_i = \cos \theta_i \overline{n}_{i-1} + \sin \theta_i \overline{e}_i \times \overline{e}_{i-1} ,$$

$$\overline{e}_{i+1} \times \overline{n}_i = -\sin \theta_i \cos \alpha_i \overline{n}_{i-1} + \cos \theta_i \cos \alpha_i \overline{e}_i \times \overline{n}_{i-1} + \sin \alpha_i \overline{e}_i , \tag{17}$$

$$\overline{e}_{i+1} = \sin \theta_i \sin \alpha_i \overline{n}_{i-1} - \cos \theta_i \sin \alpha_i \overline{e}_i \times \overline{n}_{i-1} + \cos \alpha_i \overline{e}_i .$$

a_2) Corespunzător, avem pentru triedrele ortogonale

$$\mathcal{T}_{i+1}\begin{vmatrix} \bar{e}_i \\ \bar{n}_{i+1} \times \bar{e}_i \\ \bar{n}_{i+1} \end{vmatrix} = \mathcal{A}_i \mathcal{T}_i \begin{vmatrix} \bar{e}_{i-1} \\ \bar{n}_i \times \bar{e}_{i-1} \\ \bar{n}_i \end{vmatrix}; \tag{18}$$

— matriceal:

$$\mathcal{A}_i = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_i & \alpha_i & 0 \\ -\alpha_i \bar{\theta}_i & \bar{\alpha}_i \bar{\theta}_i & \theta_i \\ \alpha_i \theta_i & -\bar{\alpha}_i \theta_i & \bar{\theta}_i \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{B}_i = \begin{vmatrix} \bar{\alpha}_i & -\alpha_i \bar{\theta}_i & \alpha_i \theta_i \\ \alpha_i & \bar{\alpha}_i \bar{\theta}_i & -\bar{\alpha}_i \theta_i \\ 0 & \theta_i & \bar{\theta}_i \end{vmatrix}; \tag{19}$$

— vectorial:

$$\bar{e}_i = \cos \alpha_i \bar{e}_{i-1} + \sin \alpha_i \bar{n}_i \times \bar{e}_{i-1},$$

$$\bar{n}_{i+1} + \bar{e}_i = -\sin \alpha_i \cos \theta_i \bar{e}_{i-1} + \cos \alpha_i \cos \theta_i \bar{n}_i \times \bar{e}_{i-1} + \sin \theta_i \bar{n}_i, \tag{20}$$

$$\bar{n}_{i+1} = \sin \alpha_i \sin \theta_i \bar{e}_{i-1} - \cos \alpha_i \sin \theta_i \bar{n}_i \times \bar{e}_{i-1} + \cos \theta_i \bar{n}_i.$$

b_1) Triedrele oblice nedeformabile:

$$T_{i+1}\begin{vmatrix} \bar{n}_i \\ \bar{e}_i \\ \bar{e}_{i+1} \end{vmatrix} = A_i T_i \begin{vmatrix} \bar{n}_{i-1} \\ \bar{e}_{i-1} \\ \bar{e}_i \end{vmatrix}; \tag{21}$$

— matriceal:

$$A_i = \frac{1}{\alpha_{i-1}} \begin{vmatrix} \alpha_{i-1} \bar{\theta}_i & \theta_i & -\alpha_{i-1} \theta_i \\ 0 & 0 & \alpha_{i-1} \\ \alpha_{i-1} \alpha_i \theta_i & -\alpha_i \bar{\theta}_i & \alpha_{i-1} \bar{\alpha}_i + \alpha_i \bar{\alpha}_{i-1} \bar{\theta}_i \end{vmatrix},$$

$$B_i = \frac{1}{\alpha_i} \begin{vmatrix} \alpha_i \bar{\theta}_i & -\bar{\alpha}_i \theta_i & \theta_i \\ \alpha_{i-1} \alpha_i \theta_i & \bar{\alpha}_{i-1} \alpha_i + \alpha_{i-1} \bar{\theta}_i \bar{\alpha}_i & -\alpha_{i-1} \bar{\theta}_i \\ 0 & \alpha_i & 0 \end{vmatrix}; \tag{22}$$

— vectorial :

$$\sin \alpha_{i-1}\, \overline{n}_i = \sin \alpha_{i-1} \cos \theta_i \overline{n}_{i-1} + \sin \theta_i \overline{e}_{i-1} - \cos \alpha_{i-1} \sin \theta_i \overline{e}_i ,$$

$$\sin \alpha_{i-1} \overline{e}_{i+1} = \sin \alpha_{i-1} \sin \alpha_i \sin \theta_i \overline{n}_{i-1} - \sin \alpha_i \cos \theta_i \overline{e}_{i-1} +$$

$$+ (\sin \alpha_{i-1} \cos \alpha_i + \sin \alpha_i \cos \alpha_{i-1} \cos \theta_i) \overline{e}_i . \qquad (23)$$

Triedrul de referință este triedrul bazei $T_1[\overline{n}_0,\ \overline{e}_0,\ \overline{e}_1]$, iar matricele rezultate succesive sînt

$$\overline{A}_1 = |A_1| = \frac{1}{\alpha_0} \begin{vmatrix} D_1 & E_1 & F_1 \\ A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_1 \end{vmatrix}, \qquad (24)$$

cu

$$A_1 = 0 ; \qquad B_1 = 0 ; \qquad C_1 = \alpha_0 ,$$

$$D_1 = \alpha_0 \overline{\theta}_1 ; \qquad E_1 = \theta_1 ; \qquad F_1 = -\overline{\alpha}_0 \theta_1 ,$$

$$A_2 = \alpha_0 \alpha_1 \theta_1 ; \qquad B_2 = -\alpha_1 \overline{\theta}_1 ; \qquad C_2 = \alpha_0 \overline{\alpha}_1 + \alpha_1 \overline{\alpha}_0 \overline{\theta}_1 ,$$

$$\overline{A}_2 = |A_2 A_1| = \frac{1}{\alpha_0} \begin{vmatrix} D_2 & E_2 & F_2 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix}, \qquad (25)$$

cu

$$D_2 = \alpha_0 (\overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2 - \overline{\alpha}_1 \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2),$$

$$E_2 = \theta_1 \overline{\theta}_2 + \overline{\alpha}_1 \overline{\theta}_1 \theta_2,$$

$$F_2 = \alpha_0 \alpha_1 \theta_2 - \overline{\alpha}_0 (\theta_1 \overline{\theta}_2 + \overline{\alpha}_1 \overline{\theta}_1 \theta_2)$$

și

$$A_3 = \alpha_0 (\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \theta_1 + \alpha_2 \overline{\theta}_1 \theta_2 + \overline{\alpha}_1 \alpha_2 \theta_1 \overline{\theta}_2),$$

$$B_3 = -\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\theta}_1 + \alpha_2 \theta_1 \theta_2 - \overline{\alpha}_1 \alpha_2 \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2,$$

$$C_3 = \alpha_0 (\overline{\alpha}_1 \overline{\alpha}_2 - \alpha_1 \alpha_2 \overline{\theta}_2) - \overline{\alpha}_0 (-\alpha_1 \overline{\alpha}_2 \overline{\theta}_1 + \alpha_2 \theta_1 \theta_2 - \overline{\alpha}_1 \alpha_2 \overline{\theta}_1 \overline{\theta}_2),$$

$$\overline{A}_3 = |A_3 A_2 A_1| = \frac{1}{\alpha_0} \begin{vmatrix} D_3 & E_3 & F_3 \\ A_3 & B_3 & C_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 \end{vmatrix}, \qquad (26)$$

cu

$$D_3 = \alpha_0(\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_3 - \bar{\alpha}_1\,\theta_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 - \bar{\alpha}_2\,\bar{\theta}_1\,\theta_2\,\theta_3 + \alpha_1\alpha_2\,\theta_1\theta_3 - \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\theta_1\,\bar{\theta}_2\,\theta_3),$$

$$E_3 = \theta_1\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_3 + \bar{\alpha}_1\,\bar{\theta}_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 - \bar{\alpha}_2\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_3 - \alpha_1\,\alpha_2\,\bar{\theta}_1\,\theta_3 + \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,\theta_3,$$

$$F_3 = \alpha_0(\alpha_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 + \bar{\alpha}_1\,\alpha_2\,\theta_3 + \alpha_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\theta}_2\,\theta_3) - \bar{\alpha}_0\cdot(\theta_1\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_3 +$$

$$+ \bar{\alpha}_1\,\bar{\theta}_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 - \bar{\alpha}_2\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_3 - \alpha_1\,\alpha_2\,\bar{\theta}_2\,\theta_3 + \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,\theta_3)$$

și

$$A_4 = \alpha_0(\alpha_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_3\,\theta_1 + \bar{\alpha}_1\,\alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\theta_1\,\bar{\theta}_2 + \alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\bar{\theta}_1\,\theta_2 - \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\theta_1\,\bar{\theta}_3 +$$

$$+ \alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,\theta_3 - \bar{\alpha}_1\,\alpha_3\,\theta_1\,\theta_2\,\theta_3 + \bar{\alpha}_2\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 + \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\alpha_3\,\theta_1\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_3),$$

$$B_4 = -\alpha_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_3\,\bar{\theta}_1 + \alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\theta_1\,\theta_2 - \bar{\alpha}_1\,\alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2 + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_3 +$$

$$+ \alpha_3\,\theta_1\,\bar{\theta}_2\,\theta_3 + \bar{\alpha}_1\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\theta_2\,\theta_3 + \bar{\alpha}_2\,\alpha_3\,\theta_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 - \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_3,$$

$$C_4 = \alpha_0(\bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_3 - \alpha_1\,\alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\bar{\theta}_2 - \bar{\alpha}_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\bar{\theta}_3 + \alpha_1\,\alpha_3\theta_2\,\theta_3 - \alpha_1\,\bar{\alpha}_2\,\alpha_3\bar{\theta}_2\bar{\theta}_3) -$$

$$- \bar{\alpha}_0(-\alpha_1\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\alpha}_2\,\bar{\theta}_1 + \alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\theta_1\,\theta_2 - \bar{\alpha}_1\,\alpha_2\,\bar{\alpha}_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2 + \alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_3 +$$

$$+ \alpha_3\,\theta_1\,\bar{\theta}_2\,\theta_3 + \bar{\alpha}_1\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\theta_2\,\theta_3 + \bar{\alpha}_2\,\alpha_3\,\theta_1\,\theta_2\,\bar{\theta}_3 - \bar{\alpha}_1\,\bar{\alpha}_2\,\alpha_3\,\bar{\theta}_1\,\bar{\theta}_2\,\bar{\theta}_3).$$

Cu ajutorul acestor funcții, denumite funcții de rotații întrucît cuprind numai parametrii rotațiilor diverselor triedre, se pot exprima versorii $\bar{n}_i$ și $\bar{e}_i$:

$$\begin{aligned} \sin\alpha_0\,\bar{n}_i &= D_i\,\bar{n}_0 + E_i\,\bar{e}_0 + F_i\,\bar{e}_1, \\ \sin\alpha_0\,\bar{e}_i &= A_i\,\bar{n}_0 + B_i\,\bar{e}_0 + C_i\,\bar{e}_1. \end{aligned} \tag{27}$$

b$_2$) În mod similar se obțin relațiile pentru triedrele oblice deformabile :

$$\mathcal{T}_{i+1}\begin{vmatrix} e_i \\ \bar{n}_i \\ n_{i+1} \end{vmatrix} = \mathcal{A}_i\,\mathcal{T}_i\begin{vmatrix} \bar{e}_{i-1} \\ \bar{n}_{i-1} \\ \bar{n}_i \end{vmatrix}; \tag{28}$$

— matriceal :

$$\mathcal{A}_i = \frac{1}{\theta_{i-1}} \begin{vmatrix} \theta_{i-1}\bar{\alpha}_i & \alpha_i & -\bar{\theta}_{i-1}\alpha_i \\ 0 & 0 & \theta_{i-1} \\ \theta_{i-1}\theta_i\alpha_i & -\theta_i\bar{\alpha}_i & \theta_{i-1}\bar{\theta}_i + \theta_i\bar{\theta}_{i-1}\bar{\alpha}_i \end{vmatrix},$$

$$\mathcal{B}_i = \frac{1}{\theta_i} \begin{vmatrix} \theta_i\bar{\alpha}_i & -\bar{\theta}_i\alpha_i & \alpha_i \\ \theta_{i-1}\theta_i\alpha_i & \bar{\theta}_{i-1}\theta_i + \theta_{i-1}\bar{\theta}_i\bar{\alpha}_i & -\theta_{i-1}\bar{\alpha}_i \\ 0 & \theta_i & 0 \end{vmatrix}; \tag{29}$$

— vectorial :

$$\sin\theta_{i-1}\,\bar{e}_i = \sin\theta_{i-1}\cos\alpha_i\bar{e}_{i-1} + \sin\alpha_i\bar{n}_{i-1} - \cos\theta_{i-1}\sin\alpha_i\bar{n}_i,$$

$$\sin\theta_{i-1}\bar{n}_{i+1} = \sin\theta_{i-1}\sin\theta_i\sin\alpha_i\bar{e}_{i-1} - \sin\theta_i\cos\alpha_i\bar{n}_{i-1} +$$

$$+ (\sin\theta_{i-1}\cos\theta_i + \sin\theta_i\cos n_{i-1}\cos\alpha_i)\bar{n}_i\,. \tag{30}$$

Triedrul de referinţă este triedrul axei motoare $\mathcal{T}_1[\bar{e}_0, \bar{n}_0, \bar{n}_1]$ şi matricele rezultate succesive sînt

$$\bar{\mathcal{A}}_1 = |\mathcal{A}_1| = \frac{1}{\theta_0} \begin{vmatrix} \mathcal{D}_1 & \mathcal{E}_1 & \mathcal{F}_1 \\ \mathcal{A}_1 & \mathcal{B}_1 & \mathcal{C}_1 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 \end{vmatrix}, \tag{31}$$

cu

$$\mathcal{A}_1 = 0\,; \qquad \mathcal{B}_1 = 0\,; \qquad \mathcal{C}_1 = \theta_0\,,$$

$$\mathcal{D}_1 = \theta_0\bar{\alpha}_1\,; \qquad \mathcal{E}_1 = \alpha_1\,; \qquad \mathcal{F}_1 = -\bar{\theta}_0\alpha_1\,,$$

$$\mathcal{A}_2 = \theta_0\theta_1\alpha_1\,; \qquad \mathcal{B}_2 = -\theta_1\bar{\alpha}_1\,; \qquad \mathcal{C}_2 = \theta_0\bar{\theta}_1 + \theta_1\bar{\theta}_0\bar{\alpha}_1\,,$$

$$\bar{\mathcal{A}}_2 = |\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1| = \frac{1}{\theta_0} \begin{vmatrix} \mathcal{D}_2 & \mathcal{E}_2 & \mathcal{F}_2 \\ \mathcal{A}_2 & \mathcal{B}_2 & \mathcal{C}_2 \\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{C}_3 \end{vmatrix}, \tag{32}$$

cu

$$\mathcal{D}_2 = \theta_0(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 - \bar{\theta}_1\alpha_1\alpha_2)\,,$$

$$\mathcal{E}_2 = \alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\theta}_1\bar{\alpha}_1\alpha_2\,,$$

$$\mathcal{F}_2 = \theta_0\theta_1\alpha_2 - \bar{\theta}_0(\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \bar{\theta}_1\bar{\alpha}_1\alpha_2)$$

și

$$\mathcal{A}_3 = \theta_0(\theta_1\bar{\theta}_2\alpha_1 + \theta_2\bar{\alpha}_1\alpha_2 + \bar{\theta}_1\theta_2\alpha_1\bar{\alpha}_2),$$

$$\mathcal{B}_3 = -\theta_1\bar{\theta}_2\bar{\alpha}_1 + \theta_2\alpha_1\alpha_2 - \bar{\theta}_1\theta_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2,$$

$$\mathcal{C}_3 = \theta_0(\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2 - \theta_1\theta_2\bar{\alpha}_2) - \bar{\theta}_0(-\theta_1\bar{\theta}_2\bar{\alpha}_1 + \theta_2\alpha_1\alpha_2 - \bar{\theta}_1\theta_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2),$$

$$\bar{\mathcal{A}}_3 = |\mathcal{A}_3\mathcal{A}_2\mathcal{A}_1| = \frac{1}{\theta_0}\begin{vmatrix} \mathcal{D}_3 & \mathcal{E}_3 & \mathcal{F}_3 \\ \mathcal{A}_3 & \mathcal{B}_3 & \mathcal{C}_3 \\ \mathcal{A}_4 & \mathcal{B}_4 & \mathcal{C}_4 \end{vmatrix}, \tag{33}$$

cu

$$\mathcal{D}_3 = \theta_0(\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 - \bar{\theta}_1\alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 - \bar{\theta}_2\bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \theta_1\theta_2\alpha_1\alpha_3 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3),$$

$$\mathcal{E}_3 = \alpha_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 + \bar{\theta}_1\bar{\alpha}_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 - \bar{\theta}_2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \theta_1\theta_2\bar{\alpha}_1\alpha_3 + \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\alpha_3),$$

$$\mathcal{F}_3 = \theta_0(\theta_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 + \bar{\theta}_1\theta_2\alpha_3 + \theta_1\bar{\theta}_2\bar{\alpha}_2\alpha_3) - \bar{\theta}_0(\alpha_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3 + \bar{\theta}_1\bar{\alpha}_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 - \bar{\theta}_2\alpha_1\alpha_2\alpha_3 - \theta_1\theta_2\bar{\alpha}_1\alpha_3 + \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\alpha_3)$$

și

$$\mathcal{A}_4 = \theta_0(\theta_1\bar{\theta}_2\bar{\theta}_3\alpha_1 + \bar{\theta}_1\theta_2\bar{\theta}_3\alpha_1\bar{\alpha}_2 + \theta_2\bar{\theta}_3\bar{\alpha}_1\alpha_2 - \theta_1\theta_2\theta_3\alpha_1\bar{\alpha}_3 + \theta_3\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 - \bar{\theta}_1\theta_3\alpha_1\alpha_2\alpha_3 + \bar{\theta}_2\theta_3\bar{\alpha}_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 + \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\theta_3\alpha_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3),$$

$$\mathcal{B}_4 = -\theta_1\bar{\theta}_2\bar{\theta}_3\bar{\alpha}_1 + \theta_2\bar{\theta}_3\alpha_1\alpha_2 - \bar{\theta}_1\theta_2\bar{\theta}_3\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2 + \theta_1\theta_2\theta_3\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_3 + \theta_3\alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\theta}_1\theta_3\bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \bar{\theta}_2\theta_3\alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3,$$

$$\mathcal{C}_4 = \theta_0(\bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\bar{\theta}_3 - \theta_1\theta_2\bar{\theta}_3\alpha_2 - \bar{\theta}_1\theta_2\theta_3\bar{\alpha}_3 + \theta_1\theta_3\alpha_2\alpha_3 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\alpha}_1\alpha_3 + \theta_3\alpha_1\bar{\alpha}_2\alpha_3 + \bar{\theta}_1\theta_3\bar{\alpha}_1\alpha_2\alpha_3 + \bar{\theta}_2\theta_3\alpha_1\alpha_2\bar{\alpha}_3 - \bar{\theta}_1\bar{\theta}_2\theta_3\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_2\bar{\alpha}_3).$$

Cu ajutorul funcțiilor de rotații, $\mathcal{A}\mathcal{B}\mathcal{C}\mathcal{D}\mathcal{E}\mathcal{F}$ se pot exprima versorii $\bar{e}_i$ și $\bar{n}_i$ astfel

$$\begin{aligned} \sin\theta_0\bar{e}_i &= \mathcal{D}_i\bar{e}_0 + \mathcal{E}_i\bar{n}_0 + \mathcal{F}_i\bar{n}_1, \\ \sin\theta_0\bar{n}_i &= \mathcal{A}_i\bar{e}_0 + \mathcal{B}_i\bar{n}_0 + \mathcal{C}_i\bar{n}_1. \end{aligned} \tag{34}$$

c_1) Pentru triedrele oblice deformabile

$$T_{i+1}\begin{vmatrix} \overline{n}_i \\ n_{i+1} \\ e_{i+1} \end{vmatrix} = A_i\, T_i \begin{vmatrix} \overline{n}_{i-1} \\ \overline{n}_i \\ \overline{e}_i \end{vmatrix} \tag{35}$$

avem

$$\begin{aligned} \sin\theta_i\, \overline{e}_{i+1} &= \sin\theta_i \cos\alpha_i\, \overline{e}_i + \sin\alpha_i\, \overline{n}_{i-1} - \cos\theta_i \sin\alpha_i\, \overline{n}_i, \\ \sin\theta_i\, \overline{n}_{i+1} &= \sin\theta_i \sin\theta_{i+1} \sin\alpha_i\, \overline{e}_i - \sin\theta_{i+1} \cos\alpha_i\, \overline{n}_{i-1} + \\ &\quad + (\sin\theta_i \cos\theta_{i+1} + \sin\theta_{i+1} \cos\theta_i \cos\alpha_i)\, \overline{n}_i. \end{aligned} \tag{36}$$

Funcţiile de rotaţii pentru triedrele deformabile T_i^d (35) se obţin din funcţiile de rotaţii pentru triedrele oblice nedeformabile T_i^n (21) prin corespondenţele

$$\begin{gathered} \overline{e}_i \to \overline{n}_i\,;\ \overline{n}_i \to \overline{e}_{i+1}\,;\ \alpha_i \to \theta_{i+1}\,;\ \theta_i \to \alpha_i, \\ A_i\, B_i\, C_i \to A_i' B_i' C_i' \text{ şi } D_i\, E_i\, F_i \to D_{i+1}'\, E_{i+1}'\, F_{i+1}'. \end{gathered} \tag{37}$$

c_2) Corespunzător pentru triedrele oblice nedeformabile

$$\mathcal{T}_{i+1}\begin{vmatrix} \overline{e}_i \\ \overline{e}_{i+1} \\ \overline{n}_{i+1} \end{vmatrix} = \mathcal{A}_i\, \mathcal{T}_i \begin{vmatrix} \overline{e}_{i-1} \\ \overline{e}_i \\ \overline{n}_i \end{vmatrix}, \tag{38}$$

conform corespondentelor (2), se obţine

$$\begin{aligned} \sin\alpha_i\, \overline{n}_{i+1} &= \sin\alpha_i \cos\theta_i\, \overline{n}_i + \sin\theta_i\, \overline{e}_{i-1} - \cos\alpha_i \sin\theta_i\, \overline{e}_i, \\ \sin\alpha_i\, \overline{e}_{i+1} &= \sin\alpha_i \sin\alpha_{i+1} \sin\theta_i\, \overline{n}_i - \sin\alpha_{i+1} \cos\theta_i\, \overline{e}_{i-1} + \\ &\quad + (\sin\alpha_i \cos\alpha_{i+1} + \sin\alpha_{i+1} \cos\alpha_i \cos\theta_i)\, \overline{e}_i. \end{aligned} \tag{39}$$

La fel ca mai sus, funcţiile de rotaţii pentru aceste triedre nedeformabile $\mathcal{T}_i^n$ (38) se pot obţine din acelea ale triedrelor oblice deformabile $\mathcal{T}_i^d$ (28) prin corespondenţele

$$\begin{gathered} \overline{n}_i \to \overline{e}_i \quad \overline{e}_i \to \overline{n}_{i+1} \quad \alpha_i \to \theta_i \quad \theta_i \to \alpha_{i+1}, \\ \mathcal{A}_i\, \mathcal{B}_i\, \mathcal{C}_i \to \mathcal{A}_i'\, \mathcal{B}_i'\, \mathcal{C}_i' \text{ şi } \mathcal{D}_i\, \mathcal{E}_i\, \mathcal{F}_i \to \mathcal{D}_{i+1}'\, \mathcal{E}_{i+1}'\, \mathcal{F}_{i+1}'. \end{gathered} \tag{40}$$

Determinarea funcțiilor de translații. Aceste funcții se determină prin transformările succesive ale vectorilor de poziție în diverse triedre (fig. 3,4,5). Pentru relația vectorială

$$\overline{R}_i = \overline{R}_i^0 + \overline{R}_{i+1}, \tag{41}$$

în care $\overline{R}_i^0$ este cunoscut prin componentele sale pe axele triedrului T_i, avem relația matriceală

$$| R_i - R_i^0 | = A_i^t | R_{i+1} |. \tag{42}$$

La relația vectorială

$$\overline{R}_i = \overline{R}_i^+ + \overline{R}_{i+1}, \tag{43}$$

în care $\overline{R}_i^+$ este cunoscut prin componentele sale pe axele triedrului T_{i+1}, corespunde relația matriceală

$$| R_i | = A_i^t | R_i^+ + R_{i+1} |. \tag{44}$$

Din aproape în aproape se ajunge la

$$R_1 = R_1^0 + A_1^t R_2^0 + A_1^t A_2^t R_3^0 + \ldots + A_1^t A_2^t \ldots A_{i-2}^t R_{i-1}^0 + \\ + A_1^t A_2^t \ldots A_{i-1}^t R_i \tag{45}$$

sau

$$R_1 = R_1^0 + \overline{A}_1^t R_2^0 + \overline{A}_2^t R_3^0 + \ldots + \overline{A}_{i-2}^t R_{i-1}^0 + \overline{A}_{i-1}^t R_i.$$

Asemănător avem

$$R_1 = A_1^t R_1^+ + A_1^t A_2^t R_2^+ + \ldots + A_1^t A_2^t \ldots A_{i-1}^t (R_{i-1}^+ + R_i) \tag{46}$$

sau

$$R_1 = \overline{A}_1^t R_1^+ + \overline{A}_2^t R_2^+ + \ldots + \overline{A}_{i-1}^t (R_{i-1}^+ + R_i).$$

Dacă vectorii de poziție ai triedrelor succesive $\overline{T_i T_{i+1}}$ se descompun în componente simple atît în triedrul T_i, cît și în triedrul T_{i+1}, adică $\overline{T_i T_{i+1}} = \overline{R}_i^0 + \overline{R}_i^+$, atunci cele două relații anterioare (45), (46) se pot restrînge într-una generală :

$$R_1 = R_1^0 + \overline{A}_1^t (R_1^+ + R_2^0) + \overline{A}_2^t (R_2^+ + R_3^0) + \ldots + \\ + \overline{A}_{i-2}^t (R_{i-2}^+ + R_{i-1}^0) + \overline{A}_{i-1}^t (R_{i-1}^+ + R_i). \tag{47}$$

Relații simetrice se obțin pentru vectorii de poziție $\overline{\mathcal{R}}_i^0$, $\overline{\mathcal{R}}_i^+$ ai triedrelor $\mathcal{T}$.

Exemplificînd pentru triedrele oblice nedeformabile $T_i[\overline{n}_{i-1}, \overline{e}_{i-1}, \overline{e}_i]$ aşezate în punctele $\mathcal{A}_i$ de pe axele $\overline{e}_i$ (fig. 3,4,5), cu vectorii de poziţie succesivi $\overline{\mathcal{R}}_i^+[\sigma_i, 0, s_{i+1}]$ şi cu vectorul final $\overline{R}_i[0, 0, -s_i]$, se pot găsi componentele vectorului $\overline{R}_1$ (sau $\overline{V}_i$) [1] (fig. 1) pe axele triedrului de referinţă $T_1[\overline{n}_0, \overline{e}_0, \overline{e}_i]$, adică

$$\sin \alpha_0 \overline{V}_i(R_1) = G_i \overline{n}_0 + H_i \overline{e}_0 + K_i \overline{e}_1 . \tag{48}$$

Într-adevăr, avem

$$\overline{A}_i^t = \frac{1}{\alpha_0} \begin{vmatrix} D_i & A_i & A_{i+1} \\ E_i & B_i & B_{i+1} \\ F_i & C_i & C_{i+1} \end{vmatrix}; \quad \mathcal{R}_i^+ = \begin{vmatrix} \sigma_i \\ 0 \\ s_{i+1} \end{vmatrix}; \quad (\mathcal{R}_{i-1}^+ + R_i) = \begin{vmatrix} \sigma_{i-1} \\ 0 \\ 0 \end{vmatrix}, \tag{49}$$

astfel că în conformitate cu (47) se găseşte

$$\begin{aligned} G_i &= \sigma_1 D_1 + s_2 A_2 + \sigma_2 D_2 + s_3 A_3 + \ldots + s_{i-1} A_{i-1} + \sigma_{i-1} D_{i-1} , \\ H_i &= \sigma_1 E_1 + s_2 B_2 + \sigma_2 E_2 + s_3 B_3 + \ldots + s_{i-1} B_{i-1} + \sigma_{i-1} E_{i-1} , \\ K_i &= \sigma_1 F_1 + s_2 C_2 + \sigma_2 F_2 + s_3 C_3 + \ldots + s_{i-1} C_{i-1} + \sigma_{i-1} F_{i-1} . \end{aligned} \tag{50}$$

Funcţiile de translaţii $G_i H_i K_i$ cuprind pe lîngă parametrii translaţiei s_i şi parametrii rotaţiilor θ_i prin intermediul funcţiilor de rotaţii $A\ B\ C\ D\ E\ F$.

O altă exemplificare la triedrele oblice deformabile $\mathcal{T}_i[\overline{e}_{i-1}, \overline{n}_{i-1}, \overline{n}_i]$ aşezate în punctele A_{i-1}, de pe axele $\overline{e}_{i-1}$ (fig. 3,4,5), cu vectorii de poziţie succesivi $\overline{R}_i^0[s_{i-1}, 0, \sigma_i]$, cu vectorul de poziţie iniţial $\overline{R}_1^0 = 0$ şi cu vectorul final $\overline{R}_{i+1} = 0$, redă componentele vectorului $\overline{R}_1$ (sau $\overline{V}_i$) [1] (fig. 2) pe axele triedrului de referinţă $\mathcal{T}_1[\overline{e}_0, \overline{n}_0, \overline{n}_1]$, adică

$$\sin \theta_1 \overline{V}_i(R_1) = \mathcal{G}_i \overline{e}_0 + \mathcal{H}_i \overline{n}_0 + \mathcal{K}_i \overline{n}_1 . \tag{51}$$

Deoarece avem

$$\overline{\mathcal{A}}_i^t = \frac{1}{\theta_1} \begin{vmatrix} \mathcal{D}_i & \mathcal{A}_i & \mathcal{A}_{i+1} \\ \mathcal{E}_i & \mathcal{B}_i & \mathcal{B}_{i+1} \\ \mathcal{F}_i & \mathcal{C}_i & \mathcal{C}_{i+1} \end{vmatrix}, \tag{52}$$

se obţin funcţiile de translaţii

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i &= s_1 \mathcal{D}_1 + \sigma_2 \mathcal{A}_2 + s_2 \mathcal{D}_2 + \ldots + \sigma_{i-1} \mathcal{A}_{i-1} + s_{i-1} \mathcal{D}_{i-1} + \sigma_i \mathcal{A}_i , \\ \mathcal{H}_i &= s_1 \mathcal{E}_1 + \sigma_2 \mathcal{B}_2 + s_2 \mathcal{E}_2 + \ldots + \sigma_{i-1} \mathcal{B}_{i-1} + s_{i-1} \mathcal{E}_{i-1} + \sigma_i \mathcal{B}_i , \\ \mathcal{K}_i &= s_1 \mathcal{F}_1 + \sigma_2 \mathcal{C}_2 + s_2 \mathcal{F}_2 + \ldots + \sigma_{i-1} \mathcal{C}_{i-1} + s_{i-1} \mathcal{F}_{i-1} + \sigma_i \mathcal{C}_i , \end{aligned} \tag{53}$$

care, desigur, sînt în concordanţă cu cele anterioare.

Ecuațiile matriceale ale deplasărilor. Conform celor stabilite anterior, ecuațiile de rotații se obțin din egalarea componentelor cu semn schimbat ale versorilor $\bar{e}_i$ și $\bar{e}_j^*$. Avem simetric

$$T_i = \overline{A}_{i-1} T_1 \quad \text{și} \quad T_j^* = \overline{A}_{j-1}^* T_1^* . \tag{54}$$

Între bazele de versori ai triedrelor de referință pentru cele două notații, directe simple și inverse stelate, avem

$$T_1^* = - Q T_1 . \tag{55}$$

Pentru a reduce bazele de versori T_i sau T_j^* numai la versorul $\bar{e}_i$ sau $\bar{e}_j^*$, întrebuințăm operația

$$T_{ei} = Q_0 T_i ; \quad T_{ej}^* = Q_0 T_j^* . \tag{56}$$

Deoarece

$$\bar{e}_i + \bar{e}_j^* = 0 \qquad \text{sau} \qquad T_{ei} + T_{ej}^* = 0 ,$$

se ajunge la ecuația matriceală

$$Q_0 \overline{A}_{i-1} = Q_0 \overline{A}_{j-1}^* Q , \tag{57}$$

care livrează trei ecuații de rotații, dintre care numai două sînt independente.

Spre exemplu, la triedrele oblice nedeformabile

$$T_i[\bar{n}_{i-1}, \bar{e}_{i-1}, \bar{e}_i] \quad \text{și} \quad T_j^*[\bar{n}_j^*, \bar{e}_{j-1}^*, \bar{e}_j^*]$$

matricea Q_0 este

$$Q_0 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} , \tag{58}$$

singulară, astfel că

$$T_{ei} \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{e}_i \end{vmatrix} = Q_0 T_i \begin{vmatrix} \bar{n}_{i-1} \\ \bar{e}_{i-1} \\ \bar{e}_i \end{vmatrix} ; \qquad T_{ej}^* \begin{vmatrix} 0 \\ 0 \\ \bar{e}_j^* \end{vmatrix} = Q_0 T_j^* \begin{vmatrix} \bar{n}_{j-1}^* \\ \bar{e}_{j-1}^* \\ \bar{e}_j^* \end{vmatrix} . \tag{59}$$

Pentru triedrele de referință $T_1[\bar{n}_0, \bar{e}_0, \bar{e}_1]$, și $T_1^*[\bar{n}_0^*, \bar{e}_0^*, \bar{e}_1^*]$, cu $\bar{n}_0^* = -\bar{n}_0, \bar{e}_0^* = -\bar{e}_1, \bar{e}_1^* = -\bar{e}_0$, matricea Q de transformare este

$$Q = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}, \tag{60}$$

s imetrică, ortogonală. Cu ajutorul ei se verifică

$$T_1^* \begin{vmatrix} \bar{n}_0^* \\ \bar{n}_0^* \\ \bar{e}_1^* \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} \bar{n}_0 \\ \bar{e}_1 \\ \bar{e}_0 \end{vmatrix} = - Q T_1 \begin{vmatrix} \bar{n}_0 \\ \bar{e}_0 \\ \bar{e}_1 \end{vmatrix}. \tag{61}$$

Înlocuind în ecuația matriceală a rotațiilor (57) se ajunge la

$$A_i = A_j^*; \quad B_i = C_j^*; \quad C_i = B_j^*; \quad i + j = p + 1, \tag{62}$$

care formează setul ecuațiilor (două ecuații) analitice ale rotațiilor, funcțiile rotațiilor A,B,C fiind determinate anterior.

La celelalte triedre oblice deformabile $\mathcal{T}_{i+1}[\bar{e}_i, \bar{n}_i, \bar{n}_{i+1}]$ și $\mathcal{T}_{j+1}^*[\bar{e}_j^*, \bar{n}_j^*, \bar{n}_{j+1}^*]$ se modifică numai matricea Q_0, care este

$$Q_0 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \tag{63}$$

matrice Q rămînînd aceeași. Din ecuația matriceală (57) scrisă pentru indici măriți cu o unitate,

$$Q_0 \bar{\mathcal{A}}_i = Q_0 \bar{\mathcal{A}}_j^* Q, \tag{64}$$

se găsesc ecuațiile analitice (două ecuații)

$$\mathcal{D}_i = \mathcal{D}_j^*; \quad \mathcal{E}_i = \mathcal{F}_j^*; \quad \mathcal{F}_i = \mathcal{E}_j^*; \quad i + j = p, \tag{65}$$

care cuprind numai parametrii rotațiilor.

Pentru setul ecuațiilor analitice de translații (trei ecuații) se egalează componentele a doi vectori de poziție ai aceluiași punct P într-un singur triedru de referință, dar reprezentînd fiecare însumările vectoriale

ale celor două părți, simple și stelate, ale lanțului cinematic. Conform figurii (6), avem vectorial

$$\bar{r}_1 + \bar{R}_1 = \bar{R}_1^*, \tag{66}$$

$$\bar{R}_i - \bar{r}_i = \bar{R}_j = \bar{R}_j^*. \tag{67}$$

Vectorii $\bar{r}_1$, $\bar{R}_1$ și $(\bar{R}_1^*)$ sînt cunoscuți prin componentele lor din triedrul T_1, vectorul $\bar{R}_1^*$ are componentele date pe axele triedrului T_1^*, vectorii $\bar{r}_i$, $\bar{R}_i$, $(\bar{R}_j^*)$ au componentele cunoscute față de triedrul T_i, iar vectorul $\bar{R}_j^*$ este cunoscut prin componentele sale în triedrul T_j^*.

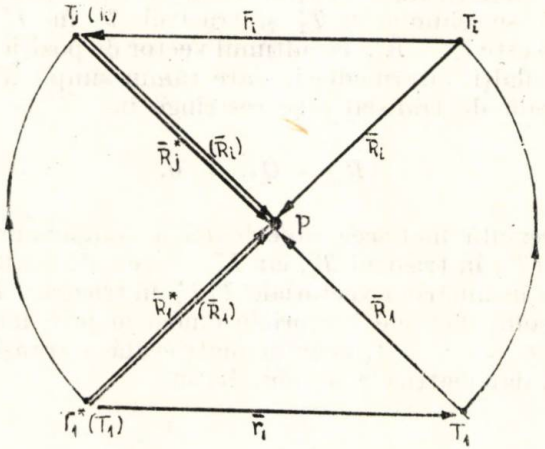


Fig. 6

Utilizînd matricea Q (55), (60) de transformare a componentelor din T_1^* în T_1 și relația matriceală (47), prin care contururile vectoriale ale lanțului sînt transformate față de axele triedrelor de referință, ecuația (66) devine matriceal

$$\begin{aligned} r_1 + [R_1^0 + \overline{A}_1^t(R_1^+ + R_2^0) + \overline{A}_2^t(R_2^+ + R_3^0) + \ldots + \\ + \overline{A}_{i-2}^t(R_{i-2}^+ + R_{i-1}^0) + \overline{A}_{i-1}^t(R_{i-1}^+ + R_i)] + \\ + Q[R_1^0 + \overline{A}_1^t(R_1^+ + R_2^0) + \overline{A}_2^t(R_2^+ + R_3^0) + \ldots + \\ + \overline{A}_{j-2}^t(R_{j-2}^+ + R_{j-1}^0) + \overline{A}_{j-1}^t(R_{j-1}^+ + R_j)]^* = 0. \end{aligned} \tag{68}$$

În mod corespunzător, ecuația vectorială (67) capătă forma matriceală pentru componentele vectoriale respective

$$A_{i-1}^t(R_i - r_i) + Q[\overline{A}_{j-1}^t R_j]^* = 0, \tag{69}$$

astfel că ecuația matriceală (69) rămîne sub forma

$$[(r_1 + R_1^0) + \overline{A}_1^t(R_1^+ + R_2^0) + \overline{A}_2^t(R_2^+ + R_3^0) + \ldots +$$

$$+ \overline{A}_{i-2}^t(R_{i-2}^+ + R_{i-1}^0) + \overline{A}_{i-1}^t(R_{i-1}^+ + r_i)] +$$

$$+ Q[R_1^0 + \overline{A}_1^t(R_1^+ + R_2^0) + \overline{A}_2^t(R_2^+ + R_3^0) + \ldots +$$

$$+ \overline{A}_{j-2}^t(R_{j-2}^+ + R_{j-1}^0) + \overline{A}_{j-1}^t(R_{j-1}^+)]^* = 0, \tag{70}$$

ceea ce se verifică direct dacă $P \equiv T_j^*$, adică $\overline{R}_j^* = 0$ și deci $\overline{R}_i = \overline{r}_i$. Aceeași ecuație matriceală se obține dacă se consideră, conform figurii 6, că triedrul T_1 se schimbă în T_1^* și triedrul T_i în T_j^*. Atunci primul vector de poziție este $\overline{r}_1 + \overline{R}_1^0$, iar ultimul vector de poziție $\overline{R}_{i-1}^+ + \overline{r}_i$, spre deosebire de ceilalți intermediari, care rămîn simpli $\overline{R}_j^0$ sau $\overline{R}_j^+$. Astfel ecuația matriceală de translație se restrînge în

$$(R_1) + QR_1^* = 0, \tag{71}$$

unde (R_1) reprezintă matricea unicoloană a componentelor însumărilor vectoriale (T_1), (T_i) în triedrul T_1, iar R_1^* reprezintă matricea unicoloană a componentelor însumărilor vectoriale $T_1^*T_j^*$ în triedrul T_1^*.

Folosind componentele vectoriale omogene prin introducerea parametrului $t_{i-1} = t_i = t_{i+1} = 1$, ecuația matriceală a translațiilor își menține forma (71), dar matricele se schimbă în

$$(R_1) \to \left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline (R_1) & \end{array}\right|; \quad R_1^* \to \left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline R_1^* & \end{array}\right|,$$

$$(R_i) \to \left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline (R_i) & \end{array}\right|; \quad R_j^* \to \left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline R_j^* & \end{array}\right| \tag{72}$$

și

$$Q \to \left|\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & Q & \\ 0 & & & \end{array}\right|. \tag{73}$$

Deoarece conform cu (42), (44) avem

$$\left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline R_i & \end{array}\right| = M_i \left|\begin{array}{c|c} 1 & \\ \hline R_{i+1} & \end{array}\right|, \quad \text{cu} \quad M_i = \left|\begin{array}{c|c} 1 & 0 \\ \hline R_i^0 & A_i^t \end{array}\right|, \tag{74}$$

se găsește din aproape în aproape

$$(R_1) = \overline{M}_{i-1}(R_i); \qquad R_1^* = \overline{M}_{j-1}^* R_j^*, \tag{75}$$

cu

$$\overline{M}_i = M_1 M_2 \dots M_i . \tag{76}$$

Ecuația matriceală a translațiilor devine

$$\overline{M}_{i-1}(R_i) + Q\overline{M}_{j-1}^* R_j^+ = 0. \tag{77}$$

Această ecuație livrează setul ecuațiilor analitice ale translațiilor (trei ecuații).

Primită la redacție la 24 noiembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A. H. Soni, Chr, Pelecudi, *Determinarea vectorială a ecuațiilor generale de mișcare ale mecanismelor tridimensionale*, St. cerc. mec. apl., **29**, *1* (1970).
2. Chr. Pelecudi, *Contribuții la studiul matriceal al mecanismelor spațiale*, St. cercet. mec. apl., **29**, *6* (1970).
3. — *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.
4. R. S. Hartenberg, J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*, McGraw-Hill Book Comp., 1964.

CALCULUL CURSEI ELEMENTULUI CONDUS LA MECANISMELE SPAȚIALE CU PATRU ELEMENTE *)

de PĂUN ANTONESCU
Institutul Politehnic București

Lucrarea cuprinde metode originale grafice și analitice pentru calculul cursei elementului condus la mecanismele spațiale articulate manivelă-piston translant, manivelă-balansier oarecare și ortogonal (la care axele fixe de rotație sînt perpendiculare).
Soluțiile grafice, găsite cu ajutorul principiilor geometriei descriptive, se pot verifica analitic cu ajutorul relațiilor determinate pentru calculul cursei pistonului sau a balansierului.

Trasarea corectă a pozițiilor mecanismelor pentru un ciclu cinematic complet este strîns legată de determinarea în prealabil a pozițiilor extreme ale elementului condus.

Cunoscînd pozițiile extreme (punctele moarte) se calculează imediat cursa liniară sau unghiulară a elementului condus-considerat.

Determinarea pozițiilor extreme și implicit a cursei la mecanismele plane cu patru elemente este o problemă simplă și cunoscută.

Lucrarea cuprinde metode originale grafice și analitice pentru calculul cursei elementului condus la mecanismele spațiale cu patru elemente

Sînt considerate mecanismele spațiale articulate manivelă-piston. manivelă-balansier oarecare și ortogonal (la care axele fixe de rotație sînt perpendiculare).

Soluțiile grafice, găsite cu mijloacele geometriei descriptive, sînt verificate analitic cu ajutorul relațiilor determinate pentru calculul cursei pistonului sau a balansierului.

1. TRASAREA POZIȚIEI MECANISMELOR SPAȚIALE CU PATRU ELEMENTE

Se consideră mai întîi cazul mecanismului spațial manivelă-piston (fig. 1.1) care poate fi reprezentat oricînd cu axele (D), (Δ) în poziții particulare [1].

*) Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23—27 iunie 1969.

Trasarea poziției mecanismului se poate face fie grafic pentru fiecare poziție a manivelei *1*, în dublă proiecție ortogonală (fig. 1.2) sau în proiecție perspectivă (fig. 1.1), fie analitic cu ajutorul relațiilor de calcul a poziției pistonului în funcție de unghiul de manivelă.

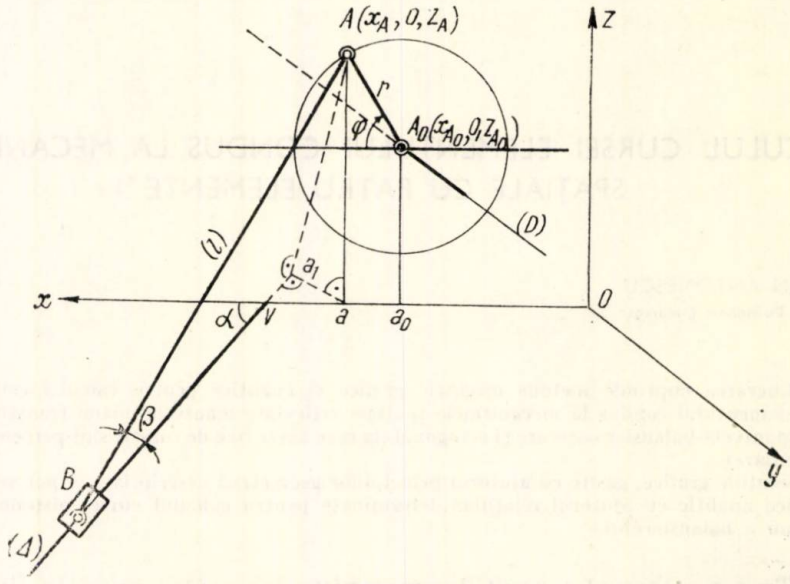


Fig. 1.1

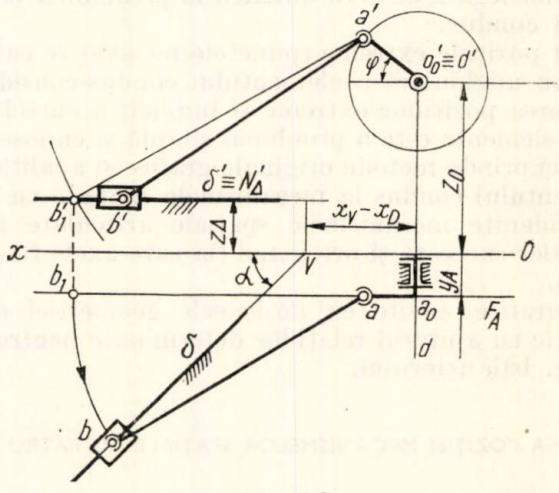


Fig. 1.2

Considerînd cercul de manivelă cuprins în planul *xoz* coordonatele punctului A pentru o poziție φ a manivelei sînt (fig. 1.1)

$$x_A = x_0 + r\cos\varphi\,; \quad y_A = 0\,; \quad z_A = z_0 + r\sin\varphi, \tag{1.1}$$

unde r este raza manivelei A_0A, iar x_0, 0, z_0 sînt coordonatele punctului A_0.

Cunoscînd lungimea l a bielei AB se poate scrie ecuația sferei cu centrul în A și raza egală cu l

$$[x - (x_0 + r\cos\varphi)]^2 + y^2 + [z - (z_0 + r\sin\varphi)]^2 - l^2 = 0. \quad (1.2)$$

Intersecția sferei cu dreapta (Δ) de ecuație

$$y = (x - x_v)\operatorname{tg}\alpha; \qquad z = z_\Delta = \text{const.}, \quad (1.3)$$

determină poziția pistonului *3*, prin relațiile:

$$x_B = \cos^2\alpha\left\{m + r\cos\varphi \pm \right.$$

$$\left. \pm\sqrt{(m + r\cos\varphi)^2 - \frac{1}{\cos^2\alpha}[n + 2rx_0\cos\varphi + (z_0 - z_\Delta)\sin\varphi]}\right\}, \quad (1.4)$$

$$y_B = (x_B - x_v)\operatorname{tg}\alpha,$$

$$z_B = z_\Delta,$$

unde

$$m = x_0 + x_v\operatorname{tg}^2\alpha,$$

$$n = x_0^2 + r^2 - l^2 + (z_0 - z_\Delta)^2 + x_v^2\operatorname{tg}^2\alpha.$$

Evident că din cele două soluții obținute pentru poziția punctului B se va reține cea care corespunde continuității mișcării în funcție de poziția inițial aleasă.

Dînd lui φ din relația (1.4) valori cuprinse între 0° și 360° se determină coordonatele x_B, y_B ale punctului B pentru întreg ciclul cinematic.

În cazul mecanismului patrulater spațial ortogonal (fig. 1.3) determinarea poziției elementului condus *3* în funcție de unghiul φ se face prin intersecția sferei de ecuație (1.2) cu cercul (C_B) de ecuație

$$(x - x_{B_0})^2 + (y - y_{B_0})^2 - c^2 = 0; \; z = z_B, \quad (1.5)$$

unde $c = BB_0$ și reprezintă lungimea balansierului.

Rezultă astfel pentru punctul B coordonatele de poziție

$$x_B = \frac{1}{8\alpha^2 + 2k}\{p - 4\alpha(\beta + m) \pm$$

$$\pm\sqrt{[p - 4\alpha(\beta + m)]^2 - 4(4\alpha^2 + k)(\beta^2 + 2m\beta + n)}\},$$

$$y_B = y_{B_0} \pm \sqrt{c^2 - (x_B - x_{B_0})^2}, \quad (1.6)$$

$$z_B = z_{B_0},$$

unde k, m, n, p sînt parametri constanți și se calculează cu relațiile

$$k = y_{B_0}^2,$$

$$m = r^2 - l^2 + c^2 + x_0^2 + y_{B_0}^2 - x_{B_0}^2 + (z_{B_0} - z_0)^2,$$

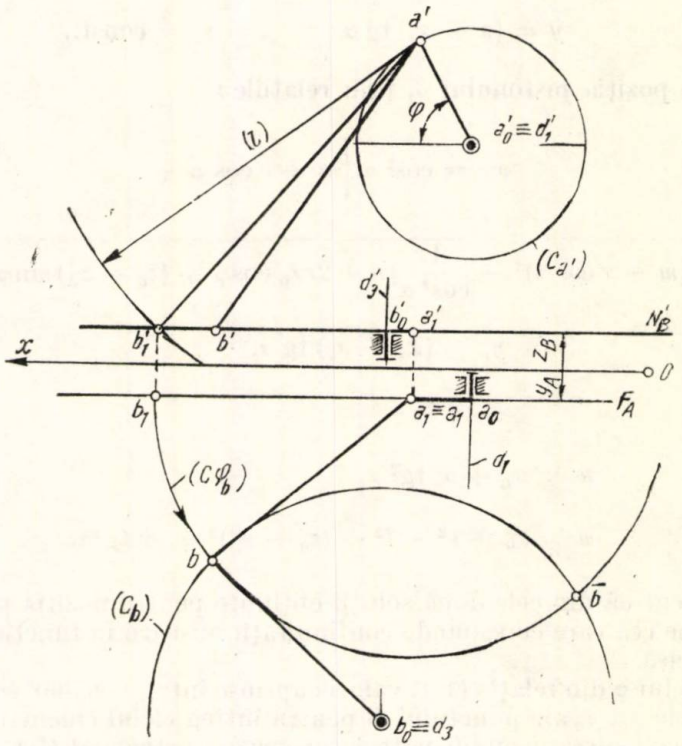


Fig. 1.3

$$n = [r^2 - l^2 + c^2 + x_0^2 + y_{B_0}^2 - x_{B_0}^2 + (z_{B_0} - z_0)^2]^2 - c^2 y_{B_0}^2 + x_{B_0}^2 y_{B_0}^2,$$

$$p = 2x_{B_0} y_{B_0}^2,$$

iar α, β sînt parametri variabili, în funcție de unghiul φ, și au expresiile

$$\alpha = x_{B_0} - x_0 - r\cos\varphi,$$

$$\beta = 2r[x_0 \cos\varphi + (z_{B_0} - z_0)\sin\varphi].$$

La mecanismul patrulater spațial oarecare (fig. 1.4) coordonatele punctului B rezultă analog din intersecția sferei de ecuație (1.2) cu planul P_B paralel cu axa ox de ecuație

$$z - (y + y_{B_0})\operatorname{ctg}\gamma - z_{B_0} = 0, \tag{1.7}$$

se obține ecuația unui cerc care apoi se intersectează cu cercul (C_B) cuprins în același plan P_B și având ecuația

$$(x - x_{B_0})^2 + (y - y_{B_0})^2 + (y + y_{B_0})^2 \operatorname{ctg}^2 \gamma - c^2 = 0, \qquad (1.8)$$

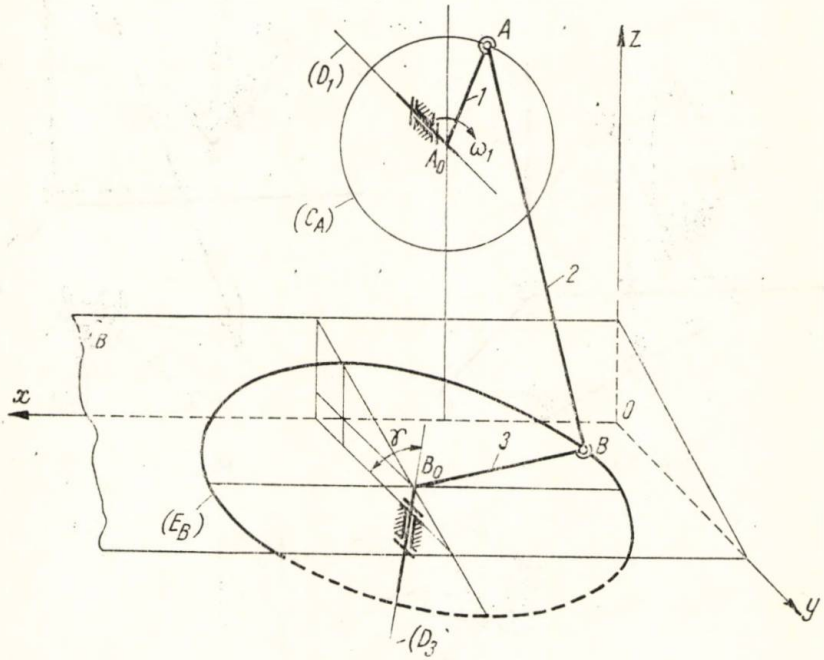


Fig. 1.4

unde γ este unghiul ascuțit format în spațiu de axele fixe de rotație (D_1), (D_3) (fig. 1.4).

2. TEOREMA COPLANARITĂȚII ÎN POZIȚIILE EXTREME

Pentru mecanismul patrulater spațial ortogonal de tipul manivelă-balansier s-a demonstrat [4] cu ajutorul planului de viteze că în pozițiile extreme ale elementului condus, axa de rotație a manivelei, manivela și biela sînt coplanare.

Teorema coplanarității se poate enunța însă mai general pentru mecanismele spațiale articulate cu patru elemente după cum urmează:

„În pozițiile extreme ale unuia din elementele conducător sau condus biela este situată în același plan cu celălalt element și axa de rotație a acestuia".

În cazul mecanismelor spațiale de tipul manivelă-piston (fig. 1.1), manivelă-balansier (fig. 1.4) este evident că numai elementul condus (pistonul sau balansierul) poate ocupa poziții extreme, poziții în care biela este coplanară cu celălalt element (manivela) și axa de rotație a acesteia.

La mecanismele spaţiale de tipul balansier-piston (fig. 2.1) sau balansier-balansier (fig. 2.2), ambele elemente conducător şi condus pot ocupa poziţii extreme.

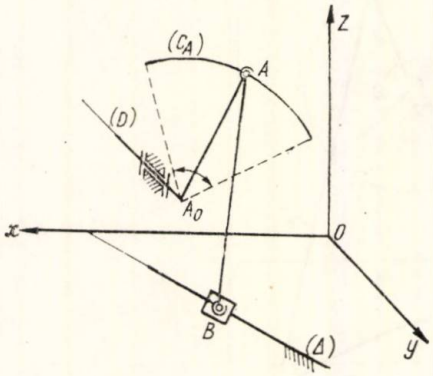


Fig. 2.1

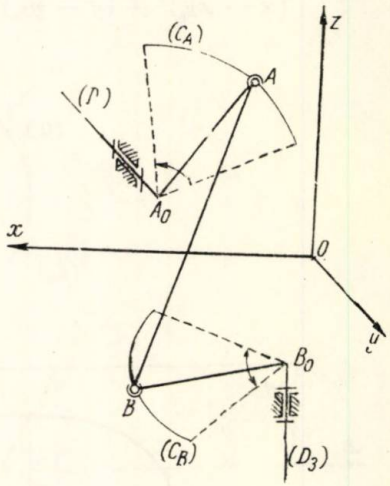


Fig. 2.2

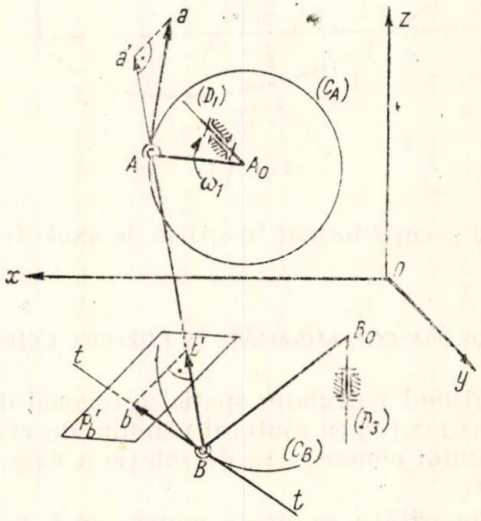


Fig. 2.3

La mecanismul balansier-piston (fig. 2.1) în poziţiile extreme ale balansierului A_0A, biela AB este perpendiculară pe ghidajul fix (Δ).

Teorema coplanarităţii se poate demonstra foarte uşor folosind metoda proiecţiei pentru determinarea vitezelor (fig. 2.3).

Aşa de exemplu cunoscînd viteza punctului A se poate determina viteza lui B la intersecţia direcţiei tt cu planul $P_{b'}$, dus prin b' şi perpendi-

cular pe AB. Punctul b' se obține conform metodei proiecției prin deplasarea vectorului Aa' (proiecția lui V_A pe AB) în punctul B, astfel ca

$$\mathrm{pr}_{AB}\overline{V}_A = \mathrm{pr}_{AB}\overline{V}_B. \tag{2.1}$$

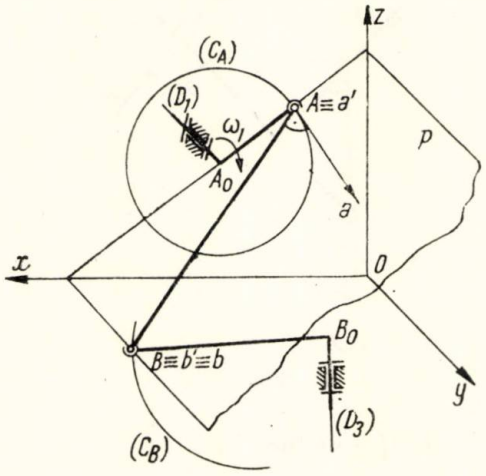


Fig. 2.4

Cum în pozițiile extreme ale elementelor viteza acestora este zero rezultă că și proiecția acestor viteze pe orice direcție este nulă. Astfel, dacă vom considera o poziție extremă a punctului B, în care mișcarea își schimbă sensul, viteza sa va fi nulă și deci (fig. 2.4)

$$\mathrm{pr}_{AB}\overline{V}_B = \mathrm{pr}_{AB}\overline{V}_A = 0. \tag{2.2}$$

Cum însă $\overline{V}_A \neq 0$, din relația (2.2) rezultă că în poziția extremă

$$\overline{V}_A \perp \overline{AB}. \tag{2.3}$$

Elementul *1* având mișcare de rotație în jurul axei (D_1), viteza oricărui punct este perpendiculară pe planul P_A format de axa de rotație și punctul respectiv.

Cum raza manivelei A_0A este cuprinsă în acest plan P_A rezultă

$$\overline{V}_A \perp \overline{A_0A}, \quad \overline{V}_A \perp D_1. \tag{2.4}$$

Relațiile (2.3), (2.4) arată că în pozițiile extreme ale punctului B, viteza punctului A este perpendiculară pe AB, A_0A, D_1, ceea ce înseamnă că în aceste poziții biela AB, manivela A_0A și axa D_1 sînt conținute în același plan P: $\overline{V}_A \perp (AB, A_0A, D_1)$.

În cazul mecanismului balansier-piston (fig. 2.1), pentru o poziție extremă a balansierului, viteza lui A este zero deci și proiecția pe direcția

AB. Aplicînd metoda proiecției rezultă

$$\mathrm{pr}_{AB}\overline{V}_A = \mathrm{pr}_{AB}\overline{V}_B = 0. \tag{2.5}$$

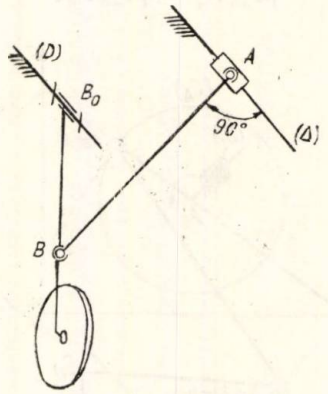


Fig. 2.5

Presupunînd $V_B \neq 0$ se deduce că

$$\overline{V}_B \perp AB. \tag{2.6}$$

Însă $\overline{V}_B \parallel \Delta$ și deci în pozițiile extreme ale balansierului biela este perpendiculară pe ghidajul fix al pistonului *3*

$$\overline{AB} \perp \Delta. \tag{2.7}$$

Relația (2.7) echivalează în cazul mecanismului piston-balansier cu teorema coplanarității.

Un exemplu în acest sens îl constituie mecanismul trenului de aterizare (fig. 2.5) care este un mecanism de tipul piston-balansier. Poziția în care mecanismul este folosit la rularea avioanelor pe sol corespunde unei poziții extreme a balansierului B_0B în care situație biela AB este perpendiculară pe axul fix Δ al pistonului de acționare.

3. DETERMINAREA GRAFICĂ A POZIȚIILOR EXTREME

La baza determinării pozițiilor extreme stă teorema coplanarității studiată în paragraful anterior.

În cazul mecanismului manivelă-piston (fig. 3.1) teorema coplanarității arată că, în pozițiile extreme B_I, B_{II} ale pistonului *3*, axa de rotație fixă (D), manivela (A_0A) și biela (AB) sînt conținute în același plan P_I, respectiv P_{II}.

Axa fixă (D) fiind dreaptă de capăt rezultă că și planele P_I, P_{II} care o conțin sînt plane de capăt, proiectante pe planul vertical de proiecție. Metoda de determinare a pozițiilor extreme constă în următoarele:

Se rotesc planele P_I, P_{II} în jurul axei comune (D) pînă se suprapun peste planul de nivel N_D, situație în care punctele A_I, A_{II} (fig. 3.1) ajung în pozițiile $\overline{A}_I$ $(\overline{a}_I, \overline{a}'_I)$, $\overline{A}_{II}$ $(\overline{a}_{II}, \overline{a}'_{II})$ diametral opuse (fig. 3.2).

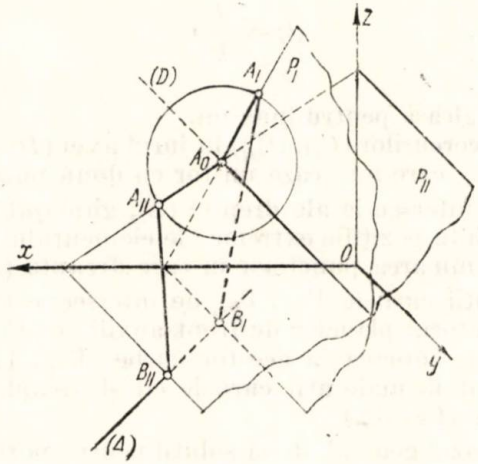


Fig. 3.1

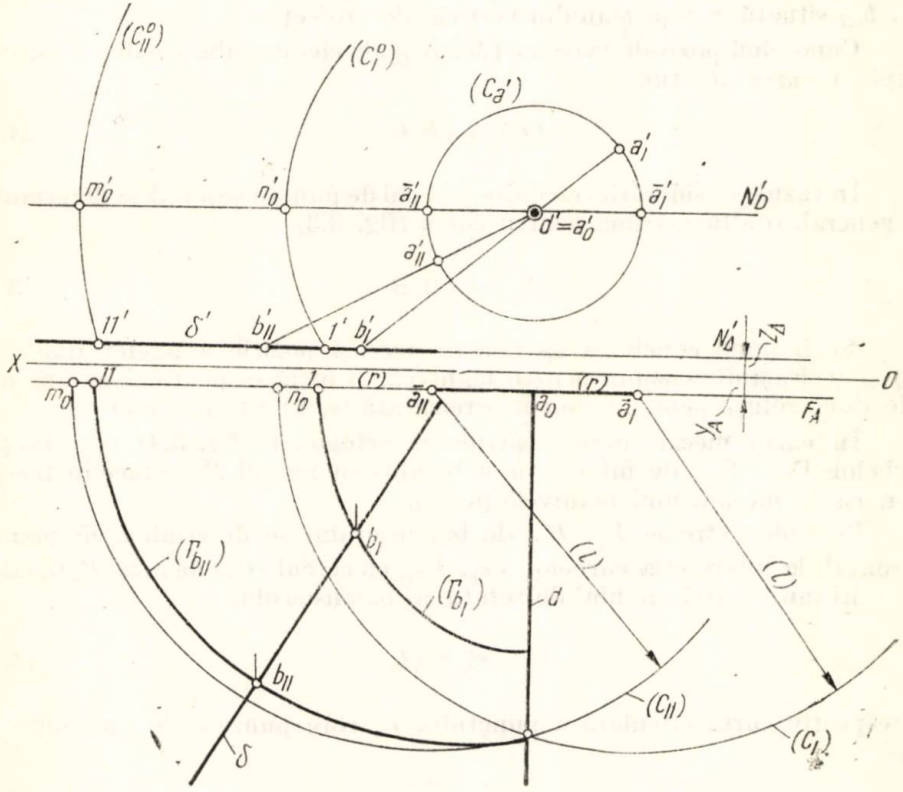


Fig. 3.2

Cunoscînd lungimea bielei $AB = l$ se construiesc, în proiecție orizontală, cercurile (C_I), (C_{II}) cu centrele în punctele $\bar{a}_I$, $\bar{a}_{II}$ și avînd razele egale cu

$$(l) = \frac{l}{k_i}, \tag{3.1}$$

unde k_i este scara aleasă pentru lungimi.

Prin rotirea cercurilor (C_I), (C_{II}) în jurul axei (D) se obțin suprafețele de revoluție Σ_I, Σ_{II} care formează un tor cu două pînze.

Punctele de intersecție ale dreptei (Δ), ghidajul fix, cu torul astfel determinat reprezintă pozițiile extreme ale elementului condus, pistonul *3*.

Pentru determinarea punctelor în care dreapta (Δ) înțeapă torul se construiesc mai întîi curbele Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ de intersecție ale torului cu planul de nivel N_Δ cu ajutorul planelor de front auxiliare [1]. Punctele extreme B_I, B_{II} se găsesc la intersecția acestor curbe $(\Gamma_{B_I}, \Gamma_{B_{II}})$ cu dreapta (Δ), în proiecția orizontală unde atît curbele cît și dreapta se proiectează în adevărată mărime (fig. 3.2).

Rezultă, în cazul general, două soluții pentru pozițiile extreme reprezentate prin două perechi de puncte (b_I, b_{II}), $(\bar{b}_I, \bar{b}_{II})$.

Se alege una din cele două perechi de puncte, de exemplu perechea (b_I, b_{II}) situată în fața planului vertical de proiecție.

Cunoscînd pozițiile extreme (B_I, B_{II}) ale elementului condus *3* rezultă implicit cursa acestuia

$$(s_B) = (B_I B_{II}). \tag{3.2}$$

În cazul considerării celeilalte perechi de puncte $(\bar{b}_I, \bar{b}_{II})$ se determină, în general, o altă mărime pentru cursă (fig. 3.3)

$$(\bar{s}_B) = (\bar{B}_I \bar{B}_{II}). \tag{3.3}$$

Se impune concluzia că pentru aceeași poziție a axelor fixe (D) (Δ) și aceleași dimensiuni pentru manivelă și bielă se poate alege una din cele două soluții pentru care cursa rezultată $(s, \bar{s})$ este mai mare.

În cazul mecanismului patrulater ortogonal (fig. 3.4) construcția curbelor Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ de intersecție a torului cu planul N_B se face în același mod ca la mecanismul manivelă-piston.

Pozițiile extreme B_I, B_{II} ale balansierului se determină, în planul orizontal, la intersecția curbelor Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ cu cercul (C_B) de rază B_0B dată.

Rezultă astfel unghiul de rotație al balansierului

$$\Psi = \sphericalangle\, b_I b_0 b_{II} \tag{3.4}$$

și respectiv cursa circulară a punctului B, corespunzătoare unghiului Ψ

$$(\hat{s}_B) = (\widehat{b_I b_{II}}). \tag{3.5}$$

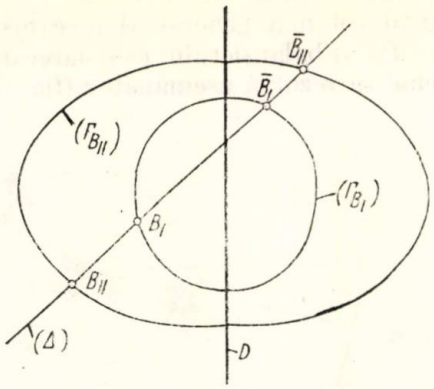

$\bar{B}_{II}$
$\bar{B}_I$
$(\Gamma_{B_{II}})$
(Γ_{B_I})
B_I
B_{II}
(Δ)
D

Fig. 3.3

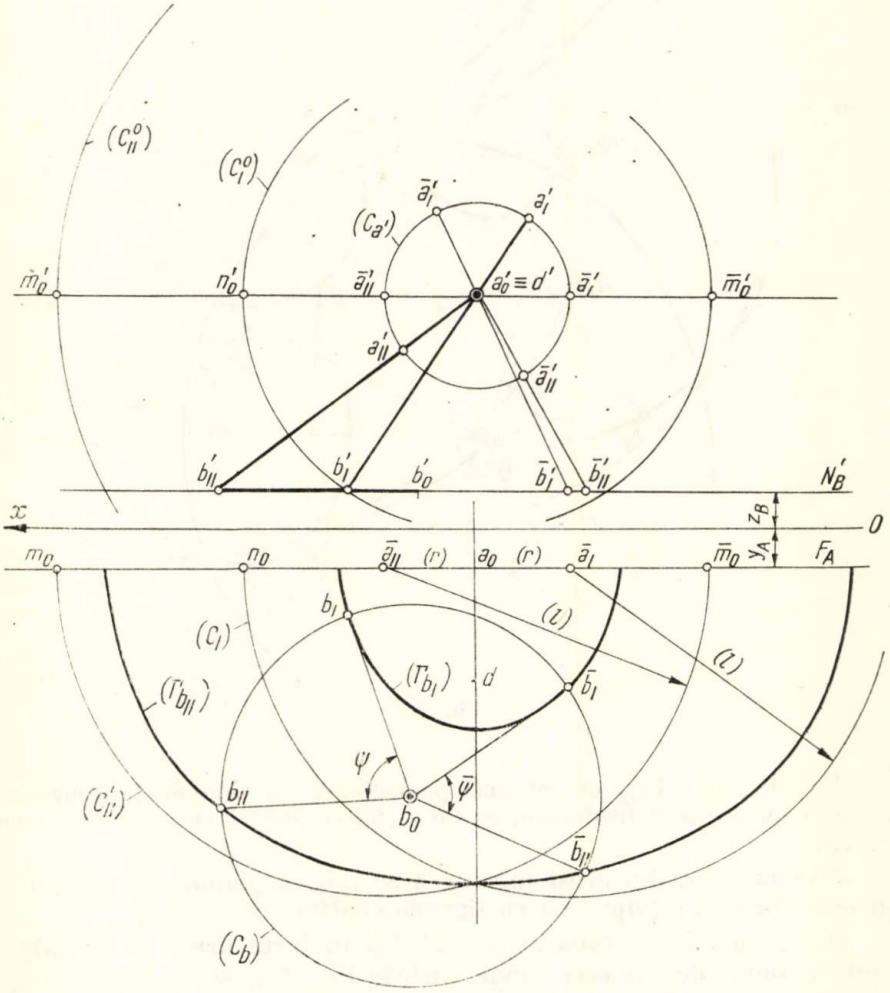

(C_{II}^0)
(C_I^0)
$\bar{a}_I'$
a_I'
$(C_{a'})$
m_0'
n_0'
$\bar{a}_{II}'$
$a_0' \equiv d'$
$\bar{a}_I'$
$\bar{m}_0'$
a_{II}'
$\bar{a}_{II}'$
b_{II}'
b_I'
b_0'
$\bar{b}_I'$
$\bar{b}_{II}'$
N_B'
x
z_B
0
m_0
n_0
$\bar{a}_{II}$
(r)
a_0
(r)
$\bar{a}_I$
$\bar{m}_0$
y_A
F_A
b_I
(C_I)
(l)
(l)
(Γ_{b_I})
d
$\bar{b}_I$
$(\Gamma_{b_{II}})$
ψ
$\bar{\psi}$
(C_{II}')
b_{II}
b_0
$\bar{b}_{II}$
(C_b)

Fig. 3.4

Considerînd cazul cel mai general al mecanismului patrulater, la care planul de rotaţie P_B al balansierului este oarecare, problema determinării poziţiilor extreme se rezolvă asemănător (fig. 3.5).

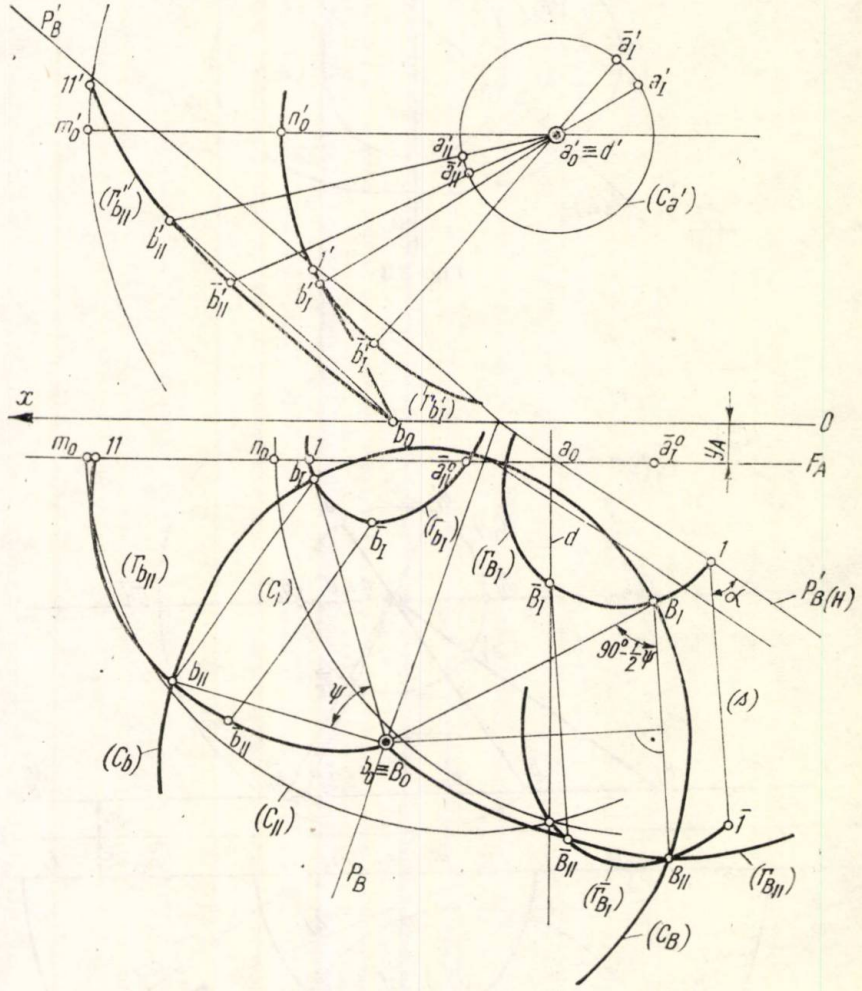


Fig. 3.5

Curbele Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ nu se mai proiectează în adevărata mărime pe planele de proiecţie considerate, ca de altfel şi cercul (C_B) al balansierului B_0B.

Este necesar, din acest motiv, să se rabată planul P_B pe unul din planele de proiecţie împreună cu figurile conţinute în acesta.

În figura 3.5 s-a rabătut planul P_B, în jurul urmei orizontale, pe planul orizontal de proiecţie unde curbele Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ şi traiectoria (C_B) a punctului B apar în adevărata mărime.

Intersecția cercului (C_B) cu curbele Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ în proiecție rabătută determină pozițiile extreme B_0B_I, B_0B_{II} ale balansierului B_I, B_{II} și implicit adevărata mărime a unghiului de rotație a acestuia

$$\Psi = \sphericalangle B_I B_0 B_{II}. \tag{3.6}$$

4. CALCULUL ANALITIC AL CURSEI ELEMENTULUI CONDUS

În sistemul de coordonate rectangular $Oxyz$ (fig. 4.1) punctul A_0 este cuprins în planul xOz și are coordonatele : x_0, 0, z_0.

Notînd cu r lungimea manivelei A_0A rezultă pentru punctele $\overline{A}_I$, $\overline{A}_{II}$ coordonatele : $(x_0 + r)$, 0, z_0 și $(x_0 - r)$, 0, z_0 .

Cercurile (C_I), (C_{II}) cu centrele în $\overline{A}_I$, $\overline{A}_{II}$ și de rază l egală cu lungimea bielei AB, au următoarele ecuații parametrice :

$$(C_I)\ x = x_0 - r + l\cos u\,; \quad y = l\sin u\,; \quad z = z_0\,, \tag{4.1}$$

$$(C_{II})\ x = x_0 + r + l\cos u\,; \quad y = l\sin u\,; \quad z = z_0\,, \tag{4.2}$$

unde u este unghiul format de raza unui punct de pe cerc cu axa Ox.

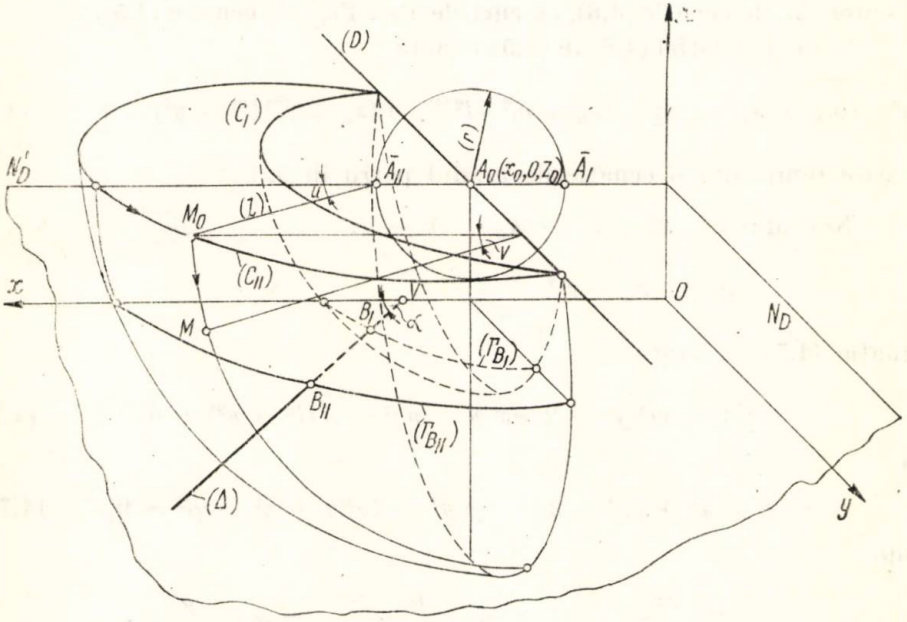


Fig. 4.1

Prin rotirea acestor cercuri în jurul dreptei (D) se obține torul a cărui ecuație parametrică este

$$x = (x_0 + r + l\cos u)\cos v\,; \; y = l\sin u\,;$$

$$z = (x_0 + r + l\cos u)\sin v, \tag{4.3}$$

unde v este unghiul format de planul cercului (C_I) sau (C_{II}) cu planul N_Δ la un moment dat.

Din relațiile (4.3) prin eliminarea lui u și v, se obține ecuația torului sub forma

$$[x^2 + y^2 + z^2 - (x_0 + r)^2 - l^2]^2 - 4(x_0 + r)^2(l^2 - y^2) = 0. \quad (4.4)$$

Intersecția torului cu planul de nivel N_Δ de ecuație $z = z_\Delta$ determină curbele (Γ_{B_I}), $(\Gamma_{B_{II}})$ cu ecuația

$$[x^2 + y^2 + z_\Delta^2 - (x_0 + r)^2 - l^2]^2 - 4(x_0 + r)^2(l^2 - y^2) = 0. \quad (4.5)$$

În cazul mecanismului manivelă-piston (fig. 4.1) ecuația dreptei (Δ) este

$$x = my + x_v; \quad z = z_\Delta, \quad (4.6)$$

unde $m = \operatorname{ctg} \alpha$ și reprezintă panta ghidajului Δ, iar x_v abscisa punctului în care dreapta Δ înțeapă planul xOz.

Coordonatele punctelor extreme B_I, B_{II} rezultă prin intersecția dreptei (Δ), de ecuație (4.6), cu curbele Γ_{B_I}, $\Gamma_{B_{II}}$ de ecuație (4.5).

Înlocuind astfel (4.6) în (4.5) rezultă

$$[y^2 + (my + x_v)^2 + z_\Delta^2 - (x_0 + r)^2 - l^2]^2 - 4(x_0 + r)^2(l^2 - y^2) = 0 \quad (4.7)$$

și care reprezintă o ecuație de gradul patru în y.

Notînd : $n = x_v^2 + z_\Delta^2 - (x_0 + r)^2 - l^2$,

$$p = 4(x_0 + r)^2,$$

ecuația (4.7) se scrie

$$[(1 + m^2)y^2 + 2mx_v y + n]^2 - p(l^2 - y^2) = 0 \quad (4.7')$$

sau

$$y^4 + 2\alpha y^3 + (\alpha^2 + 2\beta + \gamma)y^2 + 2\alpha\beta y + \beta^2 - \gamma l^2 = 0, \quad (4.7'')$$

unde

$$\alpha = 2\frac{mx_v}{1 + m^2}; \quad \beta = \frac{n}{1 + m^2}; \quad \gamma = \frac{p}{(1+m^2)^2}.$$

Relația (4.7'') se poate scrie și mai simplu

$$y^4 + ay^3 + by^2 + cy + d = 0, \quad (4.7''')$$

punînd $a = 2\alpha$; $b = \alpha^2 + 2\beta + \gamma$; $c = 2\alpha\beta$; $d = \beta^2 - \gamma l^2$.

Ecuația (4.7''') de gradul 4 se poate rezolva prin metoda Ferrari, punînd-o sub forma

$$y^4 + ay^3 = -by^2 - cy - d. \tag{4.8}$$

Adunînd în ambele părți expresia $\frac{a^2y^2}{4}$, termenul din stînga devine pătrat perfect:

$$\left(y^2 + \frac{ay}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b\right)y^2 - cy - d. \tag{4.8'}$$

Se adaugă în ambele părți expresia $\left(y^2 + \frac{ay}{2}\right)t + \frac{t^2}{4}$, astfel ca membrul stîng să fie tot un pătrat perfect:

$$\left(y^2 + \frac{ay}{2} + \frac{t}{2}\right)^2 = \left(\frac{a^2}{4} - b + t\right)y^2 + \left(\frac{at}{2} - c\right)y + \frac{t^2}{4} - d. \tag{4.8''}$$

Necunoscuta t astfel introdusă poate fi determinată din condiția ca și membrul drept din (4.8'') să fie pătrat perfect, de forma $(py + q)^2$. Pentru aceasta este necesar ca

$$p^2 = \frac{a^2}{4} - b + t; \quad 2pq = \frac{at}{2} - c; \quad q^2 = \frac{t^2}{4} - d. \tag{4.9}$$

Din identitatea evidentă $4p^2q^2 = (2pq)^2$, utilizînd relațiile (4.9), rezultă

$$4\left(\frac{a^2}{4} - b + t\right)\left(\frac{t^2}{4} - d\right) = \left(\frac{at}{2} - c\right)^2 \tag{4.10}$$

sau

$$t^3 - bt^2 + (ac - 4d)\,t + (4bd - a^2 - c^2) = 0, \tag{4.11}$$

ecuație de gradul 3 în t, care are cel puțin o soluție reală t_1 calculabilă cu formula lui Cardano.

Se pot determina în funcție de t_1 parametrii p și q din (4.9):

$$p = \pm\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + t_1}; \quad q = \pm\sqrt{\frac{t_1^2}{4} - d},$$

astfel că relația (4.8'') devine

$$\left(y^2 + \frac{ay}{2} + \frac{t_1}{2}\right)^2 = \left(y\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + t_1} \pm \sqrt{\frac{t_1^2}{4} - d}\right)^2. \tag{4.12}$$

Relaţia (4.12) se descompune în două ecuaţii de gradul 2 în y:

$$y^2 + \frac{ay}{2} + \frac{t_1}{2} = y\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + t_1} + \sqrt{\frac{t_1^2}{4} - d},$$
$$y^2 + \frac{ay}{2} + \frac{t_1}{2} = y\sqrt{\frac{a^2}{4} - b + t_1} - \sqrt{\frac{t_1^2}{4} - d}, \tag{4.13}$$

cu soluţiile $y_{1,2}$ şi $y_{3,4}$, toate reale, două reale şi două imaginare sau toate imaginare.

În cazul cînd toate cele patru soluţii sînt reale, rezultă două grupe de poziţii extreme, iar în celelalte două cazuri problema de determinare a cursei nu are soluţie.

De menţionat că cele două soluţii alese pentru y (y_1, y_2) trebuie să corespundă celor două pînze ale torului.

Cunoscînd y_1 şi y_2, se pot determina imediat din (4.6)

$$x_1 = my_1 + x_v; \qquad x_2 = my_2 + x_v, \tag{4.14}$$

iar $$z_1 = z_2 = z_\Delta .$$

Cursa s_B a elementului condus rezultă

$$s_B = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}. \tag{4.15}$$

În cazul mecanismului manivelă-balansier (fig. 1.3), calculul este asemănător. Ecuaţia (4.5) a torului urmează să se intersecteze cu ecuaţia cercului (C_B), dată de relaţia (1.5) pentru patrulaterul ortogonal sau de relaţia (1.8) pentru patrulaterul oarecare.

Comparînd cele două metode, grafică şi analitică, de determinare a poziţiilor extreme şi, implicit, a cursei elementelor conduse la mecanismele spaţiale cu patru elemente, se poate observa imediat avantajul net al primei metode, avantaj reliefat atît prin simplitatea construcţiilor, cît şi prin volumul de lucru mai mic.

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. P. Antonescu, *Contribuţii la sinteza grafică a mecanismelor spaţiale articulate*, teză de doctorat 8 mai la IPB 1969.
2. — *Contribution to the Graphical Synthesis of a Spatial Slider-Crank Mechanism*, Journal of Mechanisms, 3 (1968).
3. — *Contribuţii la sinteza cinematică a mecanismelor spaţiale* cu *4 elemente*, S.C.M.A. nr *2*, (1969) şi Revue Mécanique Appliquée, *2* (1969).
4. S. N. Kojevnikov, *K voprosu o kinematike i sinteze prostranstvennih krivoşipno koromislovih mehanizmov*, Trudi seminara po TMM, **IV**, *14* (1947).

VARIANTE STRUCTURALE ALE MECANISMELOR TIP $nc = 04.05$

de A. RAICU
Institutul de construcții București

În lucrare se dă o metodă de obținere a variantelor structurale ale mecanismelor caracterizate prin $n = 04$ elemente și $c = 05$ cuple cinematice. Această problemă este tratată cu ajutorul simbolurilor numerice și literale ale mecanismelor.

1. În afara mecanismelor cu patru elemente și lanț cinematic simplu, la care $n = 04$ elemente și $c = 04$ cuple cinematice, există și mecanisme cu patru elemente și lanț complex, la care $c = 05$ cuple, adică mecanisme tip $nc = 04.05$ [1]. Mecanismele cu lanț complex se obțin prin legarea în serie sau paralel a unor lanțuri simple. În cazul mecanismelor cu patru elemente, legarea în serie este dată în figura 1, iar legarea în paralel în figura 2. Se observă de aici că lanțurile simple care intră în structura mecanismelor de tip $nc = 04.05$ sînt triunghiuri și patrulatere.

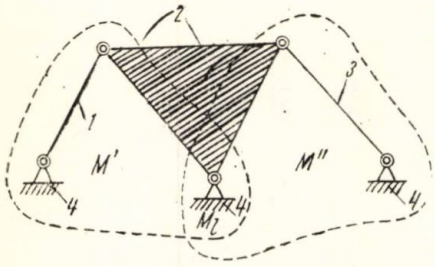


Fig. 1

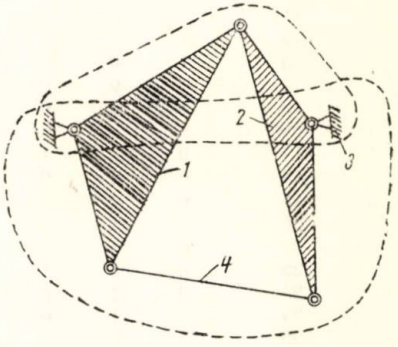


Fig. 2

2. Structura mecanismelor cu trei elemente este cuprinsă în tabela structurală a acestora (tab. 1) [2]. Fiecare rînd din această tabelă reprezintă o variantă de bază, adică mulțimea mecanismelor caracterizate prin $n = 03$ elemente și $c = 03$ cuple cinematice, fără a indica și dispunerea relativă a

acestora în lanțul cinematic. În cele ce urmează, variantele de bază vor fi simbolizate prin simbolul numeric $nC_5C_4C_3C_2C_1$, unde C_5, C_4, C_3, C_2 și C_1 reprezintă numărul cuplelor din clasele V, IV, III, II, respectiv I.

Variantele structurale concrete, adică variantele în care este indicată și succesiunea cuplelor în lanțul cinematic, vor fi reprezentate printr-un simbol literal. În acest scop se notează cu C cupla de clasa V, cu P cupla de clasa IV, cu T cupla de clasa III, cu D cupla de clasa II și cu U cupla de clasa I. Simbolul literal al unei variante concrete este constituit din succesiunea cuplelor în lanțul cinematic simplu, notate, după caz, prin C, P, T, D sau U.

Pentru mecanismul cu trei elemente și cu gradul de mobilitate $M = 1$ se obțin următoarele variante simbolizate numeric și literal:

Tabela 1

Nr.	Numărul cuplelor					Gradul de mobilitate				
	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
1	3	0	0	0	0	−3	−2	−1	0	1
2	2	1	0	0	0	−2	1	0	1	—
3	2	0	1	0	0	−1	0	1	—	—
4	2	0	0	1	0	0	1	—	—	—
5	2	0	0	0	1	1	—	—	—	—
6	1	2	0	0	0	−1	0	1	2	—
7	1	1	1	0	0	1	1	2	—	—
8	1	1	0	1	0	1	2	—	—	—
9	1	1	0	0	1	2	—	—	—	—
10	1	0	2	0	0	1	2	3	—	—
11	1	0	1	1	0	2	3	—	—	—
12	1	0	1	0	1	3	—	—	—	—
13	1	0	0	2	0	3	4	—	—	—
14	1	0	0	1	1	4	—	—	—	—
15	1	0	0	0	2	5	—	—	—	—
16	0	3	0	0	0	0	1	2	3	—
17	0	2	1	0	0	1	2	3	—	—
18	0	2	0	1	0	2	3	—	—	—
19	0	2	0	0	1	3	—	—	—	—
20	0	1	2	0	0	2	3	4	—	—
21	0	1	1	1	0	3	4	—	—	—
22	0	1	1	0	1	4	—	—	—	—
23	0	1	0	2	0	4	5	—	—	—
24	0	1	0	1	1	5	—	—	—	—
25	0	1	0	0	2	6	—	—	—	—
26	0	0	3	0	0	3	4	5	—	—
27	0	0	2	1	0	4	5	—	—	—
28	0	0	2	0	1	5	—	—	—	—
29	0	0	1	2	0	5	6	—	—	—
30	0	0	1	1	1	6	—	—	—	—
31	0	0	1	0	2	7	—	—	—	—
32	0	0	0	3	0	6	7	—	—	—
33	0	0	0	2	1	7	—	—	—	—
34	0	0	0	1	2	8	—	—	—	—
35	0	0	0	0	3	9	—	—	—	—

a) în familia 0, conform tabelei 1 :

— poz. 5 — 320001 — CCU; CUC,
— poz. 8 — 311010 — CPD; CDP; PCD,
— poz. 10 — 310200 — CTT; TCT,
— poz. 17 — 302100 — PPT; PTP;

b) în familia I :

— poz. 4 — 320010 — CCD; CDC,
— poz. 7 — 311100 — CPT; CTP; PCT,
— poz. 16 — 303000 — PPP;

c) în familia II :

— poz. 3 — 320100 — CCT; CTC,
— poz. 6 — 312000 — CPP; PCP;

d) în familia III ;

— poz. 2 — 321000 — CCP; CPC;

e) în familia IV :

— poz. 1 — 330000 — CCC.

3. Structura mecanismelor cu patru elemente și lanț simplu este cuprinsă în tabela structurală a mecanismului cu patru cuple (tabela II) [3].

Variantele structurale concrete cu gradul de mobilitate $M = 1$ sînt :

a) în familia O :

$CCCD$; $CCDC$; $CCPT$; $CCTP$; $CPCT$,
$CPTC$; $CTCP$; $PCCT$; $CPPP$; $PCPP$;

b) în familia I :

$$CCCT;\ CCTC;\ CCPP;\ CPCP;\ CPPC;\ PCCP; \tag{2}$$

C) în familia II :

$CCCP$; $CCPC$;

d) în familia III :

$CCCC$.

Tabela 2

Nr.	Numărul cuplelor					Gradul de mobilitate				
	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
1	4	0	0	0	0	−2	−1	0	1	2
2	3	1	0	0	0	−1	0	1	2	—
3	3	0	1	0	0	0	1	2	—	—
4	3	0	0	1	0	1	2	—	—	—
5	3	0	0	0	1	2	—	—	—	—
6	2	2	0	0	0	0	1	2	3	—
7	2	1	1	0	0	1	2	3	—	—
8	2	1	0	1	0	2	3	—	—	—
9	2	1	0	0	1	3	—	—	—	—
10	2	0	2	0	0	2	3	4	—	—
11	2	0	1	1	0	3	4	—	—	—
12	2	0	1	0	1	4	—	—	—	—
13	2	0	0	2	0	4	5	—	—	—
14	2	0	0	1	1	5	—	—	—	—
15	2	0	0	0	2	6	—	—	—	—
16	1	3	0	0	0	1	2	3	4	—
17	1	2	1	0	0	2	3	4	—	—
18	1	2	0	1	0	3	4	—	—	—
19	1	2	0	0	1	4	—	—	—	—
20	1	1	2	0	0	3	4	5	—	—
21	1	1	1	1	0	4	5	—	—	—
22	1	1	1	0	1	5	—	—	—	—
23	1	1	0	2	0	5	6	—	—	—
24	1	1	0	1	1	6	—	—	—	—
25	1	1	0	0	2	7	—	—	—	—
26	1	0	3	0	0	4	5	6	—	—
27	1	0	2	1	0	5	6	—	—	—
28	1	0	2	0	1	6	—	—	—	—
29	1	0	1	2	0	6	7	—	—	—
30	1	0	1	1	1	7	—	—	—	—
31	1	0	1	0	2	8	—	—	—	—
32	1	0	0	3	0	7	8	—	—	—
33	1	0	0	2	1	8	—	—	—	—
34	1	0	0	1	2	9	—	—	—	—
35	1	0	0	0	3	10	—	—	—	—
36	0	4	0	0	0	2	3	4	5	—
37	0	3	1	0	0	3	4	5	—	—
38	0	3	0	1	0	4	5	—	—	—
39	0	3	0	0	1	5	—	—	—	—
40	0	2	2	0	0	4	5	6	—	—
41	0	2	1	1	0	5	6	—	—	—
42	0	2	1	0	1	6	—	—	—	—
43	0	2	0	2	0	6	7	—	—	—
44	0	2	0	1	1	7	—	—	—	—
45	0	2	0	0	2	8	—	—	—	—
46	0	1	3	0	0	5	6	7	—	—
47	0	1	2	1	0	6	7	—	—	—
48	0	1	2	0	1	7	—	—	—	—
49	0	1	1	2	0	7	8	—	—	—
50	0	1	1	1	1	8	—	—	—	—
51	0	1	1	0	2	9	—	—	—	—
52	0	1	0	3	0	8	9	—	—	—
53	0	1	0	2	1	9	—	—	—	—
54	0	1	0	1	2	10	—	—	—	—
55	0	1	0	0	3	11	—	—	—	—
56	0	0	4	0	0	6	7	8	—	—

Tabela 2 (continuare)

Nr.	Numărul cuplelor					Gradul de mobilitate				
	C_5	C_4	C_3	C_2	C_1	M_0	M_1	M_2	M_3	M_4
57	0	0	3	1	0	7	8	—	—	—
58	0	0	3	0	1	8	—	—	—	—
59	0	0	2	2	0	8	9	—	—	—
60	0	0	2	1	1	9	—	—	—	—
61	0	0	2	0	2	10	—	—	—	—
62	0	0	1	3	0	9	10	—	—	—
63	0	0	1	2	1	10	—	—	—	—
64	0	0	1	1	2	11	—	—	—	—
65	0	0	1	0	3	12	—	—	—	—
66	0	0	0	4	0	10	—	—	—	—
67	0	0	0	3	1	11	—	—	—	—
68	0	0	0	2	2	12	—	—	—	—
69	0	0	0	1	3	13	—	—	—	—
70	0	0	0	0	4	14	—	—	—	—

4. O categorie a mecanismelor spaţiale cu patru elemente şi lanţ complex se obţine prin legarea în serie a două mecanisme cu trei elemente, ca în figura 1. Lanţurile cinematice care formează mecanismul cu patru elemente sînt compuse din elementele 1—2—4, respectiv 2—3—4, iar mecanismul de legătură este compus din elementele 2—4.

Relaţia cu care se determină gradul de mobilitate în acest caz este

$$M = M' + M'' - M_l, \tag{3}$$

unde cu M' s-a notat mobilitatea primului mecanism, cu M'' mobilitatea celui de-al doilea, iar cu M_l mobilitatea mecanismului de legătură (fig. 1).

5. Mecanismul de legătură poate avea $M_l = 1 \ldots 5$ după clasa cuplei cu care se leagă cele două elemente. Mecanismele legate trebuie să aibă $M' > 0$ şi $M'' > 0$. Corespondenţa M, M', M'', M_l este dată în tabela 3.

Tabela 3

Nr.	M	M_l	$M'+M''$	M'	M''	Nr.	M	M_l	$M'+M''$	M'	M''
1	1	1	2	1	1	9	1	4	5	3	2
2	1	2	3	1	2	10	1	4	5	4	1
3	1	2	3	2	1	11	1	5	6	1	5
4	1	3	4	1	3	12	1	5	6	2	4
5	1	3	4	2	2	13	1	5	6	3	3
6	1	3	4	3	1	14	1	5	6	4	2
7	1	4	5	1	4	15	1	5	6	5	1
8	1	4	5	2	3	—	—	—	—	—	—

6. Rîndul 1 din tabela 3 arată că mecanismul de legătură trebuie să aibă o cuplă de clasa V în structura sa şi, de asemenea, aceasta trebuie să facă parte din mecanismele legate.

Dacă se utilizează din tabela 1 variantele structurale de bază date de rîndurile 1 şi 2, atunci varianta structurală de bază a mecanismului cu patru elemente se obţine cu relaţia

$$330000 + 321000 = 441000. \quad (4)$$

Modul de calcul este simplu : se adună numărul elementelor şi cuplelor de aceeaşi clasă, din care se scade apoi numărul elementelor şi al cuplelor mecanismului de legătură. Mulţimea variantelor structurale de bază ale mecanismelor cu patru elemente obţinute prin legarea în serie a două mecanisme cu trei elemente este dată concentrat în tabela 4.

Tabela 4

Nr.	Nr. de ordine din tabela 1	Corespondenţa familiilor	Variante de bază ale mecanismului cu patru elemente
1	1 + 1	$f_4 + f_4$	330000 + 330000 = 450000
2	1 + 2	$f_4 + f_3$	330000 + 321000 = 441000
3	1 + 3	$f_4 + f_2$	330000 + 320100 = 440100
4	1 + 4	$f_4 + f_1$	330000 + 320010 = 440010
5	1 + 5	$f_4 + f_0$	330000 + 320001 = 440001
6	1 + 6	$f_4 + f_2$	330000 + 312000 = 432000
7	1 + 7	$f_4 + f_1$	330000 + 311100 = 431100
8	1 + 8	$f_4 + f_0$	330000 + 311010 = 431010
9	1 + 10	$f_4 + f_0$	330000 + 310200 = 430200
10	2 + 2	$f_3 + f_3$	321000 + 321000 = 432000
11	2 + 3	$f_3 + f_2$	321000 + 320100 = 431100
12	2 + 4	$f_3 + f_1$	321000 + 320010 = 431010
13	2 + 5	$f_3 + f_0$	321000 + 320001 = 431001
14	2 + 6	$f_3 + f_2$	321000 + 312000 = 423000
15	2 + 7	$f_3 + f_1$	321000 + 311100 = 422100
16	2 + 8	$f_3 + f_0$	321000 + 311010 = 422010
17	2 + 10	$f_3 + f_0$	321000 + 310200 = 421200
18	3 + 4	$f_2 + f_1$	320100 + 320010 = 430110
19	3 + 5	$f_2 + f_2$	320100 + 320001 = 430101
20	3 + 6	$f_2 + f_2$	320100 + 312000 = 422100
21	3 + 7	$f_2 + f_1$	320100 + 311100 = 421200
22	3 + 8	$f_2 + f_0$	320100 + 311010 = 421110
23	3 + 10	$f_2 + f_0$	320100 + 310200 = 420300
24	4 + 4	$f_1 + f_1$	320010 + 320010 = 430020
25	4 + 5	$f_1 + f_0$	320010 + 320001 = 430011
26	4 + 6	$f_1 + f_0$	320010 + 312000 = 422010
27	4 + 7	$f_1 + f_1$	320010 + 311100 = 421110
28	4 + 8	$f_1 + f_0$	320010 + 311010 = 421020
29	4 + 10	$f_1 + f_0$	320010 + 310200 = 420210
30	5 + 5	$f_0 + f_0$	320001 + 320001 = 430002
31	5 + 6	$f_0 + f_2$	320001 + 312000 = 422001
32	5 + 7	$f_0 + f_1$	320001 + 311100 = 421101
33	5 + 8	$f_0 + f_0$	320001 + 311010 = 421011
34	5 + 10	$f_0 + f_0$	320001 + 310200 = 420201
35	6 + 6	$f_2 + f_2$	312000 + 312000 = 414000
36	6 + 7	$f_2 + f_1$	312000 + 311100 = 413100
37	6 + 8	$f_2 + f_0$	312000 + 311010 = 413010
38	6 + 10	$f_2 + f_0$	312000 + 310200 = 412200
39	7 + 7	$f_1 + f_1$	311100 + 311100 = 412200
40	7 + 8	$f_1 + f_0$	311100 + 311010 = 412110
41	7 + 10	$f_1 + f_0$	311100 + 310200 = 411300
42	8 + 8	$f_0 + f_0$	311100 + 311010 = 412020
43	8 + 10	$f_0 + f_0$	311010 + 310200 = 411210
44	10 + 10	$f_0 + f_0$	310200 + 310200 = 410400

7. Conform tabelei 3, rîndul 2, mecanismul de legătură trebuie să aibă $M_l = 2$, ceea ce înseamnă că în structura sa, ca şi în structura mecanismelor legate, trebuie să fie o cuplă de clasa IV. Mecanismele legate trebuie să aibă unul $M' = 1$, iar celălalt $M'' = 2$.

Pentru simplificare, mulţimea variantelor de bază corespunzătoare acestui caz sînt date în tabela 5.

Tabela 5

Nr.	Nr. de ordine din tab. I	Corespondenţa familiilor	Variante de bază ale mecanismului cu patru elemente
1	1 + 6	$f_3 + f_3$	321000 + 312000 = 432000
2	1 + 7	$f_3 + f_2$	321000 + 311100 = 431100
3	1 + 8	$f_3 + f_1$	321000 + 311010 = 431010
4	1 + 9	$f_3 + f_0$	321000 + 311001 = 431001
5	1 + 16	$f_3 + f_2$	321000 + 303000 = 423000
6	1 + 17	$f_3 + f_1$	321000 + 302100 = 422100
7	1 + 18	$f_3 + f_0$	321000 + 302010 = 422010
8	1 + 20	$f_3 + f_0$	321000 + 301200 = 421200
9	6 + 6	$f_2 + f_3$	312000 + 312000 = 423000
10	6 + 7	$f_2 + f_2$	312000 + 311100 = 422100
11	6 + 8	$f_2 + f_1$	312000 + 311010 = 422010
12	6 + 9	$f_2 + f_0$	312000 + 311001 = 422001
13	6 + 16	$f_2 + f_2$	312000 + 303000 = 414000
14	6 + 17	$f_2 + f_1$	312000 + 302100 = 413100
15	6 + 18	$f_2 + f_0$	312000 + 302010 = 413010
16	6 + 20	$f_2 + f_0$	312000 + 301200 = 412200
17	7 + 6	$f_1 + f_3$	311100 + 312000 = 422100
18	7 + 7	$f_1 + f_2$	311100 + 311100 = 421200
19	7 + 8	$f_1 + f_1$	311100 + 311010 = 421110
20	7 + 9	$f_1 + f_0$	311100 + 311001 = 421101
21	7 + 16	$f_1 + f_2$	311100 + 303000 = 413100
22	7 + 17	$f_1 + f_1$	311100 + 302100 = 412200
23	7 + 18	$f_1 + f_0$	311100 + 302010 = 412110
24	7 + 20	$f_1 + f_0$	311100 + 301200 = 411200
25	8 + 6	$f_0 + f_3$	311010 + 312000 = 422010
26	8 + 7	$f_0 + f_2$	311010 + 311100 = 421110
27	8 + 8	$f_0 + f_1$	311010 + 311010 = 421020
28	8 + 9	$f_0 + f_0$	311010 + 311001 = 421011
29	8 + 16	$f_0 + f_2$	311010 + 303000 = 413010
30	8 + 17	$f_0 + f_1$	311010 + 302100 = 412110
31	8 + 18	$f_0 + f_0$	311010 + 302010 = 412020
32	8 + 20	$f_0 + f_0$	311010 + 301200 = 411210
33	16 + 6	$f_1 + f_3$	303000 + 312000 = 414000
34	16 + 7	$f_1 + f_2$	303000 + 311100 = 413100
35	16 + 8	$f_1 + f_1$	303000 + 311010 = 413010
36	16 + 9	$f_1 + f_0$	303000 + 311001 = 413001
37	16 + 16	$f_1 + f_2$	303000 + 303000 = 405000
38	16 + 17	$f_1 + f_1$	303000 + 302100 = 404100
39	16 + 18	$f_1 + f_0$	303000 + 302010 = 404010
40	16 + 20	$f_1 + f_0$	303000 + 301200 = 403200
41	17 + 6	$f_0 + f_3$	302100 + 312000 = 413100
42	17 + 7	$f_0 + f_2$	302100 + 311100 = 412200
43	17 + 8	$f_0 + f_1$	302100 + 311010 = 412110
44	17 + 9	$f_0 + f_0$	302100 + 311001 = 412101
45	17 + 16	$f_0 + f_0$	302100 + 303000 = 404100
46	17 + 17	$f_0 + f_1$	302100 + 302100 = 403200
47	17 + 18	$f_0 + f_0$	302100 + 302010 = 403110
48	17 + 20	$f_0 + f_0$	302100 + 301200 = 402300

8. Linia 3 din tabela 3 este identică cu linia 2. Acest lucru se explică prin motive de simetrie. Oricare dintre cele două mecanisme care se leagă poate fi considerat primul (sau al doilea).

În această situaţie sînt şi alte linii.

9. În mod analog se analizează toate celelalte linii din tabela 3. Se obţin încă multe alte variante de bază ale mecanismului cu patru elemente format prin legarea în serie a două mecanisme cu trei elemente. Acest lucru nu se va face aici, pentru a nu mări în mod inutil volumul lucrării.

10. O altă categorie a mecanismelor spaţiale cu patru elemente şi lanţ complex se obţine prin legarea în paralel a două lanţuri cinematice, ca în figura 2. Unul dintre lanţuri este format din trei elemente, şi anume 1—2—3, iar celălalt lanţ din patru elemente, şi anume 1—4—2—3.

Pentru ca sistemul de elemente astfel legate să funcţioneze ca mecanism cu gradul de mobilitate $M = 1$ trebuie ca unul dintre lanţuri să aibă $M = 1$, iar celălalt $M = 2$.

Dacă se consideră mecanismul cu trei elemente că are $M = 1$, iar mecanismul cu patru elemente $M = 2$, atunci se poate întocmi tabela 6, care conţine o parte din variantele structurale de bază ale mecanismului cu patru elemente, legate ca în figura 2. Această tabelă se întocmeşte pe baza tabelelor 1 şi 2, unde în alegerea variantelor s-a ţinut seama de gradul de mobilitate şi de faptul că cele două lanţuri trebuie să aibă comune două cuple de clasa V, adică cuplele de legătură la bază.

Tabela 6

Nr.	Nr. rînd tabela 1 + Nr. rînd tabela 2	Corespondenţa familiilor	Variantele structurale de bază rezultate
1	1 + 1	$f_4 + f_4$	330000 + 440000 = 450000
2	1 + 2	$f_4 + f_3$	330000 + 431000 = 441000
3	1 + 3	$f_4 + f_2$	330000 + 430100 = 440100
4	1 + 4	$f_4 + f_1$	330000 + 430010 = 440010
5	1 + 5	$f_4 + f_0$	330000 + 430001 = 440001
6	1 + 6	$f_4 + f_2$	330000 + 422000 = 432000
7	1 + 7	$f_4 + f_1$	330000 + 421100 = 431100
8	1 + 8	$f_4 + f_0$	330000 + 421010 = 431010
9	1 + 10	$f_4 + f_0$	330000 + 420200 = 430200
10	1 + 1	$f_3 + f_4$	321000 + 440000 = 441000
11	2 + 2	$f_3 + f_3$	321000 + 431000 = 432000
12	2 + 3	$f_3 + f_2$	321000 + 430100 = 431100
13	2 + 4	$f_3 + f_1$	321000 + 430010 = 431010
14	2 + 5	$f_3 + f_0$	321000 + 430001 = 431001
15	2 + 6	$f_3 + f_2$	321000 + 422000 = 423000
16	2 + 7	$f_3 + f_1$	321000 + 421100 = 422100
17	2 + 8	$f_3 + f_0$	321000 + 421010 = 422010
18	2 + 10	$f_3 + f_0$	321000 + 420200 = 421200
19	3 + 1	$f_2 + f_4$	320100 + 440000 = 440100
20	3 + 2	$f_2 + f_3$	320100 + 431000 = 431100
21	3 + 3	$f_2 + f_2$	320100 + 430100 = 430200
22	3 + 4	$f_2 + f_1$	320100 + 430010 = 430110
23	3 + 5	$f_2 + f_0$	320100 + 430001 = 430101
24	3 + 6	$f_2 + f_2$	320100 + 422000 = 422100
25	3 + 7	$f_2 + f_1$	320100 + 421100 = 421200
26	3 + 8	$f_2 + f_0$	320100 + 421010 = 421110
27	3 + 10	$f_2 + f_0$	320100 + 420200 = 420300
28	4 + 1	$f_1 + f_4$	320010 + 440000 = 440010

Tabela 6 (continuare)

Nr.	Nr. rînd tabela 1 + Nr. rînd tabela 2	Corespondența familiilor	Variantele de bază ale mecanismului cu patru elemente
29	4 + 2	$f_1 + f_3$	320010 + 431000 = 431010
30	4 + 3	$f_1 + f_2$	320010 + 430100 = 430110
31	4 + 4	$f_1 + f_1$	320010 + 430010 = 430020
32	4 + 5	$f_1 + f_0$	320010 + 430001 = 430011
33	4 + 6	$f_1 + f_2'$	320010 + 422000 = 422010
34	4 + 7	$f_1 + f_1'$	320010 + 421100 = 421110
35	4 + 8	$f_1 + f_0$	320010 + 421010 = 421020
36	4 + 10	$f_1' + f_2$	320010 + 420200 = 420210
37	5 + 1	$f_0 + f_4$	320001 + 440000 = 440001
38	5 + 2	$f_0 + f_3$	320001 + 431000 = 431001
39	5 + 3	$f_0' + f_2$	320001 + 430100 = 430101
40	5 + 4	$f_0' + f_1$	320001 + 430010 = 430011
41	5 + 5	$f_0 + f_0'$	320001 + 430001 = 430002
42	5 + 6	$f_0 + f_2'$	320001 + 422000 = 422001
43	5 + 7	$f_0 + f_1'$	320001 + 421100 = 421101
44	5 + 8	$f_0 + f_0$	320001 + 421010 = 421011
45	5 + 10	$f_0 + f_0$	320001 + 420200 = 420201

11. Tabele similare se pot întocmi și pentru alte tipuri de cuple de legătură la bază. De asemenea se pot întocmi tabele similare considerînd mecanismul patrulater cu $M = 1$ și mecanismul cu trei elemente cu $M = 2$.

Această mulțime de posibilități de a obține mecanisme cu patru elemente scoate în evidență foarte clar marea varietate a mecanismelor spațiale.

12. De la variantele structurale de bază analizate pînă aici se poate trece ușor la variantele structurale concrete. Numărul acestora este foarte mare și în nici un caz nu poate fi vorba să fie determinate în această lucrare. Se vor da însă cîteva cazuri cu titlu de exemplu, urmînd ca această problemă să fie tratată mai pe larg într-o altă lucrare ulterioară.

Rîndul 2 din tabela 4 este

$$330000 + 321000 = 441000, \tag{5}$$

unde mecanismele din varianta 330000 sînt din familia IV, iar cele din varianta 321000 sînt din familia III.

O variantă structurală concretă din varianta rezultantă, simbolizată literal, este

$$CCC + CPC = \widehat{CCCPC}\,(f_4 + f_3). \tag{6}$$

Mecanismul de legătură are în structura sa o cuplă de clasa V, adică o cuplă C. Prin urmare, legătura dintre simbolurile literale ale mecanismelor legate trebuie să se facă prin C. Arcele trasate în simbolul literal al variantei rezultate indică lanțurile legate astfel ca să apară clar și mecanismul de legătură, mecanismul comun, prin cupla de legătură. Între paranteze s-au trecut familiile corespunzătoare.

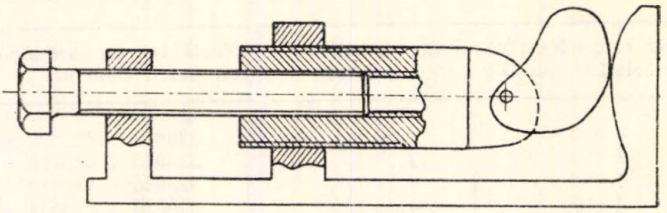


Fig. 3

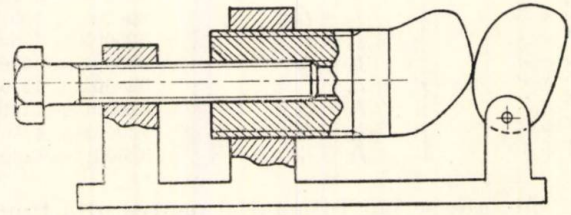


Fig. 4

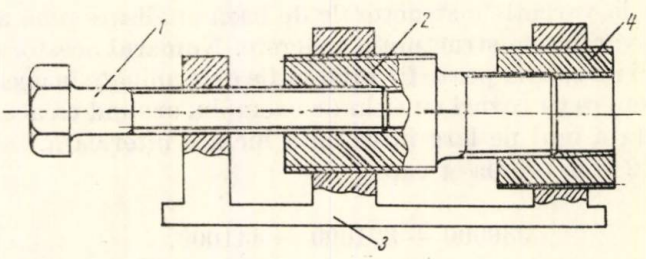


Fig. 5

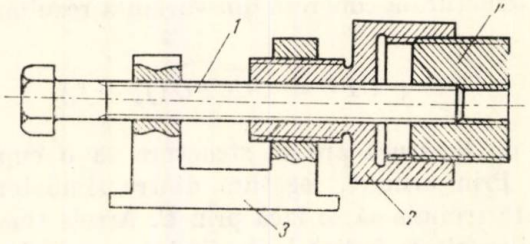


Fig. 6

Tot din aceeaşi variantă de bază 441000 face parte şi varianta concretă

$$CCC + CCP = \widehat{CCCCP}\,(f_4 + f_3), \tag{7}$$

reprezentată grafic în figura 3 sub o formă constructivă.

Varianta analizată anterior, $\widehat{CCCPC}\,(f_4 + f_3)$, este redată grafic în figura 4.

13. Rîndul 1 din tabela 4 conduce la o variantă concretă de forma

$$CCC + CCC = \widehat{CCCCC}\,(f_4 + f_4), \tag{8}$$

reprezentată grafic în figura 5. Se observă uşor legarea în serie a lanţurilor cinematice 1—2—3 şi 2—4—3.

14. Rîndul 1 din tabela 6 conduce la o variantă concretă de forma

$$CCC + CCCC = CCCpCCCC\,(f_4 + f_4), \tag{9}$$

unde prin litera p este simbolizată legătura în paralel. O formă constructivă a acestei variante concrete este dată în figura 6. Se observă uşor legarea în paralel a lanţurilor cinematice 1—2—3 şi 1—4—2—3.

15. În concluzie, problemele tratate în această lucrare scot în evidenţă următoarele aspecte importante:

a) la mecanismele spaţiale există o foarte mare varietate a schemelor structurale, chiar la mecanismele cu un număr mic de elemente;

b) simbolurile numerice şi literale utilizate pentru reprezentarea variantelor structurale (de bază şi concrete) ale mecanismelor sînt mult mai eficiente în raport cu reprezentările grafice. Simbolurile numerice şi literale oferă posibilitatea utilizării calculului din analiza combinatorie şi a stabilirii unor legi noi în domeniul structurii mecanismelor;

c) trecerea de la simbolizarea numerică şi literală la reprezentarea grafică necesară în studiul cinematic se face foarte uşor.

Primită la redacţie la 11 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A. Raicu, *Contribuţii la sinteza structurală a mecanismelor spaţiale*, St. cerc. mec. apl., **27**, 3 (1968).
2. — *Mecanisme cu trei elemente în construcţia maşinilor*, Constr. de maşini, **XX**, 6 (1968).
3. — *Analiza structurală a mecanismului patrulater spaţial*, Bul. Inst. de petrol, gaze şi geologie, **XVI** (1967).
4. * * * *Structura şi cinematica mecanismelor*, Edit. tehnică, 1959.

Tot din această variantă de bază 111000 face parte și varianta concretă

$$CCC + CCP = CCC\widehat{CP}(\lambda_4 + \lambda_3), \tag{7}$$

reprezentată grafic în figura 3 sub o formă constructivă.

Varianta analizată anterior, $CCC\widehat{PC}$ $(\lambda_4 + \lambda_3)$, este redată grafic în figura 4.

13. Rândul 1 din tabela 4 conduce la o variantă concretă de forma

$$CCC + CCC = CC\widehat{CCC}\ (\lambda_4 + \lambda_3), \tag{8}$$

reprezentată grafic în figura 5. Se observă după legătura în serie a lanțurilor cinematice 1 — 2 — 3 și 2 — 4 — 3.

14. Rândul 1 din tabela 6 conduce la o variantă concretă de forma

$$CCC + CCCC = CC\widehat{C}pCCCC\ (\lambda_4 + \lambda_3), \tag{9}$$

unde prin litera p este simbolizată legătura în paralel. O formă constructivă a acestei variante concrete este dată în figura 6. Se observă după legarea în paralel a lanțurilor cinematice 1 — 2 — 3 și 1 — 4 — 2 — 3.

15. În concluzie, problemele tratate în această lucrare scot în evidență următoarele aspecte importante:

a) la mecanismele spațiale există o foarte mare varietate a schemelor structurale, chiar la mecanisme cu un număr mic de elemente;

b) simbolurile numerice și literale utilizate pentru reprezentarea variantelor structurale (de bază și concrete) ale mecanismelor sînt mult mai eficiente în raport cu reprezentările grafice. Simbolurile numerice și literale oferă posibilitatea utilizării calculului din analiza combinatorie și a stabilirii după legi noi în domeniul structurii mecanismelor;

c) trecerea de la simbolizarea numerică și literală la reprezentarea grafică necesară în studiul cinematic se face foarte ușor.

Primită la redacție la 11 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A. Bănică, Contribuții la analiza structurală a mecanismelor spațiale, St. cerc. mec. apl., 27, 3 (1968).
2. — Mecanisme cu lanț elementar în conducerea mișcării, Comun. de mașini, 3, 4 (1968).
3. — Analiza structurală a mecanismului pentrulabe, simplu, Bul. Inst. de petrol, gaze și geologie, 3, 1 (1967).
4. Simionescu și Cherențiu mecanisme, Edit. tehnică, 1959.

SOLUȚII DINAMICE RAȚIONALE LA MOTOARELE ÎN PATRU TIMPI CU DOUĂ LINII PARALELE DE CILINDRI

de GHEORGE ZĂTREANU

Institutul Politehnic București

Se prezintă soluțiile care asigură caracteristici dinamice superioare unor construcții uzuale de motoare în patru timpi cu două linii paralele de cilindri. În acest scop se particularizează teoria generală privind echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație și echilibrajul momentelor externe corespunzătoare. Pentru trierea soluțiilor astfel precizate se apelează la criterii care depind de numărul de cilindri din fiecare linie.

1. INTRODUCERE

Dintre motoarele policilindrice cu ardere internă, motoarele cu două linii paralele de cilindri sînt caracterizate printr-o serie de avantaje. Astfel, dimensiunile de gabarit sînt relativ reduse chiar la un număr mare de cilindri, datorită plasării acestora în două linii și dispunerii paralele a liniilor, ceea ce prilejuiește totodată o simplificare a fabricației și o limitare a încărcării arborilor cotiți. De asemenea motoarele considerate prezintă caracteristici dinamice superioare cînd decalajul funcțional dintre linii este judicios adoptat. Acest ultim aspect este tratat în lucrare în cazul unor construcții uzuale de motoare în patru timpi cu două linii paralele de cilindri.

În scopul arătat sînt analizate posibilitățile de realizare a echilibrajului optim pentru ansamblul motorului atît din punctul de vedere al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație din fiecare linie, cît și din cel al momentelor externe corespunzătoare. Aceste posibilități sînt precizate prin particularizarea considerentelor generale privind echilibrajul forțelor de inerție și al momentelor externe ale forțelor de inerție la motoarele cu două linii de cilindri [1], [2]; pentru simplificarea exprimării, momentul extern care revine ansamblului celor două linii, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de armonica de un anumit

ordin a forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie, este numit moment rezultant de acel ordin.

Rezultatele analizei permit stabilirea soluţiilor dinamice corespunzătoare criteriilor abordate (echilibrajul optim al forţelor de inerţie şi al momentelor externe). Dintre aceste soluţii, cele mai avantajoase sînt precizate prin combinarea ambelor puncte de vedere, folosind uneori şi alte criterii de triere.

Se presupune că cele două linii, cu mecanisme bielă-manivelă axate şi cu distanţe egale între cilindrii consecutivi, sînt prevăzute cu arbori cotiţi identici. Arborii cotiţi se rotesc în acelaşi sens, care este ales ca sens pozitiv pentru măsurarea unghiurilor şi pentru desemnarea oricărei mişcări de rotaţie. Se admite că în ambele linii se foloseşte aceeaşi ordine de aprindere, cu aprinderi uniform repartizate, şi anume ordinea considerată optimă la motoarele în linie. Se mai adoptă ipoteza că aprinderile alternează între linii.

Notînd cu i numărul total de cilindri, pentru fiecare linie se numerotează cilindrii consecutivi cu $1,2,3, \ldots, m, \ldots, \frac{i}{2}$, începînd de la aceeaşi extremitate a motorului; aceste numere revin, evident, şi manivelelor care deservesc cilindrii respectivi. Aprinderile consecutive din fiecare linie sînt numerotate cu I, II, III, ..., K, ..., $\frac{i}{2}$, numerele I desemnînd aprinderile din cilindrii 1. Faţă de un observator care priveşte motorul dinspre extremitatea în care se află cilindrii 1, indicii s şi d, atribuiţi numerelor astfel stabilite şi altor notaţii folosite în continuare, precizează respectiv linia din stînga şi cea din dreapta.

Conform ipotezelor si notaţiilor precedente, cuplajul aprinderilor dintre linii este de tipul general $I_s \rightarrow K_d$ (aprinderea I_s este urmată de aprinderea K_d).

2. CONDIŢII GENERALE DE STABILIRE A SOLUŢIILOR DINAMICE

2.1. În fiecare linie produc rezultante armonicile forţelor de inerţie ale maselor cu mişcare de translaţie ale căror ordine se calculează cu formula generală

$$p = \varkappa \frac{i}{4}, \tag{1}$$

unde $i \geqslant 4$ şi $\varkappa = 1,2,3, \ldots$ [1]. Ţinînd seama că ordinele p sînt numere întregi şi că seria Fourier a forţei de inerţie a maselor cu mişcare de translaţie nu are armonicile impare începînd cu armonica a treia la mecanismul bielă-manivelă normal şi axat, formula (1) se aplică pentru toate valorile multiplului $\varkappa$ numai cînd $\frac{i}{4}$ este un număr par. În alte cazuri trebuie folosite numai anumite valori ale multiplului $\varkappa$: valorile pare la motoarele cu $\frac{i}{4}$ impar şi valorile multiplu de patru la motoarele cu $\frac{i}{2}$ impar.

Rezultanta pentru ansamblul motorului a oricărei armonici din cele precizate în condițiile specificate de formula (1) este o forță variabilă în mărime și sens; direcția acestei forțe este perpendiculară pe axele de rotație ale arborilor cotiți și paralelă cu planele determinate de axele cilindrilor din fiecare linie (planele liniilor de cilindri), iar amplitudinea ei are mărimea

$$R_p = 2F_p \, i \cos p \frac{\zeta}{2},$$

unde F_p este amplitudinea armonicii considerate pentru un cilindru, iar ζ decalajul unghiular dintre aprinderile consecutive I_s și K_d [1]. Armonica de ordinul p se echilibrează pentru ansamblul motorului dacă rezultanta R_p se anulează, ceea ce se obține adoptînd orice valoare ζ care respectă condiția

$$\zeta = (2\lambda_p - 1) \frac{\pi}{p}. \tag{2}$$

În cazul particular cînd fiecare aprindere dintr-o linie este însoțită de o aprindere în cealaltă linie, decalajul ζ este nul; pe de altă parte, deoarece aprinderile sînt uniform repartizate în fiecare linie, decalajul ζ poate fi cel mult egal cu decalajul dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie. Avînd în vedere că ζ poate varia între aceste limite,

$$0 \leqslant \zeta \leqslant \frac{4\pi}{\frac{i}{2}}, \tag{3}$$

se conchide că factorul λ_p din (2) poate lua numai valorile

$$\lambda_p = 1,2,3, \ldots, \frac{4p}{i}. \tag{4}$$

Echilibrarea armonicii de ordinul p antrenează și echilibrarea armonicilor ale căror ordine sînt multipli impari de p [1]. În consecință, echilibrajul optim din punctul de vedere al forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație reclamă asigurarea echilibrării armonicii de ordinul cel mai mic p_{min}, fiindcă în acest mod se realizează echilibrarea celor mai multe armonici, adică a armonicilor de ordinele

$$p_{ec} = (2\mu - 1) \, p_{min} \qquad (\mu = 1,2,3, \ldots). \tag{5}$$

În conformitate cu variantele de aplicare a formulei (1), ordinul cel mai mic este

$$p_{min} = \varkappa_{min} \frac{i}{4}, \tag{6}$$

unde $\varkappa_{min}$ ia valorile 1,2, sau 4; astfel, din relaţiile (2) şi (6) rezultă că echilibrajul optim studiat se realizează pentru orice decalaj care satisface condiţia

$$\zeta = (2\lambda_p - 1)\frac{4\pi}{\varkappa_{min} i}, \tag{7}$$

în care factorul λ_p aparţine domeniului

$$1 \leqslant \lambda_p \leqslant \varkappa_{min}, \tag{8}$$

dedus din (4) pentru $p = p_{min}$.

Ordinul p poate fi exprimat prin relaţia

$$p = \mu\, p_{min} \qquad (\mu = 1,2,3, \ldots); \tag{9}$$

ca urmare, din (9) şi (6) se deduce că armonicile care produc rezultante în fiecare linie au ordinele

$$p = \mu\, \varkappa_{min} \frac{i}{4}. \tag{10}$$

În sfîrşit, din (5) şi (6) rezultă că, adoptînd orice valoare ζ calculată cu relaţia (7), se echilibrează pentru ansamblul motorului armonicile de ordinele

$$p_{ec} = (2\mu - 1)\, \varkappa_{min} \frac{i}{4}. \tag{11}$$

2.2. În fiecare linie produc momente armonicile care nu dau rezultante, adică armonicile care nu îndeplinesc egalitatea (10). Considerînd una dintre aceste armonici, de exemplu armonica de ordinul q, momentul rezultant care îi corespunde este reprezentat printr-un vector variabil în mărime şi sens; direcţia vectorului este perpendiculară pe planele liniilor de cilindri, amplitudinea sa fiind

$$R_q = 2M_{i_q} \cos q \frac{\psi - \zeta}{2}, \tag{12}$$

unde M_{i_q} este momentul vectorilor care interpretează armonica de ordinul q în cilindrii unei linii, iar

$$\psi = (K_d - 1)\frac{4\pi}{\frac{i}{2}} \tag{13}$$

este unghiul cu care arborele cotit din dreapta trebuie rotit în sens pozitiv pentru declanşarea simultană a aprinderilor I_s şi K_d [2].

Spre deosebire de echilibrajul forțelor de inerție, echilibrajul momentelor externe depinde de numărul K_a, deoarece expresia (12) conține unghiul ψ. Drept urmare, la aplicarea condiției $R_q = 0$ de echilibrare a momentului rezultant de ordinul q se pot prezenta două alternative:

a) pentru $K_a = 1$ ($\psi = 0$) această condiție ia forma

$$\zeta = (2\lambda_q - 1)\frac{\pi}{q}, \tag{14}$$

unde λ_q este orice număr întreg care satisface restricția

$$\lambda_q \leqslant \frac{4q}{i} + \frac{1}{2}, \tag{15}$$

obținută din (3) și (14);

b) pentru $K_a > 1$ condiția $R_q = 0$ devine

$$\zeta = \psi - (2\lambda_q - 1)\frac{\pi}{q}, \tag{16}$$

iar factorul λ_q trebuie să fie cuprins în domeniul care rezultă din (3), (13) și (16), adică în domeniul

$$(K_a - 2)\frac{4q}{i} + \frac{1}{2} \leqslant \lambda_q \leqslant (K_a - 1)\frac{4q}{i} + \frac{1}{2}. \tag{17}$$

Și echilibrarea momentului rezultant de un anumit ordin, prin adoptarea unui decalaj ζ corespunzător, este însoțită de echilibrarea momentelor rezultante de alte ordine, ce sînt multipli impari ai ordinului inițial cu care s-a calculat decalajul ζ [2]. Astfel, problema echilibrajului optim din punctul de vedere al momentelor externe se rezolvă în mod similar aplicînd relațiile (14) și (15) sau relațiile (16) și (17) pentru $q = q^*$, unde q^*, este un ordin cît mai mic [1]; se asigură în acest mod echilibrarea momentelor rezultante de ordinele

$$q_{ec} = (2\nu - 1)\, q^*, \tag{18}$$

unde ν ia orice valoare întreagă în afară de valorile

$$\nu = \frac{1}{2} + \mu\varkappa_{\min}\frac{i}{8q^*} \quad (\mu = 1,2,3, \ldots),$$

care dau ordine precizate și de relația (10), deci ordine ale unor armonici care nu produc momente.

2.3. Considerentele precedente sînt aplicate în continuare în conformitate cu particularitățile introduse de numărul de cilindri.

---

[1]) În cele ce urmează se arată că nu este totdeauna avantajos să se aleagă ordinul cel mai mic, adică să se impună condiția $q = q_{\min}$ în relațiile (14)-(17).

La motoarele cu $\frac{i}{2}$ par se consideră că arborii cotiți au plan central de simetrie, ceea ce antrenează echilibrarea în fiecare linie a momentelor externe ale tuturor armonicilor care nu produc rezultante. Ca urmare, soluțiile dinamice ale motoarelor cu $\frac{i}{2}$ par se stabilesc numai pe baza posibilităților de realizare a echilibrajului optim al forțelor de inerție.

În fiecare linie a motoarelor cu $\frac{i}{2}$ impar subzistă momentele externe ale tuturor armonicilor care nu produc rezultante. La stabilirea soluțiilor dinamice respective trebuie deci să se țină seama atît de posibilitățile de echilibraj optim al forțelor de inerție, cît și de cele care asigură echilibrajul optim al momentelor externe.

2.4. Cazul repartiției uniforme a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii $\left(\zeta = \frac{4\pi}{i}\right)$ nu este abordat direct. O atare practică este justificată, pe de o parte, de faptul că echilibrajul forțelor de inerție este favorizat de repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii numai la motoare cu $\frac{i}{4}$ par [1], iar la motoarele de acest fel studiate repartiția menționată constituie, așa cum se va arăta, chiar condiția de echilibraj optim al forțelor de inerție; pe de altă parte, repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii poate influența echilibrajul momentelor externe numai cînd $\frac{i}{2}$ este par [2], deci cînd problema nu se pune, deoarece arborii cotiți sînt presupuși cu plan central de simetrie.

De altminteri, impunînd condiția de echilibraj optim al forțelor de inerție la motoarele cu $\frac{i}{2}$ par, se obțin de multe ori în lucrare cuplaje ale aprinderilor mai avantajoase decît repartiția în discuție, sub aspectul echilibrajului momentelor de basculare în jurul unei axe paralele cu axele de rotație ale arborilor cotiți [3].

3. SOLUȚII DINAMICE LA MOTOARELE CU $\frac{i}{2}$ PAR

3.1. Dacă $\frac{i}{4}$ este impar, există două posibilități de realizare a echilibrajului optim al forțelor de inerție, fiindcă domeniul (8) cuprinde valorile $\lambda_p = 1$ și $\lambda_p = 2$, pentru care se obțin două valori ζ din relația (7). Oricare dintre cele două valori ale unghiului ζ dintr-un atare caz sau valoarea singulară corespunzătoare cazului $\frac{i}{4}$ par (cînd $\lambda_p = 1$) poate fi realizată prin $\frac{i}{2}$ cuplaje de tipul $I_s \rightarrow K_d$ ale aprinderilor între linii; într-adevăr, expresia (7) a unghiului ζ nu conține numărul K_d, deci acest număr poate

desemna orice aprindere din linia din dreapta pentru ordinea de aprindere comună celor două linii. Astfel, la orice motor cu $\frac{i}{2}$ par și cu o anumită ordine de aprindere pe linie se poate opta între

$$n = \xi \frac{i}{2}$$

soluții dinamice echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție, ξ fiind numărul de valori posibile ale unghiului ζ.

3.1.1. O particularitate a acestor soluții se deduce ținînd seama că la fiecare arbore cotit manivelele cu numerele m și $\frac{i}{2} - m + 1$ sînt în fază, datorită construcției arborilor cotiți cu plan central de simetrie. Considerînd soluția la care numărul K_d revine aprinderii din cilindrul m_d, poziția relativă a arborilor cotiți corespunzătoare acestei soluții și obținută, evident, pentru una dintre cele ξ valori posibile ale decalajului ζ este înregistrată și cînd K_d desemnează aprinderea din cilindrul $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$. Astfel cele $\frac{i}{2}$ soluții aferente fiecărui decalaj ζ corespund două cîte două aceleiași poziții relative a arborilor cotiți; pentru un anumit motor, numărul total de poziții relative ale arborilor cotiți este, evident, $\xi \frac{i}{4} = \frac{n}{2}$.

La soluțiile unei asemenea poziții, valorile numerelor K_d corespund numerelor de ordine ale aprinderilor din cilindrii m_d și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$. Se presupune, de exemplu, motorul cu 12 cilindri, avînd în fiecare linie ordinea uzuală de aprindere 1—5—3—6—2—4, la care numerotarea aprinderilor consecutive este I, II, III, ..., VI; dacă se ia $m_d = 3_d$, rezultă $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d = 4_d$, deci unei poziții relative a arborilor cotiți îi revin valorile K_d corespunzătoare numerelor III_d și VI_d ale aprinderilor din cilindri 3_d și 4_d, adică valorile $K_d = 3$ și $K_d = 6$.

3.1.2. Se consideră cîte o grupă de două manivele în fază a fiecărui arbore cotit, ambele grupe conținînd manivele cu aceleași numere de ordine, de pildă manivelele cu numerele m și $\frac{i}{2} - m + 1$. În decursul unei rotații a arborilor cotiți există două posibilități ca aprinderile aferente acestor grupe să fie consecutive: o aprindere declanșată într-unul din cilindrii m_d sau $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$ urmează după o aprindere produsă într-unul din cilindrii m_s sau $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$ sau invers. Presupunînd realizată prima posibilitate, grupa manivelelor m_d și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$ este decalată în urmă

față de grupa manivelelor m_s și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$ cu unul dintre unghiurile ζ posibile, de exemplu cu unghiul ζ_1; acest unghi caracterizează una dintre cele $\frac{n}{2}$ poziții relative ale arborilor cotiți (fig. 1*a*). Dacă arborele cotit din dreapta este rotit în sens pozitiv cu unghiul $2\zeta_1$, iar arborele cotit din stînga rămîne nemișcat, se obține o altă poziție relativă a arborilor cotiți (fig. 1*b*), care asigură, evident, a doua posibilitate de succesiune consecutivă a aprinderilor aferente grupelor considerate; acestei noi poziții îi este caracteristic decalajul ζ_2, reprezentînd, conform definiției, unghiul cu care grupa de manivele în fază a arborelui cotit din dreapta corespunzătoare aprinderilor produse imediat după aprinderile din cilindrii m_s și, respectiv, $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$ este decalată în urmă față de grupa manivelelor m_s și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$.

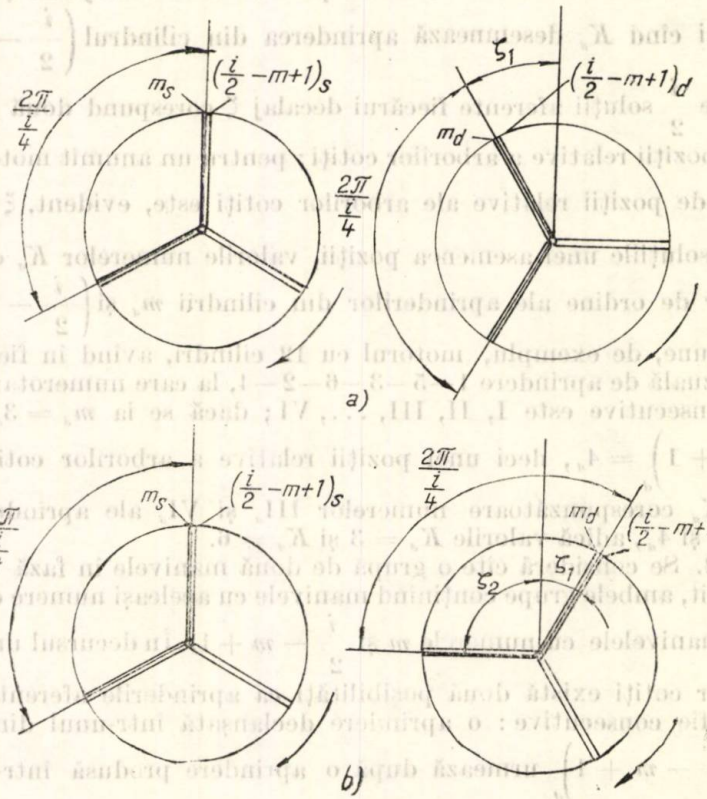


Fig. 1. — Pozițiile relative ale arborilor cotiți care asigură declanșarea consecutivă a aprinderilor aferente grupelor de manivele $m_s - \left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$ și $m_d - \left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$.

Se constată astfel că cele două posibilități de succesiune consecutivă a aprinderilor aferente grupelor de manivele $m_s - \left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$ și $m_d - \left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$ corespund la două poziții relative ale arborilor cotiți, în care grupa manivelelor m_d și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$ este plasată simetric de o parte și, respectiv, de cealaltă parte a unui plan paralel cu grupa manivelelor m_s și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_s$. Aceste poziții relative sînt singurele capabile să asigure succesiunile consecutive menționate, fiindcă ele implică decalajele, în general diferite, ζ_1 și ζ_2, iar motoarele examinate $\left(\frac{i}{2} \text{ par}\right)$ comportă cel mult două valori ζ.

Concluziile precedente au fost deduse considerînd două grupe oarecare de manivele în fază ale arborilor cotiți, singura condiție impusă fiind identitatea numerelor de ordine ale manivelelor celor două grupe. Ca urmare, aceste concluzii se obțin și cînd se reface raționamentul pentru oricare din celelalte $\frac{i}{4} - 1$ perechi de grupe cu manivele în fază, manivelele componente avînd tot numere de ordine identice. Concluziile pot fi deci generalizate, ceea ce înseamnă că pentru orice motor două cîte două din cele $\frac{n}{2}$ poziții relative ale arborilor cotiți au orice grupă de manivele în fază a unui arbore cotit plasată simetric de o parte și, respectiv, de cealaltă parte a unui plan paralel cu grupa celuilalt arbore cotit, constituită din manivele cu aceleași numere de ordine ca și grupa considerată. Pentru comoditatea exprimării, orice pereche formată din două asemenea poziții relative ale arborilor cotiți este numită în continuare pereche cu poziții relative simetrice; la i dat, există, evident, $\frac{n}{4}$ perechi cu poziții relative simetrice.

Suma decalajelor ζ_1 și ζ_2 anterior precizate este egală cu unghiul dintre două grupe consecutive de manivele în fază ale unui arbore cotit:

$$\zeta_1 + \zeta_2 = \frac{2\pi}{\frac{i}{4}}. \qquad (19)$$

În cazul motoarelor cu $\frac{i}{4}$ par, la care decalajul ζ ia o singură valoare, relația (19) devine

$$2\zeta = \frac{2\pi}{\frac{i}{4}},$$

adică

$$\zeta = \frac{4\pi}{i};$$

astfel echilibrajul optim al forțelor de inerție se obține la motoarele cu $\frac{i}{4}$ par dacă se asigură repartiția uniformă a aprinderilor pentru ansamblul celor două linii, așa cum s-a anticipat la punctul 2.4.

3.2. În vederea trierii celor n soluții echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție se folosește criteriul ordinii optime de aprindere pentru întregul motor. Această ordine corespunde valorii minime a momentului rezultant al forțelor normale aplicate arborilor cotiți; întrucît variația forței normale pentru un cilindru nu este cunoscută, se recurge la compararea momentelor rezultante maxime ale armonicilor forței normale [4].

3.2.1. Dacă se consideră armonica de ordinul r a forței normale, vectorii N_r care o interpretează în cilindrii fiecărei linii produc un moment M_r reprezentat printr-un vector de mărime constantă, care se rotește în sens pozitiv cu o viteză unghiulară de $\frac{r}{2}$ ori mai mare decît viteza unghiulară a arborilor cotiți. Momentul M_r este egal cu momentul maxim produs de armonica de ordinul r într-o linie; în consecință, rezultanta vectorilor moment M_{r_s} și M_{r_d} corespunzători celor două linii este egală cu momentul maxim al armonicii considerate. Rezultanta vectorilor M_{r_s} și M_{r_d} este minimă dacă poziția relativă a acestor vectori este cît mai apropiată de opoziția lor de fază. Deoarece unghiul dintre vectori M_{r_s} și M_{r_d}, măsurat față de vectorul M_{r_s}, este [4]

$$\delta = r\left[(K_d - 1)\frac{4\pi}{i} - \frac{\zeta}{2}\right], \tag{20}$$

momentul rezultant maxim al armonicii de ordinul r înregistrează valoarea minimă la soluția care asigură valoarea cea mai apropiată de un multiplu impar de π a unghiului δ.

În alternativa $K_d = 1$, unghiul δ este negativ, întrucît cuplajul respectiv $(I_s \to I_d)$ pretinde decalarea arborelui cotit din dreapta în urmă față de arborele cotit din stînga cu unghiul ζ; în această alternativă se obține din (20) $\delta = -r\frac{\zeta}{2}$. În alternativa $K_d > 1$, semnul unghiului δ se deduce înlocuind în (20) valoarea unghiului ζ, dată de (7)

$$\delta = r\left[K_d - 1 - (2\lambda_p - 1)\frac{1}{2\varkappa_{\min}}\right]\frac{4\pi}{i};$$

avînd în vedere valorile posibile ale factorilor $\varkappa_{min}$ și λ_p, rezultă $K_d - 1 > (2\lambda_p - 1)\frac{1}{2\varkappa_{min}}$, deci $\delta > 0$. În conformitate cu aceste alternative, unghiul δ din (20) poate fi scris sub forma

$$\delta = \mp [(2\rho - 1)\pi \pm \varphi] \quad (\rho = 1,2,3, \ldots), \tag{21}$$

în care $\varphi < \pi$. Acest mod de scriere permite să se compare soluțiile după valorile absolute ale unghiului φ : soluția la care unghiul φ ia cea mai mică valoare absolută este optimă, fiindcă unghiul δ corespunzător este cel mai apropiat de un multiplu impar de π.

3.2.2. Pentru un anumit motor se consideră una dintre cele $\frac{n}{4}$ perechi cu poziții relative simetrice. Se notează cu a și b soluțiile echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție corespunzătoare uneia dintre pozițiile relative aferente perechii considerate ; la soluția a aprinderea din cilindrul m_s este urmată de aprinderea din cilindrul m_d, iar la soluția b aprinderea din cilindrul m_s este urmată de aprinderea din cilindrul $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$. Celei de-a doua poziții relative a perechii considerate îi revin soluțiile c și d, echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție; aceste soluții implică succesiunea aprindere în cilindrul $m_d \rightarrow$ aprindere în cilindrul m_s și, respectiv, succesiunea aprindere în cilindrul $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d \rightarrow$ aprindere în cilindrul m_s.

La cele patru soluții $a \ldots d$, arborele cotit din stînga este permanent în fază cu el însuși, ceea ce înseamnă că vectorii M_{r_s} corespunzători sînt și ei în fază. La fiecare dintre cele patru soluții, orientarea vectorului M_{r_d} față de direcția vectorului M_{r_s} depinde de cuplajul respectiv al aprinderilor între linii. Dacă se trece de la o soluție la alta, vectorul M_{r_d} își schimbă orientarea față de direcția constantă a vectorului M_{r_s} datorită schimbării cuplajului aprinderilor între linii.

Comparînd soluțiile a și c, se constată că ambele comportă aprinderi consecutive în cilindrii m_s și m_d, produse în ordine inversă ca urmare a modificării poziției relative a arborilor cotiți de la o soluție la alta. Această modificare constituie singura cauză de schimbare a cuplajului aprinderilor între linii, cînd o soluție este înlocuită cu cealaltă, fiindcă m poate lua orice valoare între 1 și $\frac{i}{2}$. În consecință, schimbarea orientării vectorului M_{r_d} față de direcția constantă a vectorului M_{r_s} de la o soluție la alta este determinată numai de modificarea poziției relative a arborilor cotiți. Deoarece arborele cotit din dreapta este plasat simetric față de arborele cotit din stînga în cele două poziții relative ale perechii considerate, rezultă că direcțiile vectorilor M_{r_d} ai soluțiilor a și c sînt simetrice față de direcția comună a vectorilor M_{r_s}. Astfel, soluțiile a și c comportă aceeași valoare a unghiului φ din (21), însă cu semn schimbat, ceea ce înseamnă că soluțiile a și c conduc la aceeași valoare a momentului rezultant maxim al armonicii de ordinul r.

Avînd în vedere că soluțiile *b* și *d* presupun tot aprinderi consecutive identice, produse în ordine inversă în cilindrii m_s și $\left(\frac{i}{2} - m + 1\right)_d$, și că fiecare dintre aceste soluții se realizează pentru una din cele două poziții relative ale perechii alese, se deduce evident că și soluțiile *b* și *d* sînt echivalente din punctul de vedere al valorii momentului rezultant maxim al armonicii de ordinul *r*.

Constatările astfel făcute se bazează pe considerarea unei perechi oarecare cu poziții relative simetrice și nu reclamă precizarea ordinului *r* al armonicii forței normale; ca urmare, constatările sînt valabile pentru orice pereche cu poziții relative simetrice și pentru orice armonică a forței normale. La orice motor, două cîte două din cele *n* soluții echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție sînt deci echivalente și în ceea ce privește valoarea momentului rezultant maxim al oricărei armonici a forței normale.

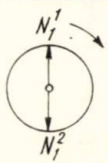
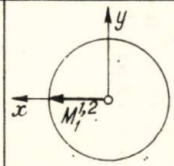
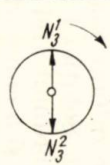
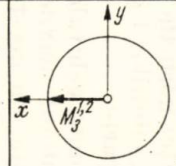
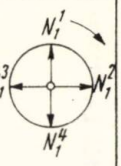
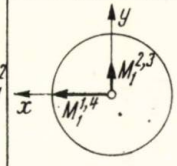
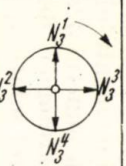
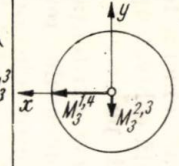
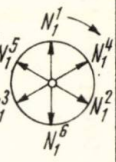
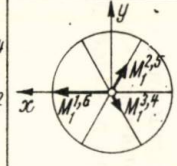
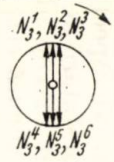
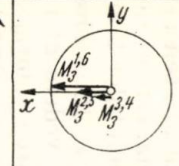
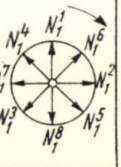
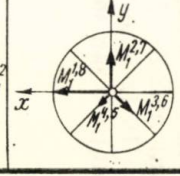
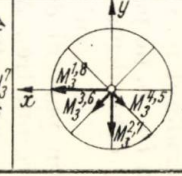
3.2.3. Deoarece amplitudinile armonicilor forței normale sînt, în general, cu atît mai mici cu cît ordinul armonicii este mai mare, este suficient să se aplice criteriul ordinii optime de aprindere pentru întregul motor considerînd numai momentele rezultante maxime ale primelor două armonici [4]; ele au ordinele $r = 1$ și $r = 3$, fiindcă în fiecare linie subzistă numai momentele armonicilor impare ale forței normale.

Momentul produs de o armonică oarecare a forței normale în fiecare linie a unui anumit motor depinde atît de mărimea vectorilor care interpretează armonica respectivă, cît și de dispunerea acestor vectori în raport cu axa de rotație și în lungul arborelui cotit al liniei. În funcție de mărimile vectorilor N_1 și N_3 și de pozițiile respective, momentul produs de una dintre cele două armonici considerate este superior momentului celeilalte armonici. Moment mai mare produs în fiecare linie de o armonică înseamnă, evident, moment rezultant maxim mai mare al acelei armonici; în consecință, se determină la fiecare motor momentele M_1 și M_3, valorile acestor momente precizînd modul în care se triază ulterior cele *n* soluții echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție.

Rezultatele calculelor privind momentele M_1 și M_3 pentru o linie cu $\frac{i}{2}$ cilindri sînt prezentate în tabela 1, numărul total de cilindri fiind limitat la $i = 16$. La stabilirea stelei vectorilor N_1 și a stelei vectorilor N_3 s-a aplicat regula cunoscută: dacă se parcurge fiecare stea în sens negativ, vectorii aferenți fiecărui cilindru se întîlnesc în conformitate cu ordinea de aprindere, unghiul dintre vectorii din doi cilindri în care aprinderile sînt consecutive fiind $\frac{2\pi}{\frac{i}{2}}$, respectiv $3\frac{2\pi}{\frac{i}{2}}$ [4]. În stelele vectorilor N_1, N_3, M_1 și M_3, indicii superiori atribuiți acestor vectori reprezintă numerele cilindrilor cărora le corespund vectorii; în expresiile momentelor M_1 și M_3 s-a folosit notația *d* pentru distanța dintre doi cilindri consecutivi.

Din tabela 1 se constată că $M_1 > M_3$ la motoarele cu patru și opt cilindri, deoarece $N_1 > N_3$; la aceste motoare se compară cele *n* soluții echivalente în ceea ce privește echilibrajul optim al forțelor de inerție numai din punctul de vedere al momentului rezultant maxim al armonicii

TABELA 1. MOMENTELE PRIMELOR DOUĂ ARMONICI ALE FORȚEI NORMALE PENTRU O LINIE A MOTOARELOR CU $\frac{i}{2}$ PAR

Numărul de cilindri i	Numărul de cilindri $\frac{i}{2}$	Ordinea de aprindere pe linie	Steaua vectorilor N_1	Steaua vectorilor M_1	Componentele momentului M_1	Momentul M_1	Steaua vectorilor N_3	Steaua vectorilor M_3	Componentele momentului M_3	Momentul M_3
4	2	1 − 2			$M_{1x} = M_1^{1,2}$ $M_{1y} = 0$	$M_1 = N_1 d$			$M_{3x} = M_3^{1,2}$ $M_{3y} = 0$	$M_3 = N_3 d$
8	4	1-3-4-2			$M_{1x} = M_1^{1,4}$ $M_{1y} = M_1^{2,3}$	$M_1 = 3{,}17 N_1 d$			$M_{3x} = M_3^{1,4}$ $M_{3y} = -M_3^{2,3}$	$M_3 = 3{,}17 N_3 d$
12	6	1-5-3-6-2-4			$M_{1x} = M_1^{1,6} - \frac{1}{2}\left(M_1^{2,5} + M_1^{3,4}\right)$ $M_{1y} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(M_1^{2,5} - M_1^{3,4}\right)$	$M_1 = 3{,}46 N_1 d$			$M_{3x} = M_3^{1,6} + M_3^{2,5} + M_3^{3,4}$ $M_{3y} = 0$	$M_3 = 9 N_3 d$
16	8	1-4-7-3-8-5-2-6			$M_{1x} = M_1^{1,8} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_1^{3,6} - M_1^{4,5}\right)$ $M_{1y} = M_1^{2,7} - \frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_1^{3,6} + M_1^{4,5}\right)$	$M_1 = 6 N_1 d$			$M_{3x} = M_3^{1,8} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_3^{3,6} - M_3^{4,5}\right)$ $M_{3y} = -\left[M_3^{2,7} + \frac{\sqrt{2}}{2}\left(M_3^{3,6} + M_3^{4,5}\right)\right]$	$M_3 = 11{,}5 N_3 d$

întîi. Pentru $i = 12$ şi $i = 16$ se stabileşte condiţia de minim a momentelor rezultante maxime ale ambelor armonici, fiind posibil, în funcţie de raportul valorilor N_1 şi N_3, oricare dintre cazurile $M_1 > M_3$ şi $M_1 < M_3$.

3.3. Soluţiile echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forţelor de inerţie pentru motoarele cu $i = 4{,}8$, 12 şi 16 cilindri sînt arătate în tabela 2. La fiecare motor, soluţiile aferente aceluiaşi decalaj ζ au fost grupate în conformitate cu particularitatea enunţată la punctul 3.1.1. Pentru a aplica criteriul de triere precizat la punctul 3.2.3 s-au determinat unghiurile φ cu semnele respective, punîndu-se astfel în evidenţă grupele de două soluţii echivalente sub aspectul momentului rezultant maxim al aceleiaşi armonici a forţei normale la fiecare motor; la $i = 8$, de pildă, este evidentă echivalenţa soluţiilor 1 şi 3, pe de o parte, şi echivalenţa soluţiilor 2 şi 4, pe de altă parte.

În cazul $i = 12$ se observă existenţa unor echivalenţe suplimentare din punctul de vedere al momentului rezultant maxim al armonicii de ordinul trei. Astfel soluţia 1 este echivalentă din acest punct de vedere cu soluţia 9, ca şi sub aspectul momentului rezultant maxim al armonicii întîi, conform constatării de la punctul 3.2.2. Soluţiei 1 îi revine însă momentul rezultant maxim al armonicii de ordinul trei corespunzător şi soluţiilor 4 şi 5, fiindcă cele trei soluţii 1, 4 şi 5 comportă aceeaşi valoare şi acelaşi semn pentru unghiul φ, adică presupun vectorii M_{3_d} în fază; ultimul rezultat se explică prin faptul că de la o soluţie la alta vectorul M_{1_d} este rotit în sens pozitiv sau negativ cu unghiul $\frac{2\pi}{3}$, ceea ce înseamnă că vectorul M_{3_d} este rotit cu unghiul $3\frac{2\pi}{3} = 2\pi$.

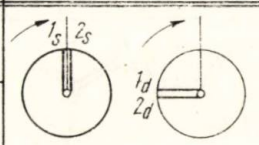
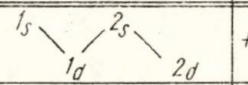
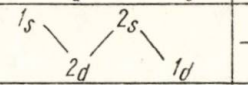
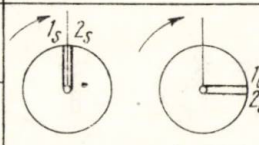
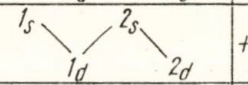
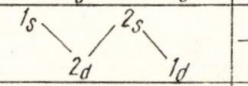
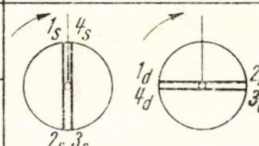
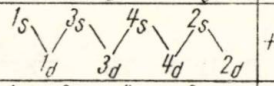
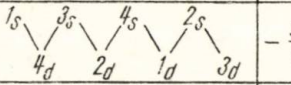
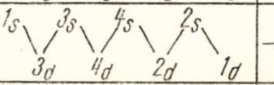
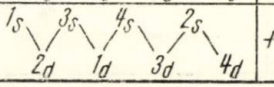
Analizînd tabela 2, se conchide că este raţional să se adopte una dintre soluţiile 2 şi 3 la motorul cu patru cilindri, una dintre soluţiile 2 şi 4 la motorul cu opt cilindri şi una dintre soluţiile 2 şi 10 la motorul cu doisprezece cilindri; ultimele două soluţii asigură valoarea minimă atît pentru momentul rezultant maxim al armonicii întîi, cît şi pentru momentul rezultant maxim al armonicii de ordinul trei la motorul respectiv. În cazul $i = 16$ trebuie preferată soluţia 2 sau soluţia 4 cînd $M_1 > M_3$, respectiv soluţia 5 sau soluţia 8 cînd $M_1 < M_3$.

4. SOLUŢII DINAMICE LA MOTOARELE CU $\frac{i}{2}$ IMPAR

4.1. Pentru motoarele cu $\frac{i}{2}$ impar se înlocuieşte $\varkappa_{\min} = 4$ în relaţiile (7) şi (8), deci echilibrajul optim al forţelor de inerţie se realizează pentru orice decalaj ζ care respectă condiţia

$$\zeta = (2\lambda_p - 1)\frac{\pi}{i}, \qquad (22)$$

TABELA 2. SOLUȚII DINAMICE LA MOTOARELE CU $\frac{i}{2}$ PAR

Numărul de cilindri i	Valorile multiplului x_{min}	Ordinele armonicilor forțelor de inerție care produc rezultante în fiecare linie ($\mu = 1,2,3...$)	Valorile posibile ale factorului λ_p	Valorile posibile ale unghiului ζ	Ordinele armonicilor forțelor de inerție care se echilibrează pentru ansamblul motorului ($\mu = 1,2,3...$)	Ordinile de aprindere pe linie și numerotarea aprinderilor consecutive	Valorile posibile ale numărului K_d	Pozițiile relative ale arborilor cotiți	Ordinile de aprindere pentru ansamblul motorului	Valorile unghiului φ		Numărul soluției
										$r=1$	$r=3$	
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
4	2	$p = 2\mu$	1	$\frac{\pi}{2}$	$p_{ec} = 2(2\mu-1)$	1 – 2 I II	1			$+\frac{3\pi}{4}$		1
							2			$-\frac{\pi}{4}$		2
			2	$\frac{3\pi}{2}$			1			$+\frac{\pi}{4}$	–	3
							2			$-\frac{3\pi}{4}$		4
8	1	$p = 2\mu$	1	$\frac{\pi}{2}$ *)	$p_{ec} = 2(2\mu-1)$	1 – 3 – 4 – 2 I II III IV	1			$+\frac{3\pi}{4}$		1
							3			$-\frac{\pi}{4}$		2
							2			$-\frac{3\pi}{4}$	–	3
							4			$+\frac{\pi}{4}$		4

*) Aprinderi uniform repartizate pentru întregul motor

TABELA 2. (continuare)/1

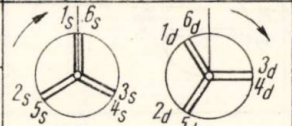
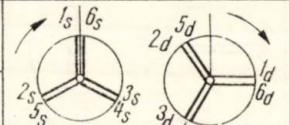
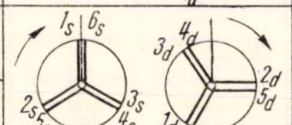
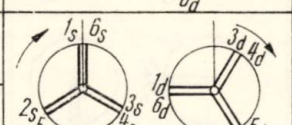
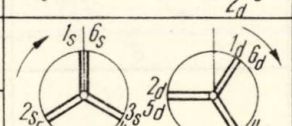
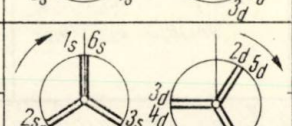
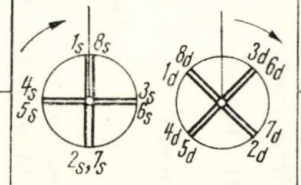
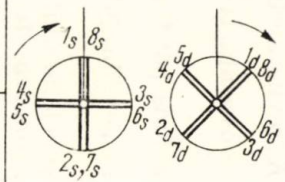
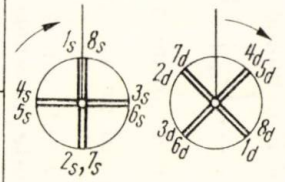
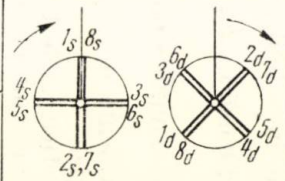
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
12	2	$p = 6\mu$	1	$\frac{\pi}{6}$	$p_{ec} = 6(2\mu-1)$	1-5-3-6-2-4 I II III IV V VI	1		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $1_d\ 5_d\ 3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d$	$+\frac{11\pi}{12}$	$+\frac{3\pi}{4}$	1
							4		$1_s\ 5_s\ 3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d$ $6_d\ 2_d\ 4_d\ 1_d\ 5_d\ 3_d$	$-\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{4}$	2
							2		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $5_d\ 3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d\ 1_d$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	3
							5		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $2_d\ 4_d\ 1_d\ 5_d\ 3_d\ 6_d$	$+\frac{\pi}{4}$	$+\frac{3\pi}{4}$	4
							3		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d\ 1_d\ 5_d$	$-\frac{5\pi}{12}$	$+\frac{3\pi}{4}$	5
							6		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $4_d\ 1_d\ 5_d\ 3_d\ 6_d\ 2_d$	$+\frac{\pi}{12}$	$-\frac{\pi}{4}$	6
			2	$\frac{\pi}{2}$			1		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $1_d\ 5_d\ 3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d$	$+\frac{3\pi}{4}$	$+\frac{\pi}{4}$	7
							4		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $6_d\ 2_d\ 4_d\ 1_d\ 5_d\ 3_d$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$	8
							2		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $5_d\ 3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d\ 1_d$	$-\frac{11\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	9
							5		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $2_d\ 4_d\ 1_d\ 5_d\ 3_d\ 6_d$	$+\frac{\pi}{12}$	$+\frac{\pi}{4}$	10
							3		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $3_d\ 6_d\ 2_d\ 4_d\ 1_d\ 5_d$	$-\frac{7\pi}{12}$	$\frac{\pi}{4}$	11
							6		$1_s\ 5_s\ 3_s\ 6_s\ 2_s\ 4_s$ $4_d\ 1_d\ 5_d\ 3_d\ 6_d\ 2_d$	$+\frac{5\pi}{12}$	$-\frac{3\pi}{4}$	12

TABELA 2. (continuare)/2

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
16	1	$p=4\mu$	1	$\frac{\pi}{4}$ *)	$p_{ec}=4(2\mu-1)$	1 – 4 – 7 – 3 – I II III IV – 8 – 5 – 2 – 6 V VI VII VIII	1		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 1_d 4_d 7_d 3_d 8_d 5_d 2_d 6_d	$+\frac{7\pi}{8}$	$+\frac{5\pi}{8}$	1
							5		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 8_d 5_d 2_d 6_d 1_d 4_d 7_d 3_d	$-\frac{\pi}{8}$	$-\frac{3\pi}{8}$	2
							2		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 4_d 7_d 3_d 8_d 5_d 2_d 6_d 1_d	$-\frac{7\pi}{8}$	$-\frac{5\pi}{8}$	3
							6		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 5_d 2_d 6_d 1_d 4_d 7_d 3_d 8_d	$+\frac{\pi}{8}$	$+\frac{3\pi}{8}$	4
							3		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 7_d 3_d 8_d 5_d 2_d 6_d 1_d 4_d	$-\frac{5\pi}{8}$	$+\frac{\pi}{8}$	5
							7		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 2_d 6_d 1_d 4_d 7_d 3_d 8_d 5_d	$+\frac{3\pi}{8}$	$-\frac{7\pi}{8}$	6
							4		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 3_d 8_d 5_d 2_d 6_d 1_d 4_d 7_d	$-\frac{3\pi}{8}$	$+\frac{7\pi}{8}$	7
							8		1_s 4_s 7_s 3_s 8_s 5_s 2_s 6_s / 6_d 1_d 4_d 7_d 3_d 8_d 5_d 2_d	$+\frac{5\pi}{8}$	$-\frac{\pi}{8}$	8

*) Aprinderi uniform repartizate pentru întregul motor

MUSZAKI EGYETEM BUDAPEST KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

unde $\lambda_p = 1, 2, 3$ sau 4. Rezultatul astfel obținut este pus în evidență, făcînd aceeași particularizare ($\varkappa_{\min} = 4$), în formulele (10) și (11): dintre armonicile de ordinele

$$p = \mu i \quad (\mu = 1, 2, 3, \ldots), \tag{23}$$

care subzistă în fiecare linie, se echilibrează pentru ansamblul motorului armonicile cu ordinele

$$p_{ec} = (2\mu - 1)\, i.$$

Pentru orice motor există patru decalaje ζ care asigură echilibrajul optim precizat, întrucît factorul λ_p din (22) poate lua patru valori. Este posibil ca oricare din aceste decalaje să fie realizat prin $\frac{i}{2}$ cuplaje ale aprinderilor între linii, după cum numărul K_a revine aprinderii produse într-unul din cilindrii $1_a, 2_a, 3_a, \ldots, \left(\frac{i}{2}\right)_a$. În consecință, la orice motor cu $\frac{i}{2}$ impar și cu o anumită ordine de aprindere pe linie pot fi propuse $4\frac{i}{2} = 2i$ soluții echivalente din punctul de vedere al echilibrajului optim al forțelor de inerție.

Decalajele ζ obținute din (22) și echilibrajul realizat pentru diferite motoare sînt prezentate în tabela 3, numărul de cilindri fiind limitat la $i = 14$.

Din tabela 3 se constată că motoarele examinate comportă un bun echilibraj al forțelor de inerție chiar fără adoptarea unor măsuri speciale, fiindcă ordinele armonicilor care subzistă în fiecare linie sînt mari. Drept urmare, din cele $2i$ soluții care pot asigura echilibrajul optim al forțelor de inerție la fiecare motor sînt precizate în continuare numai cele avantajoase și în ceea ce privește echilibrajul momentelor externe.

4.2. Din punctul de vedere al echilibrajului optim al momentelor externe reținem atenția două variante.

a) Se asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul întîi, impunînd condiția $R_1 = 0$. Această condiție se explicitează înlocuind

$$q = q_{\min} = 1 \tag{24}$$

în relațiile care precizează decalajul ζ pentru oricare din alternativele de succesiune a aprinderilor între linii.

În alternativa $K_a = 1$ rezultă din (14) și (24) necesitatea de a adopta un decalaj ζ supus restricției

$$\zeta = (2\lambda_q - 1)\, \pi, \tag{25}$$

în care factorul λ_q ia valorile

$$\lambda_q \leqslant \frac{4}{i} + \frac{1}{2}, \tag{26}$$

TABELA 3. DECALAJELE ζ POSIBILE ȘI ECHILIBRAJUL OPTIM AL FORȚELOR DE INERȚIE LA MOTOARELE CU $\frac{i}{2}$ IMPAR

Numărul de cilindri i	Ordinele armonicilor forțelor de inerție care produc rezultante în fiecare linie ($\mu = 1, 2, 3...$)	Valorile posibile ale factorului λ_p	Valorile posibile ale unghiului ζ	Ordinele armonicilor forțelor de inerție care se echilibrează pentru ansamblul motorului ($\mu = 1, 2, 3...$)
6	$p = 6\mu$	1	$\frac{\pi}{6}$	$p_{ec} = 6(2\mu - 1)$
		2	$\frac{\pi}{2}$	
		3	$\frac{5\pi}{6}$	
		4	$\frac{7\pi}{6}$	
10	$p = 10\mu$	1	$\frac{\pi}{10}$	$p_{ec} = 10(2\mu - 1)$
		2	$\frac{3\pi}{10}$	
		3	$\frac{\pi}{2}$	
		4	$\frac{7\pi}{10}$	
14	$p = 14\mu$	1	$\frac{\pi}{14}$	$p_{ec} = 14(2\mu - 1)$
		2	$\frac{3\pi}{14}$	
		3	$\frac{5\pi}{14}$	
		4	$\frac{\pi}{2}$	

deduse din (15) şi (24). Conform condiţiei (3), unghiul ζ poate lua cel mult valoarea 2π; deoarece relaţia (25) arată că ζ trebuie să fie un multiplu impar de π, se constată că în alternativa $K_d = 1$ există o singură soluţie pentru realizarea echilibrajului propus, corespunzătoare unghiului $\zeta = \pi$. Acest unghi se obţine din (25) cînd factorul λ_q ia valoarea 1, pentru care se deduce din (26)

$$i \leqslant 8. \tag{27}$$

Dintre motoarele studiate, numai motorul cu şase cilindri îndeplineşte condiţia (27), ceea ce înseamnă că numai la acest motor se poate aplica soluţia singulară prezentată.

În alternativa $K_d > 1$ se deduce din (16) şi (24)

$$\zeta = \psi - (2\lambda_q - 1)\pi; \tag{28}$$

avînd în vedere formula (13), rezultă necesitatea folosirii unui decalaj calculat cu relaţia

$$\zeta = (K_d - 1)\frac{4\pi}{\frac{i}{2}} - (2\lambda_q - 1)\pi, \tag{29}$$

factorul λ_q aparţinînd domeniului obţinut din (17) şi (24), adică domeniului

$$(K_d - 2)\frac{4}{i} + \frac{1}{2} \leqslant \lambda_q \leqslant (K_d - 1)\frac{4}{i} + \frac{1}{2}. \tag{30}$$

Înlocuind în (30) valorile posibile ale numărului K_d, se precizează valori distincte pentru λ_q ori de cîte ori domeniul (30) cuprinde cel puţin un număr întreg. Dacă se introduce în (29) fiecare valoare K_d care determină un atare rezultat şi valorile λ_q corespunzătoare, se obţin decalaje ζ deosebite; în consecinţă, pot fi propuse în alternativa $K_d > 1$ mai multe soluţii de echilibraj al momentului rezultant de ordinul întîi.

Dacă se adoptă oricare dintre soluţiile care rezultă într-una din alternativele $K_d = 1$ şi $K_d > 1$, motorul păstrează numai momente rezultante de ordin par, deoarece utilizarea mecanismelor bielă-manivelă axate exclude posibilitatea existenţei armonicilor impare de ordin superior, deci şi a momentelor externe respective. Dintre momentele rezultante care subzistă, cel mai periculos este, în general, momentul rezultant de ordinul doi; vectorul care-l reprezintă înregistrează, conform relaţiilor (12), (25) şi (28), amplitudinea

$$R_2 = 2M_{i_2} \cos[\mp (2\lambda_q - 1)\pi],$$

adică

$$|R_2| = 2M_{i_2}. \tag{31}$$

b) Se asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul doi, respectînd condiția $R_2 = 0$. În vederea determinării decalajului ζ necesar se înlocuiește

$$q = q^* = 2 \tag{32}$$

în relațiile care precizează acest decalaj pentru cele două alternative de succesiune a aprinderilor între linii.

În alternativa $K_a = 1$ rezultă din (14) și (32)

$$\zeta = (2\lambda_q - 1)\frac{\pi}{2}, \tag{33}$$

unde factorul λ_q aparține domeniului

$$\lambda_q \leqslant \frac{8}{i} + \frac{1}{2}, \tag{34}$$

dedus din (15) și (32). Conform relației (33), decalajul ζ este un multiplu impar de $\frac{\pi}{2}$; ținînd seama de limita maximă 2π impusă prin condiția (3) acestui decalaj, el ar putea lua valorile $\frac{\pi}{2}$ și $3\frac{\pi}{2}$, care corespund respectiv valorilor 1 și 2 ale factorului λ_q. Pentru $\lambda_q = 1$, relația (34) devine

$$i \leqslant 16, \tag{35}$$

iar pentru $\lambda_q = 2$ aceeași relație ia forma

$$i < \frac{16}{3}. \tag{36}$$

Motoarele considerate ($i = 6, 10, 14$) satisfac condiția (35), însă nu îndeplinesc condiția (36); în consecință, se poate folosi pentru oricare din aceste motoare, în alternativa $K_a = 1$, numai decalajul $\zeta = \frac{\pi}{2}$ în scopul echilibrării momentului rezultant de ordinul doi.

Pentru $K_a > 1$ se obține din (16) și (32)

$$\zeta = \psi - (2\lambda_q - 1)\frac{\pi}{2} \tag{37}$$

sau, ţinînd seama de formula (13),

$$\zeta = (K_d - 1)\frac{4\pi}{\frac{i}{2}} - (2\lambda_q - 1)\frac{\pi}{2}, \tag{38}$$

decalajul ζ trebuie să respecte deci condiţia (38), în care factorul λ_q este cuprins în domeniul rezultat din (17) şi (32), adică în domeniul

$$(K_d - 2)\frac{8}{i} + \frac{1}{2} \leqslant \lambda_q \leqslant (K_d - 1)\frac{8}{i} + \frac{1}{2}. \tag{39}$$

Pentru unele valori K_d, domeniul (39) poate cuprinde cel puţin un număr întreg; înlocuind în (38) aceste valori K_d şi valorile λ_q corespunzătoare, se deduc diferite decalaje ζ, ceea ce înseamnă că alternativa $K_d > 1$ comportă mai multe soluţii de echilibrare a momentului rezultant de ordinul doi.

Apelînd la oricare din aceste soluţii sau la soluţia singulară aferentă alternativei $K_d = 1$, se echilibrează totodată şi alte momente rezultante, ale căror ordine sînt, conform expresiei (18), multipli impari de doi. Vectorul ce reprezintă momentul rezultant de ordinul întîi, rămas neechilibrat, are amplitudinea

$$R_1 = 2M_{i_1} \cos\left[\mp (2\lambda_q - 1)\frac{\pi}{4}\right],$$

deci

$$|R_1| = M_{i_1}\sqrt{2}, \tag{40}$$

obţinută din (12) în baza expresiilor (33) şi (37).

4.3. Se cercetează posibilităţile de echilibrare a forţelor de inerţie oferite de cele două variante prezentate la punctul 4.2.

Presupunînd că se impune echilibrarea momentului rezultant de ordinul întîi, efectul corespunzător asupra forţelor de inerţie se pune în evidenţă identificînd condiţia care asigură echilibrajul propus cu condiţia de echilibrare a armonicii de ordinul p. Cînd $K_d = 1$, se deduce din (25) şi (2)

$$p = \frac{2\lambda_p - 1}{2\lambda_q - 1},$$

această relaţie conduce la numere întregi dacă $2\lambda_p - 1$ este divizibil cu $2\lambda_q - 1$, ordinele p rezultate fiind, evident, impare. Cînd $K_d > 1$, se obţine din (29) şi (2)

$$p = \frac{(2\lambda_p - 1)\frac{i}{2}}{4(K_d - 1) - (2\lambda_q - 1)\frac{i}{2}}.$$

Dacă ultima relație conduce la numere întregi, acestea sînt tot ordine p impare, deoarece atît numărătorul, cît și numitorul relației sînt numere impare. Avînd în vedere că în fiecare linie a motoarelor cu $\frac{i}{2}$ impar subzistă, conform expresiei (23), numai armonici pare ale forțelor de inerție, se constată că orice soluție de echilibrare a momentului rezultant de ordinul întîi nu permite echilibrarea nici uneia din armonicile acestor forțe.

Dacă se asigură echilibrarea momentului rezultant de ordinul doi, decalajul ζ din (33), corespunzător alternativei $K_d = 1$, poate satisface condiția (22); într-adevăr, este posibilă egalitatea

$$(2\lambda_q - 1)\, i = 2(2\lambda_p - 1),$$

care rezultă prin identificarea condițiilor (33) și (22), fiindcă ambii membrii ai acestei egalități sînt pari. În alternativa $K_d > 1$, decalajul ζ precizat de (38) poate fi exprimat sub forma

$$\zeta = \left[8\,(K_d - 1) - (2\lambda_q - 1)\frac{i}{2}\right]\frac{\pi}{i},$$

și în această alternativă condiția (22) poate fi îndeplinită, întrucît $8\,(K_d - 1) - (2\lambda_q - 1)\frac{i}{2}$ este, ca și $2\lambda_p - 1$, un număr impar. În consecință, pentru orice soluție care prilejuiește echilibrarea momentului rezultant de ordinul doi este posibil să se obțină și echilibrajul optim al forțelor de inerție.

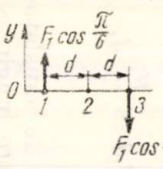
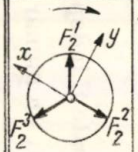
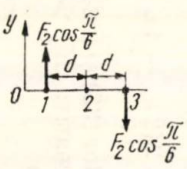
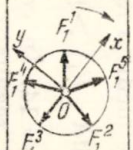
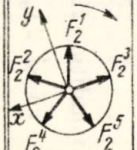
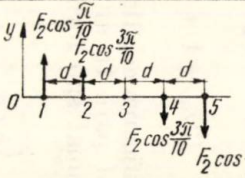
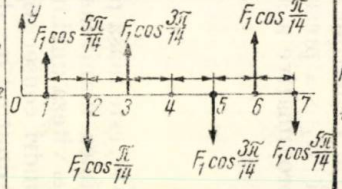
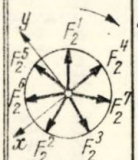
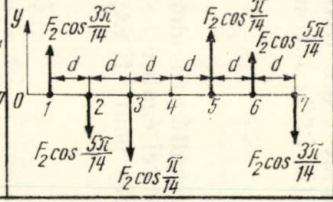
4.4. Pentru alegerea variantei celei mai avantajoase la un anumit motor, trebuie comparate valorile $|R_1|$ și $|R_2|$, precizate respectiv de formulele (40) și (31). Rezultatele calculelor efectuate în acest scop pentru motoarele considerate ($i = 6, 10, 14$) sînt arătate în tabela 4. În stelele vectorilor F_1 și F_2, indicii superiori atribuiți acestori vectori reprezintă numerele cilindrilor în care operează vectorii. Pentru calculul valorilor $|R_1|$ și $|R_2|$ s-a presupus că mărimile vectorilor F_1 și F_2 corespund expresiei aproximative a accelerației pistonului; factorul comun

$$m_t\, r\, \omega^2\, d = F_1 d = \frac{F_2}{\lambda} d,$$

în care m_t este masa pieselor cu mișcare de translație aferente unui cilindru, r lungimea manivelei, λ raportul dintre lungimea manivelei și lungimea bielei, ω viteza unghiulară de rotație a arborilor cotiți, iar d distanța dintre doi cilindri consecutivi, este înlocuit prin constanta C.

Admițînd o valoare medie a raportului λ, de exemplu valoarea $\lambda = \frac{1}{4}$ din tabela 4 rezultă $|R_1| > |R_2|$ în cazul $i = 6$ și $|R_1| < |R_2|$ în cazurile $i = 10$ și $i = 14$. În consecință, este rațional să se impună echilibrajul momentului rezultant de ordinul întîi la motorul cu șase

TABELA 4. VALORILE ABSOLUTE ALE AMPLITUDINILOR VECTORILOR CE REPREZINTĂ MOMENTELE REZULTANTE DE ORDINUL ÎNTÎI ŞI DOI PENTRU MOTOARELE CU $\frac{i}{2}$ IMPAR, LA ECHILIBRAREA MOMENTULUI REZULTANT DE ORDINUL DOI ŞI RESPECTIV LA ECHILIBRAREA MOMENTULUI REZULTANT DE ORDINUL ÎNTÎI

Numărul de cilindri i	$\frac{i}{2}$	Steaua vectorilor F_1	Proiecțiile vectorilor F_1 în planul determinat de axa O_y și axa de rotație a arborelui cotit	Momentul M_{i_1}	Valoarea absolută a amplitudinii R_1	Steaua vectorilor F_2	Proiecțiile vectorilor F_2 în planul determinat de axa O_y și axa de rotație a arborelui cotit	Momentul M_{i_2}	Valoarea absolută a amplitudinii R_2
6	3			$M_{i_1}=2F_1 d\cos\frac{\pi}{6}$	$\lvert R_1\rvert=2{,}45\,C$			$M_{i_2}=2F_2 d\cos\frac{\pi}{6}$	$\lvert R_2\rvert=3{,}46C\lambda$
10	5			$M_{i_1}=F_1 d\left(4\cos\frac{3\pi}{10}-2\cos\frac{\pi}{10}\right)$	$\lvert R_1\rvert=0{,}64\,C$			$M_{i_2}=F_2 d\left(4\cos\frac{\pi}{10}+2\cos\frac{3\pi}{10}\right)$	$\lvert R_2\rvert=9{,}96C\lambda$
14	7			$M_{i_1}=F_1 d\left(6\cos\frac{5\pi}{14}+2\cos\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{\pi}{14}\right)$	$\lvert R_1\rvert=0{,}35\,C$			$M_{i_1}=F_2 d\left(6\cos\frac{3\pi}{14}-4\cos\frac{5\pi}{14}-2\cos\frac{\pi}{14}\right)$	$\lvert R_2\rvert=2{,}06C\lambda$

cilindri, respectiv echilibrajul momentului rezultant de ordinul doi la motoarele cu zece și cu doisprezece cilindri; la ultimele motoare este posibil, conform celor arătate la punctul 4.3, să se obțină totodată și echilibrajul optim al forțelor de inerție.

4.5. În continuare, se prezintă soluțiile dinamice care conduc la obiectivele propuse la punctul 4.4, pentru motoarele cu $i = 6$, 10 și 14 cilindri.

La motorul cu șase cilindri, soluția de echilibrare a momentului rezultant de ordinul întîi corespunzătoare alternativei $K_d = 1$ comportă decalajul $\zeta = \pi$, așa cum s-a arătat la punctul 4.2; această soluție este deci caracterizată prin opoziția de fază a manivelelor 1_s și 1_d (fig. 2). Deoarece unghiul dintre două aprinderi consecutive din aceeași linie este $\frac{4\pi}{\frac{i}{2}} = \frac{4\pi}{3}$, aprinderile trec din linia din stînga în linia din dreapta după rotirea arborilor cotiți cu unghiul $\zeta = \pi$ și revin în linia din stînga după rotirea în continuare a arborilor cotiți cu unghiul $\frac{4\pi}{3} - \pi = \frac{\pi}{3}$. În poziția relativă a arborilor cotiți corespunzătoare soluției considerate (fig. 2), unghiul care separă manivela 3_d de planul paralel cu manivela 1_s are valoarea $\frac{\pi}{3}$; dacă această valoare este atribuită decalajului ζ, se obține o altă soluție de

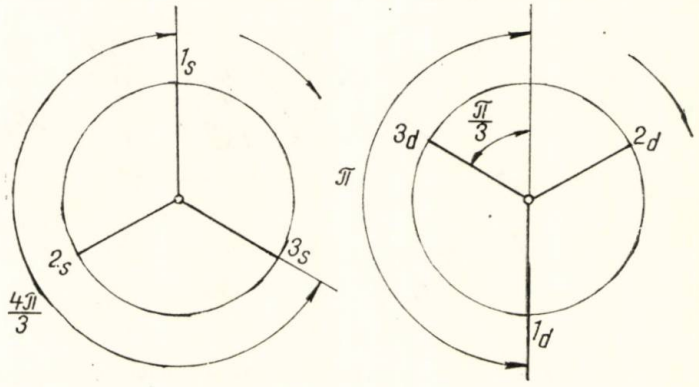


Fig. 2. — Poziția relativă a arborilor cotiți corespunzătoare alternativei $K_d = 1$ la motorul cu șase cilindri.

realizare a echilibrajului propus, corespunzătoare, evident, alternativei $K_d > 1$, la care fiecare aprindere produsă în linia din dreapta este separată prin unghiurile $\zeta = \frac{\pi}{3}$ și, respectiv, π de două aprinderi consecutive din linia din stînga. Se constată deci că aceeași poziție relativă a arborilor cotiți caracterizează două soluții de echilibrare a momentului rezultant de ordinul întîi. Calculele efectuate cu relațiile (25), (26), (29) și (30) arată că soluțiile astfel anticipate sînt singurele posibile: în alternativa $K_d > 1$,

domeniul (30) cuprinde un număr întreg ($\lambda_q = 1$) numai pentru valoarea $K_a = 2$, care precizează decalajul $\zeta = \frac{\pi}{3}$.

În conformitate cu constatările de la punctul 4.2, folosirea alternativei $K_a = 1$ pentru echilibrarea momentului rezultant de ordinul doi implică decalajul $\zeta = \frac{\pi}{2}$; pozițiile relative ale arborilor cotiți corespunză-

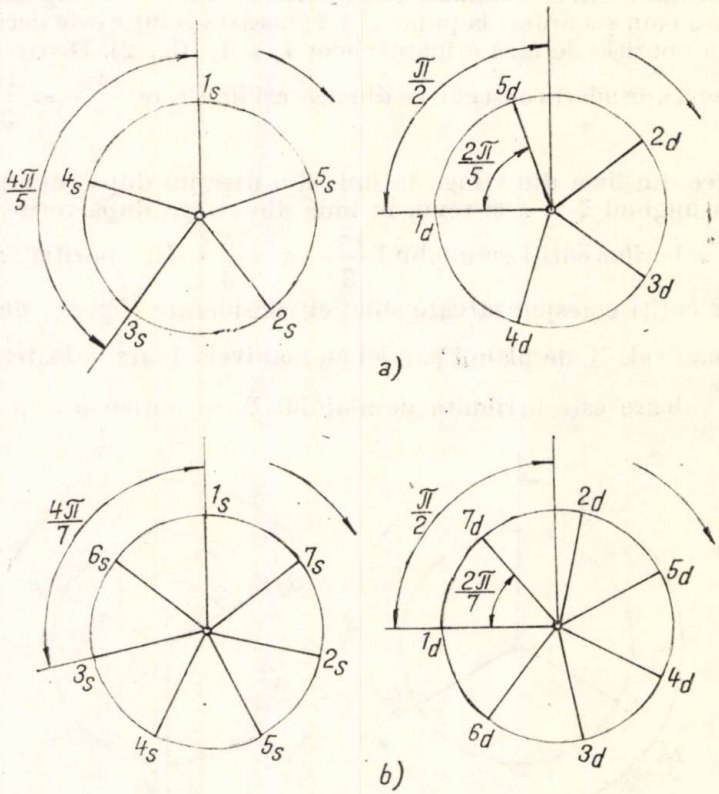


Fig. 3. — Poziții relative ale arborilor cotiți corespunzătoare alternativei $K_a = 1$: *a* — motorul cu zece cilindri; *b* — motorul cu paisprezece cilindri.

toare acestei soluții pentru $i = 10$ și $i = 14$ sînt prezentate în figura 3. Între două aprinderi consecutive din aceeași linie există decalajul $\frac{4\pi}{\frac{i}{2}}$, ceea ce înseamnă că de la producerea oricărei aprinderi din linia din stînga arborii cotiți se rotesc cu unghiul $\zeta = \frac{\pi}{2}$ pînă la declanșarea unei aprinderi în linia din dreapta, aprinderile revenind în linia din stînga după o nouă

rotire a arborilor cotiți cu unghiul $\frac{4\pi}{\frac{i}{2}} - \frac{\pi}{2}$. Deoarece două manivele consecutive sînt separate de unghiul $\frac{2\pi}{\frac{i}{2}}$, o manivelă a arborelui cotit din dreapta este plasată, pentru poziția relativă considerată a arborilor cotiți, între manivela 1_d și planul paralel cu manivela 1_s, fiind decalată în urmă față de acest plan cu unghiul $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\frac{i}{2}}$. Pentru aceeași poziție relativă a arborilor cotiți se poate deci folosi și o altă soluție de echilibrare a momentului rezultant de ordinul doi, aferentă alternativei $K_a > 1$, la care orice aprindere din linia din dreapta este separată de aprinderile limitrofe din linia din stînga prin unghiurile $\zeta = \frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\frac{i}{2}}$ și, respectiv,

$$\frac{4\pi}{\frac{i}{2}} - \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\frac{i}{2}}\right) = \frac{6\pi}{\frac{i}{2}} - \frac{\pi}{2}.$$

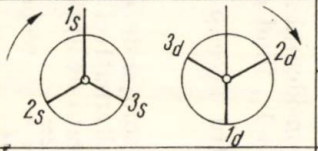
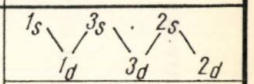
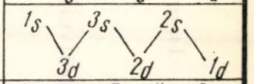
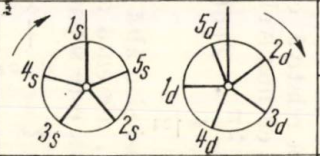
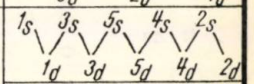
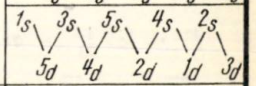
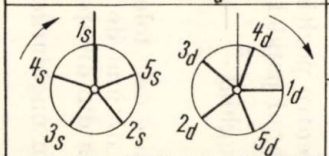
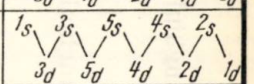
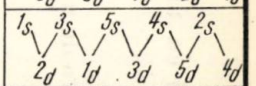
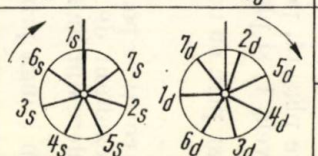
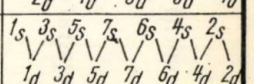
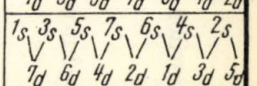
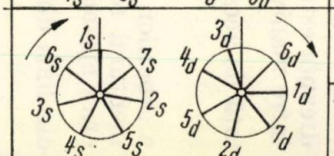
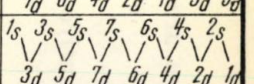
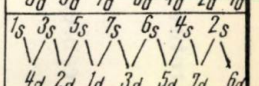
Astfel poziția relativă prezentată a arborilor cotiți comportă două soluții de echilibrare a momentului rezultant de ordinul doi.

Tot în cazurile $i = 10$ și $i = 14$, alte două soluții corespund inversării intervalelor care separă aprinderile produse în linia din dreapta de aprinderile consecutive din linia din stînga. La una dintre aceste soluții, succesiunea aprindere stînga → aprindere dreapta → aprindere stînga este caracterizată de intervalele $\zeta = \frac{4\pi}{\frac{i}{2}} - \frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2}$; la cealaltă, succesiunea menționată comportă intervalele $\zeta = \frac{6\pi}{\frac{i}{2}} - \frac{\pi}{2}$ și $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\frac{i}{2}}$. Cele două soluții astfel precizate corespund, evident, alternativei $K_a > 1$ și revin unei noi poziții relative a arborilor cotiți.

Pentru stabilirea analitică a concluziilor precedente se aplică relațiile (33), (34), (38) și (39). Rezultatele calculelor arată că sînt posibile numai cele patru soluții specificate mai sus atît la motorul cu zece cilindri, cît și la motorul cu paisprezece cilindri (în ambele cazuri, numărul K_a poate lua numai trei valori corespunzătoare alternativei $K_a > 1$).

Soluțiile dinamice în discuție sînt redate în tabela 5. Soluțiile aferente fiecărui motor sînt grupate două cîte două, corespunzător fiecărei poziții relative a arborilor cotiți.

TABELA 5. SOLUȚII DINAMICE LA MOTOARELE CU $\frac{i}{2}$ IMPAR

Numărul de cilindri i	Ordinele armonicilor forțelor de inerție care produc momente externe în fiecare linie ($\sigma = 1,2,3\ldots$)	Valorile posibile ale numărului K_d	Valorile posibile ale factorului λ_q	Valorile posibile ale unghiului ζ	Ordinele momentelor rezultante echilibrate ($\sigma = 1,2,3\ldots$)	Ordinile de aprindere pe linie și numerotarea aprinderilor consecutive	Pozițiile relative ale arborilor cotiți	Ordinile de aprindere pentru ansamblul motorului
6	$q_{min} = 1$ $q = 3(2\sigma-1)+1$	1	1	π	$q_{ec} = q_{min} = 1$	1 − 3 − 2 I II III		
		2	1	$\frac{\pi}{3}$				
10	$q_{min} = 1$ $q = \frac{10(2\sigma-1)\pm 4}{2} \pm 1$	1	1	$\frac{\pi}{2}$	$q_{ec} = 10(2\sigma-1) \pm 4\tau$ ($\tau = 1; 2$)	1 − 3 − 5 − 4 − 2 I II III IV V		
		3	2	$\frac{\pi}{10}$				
		2	1	$\frac{3\pi}{10}$				
		5	3	$\frac{7\pi}{10}$				
14	$q_{min} = 1$ $q = 7(2\sigma-1) \pm (2\tau-1)$ ($\tau = 1; 2; 3$)	1	1	$\frac{\pi}{2}$	$q_{ec} = 14(2\sigma-1) \pm 4\tau$ ($\tau = 1; 2; 3$)	1 − 3 − 5 − 7 − I II III IV − 6 − 4 − 2 V VI VII		
		4	2	$\frac{3\pi}{14}$				
		2	1	$\frac{\pi}{14}$				
		6	3	$\frac{5\pi}{14}$				

Deoarece cele două soluții propuse pentru motorul cu șase cilindri asigură echilibrajul momentului rezultant de ordinul întîi, nici una dintre ele nu permite, așa cum s-a arătat la punctul 4.3, echilibrarea vreunei armonici a forțelor de inerție. Fiecare dintre soluțiile corespunzătoare motoarelor cu 10 și cu 14 cilindri comportă unul dintre decalajele ζ determinate pentru motoarele respective în tabela 3. Pe lîngă echilibrarea momentelor rezultante cu ordine multipli impari de doi, oricare dintre aceste soluții asigură deci și echilibrajul optim al forțelor de inerție, realizîndu-se astfel integral posibilitățile privind un atare rezultat anticipate la punctul 4.3.

5. CONCLUZII

Stabilirea soluțiilor dinamice posibile la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri se bazează pe particularizarea teoriei generale privind echilibrajul forțelor de inerție ale maselor cu mișcare de translație și echilibrajul momentelor externe ale acestor forțe. Pentru orice motor, trierea soluțiilor astfel precizate este condiționată de numărul $\frac{i}{2}$ de cilindri din fiecare linie. Dacă $\frac{i}{2}$ este un număr par, se apelează la criiul ordinii optime de aprindere pentru ansamblul motorului, care corespunde celui mai mic moment rezultant maxim al forțelor normale aplicate rborilor cotiți; dacă $\frac{i}{2}$ este un număr impar, trebuie reținute soluțiile care comportă cel mai mic moment extern rezultant, corespunzător momentelor externe produse în fiecare linie de forțele de inerție ale maselor cu mișcare de translație.

Aplicînd considerentele precedente pentru cîteva construcții uzuale, se precizează la fiecare cel puțin două soluții echivalente sub aspectele menționate la categoria respectivă de motoare $\left(\frac{i}{2}\text{ par sau impar}\right)$. Constructorul are deci libertatea să opteze pentru una dintre aceste soluții în funcție de alte criterii, de exemplu mărimea solicitărilor datorate vibrațiilor de răsucire ale arborilor cotiți.

Primită la redacție la 14 mai 1969

BIBLIOGRAFIE

1. G. Bărănescu, Gh. Zătreanu, *O teorie a echilibrajului forțelor de inerție la motoarele cu două linii de cilindri*, St. cerc. mec. apl., *5* (1967).
2. — *Îmbunătățirea echilibrajului momentelor forțelor de inerție prin plasarea cilindrilor în două linii prevăzute fiecare cu un arbore cotit*, St. cerc. mec. apl., *5* (1969).
3. T. Dudaș, *Unele probleme de dinamică ale motoarelor în patru timpi cu două linii paralele de cilindri*, Bul. Inst. pol. „Gh. Gheorghiu-Dej", *1* (1965).
4. G. Bărănescu, *Stabilirea ordinii de aprindere optime la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri*, St. cerc. mec. apl., *4* (1964).

PROBLEMA PLANĂ A TEORIEI ELASTICITĂȚII ÎN COORDONATE POLIGONALE *)

de STELIAN CETĂȚEANU
I.N.C.E.R.C., București

Se descriu noile funcții trigonometrice denumite „poligonale" și în raport cu acestea se definește sistemul de coordonate poligonale (ρr, φ_n). Se rezolvă problema plană a teoriei elasticității în aceste coordonate poligonale și rezultatele se folosesc la soluționarea unor probleme referitoare la semiplanul elastic.

1. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE POLIGONALE

1.1. CONFIGURAȚIA DE REFERINȚĂ

În cercul trigonometric cu centrul în O și de rază $OA = 1$ (fig. 1) se înscrie un poligon regulat convex cu n laturi $AA_1 \ldots A_{n-1}$, astfel încît vîrful A să coincidă cu intersecția dintre ramura pozitivă a axei Ox a unui sistem de coordonate rectangulare cu origina în O și cercul trigonometric. Acest poligon se consideră drept configurație de referință pentru definirea funcțiilor trigonometrice poligonale.

O latură a poligonului mărginită de cele două vîrfuri corespunzătoare este denumită „interval". Punctul P situat pe latura $A_{p-1}A_p$, corespunzător unghiului φ, aparține intervalului p, iar poligonul cu n laturi considerat are n intervale.

1.2. FUNCȚIILE TRIGONOMETRICE POLIGONALE ȘI NOTAȚIA LOR

Funcțiile trigonometrice poligonale ale unui unghi sau arc sînt în număr de șase. Dintre acestea, trei sînt funcții directe : sinusul poligonal n,

*) Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23–27 iunie 1969.

cosinusul poligonal n și tangenta poligonală n; celelalte trei reprezintă mărimea inversă a acestor funcții directe: inversul sinusului poligonal n, inversul consinusului poligonal n și inversa tangentei poligonale n.

Funcțiile trigonometrice poligonale ale arcului φ se notează cu următoarele simboluri:

$$\text{sip}_n\,\varphi;\quad \text{cop}_n\,\varphi;\quad \text{tg}_n\,\varphi;\quad \text{insip}_n\,\varphi;\quad \text{incop}_n\,\varphi;\quad \text{intg}_n\,\varphi,$$

unde cifra n reprezintă numărul laturilor poligonului de referință.

Dintre aceste funcții, numai sinusul și cosinusul poligonal sînt fundamentale; celelalte sînt dependente de aceste două funcții fundamentale și exprimate cu ajutorul lor.

1.3. INTERPRETAREA GEOMETRICĂ A FUNCȚIILOR POLIGONALE

Interpretarea geometrică a funcțiilor poligonale directe și a inversei tangentei poligonale este analogă cu cea a funcțiilor trigonometrice circulare corespunzătoare; funcțiile inverse ale sinusului și cosinusului poligonal au interpretare diferită celei cunoscute pentru cosecanta și, respectiv, secanta circulară.

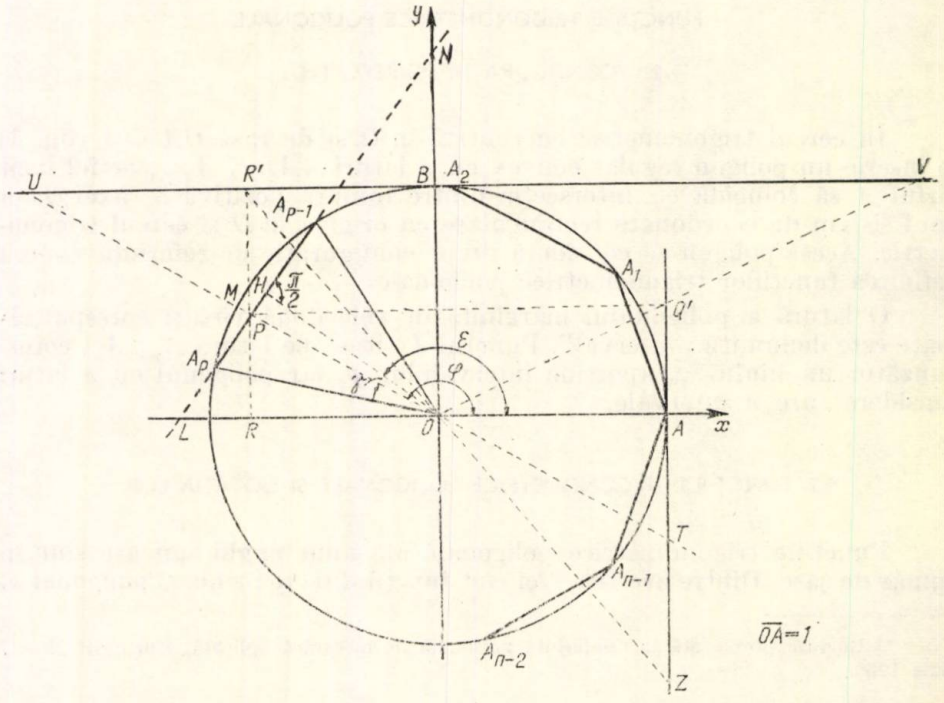


Fig. 1

Folosind notațiile din figura 1, funcțiile trigonometrice poligonale au următoarele interpretări geometrice:

$$\text{sip}_n\,\varphi = \frac{\overline{PR}}{\overline{OA}} = \overline{PR} \quad ; \quad \text{insip}_n\,\varphi = \frac{\overline{BV}}{\overline{OA}} = \overline{BV},$$

$$\text{cop}_n\varphi = \frac{\overline{PQ}}{\overline{OA}} = \overline{PQ} \quad ; \quad \text{incop}_n\varphi = \frac{\overline{AZ}}{\overline{OA}} = \overline{AZ}, \tag{1.1}$$

$$\text{tg}_n\,\varphi = \frac{\overline{AT}}{\overline{OA}} = \overline{AT} = \text{tg}\,\varphi; \quad \text{intg}_n\,\varphi = \frac{\overline{BU}}{\overline{OA}} = \overline{BU} = \text{cotg}\,\varphi.$$

Adoptînd pentru funcțiile inverse ale sinusului și cosinusului poligonal interpretări geometrice similare cu cele din trigonometria circulară, nu se obțin mărimile inverse ale sinusului și cosinusului poligonal decît pentru extremitățile intervalului p sau la limită (cînd $n = \infty$).

Ca urmare, *interpretarea geometrică indicată pentru funcțiile inverse ale sinusului și cosinusului poligonal se propune a fi acceptată și pentru cosecanta și secanta circulară, în locul celei folosită în prezent, pentru a exista o uniformitate a interpretării funcțiilor trigonometrice.*

Valorile funcțiilor poligonale ale diverselor unghiuri sînt periodice, de perioadă $2m\pi$.

1.4. NUMĂRUL LATURILOR POLIGONULUI

Lungimea maximă a laturii poligonului înscris în cercul trigonometric este egală cu diametrul în cazul formal $n = 2$. Lungimea laturilor poligonului se micșorează pe măsura creșterii numărului n a acestora.

La limită, cînd n este infinit, o latură a poligonului se reduce la un singur punct, punctul de tangență la cercul trigonometric al laturii considerate a poligonului.

Prin urmare, valoarea pe care o poate primi numărul n al laturilor unui poligon regulat înscris în cercul trigonometric poate fi exprimată prin orice număr întreg și fracționar, după cum poligonul este drept sau stelat, mai mare decît 2.

Formula generală a numărului n este

$$n = \frac{l}{m} \geqslant 2,$$

l și m fiind numere întregi și prime între ele.

2. RELAȚIILE DINTRE FUNCȚIILE POLIGONALE

2.1. RELAȚII ÎNTRE FUNCȚIILE POLIGONALE ALE ACELUIAȘI UNGHI

Între funcțiile poligonale n ale unghiului φ există o relație fundamentală și patru relații corelative. Relația fundamentală exprimă legătura dintre cele două funcții poligonale fundamentale ale unghiului φ; relațiile corelative exprimă pe fiecare dintre celelalte patru funcții poligonale în raport cu funcțiile poligonale fundamentale.

2.1.1. *Relația fundamentală.* Spre deosebire de trigonometria circulară, relația fundamentală este liniară în raport cu cele două funcții poligonale fundamentale:

$$\operatorname{sip}_n \varphi - a_p \operatorname{cop}_n \varphi - b_p = 0 \qquad (p = 1,2,\ldots,l), \tag{2.1}$$

unde

$$a_p = -\operatorname{cotg} \varepsilon; \qquad b_p = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \varepsilon}; \qquad \varepsilon = (2p-1)\frac{\pi}{n}. \tag{2.2}$$

Se observă că pentru diverse poziții ale punctului P pe latura $A_{p-1}A_p$ valorile parametrilor a_p și b_p sînt constante. Pentru aceasta, parametrii a_p și b_p vor fi denumiți „constantele intervalului p".

Folosind notațiile din figura 1, constantele intervalului p au următoarea interpretare geometrică:

a) una dintre constante reprezintă coeficientul unghiular al dreptei obținute prin prelungirea laturii $A_{p-1}A_p$:

$$a_p = -\operatorname{cotg} \varepsilon = m_p; \tag{2.3}$$

b) cealaltă constantă reprezintă ordonata la origine a dreptei obținute prin prelungirea laturii $A_{p-1}A_p$:

$$b_p = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\sin \varepsilon} = \overline{ON}; \tag{2.4}$$

c) raportul constantelor intervalului p, cu semnul schimbat, reprezintă abscisa la origine a dreptei obținute prin prelungirea laturii $A_{p-1}A_p$:

$$-\frac{b_p}{a_p} = \frac{\cos \frac{\pi}{n}}{\cos \varepsilon} = \overline{ON} \operatorname{tg} \varepsilon = \overline{OL}. \tag{2.5}$$

Ținînd seama de (2.4) și (2.5), relația fundamentală (2.1) se scrie

$$\frac{\operatorname{sip}_n \varphi}{\overline{ON}} + \frac{\operatorname{cop}_n \varphi}{\overline{OL}} = 1. \tag{2.6}$$

Dacă se înlocuiesc mărimile noilor linii trigonometrice ale unghiului φ prin valorile x și y ale coordonatelor rectangulare ale punctului P, relația (2.1) se scrie

$$\frac{x}{\overline{OL}} + \frac{y}{\overline{ON}} = 1 \tag{2.7}$$

și reprezintă ecuația dreptei obținută prin prelungirea laturii $A_{p-1}A_p$ *).

*) Ținînd seama de (2.4) și (2.5), relația (2.7) se scrie:

$$x \cos \varepsilon + y \sin \varepsilon = \cos \frac{\pi}{n}. \tag{2.8}$$

Întrucît unghiul la centru ε corespunde mijlocului H al intervalului p și

$$\overline{OH} = \cos \frac{\pi}{n},$$

relația fundamentală (2.1) reprezintă ecuația dreptei $A_{p-1}A_p$, scrisă sub formă normală (ecuația lui Hesse).

Relația fundamentală scrisă sub forma (2.7) nu este valabilă pentru toate punctele acestei drepte, ci numai pentru acelea pentru care coordonatele x și y pot fi și linii trigonometrice, adică numai pentru acele puncte ale dreptei care aparțin și laturii $A_{p-1}A_p$ a poligonului de referință.

În ansamblu, cînd indicele p parcurge domeniul de valori

$$1 < p < l, \tag{2.8}$$

relația fundamentală (2.1) exprimă ecuația tuturor laturilor din care este constituit poligonul de referință.

2.1.2. *Relații corelative.* Ca și în trigonometria circulară, între funcțiile poligonale există patru relații corelative, grupate două cîte două:

$$\begin{aligned} &\text{A)} \quad \operatorname{tg}_n\varphi = \frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\operatorname{cop}_n\varphi}; \qquad \operatorname{incop}_n\varphi = \frac{1}{\operatorname{cop}_n\varphi}, \\ &\text{B)} \quad \operatorname{intg}_n\varphi = \frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\operatorname{sip}_n\varphi}; \qquad \operatorname{insip}_n\varphi = \frac{1}{\operatorname{sip}_n\varphi}. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Divizînd termenii relației fundamentale (2.1) mai întîi cu $\operatorname{cop}_n\varphi$ și apoi cu $\operatorname{sip}_n\varphi$ și ținînd seama de relațiile corelative (2.9), aceasta se scrie sub forma

$$\begin{aligned} &\text{A)} \quad \operatorname{tg}_n\varphi - b_p \operatorname{incop}_n\varphi - a_p = 0, \\ &\text{B)} \quad a_p \operatorname{intg}_n\varphi + b_p \operatorname{insip}_n\varphi - 1 = 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Prin urmare, funcțiile poligonale care alcătuiesc fiecare dintre cele două perechi de relații corelative A și B sînt legate între ele prin relația fundamentală (2.1)

Se menționează că relația fundamentală (2.1), deși exprimă legătura dintre relațiile corelative, se deosebește de acestea; în timp ce relațiile corelative sînt invariabile ca formă pentru orice latură — interval — a poligonului de referință, relația fundamentală este diferită, deoarece depinde de valorile parametrilor a_p și b_p, care, după cum s-a arătat, sînt constante numai de-a lungul intervalului p.

2.2. RELAȚII ÎNTRE FUNCȚIILE POLIGONALE ȘI CIRCULARE ALE ACELUIAȘI UNGHI

Se demonstrează geometric ușor că între funcțiile trigonometrice poligonale și cele circulare ale aceluiași unghi există relațiile

$$\begin{aligned} &\operatorname{sip}_n\varphi = \rho \sin\varphi; \qquad \operatorname{insip}_n\varphi = \frac{1}{\rho}\operatorname{cosec}\varphi, \\ &\operatorname{cop}_n\varphi = \rho\cos\varphi; \qquad \operatorname{incop}_n\varphi = \frac{1}{\rho}\sec\varphi, \\ &\operatorname{tg}_n\varphi = \operatorname{tg}\varphi; \qquad \operatorname{intg}_n\varphi = \operatorname{cotg}\varphi, \end{aligned} \tag{2.11}$$

unde

$$\rho = \overline{OP} = \operatorname{sip}_n^2 \varphi + \operatorname{cop}_n^2 \varphi = \frac{\cos\frac{\pi}{n}}{\cos\gamma}; \quad \gamma = \varphi - \varepsilon. \tag{2.12}$$

Funcțiile poligonale fundamentale pot fi exprimate și în raport cu tangenta, cotangenta, secanta sau cosecanta circulară ale aceluiași unghi și invers.

Au fost de asemenea stabilite relații între funcțiile poligonale n ale unghiurilor oarecare precum și între funcțiile poligonale de ordin diferit ale aceluiași unghi.

3. OPERAȚII CU UNGHIURI

S-au determinat funcțiile poligonale ale unghiului egal cu suma, diferența sau produsul a două unghiuri diferite în raport cu aceleași funcții poligonale sau cu diferite funcții poligonale ale unghiurilor care se adună, se scad sau se înmulțesc.

4. DERIVATELE FUNCȚIILOR POLIGONALE

Pentru a determina expresia derivatei funcțiilor poligonale, prin comparare și în analogie cu funcțiile trigonometrice circulare, se stabilește limita

$$\lim_{\varphi \to 0} \frac{\operatorname{sip}_n \varphi}{\varphi} = 1. \tag{4.1}$$

Cu ajutorul acesteia și a formulei care exprimă sinusul poligonal al unghiului $(\varphi + d\varphi)$ în funcție de $\operatorname{sip}_n \varphi$ și $\operatorname{sip}_n d\varphi$, se demonstrează că derivata funcției

$$y = \operatorname{sip}_n \varphi$$

în raport cu unghiul φ valorează

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{a_p}{b_p}(\operatorname{sip}_n^2 \varphi + \operatorname{cop}_n^2 \varphi) = \frac{\overline{OP}^2}{\overline{OL}}. \tag{4.2}$$

În cazul-limită ($n = \infty$), poligonul de referință se reduce la cercul trigonometric, iar dreapta obținută prin prelungirea laturii A_pA_{p-1} a poligonului de referință se reduce la un singur punct M, punctul de tangență cu cercul. Punctul H, mijlocul laturii $A_{p-1}A_p$ corespunde la limită punctului M (fig. 1). Numai pentru acest punct valoarea derivatei sinusului poligonal este identică cu valoarea cosinusului poligonal. Aceasta poate fi dovedită și geometric.

Derivata sinusului poligonal în raport cu unghiul φ poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathrm{sip}_n\,\varphi) = \mathrm{sip}_n\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\gamma + \mathrm{cop}_n\,\varphi, \tag{4.3}$$

unde s-a notat prin γ unghiul dintre raza $\overline{OP}$ corespunzătoare extremității arcului φ și apotema laturii $A_{p-1}A_p$ a poligonului de referință pe care este situat punctul P (fig. 1).

În mod analog, derivata funcției

$$y = \mathrm{cop}_n\,\varphi$$

în raport cu unghiul φ se exprimă prin

$$\frac{\partial y}{\partial \varphi} = -\frac{1}{b_p}(\mathrm{sin}_n^2\varphi + \mathrm{cop}_n^2\,\varphi) = -\frac{\overline{OP}^2}{\overline{ON}}. \tag{4.4}$$

La fel ca în cazul derivatei sinusului poligonal, numai pentru punctul H, mijlocul intervalului, valoarea derivatei cosinusului poligonal este identică cu valoarea sinusului poligonal.

Derivata cosinusului poligonal în raport cu unghiul φ poate fi scrisă și sub forma

$$\frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathrm{cop}_n\,\varphi) = -\,\mathrm{sin}_n\,\varphi + \mathrm{cop}_n\,\varphi\,\mathrm{tg}\,\gamma. \tag{4.5}$$

Tangenta și cotangenta poligonală, fiind identice cu tangenta și cotangenta circulară, au aceeași expresie pentru derivată.

Derivata inversului sinusului poligonal și, respectiv, a inversului cosinusului poligonal în raport cu unghiul φ valorează

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathrm{insip}_n\,\varphi) &= \frac{a_p}{b_p}\,\mathrm{cosec}^2\,\varphi = -\frac{\overline{OU}^2}{\overline{OL}}, \\ \frac{\partial}{\partial \varphi}(\mathrm{incop}_n\,\varphi) &= \frac{1}{b_p}\,\mathrm{sec}^2\,\varphi = \frac{\overline{OT}^2}{\overline{ON}}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

5. COORDONATE POLIGONALE

5.1. DEFINIREA COORDONATELOR POLIGONALE

Poziția unui punct P din plan poate fi definită cu ajutorul unui nou sistem de coordonate, denumite coordonate poligonale, întrucît sînt în strînsă legătură cu funcțiile trigonometrice poligonale studiate.

În sistemul de coordonate rectangular XOY, fiind dat punctul P (fig. 2), se cere să se definească sistemul de coordonate n poligonale.

Se trasează cercul trigonometric cu centrul în O și cu raza $\overline{OA} = 1$ și se înscrie în acesta un poligon regulat cu n laturi. Dreapta OP intersec-

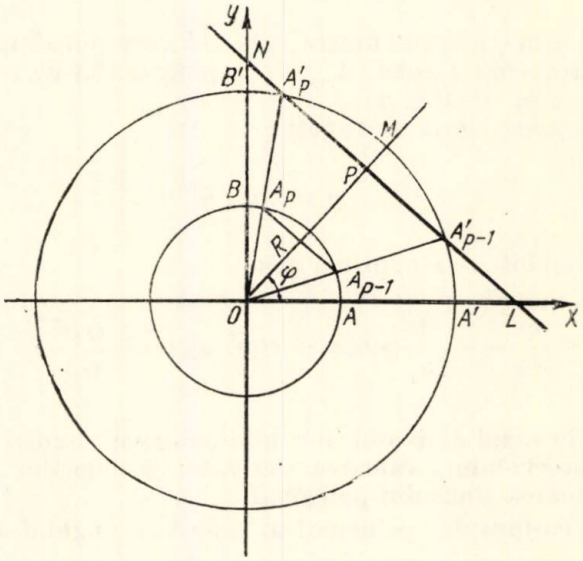


Fig. 2

tează acest poligon unitar în punctul R situat pe latura $A_{p-1}A_p$, iar paralela dusă prin P la latura $A_{p-1}A_p$ întîlnește raza OA_p în punctul A'_p:

$$\overline{OR} = \rho; \quad \overline{OA'} = r \quad \text{și} \quad \sphericalangle XOP = \varphi_n; \tag{5.1}$$

se deduce

$$\overline{OP} = \rho r. \tag{5.2}$$

Segmentul pozitiv ρr și unghiul φ_n astfel determinate definesc coordonatele n poligonale ale punctului P. Unui punct P îi corespunde astfel un sistem unic de coordonate n poligonale.

În mod analog se demonstrează ușor că unui sistem de coordonate n poligonale $(\rho r, \varphi_n)$ îi corespunde un singur punct P.

5.2. RELAȚII ÎNTRE COORDONATELE CARTEZIENE ȘI CELE POLIGONALE

Sistemul de coordonate carteziene ortogonale (x, y) este legat de coordonatele n poligonale $(\rho r, \varphi_n)$ ale aceluiași punct P prin relațiile:

$$x = r \operatorname{cop}_n \varphi = \rho r \cos \varphi; \quad y = r \operatorname{sip}_n \varphi = \rho r \sin \varphi \tag{5.3}$$

și, invers,

$$r = \frac{x}{\lambda} + \frac{y}{\eta}, \tag{5.4}$$

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y}{x}, \tag{5.5}$$

unde

$$r\lambda = \overline{OL} \quad \text{și} \quad r\eta = \overline{ON}, \tag{5.6}$$

sînt, respectiv, abscisa și ordonata la origine ale dreptei obținute prin prelungirea laturii $A_{p-1}A_p$ a poligonului pe care este situat punctul P (fig. 2).

Din (5.4) rezultă că liniile de coordonate $r = \text{const}$ sînt poligoane regulate cu n laturi concentrice în polul O, iar din (5.5) că liniile de coor-

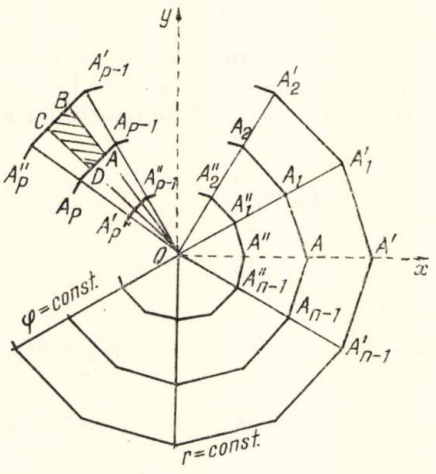


Fig. 3

donate $\varphi = \text{const}$ formează un fascicul de drepte concurente în punctul 0 (fig. 3).

5.3. RELAȚIILE DINTRE COORDONATELE POLARE ȘI CELE POLIGONALE

Sitemul de coordonate polare (d, θ) este legat de coordonatele n poligonale $(\rho r, \varphi_n)$ ale aceluiași punct P prin relațiile

$$d = \rho\, r = r\frac{\operatorname{sip}_n \varphi}{\sin \varphi}, \qquad \theta = \varphi. \tag{5.7}$$

5.4. DIFERENȚIALELE FUNCȚIILOR $r(x, y)$ ȘI $\varphi(x, y)$

Din (5.4) se calculează diferențialele funcției $r(x, y)$:

$$dr = \frac{\cos\varepsilon}{\rho\cos\gamma}dx = \frac{1}{\lambda}dx, \tag{5.8}$$

$$dr = \frac{\sin\varepsilon}{\rho\cos\gamma}dy = \frac{1}{\eta}dy, \tag{5.9}$$

simbolurile λ și η fiind definite geometric prin relațiile (5.6), iar din (5.5) se calculează diferențialele funcției $\varphi(x, y)$:

$$d\varphi = -\frac{\mathrm{sip}_n\varphi}{\rho^2 r}dx, \tag{5.10}$$

$$d\varphi = \frac{\mathrm{cop}_n\varphi}{\rho^2 r}dy. \tag{5.11}$$

6. STAREA DE TENSIUNE

Fie un punct A al planului median al grinzii-perete raportat la sistemul de coordonate n poligonale $(\rho r, \varphi_n)$ și la sistemul de coordonate carteziene (x, y). În funcție de sistemul de coordonate considerat, tensorul tensiune are forma

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_r & \tau_{\varphi r} \\ \tau_{r\varphi} & \sigma_\varphi \end{vmatrix}, \tag{6.1}$$

$$T_\sigma = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y \end{vmatrix}, \tag{6.1'}$$

și determină în întregime starea de tensiune în jurul acestui punct.

6.1. TENSIUNI ÎN COORDONATE POLIGONALE ȘI CARTEZIENE

Se vor stabili relațiile dintre componentele tensorului tensiune în coordonate poligonale și carteziene. Pentru aceasta se consideră un element triunghiular infinit mic, decupat din grinda perete studiată. Fețele AB și BC ale elementului corespund sistemului de coordonate poligonale: razei polară OA și laturii $A_{p-1}A_p$ a poligonului de referință, corespunzătoare unghiului φ, iar fața AC este paralelă cu axa y (fig. 4*a*) și, respectiv, cu axa x (fig. 4*b*) ale sistemului de coordonate carteziene.

Trasînd apotema OH corespunzătoare laturii $A_{p-1}A_p$ a poligonului de referință, aceasta face cu axa Ox și cu raza polară OA unghiurile ε și, respectiv, γ;

$$\varepsilon = (2p - 1)\frac{\pi}{n} - 2m\pi \qquad (m = 0,1,2\ldots), \tag{6.2}$$

$$\gamma = \varphi - \varepsilon, \tag{6.3}$$

p fiind intervalul poligonului cu n laturi căruia îi aparține punctul A.

Exprimînd unghiurile elementului triunghiular în funcție de φ; ε și γ și aplicînd teorema sinusurilor, se obțin relațiile :

— în triunghiul din figura 4*a* : $$\frac{\overline{AB}}{\sin\varepsilon} = \frac{\overline{BC}}{\cos\varphi} = \frac{\overline{CA}}{\cos\gamma}, \tag{6.4}$$

— în triunghiul din figura 4*b* : $$\frac{\overline{AB}}{\cos\varepsilon} = \frac{\overline{BC}}{\sin\varphi} = \frac{\overline{CA}}{\cos\gamma}. \tag{6.5}$$

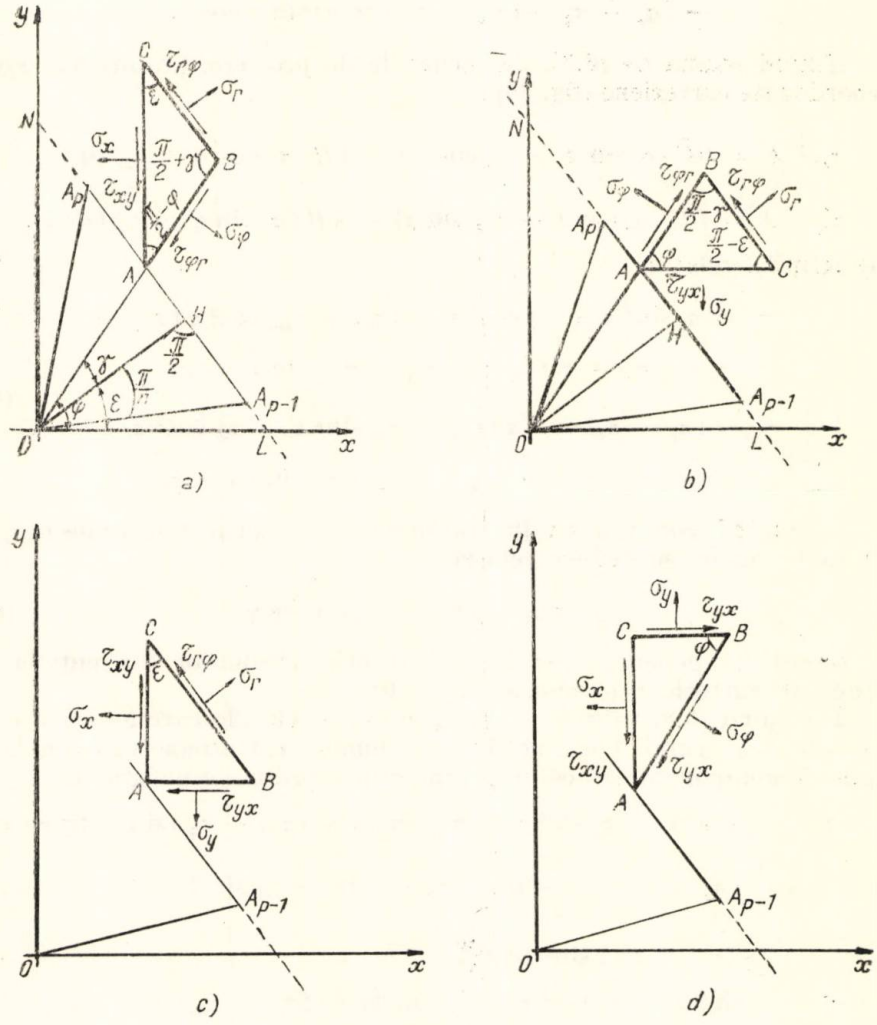


Fig. 4

Ținînd seama de (6.4), din ecuațiile de proiecție pe direcția axelor de coordonate carteziene (fig. 4*a*) :

$$\sigma_x\overline{CA} = \overline{BC}\,(\sigma_r\cos\varepsilon - \tau_{r\varphi}\sin\varepsilon) + \overline{AB}\,(\sigma_\varphi\sin\varphi - \tau_{\varphi r}\cos\varphi).$$

$$\tau_{xy}\overline{CA} = \overline{BC}\,(\sigma_r\sin\varepsilon + \tau_{r\varphi}\cos\varepsilon) - \overline{AB}\,(\sigma_\varphi\cos\varphi + \tau_{\varphi r}\sin\varphi),$$

se determină relațiile

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \varepsilon + \sigma_\varphi \sin^2 \varepsilon + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \sin^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma - \\ &\quad - [(\sigma_r - \sigma_\varphi) \operatorname{tg} \gamma + \tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}] \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \\ \tau_{xy} &= -(\sigma_r - \sigma_\varphi) \sin^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma + \tau_{r\varphi} \cos^2 \varepsilon - \tau_{\varphi r} \sin^2 \varepsilon + \\ &\quad + [\sigma_r - \sigma_\varphi - (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \operatorname{tg} \gamma] \sin \varepsilon \cos \varepsilon.\end{aligned} \tag{6.6}$$

Ținînd seama de (6.5), din ecuațiile de proiecție pe direcția axelor de coordonate carteziene (fig. 4*b*) :

$$\sigma_y \cdot \overline{CA} = \overline{BC} (\sigma_r \sin \varepsilon + \tau_{r\varphi} \cos \varepsilon) + \overline{AB} (\sigma_\varphi \cos \varphi + \tau_{\varphi r} \sin \varphi),$$

$$\tau_{yx} \cdot \overline{CA} = \overline{BC} (\sigma_r \cos \varepsilon - \tau_{r\varphi} \sin \varepsilon) - \overline{AB} (\sigma_\varphi \sin \varphi - \tau_{\varphi r} \cos \varphi),$$

se determină relațiile

$$\begin{aligned}\sigma_y &= \sigma_r \sin^2 \varepsilon + \tau_\varphi \cos^2 \varepsilon + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \cos^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma + \\ &\quad + [(\sigma_r - \sigma_\varphi) \operatorname{tg} \gamma + \tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}] \sin \varepsilon \cos \varepsilon, \\ \tau_{yx} &= (\sigma_r - \sigma_\varphi) \cos^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma - \tau_{r\varphi} \sin^2 \varepsilon + \tau_{\varphi r} \cos^2 \varepsilon + \\ &\quad + [\sigma_r - \sigma_\varphi - (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \operatorname{tg} \gamma] \sin \varepsilon \cos \varepsilon.\end{aligned} \tag{6.7}$$

Impunînd condiția ca în coordonate carteziene tensiunile tangențiale să fie egale, se deduce relația

$$\sigma_r - \sigma_\varphi = (\tau_{r\varphi} - \tau_{\varphi r}) \operatorname{cotg} \gamma, \tag{6.8}$$

care reprezintă generalizarea legii dualității tensiunilor tangențiale din coordonate carteziene ortogonale ($\gamma = 0$).

Înlocuind (6.8) în (6.6) și (6.7), se obțin relațiile care exprimă componentele tensorului tensiune în coordonate carteziene ortogonale în funcție de componentele aceluiași tensor în coordonate poligonale :

$$\begin{aligned}\sigma_x &= \sigma_r \cos^2 \varepsilon + \sigma_\varphi \sin^2 \varepsilon - \tau_{r\varphi} \sin 2\varepsilon + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \sin^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \cos 2\varepsilon - \tau_{r\varphi} \sin 2\varepsilon + \\ &\quad + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \sin^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma, \\ \sigma_y &= \tau_r \sin^2 \varepsilon + \sigma_\varphi \cos^2 \varepsilon + \tau_{r\varphi} \sin 2\varepsilon + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \cos^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma = \\ &= \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\varphi) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \cos 2\varepsilon + \tau_{r\varphi} \sin 2\varepsilon + \\ &\quad + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \cos^2 \varepsilon \operatorname{tg} \gamma, \\ \tau_{xy} &= \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\varphi) \sin 2\varepsilon + \tau_{r\varphi} \cos 2\varepsilon - \frac{1}{2}(\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \sin 2\varepsilon \operatorname{tg} \gamma.\end{aligned} \tag{6.9}$$

Din acestea se deduc cu ușurință relațiile care exprimă componentele tensorului tensiune în coordonate poligonale în funcție de componentele aceluiași tensor în coordonate carteziene ortogonale:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= \sigma_x \cos^2 \varepsilon + \sigma_y \sin^2 \varepsilon + \tau_{xy} \sin 2\varepsilon = \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) + \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varepsilon + \tau_{xy} \sin 2\varepsilon, \\
\sigma_y &= \sigma_x \sin^2 \varphi + \sigma_y \cos^2 \varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi = \\
&= \frac{1}{2}(\sigma_x + \sigma_y) - \frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \cos 2\varphi - \tau_{xy} \sin 2\varphi, \\
\tau_{r\varphi} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varepsilon + \tau_{xy} \cos 2\varepsilon, \\
\tau_{\varphi r} &= -\frac{1}{2}(\sigma_x - \sigma_y) \sin 2\varphi + \tau_{xy} \cos 2\varphi.
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Ținînd seama de (6.8), între componentele tensorului în coordonate carteziene ortogonale se obțin relațiile

$$\begin{aligned}
\sigma_r - \sigma_\varphi - (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \operatorname{tg} \gamma &= 2 \frac{\tau_{r\varphi} \cos 2\gamma - \tau_{\varphi r}}{\sin 2\gamma}, \\
\sigma_r - \sigma_\varphi + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \operatorname{tg} \gamma &= 2 \frac{\tau_{r\varphi} - \tau_{\varphi r} \cos 2\gamma}{\sin 2\gamma}.
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Relațiile (6.10) se deduc și direct, scriind ecuațiile de proiecție pe direcția feței BC a elementului triunghiular infinit mic, decupat în mod corespunzător din grinda-perete cercetată și pe normala la aceasta (fig. 4*c*) sau pe direcția razei polare AB și a normalei la aceasta (fig. 4*d*).

6.2. ECUAȚII DE ECHILIBRU

Pentru a studia variația tensiunilor de la un element de linie la un alt element de linie învecinat, se separă din grinda-perete considerată un element trapezoidal infinitezimal $ABCD$ (fig. 5), mărginit de cele două raze polare care definesc creșterea $\mathrm{d}\varphi$ și de două paralele cu latura $A_{p-1}A_p$ a poligonului de referință corespunzătoare unghiului φ. Fețele AD și BC ale elementului aparțin intervalelor p ale poligoanelor regulate cu n laturi înscrise în cercurile cu razele r și, respectiv, $(r + \mathrm{d}r)$. Coordonatele poligonale ale vîrfurilor elementului $ABCD$ sînt

$$A \quad [\rho r;\ \varphi] \quad ; \qquad C \quad \left[\rho \frac{\cos \gamma}{\cos(\gamma + \mathrm{d}\varphi)}(r + \mathrm{d}r);\ \varphi + \mathrm{d}\varphi\right],$$

$$B \quad [\rho(r + \mathrm{d}r);\ \varphi]; \qquad D \quad \left[\rho \frac{\cos \gamma}{\cos(\gamma + \mathrm{d}\varphi)} r;\ \varphi + \mathrm{d}\varphi\right].$$

Raza polară OA corespunzătoare unghiului φ face unghiul γ cu apotema OH.

Elementul $ABCD$ este acționat de tensiuni normale și tangențiale pe contur, iar în centrul G acționează o forță masică de componente R

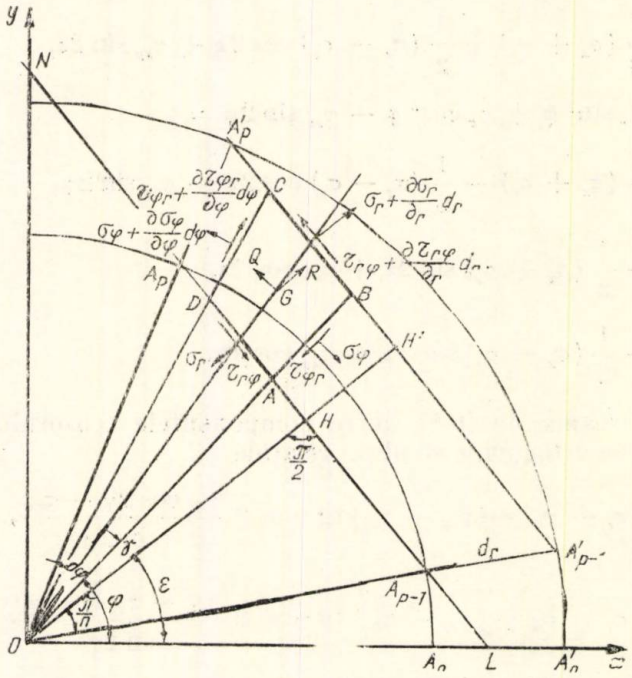


Fig. 5

și Q după direcțiile normale la latura A_pA_{p-1} a poligonului și la raza OG (fig. 5).

Ecuațiile de proiecție pe direcțiile eforturilor σ_r și σ_φ sînt

$$\left(\sigma_r+\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\,dr\right)\overline{BC}-\sigma_r\overline{AD}-\left(\sigma_\varphi+\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)\overline{CD}\sin(\gamma+d\varphi)+$$

$$+\sigma_\varphi\overline{AB}\sin\gamma-\tau_{\varphi r}\overline{AB}\cos\gamma+\left(\tau_{\varphi r}+\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)\overline{CD}\cos(\gamma+d\varphi)+$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})\overline{HH'}\left[R-Q\sin\left(\gamma+\frac{d\varphi}{2}\right)\right]=0,$$

$$\left[\left(\sigma_r+\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}\,dr\right)\overline{BC}-\sigma_r\overline{AD}\right]\sin\gamma+\sigma_\varphi\overline{AB}-$$

$$-\left(\sigma_\varphi+\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)\overline{CD}\cos d\varphi-\left(\tau_{\varphi r}+\frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial \varphi}\,d\varphi\right)\overline{CD}\sin d\varphi+$$

$$+\left[\tau_{r\varphi}\cdot\overline{AD}-\left(\tau_{r\varphi}+\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}\,dr\right)\overline{BC}\right]\cos\gamma+$$

$$+\frac{1}{2}(\overline{AD}+\overline{BC})\overline{HH'}\left(R\sin\gamma-Q\cos\frac{d\varphi}{2}\right)=0.$$

Înlocuind în acestea laturile elementului $ABCD$ prin valorile lor obținute în funcție de coordonatele poligonale și de creșterea $d\varphi$ și neglijînd infiniții mici de ordin superior, se obțin ecuațiile de echilibru elastic în coordonate poligonale

$$\sigma_r-\sigma_\varphi+r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{1}{2}\sin 2\gamma\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}+\cos^2\gamma\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial\varphi}+$$

$$+\rho r(R-Q\sin\gamma)\cos\gamma=0, \tag{6.12}$$

$$\left(\sigma_r-\sigma_\varphi+r\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}\right)\operatorname{tg}\gamma-\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}-\tau_{r\varphi}-\tau_{\varphi r}-r\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}+$$

$$+\rho r(R\sin\gamma-Q)=0 \tag{6.12'}$$

Din relația (6.8), prin diferențiere în raport cu variabilele r și φ, se obține

$$\left(\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial r}\right)\operatorname{tg}\gamma=\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial r}-\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial r}, \tag{6.13}$$

$$\frac{1}{\cos^2\gamma}(\sigma_r-\sigma_\varphi)+\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial}{\partial\varphi}(\sigma_r-\sigma_\varphi)=\frac{\partial}{\partial\varphi}(\tau_{r\varphi}-\tau_{\varphi r}). \tag{6.13'}$$

Ținînd seama de (6.8) și (6.13), ecuațiile de echilibru (6.12) se scriu

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial r}-\frac{\sin 2\gamma}{2r}\frac{\partial\sigma_r}{\partial\varphi}+\frac{\cos^2\gamma}{r}\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial\varphi}+\rho(R-Q\sin\gamma)\cos\gamma=0, \tag{6.14}$$

$$r\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial r}-\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial\varphi}-2\tau_{\varphi r}-r\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial r}+\rho r(R\sin\gamma-Q)=0. \tag{6.14'}$$

În funcție de variabilele a_r și a_φ corespunzătoare liniilor de coordonate poligonale (7.5), aceste ecuații devin

$$\frac{\partial\sigma_r}{\partial a_r}-\sin\gamma\frac{\partial\sigma_r}{\partial a_\varphi}+\cos\gamma\frac{\partial\tau_{r\varphi}}{\partial a_\varphi}+(R-Q\sin\gamma)\cos\gamma=0, \tag{6.15}$$

$$\sin\gamma\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial a_r}-\frac{\partial\sigma_\varphi}{\partial a_\varphi}-2\frac{\cos\gamma}{\rho r}\tau_{\varphi r}-\cos\gamma\frac{\partial\tau_{\varphi r}}{\partial a_r}+$$

$$+(R\sin\gamma-Q)\cos\gamma=0. \tag{6.15'}$$

7. STAREA DE DEFORMAȚIE

În punctul (ρr, φ_n) al planului median al grinzii-perete, tensorul. deformație specifică în coordonate poligonale are forma

$$T_\varepsilon = \begin{vmatrix} \varepsilon_r & \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi} \\ \frac{1}{2}\gamma_{r\varphi} & \varepsilon_\varphi \end{vmatrix} \tag{7.1}$$

și determină în întregime starea de deformație din jurul acestui punct

7.1. DEPLASAREA PLANĂ ÎN COORDONATE POLIGONALE

După deformație fie A′ poziția punctului A (ρr, φ_n) situat în intervalul p al poligonului cu n laturi înscris în cercul de rază r (fig. 6). Componentele vectorului deplasare AA' în coordonate poligonale sînt u_r și u_φ.

Între componentele u, v ale vectorului AA' în coordonate carteziene ortogonale și componentele u_r, u_φ există relațiile

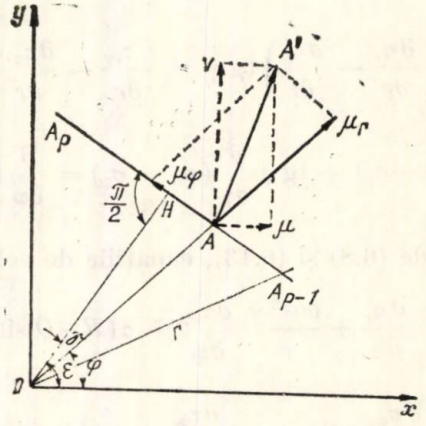


Fig. 6

$$\begin{aligned} u &= u_r \cos\varphi - u_\varphi \sin\varepsilon, \\ v &= u_r \sin\varphi + u_\varphi \cos\varepsilon, \end{aligned} \tag{7.2}$$

care se deduc prin ecuații de proiecție (fig. 6).

Din aceasta se determină relațiile

$$\begin{aligned} u_r + u_\varphi \sin\gamma &= u\cos\varphi + v\sin\varphi, \\ u_r \sin\gamma + u_\varphi &= -u\sin\varepsilon + v\cos\varepsilon \end{aligned} \tag{7.3}$$

sau

$$u_r = u\frac{\cos\varepsilon}{\cos\gamma} + v\frac{\sin\varepsilon}{\cos\gamma} = \rho\left(\frac{u}{\lambda} + \frac{v}{\eta}\right), \tag{7,4}$$

$$u_\varphi = -u\frac{\sin\varphi}{\cos\gamma} + v\frac{\cos\varphi}{\cos\gamma} = \\ = -\rho\left[\left(\frac{u}{\lambda} + \frac{v}{\eta}\right)\sin\gamma + \left(\frac{u}{\eta} - \frac{v}{\lambda}\right)\cos\gamma\right]. \tag{7.4'}$$

7.2. DEFORMAȚII SPECIFICE

Pentru a exprima componentele tensorului deformație specifică în funcție de componentele vectorului deplasare, se va studia deformarea

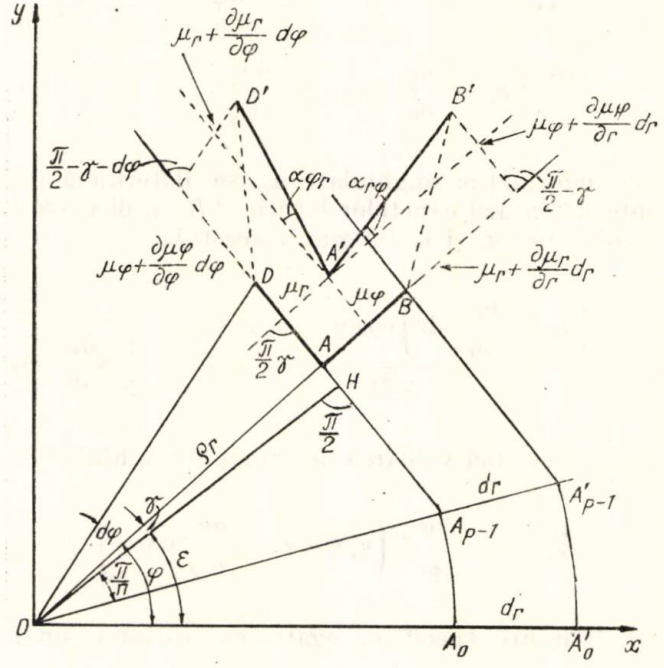


Fig. 7

unui unghi elementar BAD, care, după deformare, devine $B'A'D'$ (fig. 7).

Prin relații geometrice se determină lungimea laturilor unghiului.

$$\overline{AB} = \rho dr = da_r; \qquad \overline{AD} = \rho r\, d\varphi \sec(\gamma + d\varphi) = da_\varphi. \tag{7.5}$$

Lungirea laturii AB este egală cu diferența dintre deplasările capetelor acesteia proiectate pe direcția deplasării u_r :

$$\Delta\overline{AB} = u_r + \frac{\partial u_r}{\partial r}\,dr + \left(u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\,dr\right)\sin\gamma - u_r - u_\varphi \sin\gamma,$$

iar lungirea specifică corespunzătoare este

$$\varepsilon_r = \frac{\Delta\overline{AB}}{\overline{AB}} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\sin\gamma\right) = \frac{\partial u_r}{\partial a_r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\sin\gamma. \tag{7.6}$$

Analog se obține lungimea laturii AD, proiectînd pe direcția deplasării u_φ, și se determină lungirea specifică :

$$\varepsilon_\varphi = \frac{\Delta\overline{AD}}{\overline{AD}} = \frac{\cos\gamma}{\rho r}\left(u_r\cos\gamma + \frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\sin\gamma + \frac{\partial u_\varphi}{\partial\varphi}\right) = \tag{7.7}$$

$$= \frac{\cos^2\gamma}{\rho r}u_r + \frac{\partial u_r}{\partial a_\varphi}\sin\gamma + \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_\varphi}.$$

Valoarea deformației unghiulare $\alpha_{r\varphi}$ se determină făcînd raportul dintre diferența deplasării capetelor laturii AB, proiectate pe o direcție normală la deplasarea u_r și la lungimea acestuia

$$\alpha_{r\varphi} = \frac{\left(u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\,dr\right)\cos\gamma - u_\varphi\cos\gamma}{\rho\,dr} = \frac{1}{\rho}\,\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\cos\gamma.$$

Analog se determină valoarea deformației unghiulare $\alpha_{\varphi r}$:

$$\alpha_{\varphi r} = -\frac{\cos\gamma}{\rho r}\left(u_r\sin\gamma - \frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\cos\gamma\right).$$

Valoarea lunecării specifice, egală cu variația unghiului BAD, se scrie :

$$\gamma_{r\varphi} = \alpha_{r\varphi} + \alpha_{\varphi r} = \frac{\cos\gamma}{\rho r}\left(-u_r\sin\gamma + \frac{\partial u_r}{\partial\varphi}\cos\gamma + r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r}\right) = \tag{7.8}$$

$$= \cos\gamma\left(-\frac{\sin\gamma}{\rho r}u_r + \frac{\partial u_r}{\partial a_\varphi} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\right).$$

8. OPERATORI DIFERENȚIALI

Folosind formulele de derivare ale funcțiilor compuse cu ajutorul diferențialelor (5.8) — (5.11), se calculează operatorii diferențiali de ordinul întîi :

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2 r}\frac{\partial}{\partial \varphi},$$
$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2 r}\frac{\partial}{\partial \varphi}, \tag{8.1}$$

iar cu ajutorul acestora, ținînd seama de formulele de derivare ale funcțiilor trigonometrice poligonale (4.2) și (4.4), se determină operatorii diferențiali de ordinul doi :

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) = \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} -$$
$$- \frac{1}{\lambda r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{\lambda r^2}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} - \frac{1}{\lambda r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} +$$
$$+ \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sip}_n^2\varphi}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{1}{\rho^4}\left[\frac{\rho^2}{\lambda}\rho^2 - 2\rho^2\operatorname{sip}_n\varphi\operatorname{tg}\gamma\right]\frac{\partial}{\partial\varphi} =$$
$$= \frac{1}{\lambda^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{2}{\lambda r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sip}_n^2\varphi}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} +$$
$$+ 2\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{r^2}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{8.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} = \left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$
$$= \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\eta r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{\eta r^2}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} +$$
$$+ \frac{1}{\eta r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\theta\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{cop}_n^2\varphi}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} -$$
$$- \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{1}{\rho^4}\left[\frac{\rho^2}{\eta}\rho^2 + 2\rho^2\operatorname{cop}_n\varphi\operatorname{tg}\gamma\right]\frac{\partial}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\eta^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{\eta r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{cop}_n^2\varphi}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} -$$

$$- 2\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{r^2}\cdot\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^4}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{8.3}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\partial y} = \left(\frac{1}{\lambda}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right)\left(\frac{1}{\eta}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\lambda\eta}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\lambda r}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{\lambda r^2}\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\varphi} -$$

$$- \frac{1}{\eta r}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} -$$

$$- \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\rho^2}\frac{1}{\rho^4}\left[-\frac{\rho^2}{\eta}\rho^2 - 2\rho^2\operatorname{cop}_n\varphi\operatorname{tg}\gamma\right]\frac{\partial}{\partial\varphi} =$$

$$= \frac{1}{\lambda\eta}\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{\rho^2 r}\left(\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\lambda} - \frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\eta}\right)\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} -$$

$$- \frac{1}{r^2}\frac{\operatorname{sip}_n\varphi\operatorname{cop}_n\varphi}{\rho^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - \frac{1}{\rho^2 r^2}\left(\frac{\operatorname{cop}_n\varphi}{\lambda} - \frac{\operatorname{sip}_n\varphi}{\eta}\right)\frac{\partial}{\partial\varphi} +$$

$$+ \frac{2}{\rho^4 r^2}\operatorname{sip}_n\varphi\operatorname{cop}_n\varphi\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial}{\partial\varphi}. \tag{8.4}$$

Adunînd (8.2) cu (8.3), se obține expresia operatorului lui Laplace în coordonate poligonale :

$$\Delta = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) = \frac{1}{\rho^2\cos^2\gamma}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\gamma}{r}\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} + \frac{\cos^2\gamma}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{8.5}$$

Uneori pentru simplificarea calculelor este avantajos ca în locul variabilelor r și φ să fie folosite variabilele corespunzătoare liniilor de coordonate poligonale (7.5), și anume

a_r pe axele de coordonate $\varphi = \text{const}$,

a_φ pe axele de coordonate $r = \text{const}$.

În acest caz, operatorii diferențiali de ordinul întîi vor fi

$$\frac{\partial}{\partial a_r} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}, \qquad \frac{\partial}{\partial a_\varphi} = \frac{\cos\gamma}{\rho r}\frac{\partial}{\partial\varphi}, \tag{8.6}$$

care nu sînt permutabili între ei. Ținînd seama că

$$\frac{\partial}{\partial\varphi}(\rho) = \rho\,\mathrm{tg}\,\gamma \quad \text{și} \quad \frac{\partial}{\partial\varphi}\left(\frac{1}{\rho}\right) = -\frac{\mathrm{tg}\,\gamma}{\rho}, \tag{8.7}$$

se obțin ușor expresiile operatorilor diferențiali de ordinul doi :

$$\frac{\partial^2}{\partial a_r^2} = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial r^2}; \qquad \frac{\partial^2}{\partial a_\varphi^2} = \frac{\cos^2\gamma}{\rho^2 r^2}\left(\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} - 2\,\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{8.8}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_r\,\partial a_\varphi} = \frac{\cos\gamma}{\rho^2 r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right), \tag{8.9}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial a_\varphi\,\partial a_r} = \frac{\cos\gamma}{\rho^2 r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r\partial\varphi} - \mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial}{\partial r}\right), \tag{8.10}$$

precum și diferența ultimelor două diferențiale :

$$\frac{\partial^2}{\partial a_r\,\partial a_\varphi} - \frac{\partial^2}{\partial a_\varphi\,\partial a_r} = \frac{\cos\gamma}{\rho^2 r}\left(\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\varphi}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho r}\left(\sin\gamma\frac{\partial}{\partial a_r} - \frac{\partial}{\partial a_\varphi}\right). \tag{8.11}$$

Exprimat în funcție de aceste variabile, operatorul lui Laplace capătă forma

$$\Delta = \frac{1}{\cos^2\gamma}\left[\frac{\partial^2}{\partial a_r^2} + \frac{\partial^2}{\partial a_\varphi^2} - 2\sin\gamma\frac{\partial^2}{\partial a_r\,\partial a_\varphi}\right]. \tag{8.12}$$

Se remarcă faptul că operatorul lui Laplace, scris sub forma (8.12), este asemănător operatorului în coordonate oblice; deosebirea este că în (8.12) unghiul γ este variabil, în timp ce unghiul dintre coordonatele oblice este constant.

Ecuația diferențială de ordinul patru, considerată operator biarmonic, se obține prin aplicarea succesivă a operatorului lui Laplace, considerat operator armonic; în coordonate poligonale, această ecuație are forma

$$\Delta\Delta = \frac{1}{\rho^4\cos^4\gamma}\left[\frac{\partial^4}{\partial r^4} - \frac{2\sin 2\gamma}{r}\frac{\partial^4}{\partial r^3\partial\varphi} + \frac{2\cos^2\gamma}{r^2}(1+2\sin^2\gamma)\frac{\partial^4}{\partial r^2\,\partial\varphi^2} - \right.$$

$$- \frac{2\sin 2\gamma\cos^2\gamma}{r^3}\frac{\partial^4}{\partial r\partial\varphi^3} + \frac{\cos^4\gamma}{r^4}\frac{\partial^4}{\partial\varphi^4} + \frac{4\sin 2\gamma\cos^2\gamma}{r^2}\frac{\partial^3}{\partial r^2\partial\varphi} -$$

$$\left. - \frac{8\cos^4\gamma}{r^3}\frac{\partial^3}{\partial r\partial\varphi^2} + \frac{4\cos^4\gamma}{r^4}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{8.13}$$

În funcție de variabilele a_r și a_φ, ecuația diferențială de ordinul patru (8.13) se scrie

$$\Delta\Delta = \frac{1}{\cos^4\gamma}\left[\frac{\partial^4}{\partial a_r^4} - 4\sin\gamma\frac{\partial^4}{\partial a_r^3\,\partial a_\varphi} + \right.$$

$$\left. + 2(1+2\sin^2\gamma)\frac{\partial^4}{\partial a_r^2 \partial a_\varphi^2} - 4\sin\gamma\frac{\partial^4}{\partial a_r \partial a_\varphi^3} + \frac{\partial^4}{\partial a_\varphi^4}\right]. \qquad (8.14)$$

Se observă că, la fel ca operatorul lui Laplace, ecuația diferențială (8.14) este scrisă sub formă asemănătoare celei obținută în cazul coordonatelor oblice, cu deosebirea că unghiul constant dintre coordonatele oblice este înlocuit prin unghiul γ variabil.

9. LEGEA LUI HOOKE

Întrucît grinda-perete studiată este elastică, omogenă și izotropă, între componentele tensorului tensiune și componentele tensorului deformație specifică există relații liniare.

Pentru a stabili aceste relații trebuie mai întîi determinate tensiunile normale paralele cu axele de coordonate. Tensiunea normală $\bar{\sigma}_r$, paralelă cu raza polară, se exprimă, cu ajutorul formulei

$$\bar{\sigma}_r = \sigma_r + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma,$$

iar tensiunea normală $\bar{\sigma}_\varphi$, paralelă cu latura $A_{p-1}A_p$ a poligonului de referință pe care este situat punctul considerat, prin formula

$$\bar{\sigma}_\varphi = \sigma_\varphi + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma.$$

Legea generalizată a lui Hooke va exprima în acest caz expresiile deformațiilor specifice liniare ε_r și ε_φ în funcție de tensiunile $\bar{\sigma}_r$, σ_φ și σ_r, $\bar{\sigma}_\varphi$:

$$\varepsilon_r = \frac{1}{E}[\sigma_r - \mu\sigma_\varphi + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma],$$

$$\varepsilon_\varphi = \frac{1}{E}[\sigma_\varphi - \mu\sigma_r + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma]. \qquad (9.1)$$

Tensiunile tangențiale produc lunecări a căror sumă constituie lunecarea specifică $\gamma_{r\varphi}$:

$$\gamma_{r\varphi} = \frac{1}{2G}(\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}), \quad \text{unde} \quad G = \frac{E}{2(1+\mu)}. \qquad (9.2)$$

10. ECUAȚIA DE CONTINUITATE

Cele trei componente ale tensorului deformație specifică au fost stabilite în funcție de cele două componente ale vectorului deplasare (7.6) — (7.8). Cele trei deformații nu sînt deci arbitrare; între ele există o relație care urmează să fie stabilită.

Pentru a ușura calculele în formulele (7.6) — (7.8), diferențialele se exprimă în raport cu variabilele a_r și a_φ (8.6):

$$\frac{\partial}{\partial a_r}(u_r + u_\varphi \sin\gamma) = \varepsilon_r, \tag{9.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_\varphi}(u_r \sin\gamma + u_\varphi) = \varepsilon_\varphi, \tag{9.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial a_r}(u_\varphi \cos\gamma) + \frac{\partial}{\partial a_\varphi}(u_r \cos\gamma) = \gamma_{r\varphi}. \tag{9.5}$$

Din formula (9.3), prin multiplicare cu $\sin\gamma$, se obține

$$\frac{\partial}{\partial a_r}(u_r \sin\gamma + u_\varphi) = \varepsilon_r \sin\gamma + \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\cos^2\gamma. \tag{9.6}$$

Multiplicînd formulele (9.4) și (9.5) cu $(\sin\gamma)$ și, respectiv, cu $(\cos\gamma)$, adunîndu-le și grupînd convenabil termenii, se deduce

$$\frac{\partial}{\partial a_\varphi}(u_r + u_\varphi \sin\gamma) = \varepsilon_\varphi \sin\gamma + \gamma_{r\varphi}\cos\gamma + \left(\frac{u_\varphi}{\rho r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\right)\cos^2\gamma. \tag{9.7}$$

Diferențiind relația (9.3) în raport cu a_φ și relația (9.7) în raport cu a_r, scăzîndu-le și ținînd seama de (8.11), se scrie

$$\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial a_\varphi} - \sin\gamma\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial a_r} - \cos\gamma\frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial a_r} + \cos^2\gamma\left(\frac{u_\varphi}{\rho^2 r^2} - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r} + \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial a_r^2}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho r}\left[\varepsilon_\varphi \sin\gamma + \gamma_{r\varphi}\cos\gamma + \cos^2\gamma\left(\frac{u_\varphi}{\rho r} - \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\right) - \varepsilon_r \sin\gamma\right].$$

Reducînd termenii asemenea și simplificînd, se obține

$$\left(\frac{\varepsilon_\varphi - \varepsilon_r}{r} + \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r}\right)\operatorname{tg}\gamma - \frac{1}{r}\frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial \gamma_{r\varphi}}{\partial r} + \frac{\gamma_{r\varphi}}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\cos\gamma\frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\right). \tag{9.8}$$

Diferențiind relația (9.4) în raport cu a_r și relația (9.6) în raport cu a_φ și scăzîndu-le, se deduce

$$\frac{\partial}{\partial a_\varphi}(\varepsilon_r \sin\gamma) - \frac{\sin 2\gamma \cos\gamma}{\rho r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r} + \cos^2\gamma \frac{\partial^2 u_\varphi}{\partial a_\varphi \partial a_r} - \frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial a_r} =$$

$$= \frac{1}{\rho r}\left[\varepsilon_\varphi - \sin\gamma\left(\varepsilon_r \sin\gamma + \cos^2\gamma \frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\right)\right].$$

Reducînd termenii asemenea și simplificînd, se obține

$$\left(-\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi + r\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial r}\right)\frac{1}{\cos^2\gamma} - \frac{\partial \varepsilon_r}{\partial \varphi}\operatorname{tg}\gamma = \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial u_\varphi}{\partial a_r}\sin\gamma\right). \tag{9.9}$$

Pentru a elimina deplasarea u_φ, relația (9.8) diferențiată în raport cu φ se scade din relația (9.9), diferențiată în raport cu r. Ecuația diferențială rezultată,

$$\frac{1}{\cos^2\gamma}\frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial \varphi^2} - \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi}{r}\right) - \frac{1}{\cos^2\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{r}\right) -$$

$$- \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{r^2}\frac{\partial \varepsilon_\varphi}{\partial \varphi} - \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}(r\gamma_{r\varphi}) = 0, \tag{9.10}$$

reprezintă ecuația de continuitate în coordonate poligonale.

În funcție de variabilele a_r și a_φ, ecuația de continuitate (9.10) se scrie

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_\varphi}{\partial a_r^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial a_\varphi^2} - \sin\gamma \frac{\partial^2}{\partial a_r \partial a_\varphi}(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi) - \frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial a_r}\left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{r}\right) +$$

$$+ \frac{2\sin\gamma}{\rho}\frac{\partial}{\partial a_\varphi}\left(\frac{\varepsilon_r - \varepsilon_\varphi}{r}\right) = \frac{\cos\gamma}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial a_r \partial a_\varphi}(r^2 \gamma_{r\varphi}). \tag{9.11}$$

Ecuația de continuitate poate fi transformată într-o relație între componentele tensorului tensiune.

Pentru a realiza aceasta trebuie mai întîi ca ecuația de echilibru (6.12), diferențiată în raport cu r și divizată prin $(r\cos^2\gamma)$, să fie adunată cu ecuația (6.12′), diferențiată în raport cu φ și divizată cu (r^2); se obține

$$\frac{1}{\cos^2\gamma}\cdot\frac{\partial^2 \sigma_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \sigma_\varphi}{\partial \varphi^2} - \operatorname{tg}\gamma \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}\left(\frac{\sigma_r + \sigma_\varphi}{r}\right) +$$

$$+ \frac{1}{\cos^2\gamma}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\sigma_r - \sigma_\varphi}{r}\right) - \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{r^2}\frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi}[r(\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r})] +$$

$$+ \frac{\rho}{\cos\gamma}\left(\frac{\partial R}{\partial r} - \frac{\partial Q}{\partial r}\sin\gamma\right) + \frac{\rho}{r}\left(\frac{\partial Q}{\partial \varphi} - \frac{\partial R}{\partial \varphi}\sin\gamma\right) = 0. \tag{9.12}$$

Este de remarcat analogia dintre ecuațiile (9.10) și (9.12) în absența forțelor masice.

Dacă ecuația (9.12) se multiplică cu $\frac{\cos^2\gamma}{\rho^2}$ și diferențialele se transformă în raport cu a_r și a_φ, se obține

$$\frac{\partial^2\sigma_r}{\partial a_r^2}+\frac{\partial^2\sigma_\varphi}{\partial a_\varphi^2}-\sin\gamma\frac{\partial^2}{\partial a_r\partial a_\varphi}(\sigma_r+\sigma_\varphi)+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial a_r}\left(\frac{\sigma_r-\sigma_\varphi}{r}\right)-$$

$$-\frac{2\sin\gamma}{\rho}\frac{\partial}{\partial a_\varphi}\left(\frac{\sigma_r+\sigma_\varphi}{r}\right)+\frac{\cos\gamma}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial a_r\partial a_\varphi}[r^2(\tau_{r\varphi}+\tau_{\varphi r})]+$$

$$+\cos\gamma\left(\frac{\partial R}{\partial a_r}-\frac{\partial Q}{\partial a_r}\sin\gamma+\frac{\partial Q}{\partial a_\varphi}-\frac{\partial R}{\partial a_\varphi}\sin\gamma\right)=0. \tag{9.13}$$

Ținînd seama de legea lui Hooke, ecuația de compatibilitate (9.11) se scrie

$$\frac{\partial^2}{\partial a_r^2}[\sigma_\varphi-\mu\sigma_r+(\tau_{r\varphi}+\tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma]+\frac{\partial^2}{\partial a_\varphi^2}[\sigma_r-\mu\sigma_\varphi+$$

$$+(\tau_{,\varphi}+\tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma]-\sin\gamma\frac{\partial^2}{\partial a_r\partial a_\varphi}[(1-\mu)(\sigma_r+\sigma_\varphi)+$$

$$+2(\tau_{r\varphi}+\tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma]-\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial a_r}\left[\frac{1}{r}(1+\mu)(\sigma_r-\sigma_\varphi)+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sin\gamma}{\rho}\frac{\partial}{\partial a_\varphi}\left[\frac{1}{r}(1+\mu)(\sigma_r-\sigma_\varphi)+\frac{\cos\gamma}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial a_r\partial a_\varphi}[r^2(1+\right.\right.$$

$$\left.\left.+\mu)(\tau_{r\varphi}+\tau_{\varphi r})]\right]=0. \tag{9.14}$$

Adunînd la (9.14) ecuația (9.13) multiplicată cu $(1+\mu)$, ecuația de continuitate se exprimă, în funcție de componentele tensorului tensiune, sub forma

$$\Delta[\sigma_r+\sigma_\varphi+(\tau_{r\varphi}+\tau_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma]=-(1+\mu)\sec\gamma\left[\frac{\partial R}{\partial a_r}-\right.$$

$$\left.-\frac{\partial R}{\partial a_\varphi}\sin\gamma+\frac{\partial Q}{\partial a_\varphi}-\frac{\partial Q}{\partial a_r}\sin\gamma\right], \tag{9.15}$$

operatorul lui Laplace fiind dat de formula (8.12)

Întrucît între componentele tensorului tensiune și cele ale tensorului deformație specifică există relația

$$\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi - \gamma_{r\varphi} \operatorname{tg} \gamma = \frac{1-\mu}{E} [\sigma_r + \sigma_\varphi + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \operatorname{tg} \gamma], \tag{9.16}$$

ecuația de continuitate (9.15) se scrie și sub forma

$$\Delta(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi - \gamma_{r\varphi} \operatorname{tg} \gamma) = -\frac{1-\mu^2}{\rho E}\left[\sec \gamma \frac{\partial R}{\partial r} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{r}\left(\frac{\partial R}{\partial \varphi} \sin \gamma - \frac{\partial Q}{\partial \varphi}\right) - \frac{\partial Q}{\partial r} \operatorname{tg} \gamma\right]. \tag{9.17}$$

În cazul cînd nu există forțe masice, invariantul $(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi - \gamma_{r\varphi} \operatorname{tg} \gamma)$ este armonic și ecuația de continuitate a deformațiilor devine

$$\Delta(\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi - \gamma_{r\varphi} \operatorname{tg} \gamma) = 0, \tag{9.18}$$

operatorul lui Laplace fiind dat de (8.5).

11. REZOLVAREA ÎN TENSIUNI A PROBLEMEI PLANE

Rezolvarea în tensiuni a problemei plane se reduce la integrarea ecuațiilor diferențiale de echilibru (6.14) și (6.14′) și a ecuației de continuitate (9.15) în anumite condiții la limită. Valorile obținute pentru tensiuni trebuie să verifice ecuația 6.8.

În absența forțelor masice, componentele tensorului tensiune pot fi exprimate cu ajutorul unei funcții de tensiune F_1. În acest caz, ecuațiile (6.14) și (6.14′) se scriu

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} - \frac{\sin 2\gamma}{2r} \frac{\partial \sigma_r}{\partial \varphi} + \frac{\cos^2 \gamma}{r} \frac{\partial \tau_{r\varphi}}{\partial \varphi} = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial \varphi} - r \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial \sigma_\varphi}{\partial r} + 2\tau_{\varphi r} + r \frac{\partial \tau_{\varphi r}}{\partial r} = 0. \tag{10.1}$$

Întrucît operatorii

$$\frac{\cos^2 \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin 2\gamma}{2r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) = \left(\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin 2\gamma}{2r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right)\left(\frac{\cos^2 \gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \frac{\cos^2 \gamma}{r}\left(\frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - \frac{\sin 2\gamma}{2r} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} - \frac{\cos 2\gamma}{r} \frac{\partial}{\partial \varphi}\right),$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - r \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(2 + r \frac{\partial}{\partial r}\right) = \left(2 + r \frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} - r \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial}{\partial r}\right) =$$

$$= -r^2 \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial^2}{\partial r^2} + r \frac{\partial^2}{\partial r \partial \varphi} - 3r \operatorname{tg} \gamma \frac{\partial}{\partial r} + 2 \frac{\partial}{\partial \varphi} \tag{10.2}$$

sînt permutabili între ei, din ecuațiile (10.1) se deduce

$$\sigma_r = \frac{\cos^2\gamma}{r}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi}; \qquad \tau_{r\varphi} = -\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\sin 2\gamma}{2r}\frac{\partial F_r}{\partial \varphi},$$

$$\sigma_\varphi = -\left(2F_\varphi + r\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}\right); \qquad \tau_{\varphi r} = \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} - r\,\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial F_\varphi}{\partial r}. \tag{10.3}$$

Introducînd valorile (10.3) în relația (6.8), se obține condiția

$$\frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{\partial F_\varphi}{\partial \varphi} + 2F_\varphi\,\mathrm{tg}\,\gamma = 0. \tag{10.4}$$

Deoarece operatorii

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\,\mathrm{tg}\,\gamma\right) = \left(\frac{\partial}{\partial \varphi} + 2\,\mathrm{tg}\,\gamma\right)\frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r\partial \varphi} + 2\,\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial}{\partial r} \tag{10,5}$$

sînt permutabili între ei, funcțiile introduse F_r și F_φ se exprimă cu ajutorul unei singure funcții F_1 sub forma

$$F_r = \frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + 2F_1\,\mathrm{tg}\,\gamma; \quad F_\varphi = -\frac{\partial F_1}{\partial r}. \tag{10.6}$$

În acest caz, componentele tensorului tensiune (10.3) capătă forma

$$\sigma_r = \frac{1}{r}\left(\cos^2\gamma\frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} + \sin 2\gamma\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + 2F_1\right),$$

$$\sigma_\varphi = r\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} + 2\frac{\partial F_1}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2}(rF_1),$$

$$\tau_{r\varphi} = -\frac{\partial^2 F_1}{\partial r\partial \varphi} + \frac{\sin 2\gamma}{2r}\frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} - 2\,\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial F_1}{\partial r} +$$

$$+ \frac{2\sin^2\gamma}{r}\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + \frac{2\,\mathrm{tg}\,\gamma}{r}F_1,$$

$$\tau_{\varphi r} = r\,\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial r\partial \varphi}. \tag{10.7}$$

Pentru a fi soluție a problemei plane, funcția de tensiune F_1 trebuie să verifice ecuația de continuitate (9.15) și condițiile la limită. Întrucît

$$\sigma_r + \sigma_\varphi + (\tau_{r\varphi} + \tau_{\varphi r}) \operatorname{tg}\gamma = \frac{r}{\cos^2\gamma}\left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial r^2} - \frac{\sin 2\gamma}{r}\frac{\partial^2 F_1}{\partial r \partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{\cos^2\gamma}{r^2}\frac{\partial^2 F_1}{\partial \varphi^2} + \frac{2\cos^2\gamma}{r}\frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{\sin 2\gamma}{r^2}\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + \frac{2}{r^2}F_1\right) \tag{10.8}$$

și ținînd seama de expresia operatorului lui Laplace în coordonate poligonale (8.5), se deduce că ecuația de continuitate este verificată dacă funcția F_1 satisface condiția

$$\Delta\left(\frac{r}{\cos^2\gamma}\Delta F_1\right) + \Delta\left(\frac{2\cos^2\gamma}{\cos^2\gamma}\frac{\partial F_1}{\partial r} + \frac{2\operatorname{tg}\gamma}{r}\frac{\partial F_1}{\partial \varphi} + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{r\cos^2\gamma}F_1\right) = 0. \tag{10.9}$$

Dacă se face schimbarea de funcție

$$F_1 = \frac{1}{\rho^2 r}F, \tag{10.10}$$

starea de tensiune se va exprima sub forma

$$\sigma_r = \frac{\cos^2\gamma}{\rho^2 r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} - 2\operatorname{tg}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{\cos\gamma}{\rho r^2}\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\cos\gamma}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial^2 F}{\partial a_\varphi^2}, \tag{10.11}$$

$$\sigma_\varphi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 F}{\partial a_r^2}, \tag{10.12}$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{\rho^2 r^2}\left(-r\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{\sin 2\gamma}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \cos 2\gamma\frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) =$$

$$= \left(\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial}{\partial a_\varphi} - \sec\gamma\frac{\partial}{\partial a_r}\right)\frac{\partial F}{\partial a_\varphi} = \frac{\partial}{\partial a_\varphi}\left(\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial F}{\partial a_\varphi} - \sec\gamma\frac{\partial F}{\partial a_r}\right), \tag{10.13}$$

$$\tau_{\varphi r} = \frac{1}{\rho^2 r^2}\left(r^2\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - r\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial \varphi} + \frac{\partial F}{\partial \varphi}\right) = \frac{\partial}{\partial a_r}\left(\operatorname{tg}\gamma\frac{\partial}{\partial a_r} - \sec\gamma\frac{\partial}{\partial a_\varphi}\right). \tag{10.14}$$

În acest caz,

$$\sigma_r + \sigma_\varphi + (\sigma_{r\varphi} + \sigma_{\varphi r})\operatorname{tg}\gamma = (1 + \operatorname{tg}^2\gamma)\left(\frac{\partial^2 F}{\partial a_r^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial^2 F}{\partial a_\varphi^2}\right) - 2\frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\frac{\partial^2 F}{\partial a_r\,\partial a_\varphi} = \Delta F, \tag{10.15}$$

deci funcția de tensiune $F(a_r, a_\varphi) = F(r, \varphi) = F$ verifică ecuația biarmonică

$$\Delta\Delta F = 0 \tag{10.16}$$

în lipsa forțelor masice.

Pentru a calcula componentele vectorului deplasare se folosesc relațiile (9.3) și (9.4), din care prin integrare se obține

$$\begin{aligned} u_r + u_\varphi \sin\gamma &= \int \varepsilon_r \, da_r + f(\varphi), \\ u_r \sin\gamma + u_\varphi &= \int \varepsilon_\varphi \, da_\varphi + f(r). \end{aligned} \tag{10.17}$$

Funcțiile $f(\varphi)$ și $f(r)$, de cîte o singură variabilă, urmează a fi determinate.

Din (10.17) se deduce

$$u_r = \sec^2\gamma \left[\int \varepsilon_r \, da_r - \sin\gamma \int \varepsilon_\varphi \, da_\varphi - f(r)\sin\gamma + f(\varphi) \right], \tag{10.18}$$

$$u_\varphi = \sec^2\gamma \left[-\sin\gamma \int \varepsilon_r \, da_r + \int \varepsilon_\varphi \, da_\varphi + f(r) - f(\varphi)\sin\gamma \right]. \tag{10.19}$$

Dacă se ține seama de (10.18) și (10.19), relația (9.5) se scrie

$$\begin{aligned} \left[\frac{\partial f(r)}{\partial a_r} + \frac{\partial f(\varphi)}{\partial a_\varphi} \right] - \frac{1}{\rho r} [f(r) - f(\varphi)\sin\gamma] &= \gamma_{r\varphi}\cos\gamma - \\ - \left[\int \frac{\partial}{\partial a_\varphi} (\varepsilon_r \, da_r) + \int \frac{\partial}{\partial a_r} (\varepsilon_\varphi \, da_\varphi) \right] &- \\ - \frac{1}{\rho r} \left[\sin\gamma \int \varepsilon_r \, da_r - \int \varepsilon_\varphi \, da_\varphi \right] &+ (\varepsilon_r + \varepsilon_\varphi)\sin\gamma. \end{aligned} \tag{10.20}$$

Exprimînd termenii din membrul al doilea al ecuației (10.20) sub forma unor integrale duble, sub semnul de integrare se obține ecuația de continuitate (9.11); în acest caz, ecuația (10.20) se scrie sub forma

$$r\frac{\partial f(r)}{\partial r} + \cos\gamma \frac{\partial f(\varphi)}{0\varphi} - f(r) + f(\varphi)\sin\gamma = F(r) + F(\varphi). \tag{10.21}$$

Integrala generală a ecuației omogene este

$$\begin{aligned} f(r) &= u_0 + w_0 r + C, \\ f(\varphi) &= u_0 \sin\gamma - v_0 \cos\gamma + C\sin\gamma, \end{aligned} \tag{10.22}$$

în care u_0, v_0 și w_0 sînt deplasările și, respectiv, rotirea în plan a grinzii-perete considerată ca un corp rigid, raportată la sistemul de coordonate carteziene ortogonale x și y, iar C este o constantă arbitrară.

Transformînd diferențialele în raport cu variabilele r și φ (8.6) și adăugînd o integrală particulară a ecuației (10.21), relațiile (10.18) și (10.19) capătă forma

$$u_r - u_r^0 = \sec^2\gamma\left[\rho\int\varepsilon_r dr - r\sin\gamma\int\rho\varepsilon_\varphi\sec\gamma d\varphi - f(r)\sin\gamma + f(\varphi)\right],$$

$$u_\varphi - (w_0 r + u_\varphi^0) = \sec^2\gamma\left[-\rho\sin\gamma\int\varepsilon_r dr + r\int\rho\varepsilon_\varphi\sec\gamma\,d\varphi + \right. \tag{10.23}$$

$$\left. + f(r) - f(\varphi)\sin\gamma\right],$$

în care u_r^0, u_φ^0 și w_0 sînt deplasările și, respectiv, rotirea în plan a grinzii-perete raportate la sistemul de coordonate poligonale.

Întrucît din (9.1) și (10.15) rezultă

$$\begin{aligned} E\varepsilon_r &= \Delta F - (1+\mu)\,\sigma_\varphi, \\ E\varepsilon_\varphi &= \Delta F - (1+\mu)\,\sigma_r \end{aligned} \tag{10.24}$$

și ținînd seama de valoarea eforturilor unitare (10.11) — (10.14), componentele vectorului deplasare pot fi exprimate cu ajutorul funcției de tensiune F:

$$\begin{aligned} E(u_r + u_r^0) &= \sec^2\gamma\left[\rho\int\Delta F\,dr - r\sin\gamma\int\rho\,\Delta F\sec\gamma\,d\varphi\right] - \\ &- \frac{1+\mu}{\rho\cos\gamma}\left(\sec\gamma\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) - \\ &- E\sec\gamma\,[f(r)\,\mathrm{tg}\,\gamma - f(\varphi)\sec\gamma], \end{aligned} \tag{10.25}$$

$$\begin{aligned} E(u_\varphi - (w_0 r + \mu_\varphi^0|] &= \sec^2\gamma\left[-\rho\sin\gamma\int\Delta F\,dr + r\int\rho\Delta F\sec\gamma\,d\varphi\right] + \\ &+ \frac{1+\mu}{\rho\cos\gamma}\left(\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) + \\ &+ E\sec\gamma\,[f(r)\sec\gamma - f(\varphi)\,\mathrm{tg}\,\gamma), \end{aligned} \tag{10.26}$$

în care operatorul lui Laplace valorează (8.5)

$$\Delta F = \frac{1}{\rho^2}\left[\sec^2\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{2\,\mathrm{tg}\,\gamma}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right]. \tag{10.27}$$

iar funcțiile $f(r)$ și $f(\varphi)$ sînt integrale particulare ale ecuației diferențiale cu variabile separate:

$$E\left[r\frac{\partial}{\partial r}f(r)+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial\varphi}f(\varphi)-f(r)+f(\varphi)\sin\gamma\right]=$$

$$=\frac{1}{\rho}\left[\frac{2r\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\frac{\partial^2F}{\partial r^2}-2\frac{1+\sin^2\gamma+\mu\cos^2\gamma}{\cos\gamma}\frac{\partial^2F}{\partial r\,\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.+\frac{2\sin\gamma}{r}\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}+\frac{2\cos\gamma}{r}(1+\mu)\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right]-$$

$$-\frac{1}{\rho}\int\left[\frac{2\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\frac{\partial^2F}{\partial r^2}-\frac{2}{r\cos\gamma}\frac{\partial^2F}{\partial r\,\partial\varphi}+\frac{\sin^2\gamma-\mu\cos^2\gamma}{\cos\gamma}\frac{\partial^2F}{\theta r^2\partial\varphi}+\right.$$

$$\left.-\frac{2\sin\gamma}{r}\frac{\partial^3F}{\partial r\partial\varphi^2}+\frac{\cos\gamma}{r^2}\frac{\partial^3F}{\partial\varphi^3}\right]dr-\int\frac{1}{\rho}\left[\frac{r^2}{\cos^3\gamma}\frac{\partial^3F}{\partial r^3}-\right. \tag{10.28}$$

$$-\frac{2}{r}\left(\frac{\sin^2\gamma-\mu\cos^2\gamma}{\cos\gamma}\right)\frac{\partial^2F}{\partial\varphi^2}+2\sin\gamma\left(\frac{1+\cos^2\gamma+\mu\cos^2\gamma}{\cos^2\gamma}\right)\frac{\partial^2F}{\partial r\,\partial\varphi}-$$

$$\left.-2r\frac{\sin\gamma}{\cos^2\gamma}\frac{\partial^3F}{\partial r^2\partial\varphi}+\frac{\sin^2\gamma-\mu\cos^2\gamma}{\cos\gamma}\frac{\partial^3F}{\partial r\,\partial\varphi^2}-4(1+\mu)\frac{\sin\gamma}{r}\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right]d\varphi.$$

Se atrage atenția asupra faptului că funcțiile $f(r)$ și $f(\varphi)$ din formulele (10.23) și (10.28) diferă între ele.

Condițiile la limită pe un element de contur de normală exterioară $\overline{n}$, acționat de sarcina exterioară p_n, se scriu sub forma

$$\begin{aligned}p_{nr}\cos\gamma&=\sigma_r\cos(n,r)+(\tau_{\varphi r}\cos\gamma-\sigma_\varphi\sin\gamma)\cos(n,\varphi),\\ p_{n\varphi}\cos\gamma&=\sigma_\varphi\cos(n,\varphi)+(\tau_{r\varphi}\cos\gamma-\sigma_r\sin\gamma)\cos(n,r),\end{aligned} \tag{10.29}$$

în care s-a notat prin p_{nr} și $p_{n\varphi}$ proiecțiile intensității sarcinii exterioare p_n pe direcțiile celor două axe ale sistemului de coordonate poligonale și s-a ținut seama de faptul că la o creștere pozitivă ds (în sens invers acelor ceasornicului) corespunde $da_r<0$ și $da_\varphi>0$.

Astfel problema plană a teoriei elasticității este în întregime formulată în tensiuni.

12. APLICAȚIE

FORȚĂ CONCENTRATĂ ACȚIONÎND NORMAL PE LINIA DE SEPARAȚIE A UNUI SEMIPLAN ELASTIC

Rezultatele obținute vor fi aplicate la studiul semiplanului elastic. Cazul unei forțe concentrate acționînd normal pe linia de separație a unui semiplan elastic a fost soluționat pentru prima oară de A. Flamant.

În literatura de specialitate se cunoaşte determinarea stării de tensiune de-a lungul unor contururi dreptunghiulare [6] sau circulare [7] situate într-un semiplan elastic, acționat pe linia de separație de o forță concentrată. În cazul conturului dreptunghiular, starea de tensiune este determinată în coordonate rectangulare prin metodele operaționale de calcul, iar în cazul conturului circular cu ajutorul coordonatelor polare.

Folosind rezultatele obținute în lucrare, prin soluționarea problemei plane a teoriei elasticității în coordonate poligonale se poate determina direct starea de tensiune de-a lungul unui contur poligonal oarecare sau, cu alte cuvinte, de-a lungul unei drepte oarecare situate într-un semiplan elastic, ultima putînd fi considerată ca latură a unui poligon regulat cu un anumit număr de laturi.

După soluționarea generală a problemei, în lucrare se va reprezenta starea de tensiune de-a lungul a trei contururi semipoligonale care pînă în prezent nu sînt întîlnite în literatura de specialitate și care pot găsi numeroase aplicații în problemele practice.

Fie o forță concentrată normală P ce acționează pe fața orizontală și rectilinie AA', care limitează semiplanul elastic (fig. 8). Forța P este uniform distribuită pe grosimea semiplanului, considerată unitară.

În acest caz, condițiile limită sînt

$$\sigma_\varphi = 0 \text{ și } \tau_{\varphi r} = 0 \quad \text{pentru} \quad \varphi = 0 \quad \text{și} \quad \varphi = \pi. \tag{12.1}$$

În plus trebuie ca tensiunile să se anuleze pentru $r \to \infty$, iar starea de tensiune obținută să corespundă forței concentrate P. În punctul de aplicare al forței ($r = 0$), starea de tensiune devine infinită.

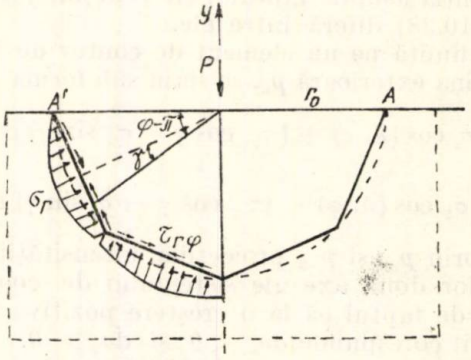


Fig. 8

Pentru a determina starea de tensiune produsă în semiplan de forța concentrată P, se folosește funcția de tensiune

$$F(r, \varphi) = Ar\varphi \operatorname{cop}_n \varphi. \tag{12.2}$$

Diferențialele acestei funcții în raport cu variabilele r și φ valorează

$$\frac{\partial F}{\partial r} = A\varphi \operatorname{cop}_n\varphi; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 F}{\partial r\, \partial \varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \varphi} = A\left(\operatorname{cop}_n\varphi - \rho\varphi \frac{\sin\varepsilon}{\cos\gamma}\right),$$

$$\frac{\partial^3 F}{\partial r\,\partial\varphi^2} = \frac{1}{r}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} = -2A\rho\frac{\sin\varepsilon}{\cos\gamma}(1+\varphi\,\mathrm{tg}\gamma), \tag{12.3}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^3 F}{\partial\varphi^3} = -2A\rho\frac{\sin\varepsilon}{\cos\gamma}[3\,\mathrm{tg}\gamma + \varphi(3\,\mathrm{tg}^2\gamma + 1)].$$

Cu ajutorul acestora, componentele stării de tensiune (10.11)—(10.14) se scriu

$$\sigma_r = \frac{\cos^2\gamma}{\rho^2 r^2}\left(\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - 2\,\mathrm{tg}\gamma\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) = -\frac{2A}{\rho^2 r}\cos^2\gamma\,\mathrm{sip}_n\varphi\,;\quad \sigma_\varphi = \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} = 0,$$

$$\tau_{r\varphi} = \frac{1}{\rho^2 r^2}\left(\frac{\sin 2\gamma}{2}\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2} - r\frac{\partial^2 F}{\partial r\partial\varphi} + \cos 2\gamma\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) = -\frac{A}{\rho^2 r}\sin 2\gamma\,\mathrm{sip}_n\varphi = \sigma_r\,\mathrm{tg}\gamma,$$

$$\tau_{\varphi r} = \frac{1}{\rho^2 r^2}\left(r^2\,\mathrm{tg}\,\gamma\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - r\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) = 0. \tag{12.4}$$

Se observă că condițiile limită (12.1) sînt îndeplinite și că pentru $r \to \infty$ rezultă

$$\sigma_r \to 0 \text{ și } \tau_{r\varphi} \to 0.$$

Pentru a determina constanta A din expresia funcției de tensiune (12.2), se decupează din semiplanul elastic o grindă perete cu contur poligonal înscris în cercul cu raza arbitrară $OA = r_0$ (fig. 8). Pe conturul poligonal acționează tensiunile normale σ_r și tensiunile tangențiale $\tau_{r\varphi}$, care trebuie să echilibreze forța concentrată P. Din ecuația de proiecție pe direcția forței P,

$$P + \int_0^\pi \rho r_0\frac{\sin\varepsilon}{\cos\gamma}\,\sigma_r\,\mathrm{d}\varphi + \int_0^\pi \rho r_0\frac{\cos\varepsilon}{\cos\gamma}\,\tau_{r\varphi}\,\mathrm{d}\varphi = 0,$$

se deduce valoarea

$$A = \frac{P}{\pi}. \tag{12.5}$$

În acest caz, funcția de tensiune (12.2) se scrie

$$F = \frac{P}{\pi} r\varphi\,\mathrm{cop}_n\varphi, \tag{12.6}$$

iar expresiile tensiunilor (12.4) devin

$$\sigma_r = -\frac{2P}{\pi\rho^2 r}\cos^2\gamma\cdot\mathrm{sip}_n\varphi = \tau_{r\varphi}\,\mathrm{ctg}\,\gamma,\quad \sigma_\varphi = \tau_{\varphi r} = 0. \tag{12.7}$$

Înlocuind valorile (12.7) în relațiile (6.9), care exprimă starea de tensiune în coordonate carteziene ortogonale, și folosind transformarea unghiulară $\varepsilon = \varphi - \gamma$, se obține

$$\sigma_x = \sigma_r \sec^2\gamma \cos^2\varphi = -\frac{2P}{\pi\rho r}\sin\varphi\cos^2\varphi,$$

$$\sigma_y = \sigma_r \sec^2\gamma \sin^2\varphi = -\frac{2P}{\pi\rho r}\sin^3\varphi, \tag{12.8}$$

$$\tau_{xy} = \sigma_r \sec^2\gamma \sin\varphi\cos\varphi = -\frac{2P}{\pi\rho r}\sin^2\varphi\cos\varphi.$$

Întrucît apotema poligonului înscris în cercul cu raza r valorează

$$a = r\cos\frac{\pi}{n} = r\rho\cos\gamma, \tag{12.9}$$

starea de tensiune (12.7) poate fi exprimată independent de raza r :

$$\sigma_r = -\frac{2P}{a\pi}\cos^3\gamma\sin\varphi, \quad \tau_{r\varphi} = \sigma_r \operatorname{tg}\gamma. \tag{12.10}$$

Din relațiile (12.10) se constată că, de-a lungul unei drepte (D) din semiplanul elastic solicitat pe linia de separație de o sarcină concentrată normală (fig. 9a), starea de tensiune variază numai cu liniile trigonometrice circulare ale unghiurilor γ și φ.

În cazul cînd dreapta (D') este paralelă cu axa Ox (fig. 9*b*),

$$\sin\varphi = \cos\gamma,$$

starea de tensiune valorează

$$\sigma_r = \sigma_y = -\frac{2P}{\pi y_0}\cos^4\gamma\,; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{xy} = -\frac{P}{\pi y_0}\sin 2\gamma\cos^2\gamma\,; \tag{12.11}$$

ca urmare, tensiunea normală nu se anulează pentru nici unul dintre punctele finite ale dreptei (D'), iar tensiunea tangențială are valoarea nulă numai pentru punctul M' corespunzător piciorului apotemei.

În cazul cînd dreapta (D'') este paralelă cu axa Oy (fig. 9*c*),

$$\sin\varphi = \sin\gamma,$$

starea de tensiune valorează

$$\sigma_r = \sigma_x = -\frac{P}{\pi x_0}\sin 2\gamma\cos^2\gamma\,; \quad \tau_{r\varphi} = \tau_{xy} = -\frac{P}{2\pi x_0}\sin^2 2\gamma\,; \tag{12.12}$$

ca urmare, dintre toate punctele finite ale dreptei (D'') singurul în care se anulează tensiunea normală sau cea tangențială este punctul M'' corespunzător piciorului apotemei.

Ținînd seama de (12.3), operatorului lui Laplace (10.27) se scrie

$$\Delta F = \frac{1}{\rho^2}\left(\sec^2\gamma\,\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} - \frac{2\,\mathrm{tg}\gamma}{r}\,\frac{\partial^2 F}{\partial r\,\partial\varphi} + \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial^2 F}{\partial\varphi^2}\right) = -\frac{2P}{\pi\rho^2 r}\,\mathrm{sip}_n\varphi, \qquad (12.13)$$

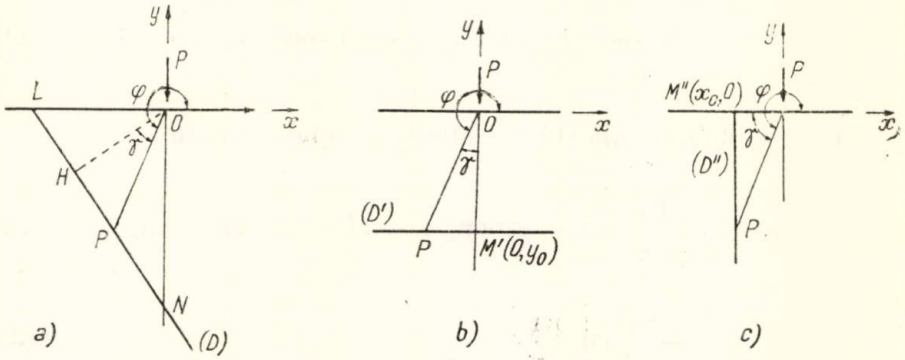


Fig. 9

iar componentele vectorului deplasare (10.25) și (10.26) valorează

$$E\,(u_r - u_r^0) = \sec^2\gamma\left[\rho\int\Delta F\,\mathrm{d}r - r\sin\gamma\int\rho\Delta F\sec\gamma\,\mathrm{d}\varphi\right] -$$

$$-\frac{1+\mu}{\rho\cos\gamma}\left(\sec\gamma\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{\sin\gamma}{r}\,\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) - E\sec\gamma\,[f(r)\,\mathrm{tg}\gamma - f(\varphi)\sec\gamma] =$$

$$= \frac{P}{\rho\pi}\sec^2\gamma\left\{-2\,\mathrm{sip}_n\varphi\,\mathrm{L}r + \rho\sin\gamma\int\frac{2}{\rho\cos\gamma}\,(\sin^2\gamma -\right.$$

$$\left. -\mu\cos^2\gamma)\,\mathrm{sip}_n\varphi\,\mathrm{d}\varphi + E\rho[f(\varphi) - f(r)\sin\gamma]\right\}, \qquad (12.14)$$

$$E\,[u_\varphi - (\omega_0 r + u_\varphi^0)] = \sec^2\gamma\left[-\rho\sin\gamma\int\Delta F\,\mathrm{d}r + r\int\rho\Delta F\sec\gamma\,\mathrm{d}\varphi\right] +$$

$$+\frac{1+\mu}{\rho\cos\gamma}\left(\mathrm{tg}\gamma\,\frac{\partial F}{\partial r} - \frac{1}{r}\,\frac{\partial F}{\partial\varphi}\right) + E\sec\gamma\,[f(r)\sec\gamma - f(\varphi)\,\mathrm{tg}\gamma] =$$

$$= \frac{P}{\rho\pi}\sec^2\gamma\left\{2\sin\gamma\,\mathrm{sip}_n\varphi\,\mathrm{L}r + \rho\int\frac{2}{\rho\cos\gamma}\,(\sin^2\gamma -\right.$$

$$\left. -\mu\cos^2\gamma)\,\mathrm{sip}_n\varphi\,\mathrm{d}\varphi - E\rho[f(r) - f(\varphi)\sin\gamma]\right\}, \qquad (12.15)$$

funcțiile $f(r)$ și $f(\varphi)$ fiind integralele particulare ale ecuației diferențiale cu variabile separate (10.28), în care diferențialele au fost înlocuite cu valorile (12.3):

$$E\left[f(\varphi)\sin\gamma+\cos\gamma\frac{\partial}{\partial\varphi}f(\varphi)-f(r)+r\frac{\partial}{\partial r}f(r)\right]=\frac{P}{\rho\pi}\left[2\rho\cos\varepsilon\,\mathrm{L}\frac{r}{\rho}+\right.$$

$$\left.+\rho\varphi(\mu-1)\sin\varepsilon+(\mu-3)\sin\gamma\,\mathrm{sip}_n\varphi\right]. \tag{12.16}$$

Ecuația diferențială (12.16) admite ca soluție funcțiile

$$f(\varphi)=\frac{P}{\rho\pi E}[\varphi(1-\mu)\mathrm{cop}_n\varphi+(1+\mu-2\mathrm{L}\rho)\,\mathrm{sip}_n\varphi], \tag{12.17}$$

$$f(r)=-\frac{2P}{\pi E}\cos\varepsilon\,\mathrm{L}r, \tag{12.17'}$$

din care, înlocuindu-le în (12.14) și (12.15), se obține starea de deformație

$$E(u_r-u_r^0)=\frac{P}{\rho\pi\cos\gamma}[-2\rho\sin\varepsilon\,\mathrm{L}r\rho+\rho\varphi(1-\mu)\cos\varepsilon+(1+\mu)\cos\gamma\,\mathrm{sip}_n\varphi], \tag{12.18}$$

$$E[u_\varphi-(\omega_0 r+u_\varphi^0)]=\frac{P}{\rho\pi\cos\gamma}[-2\,\mathrm{cop}_n\varphi\,\mathrm{L}\rho r+\varphi(\mu-1)\,\mathrm{sip}_n\varphi]. \tag{12.18'}$$

Deoarece, conform cu (7.4),

$$u_r^0=u_0\frac{\cos\varepsilon}{\cos\gamma}+v_0\frac{\sin\varepsilon}{\cos\gamma};\qquad u_\varphi^0=-u_0\frac{\sin\varphi}{\cos\gamma}+v_0\frac{\cos\varphi}{\cos\gamma}, \tag{12.19}$$

iar din motive de simetrie

$$u_r(\varphi)=u_r(\pi-\varphi),\qquad u_\varphi(\varphi)=-u_\varphi(\pi-\varphi), \tag{12.20}$$

din relațiile (12.15) rezultă

$$u_0=\frac{\mu-1}{2E}P;\qquad w_0=0. \tag{12.21}$$

Pentru a determina deplasarea v_0 se impune condiția ca pentru $\varphi = 0$ și $\varphi = \pi$ în punctul $r = r_0$ să nu existe deplasare u_φ.

Pentru $\varphi = 0$ se obține

$$\varepsilon = -\gamma = \frac{\pi}{n}; \qquad \rho = 1, \tag{12.22}$$

iar pentru $\varphi = \pi$, $\varepsilon = \pi - \frac{\pi}{n}$; $\gamma = \frac{\pi}{n}$; $\rho = 1$. (12.23)

În acest caz, din (12.19) rezultă

$$v_0 = \frac{2P}{\pi E} \mathrm{L} r_0. \tag{12.24}$$

Înlocuind (12.16) (12.18) și (12.20) în formulele (12.15), se obține

$$u_r = \frac{P}{\rho \pi E \cos\gamma}\left[(1+\mu)\cos\gamma \operatorname{sip}_n\varphi + 2\rho \sin\varepsilon \mathrm{L}\frac{r_0}{r\rho} - \frac{\rho}{2}(1-\mu)(\pi-2\varphi)\cos\varepsilon\right],$$

$$u_\varphi = \frac{P}{\rho\pi E \cos\gamma}\left[\frac{1}{2}(1-\mu)(\pi-2\varphi)\operatorname{sip}_n\varphi + 2\mathrm{L}\frac{r_0}{r\varphi}\operatorname{cop}_n\varphi\right]. \tag{12.25}$$

Ținînd seama de (12.19), pentru linia de separație se obține

$$u_r(r, 0) = u_r(r, \pi) = \frac{P}{E}\left(\frac{\mu-1}{2} + \frac{2}{\pi}\operatorname{tg}\frac{\pi}{n}\mathrm{L}\frac{r_0}{r}\right), \tag{12.26}$$

$$u_\varphi(r, 0) = -u_\varphi(r, \pi) = \frac{2P}{\pi E \cos\frac{\pi}{n}}\mathrm{L}\frac{r_0}{r\rho}. \tag{12.27}$$

Folosind formulele (12.8) și valorile diferitelor funcții poligonale, s-au determinat starea de eforturi de-a lungul a trei contururi semipoligonale: triunghiul isoscel (fig. 10), pătratul (fig. 11) și hexagonul (fig.12).

În mod asemănător pot fi reprezentate eforturile unitare normale și tangențiale de-a lungul unor contururi poligonale atît în cazul forțelor concentrate sau distribuite care acționează paralel cu linia de separație, cît și în cazul momentelor.

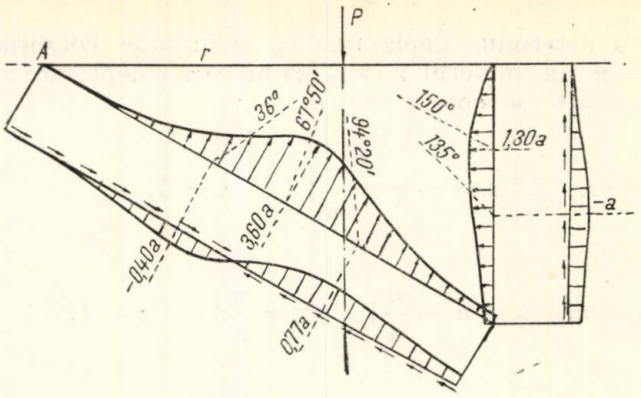


Fig. 10

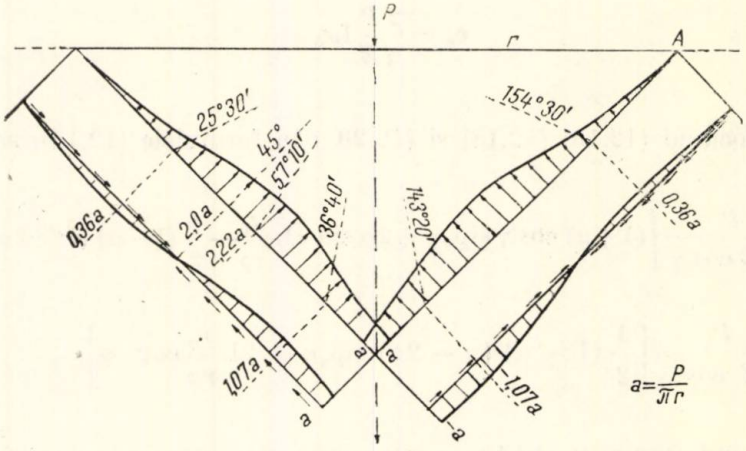
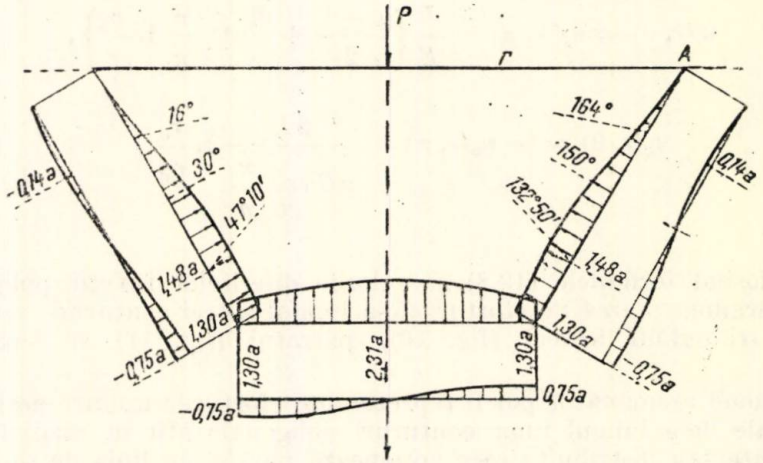


Fig. 11



F i. 12

Transformînd coordonatele poligonale în coordonate rectangulare (5.3) sau în coordonate polare (5.7), formulele obținute în acest capitol se transformă în formulele corespunzătoare deduse în lucrările [6, p. 433] și [7, p. 120] pentru conturul dreptunghiular sau circular.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. Alaci, *Trigonometrie pătratică*, Revista matematică din Timișoara (1939).
2. O. Enulescu, *Funcțiuni poligonale*, Pozitiva, **I**, *1* (1940).
3. V. Alaci, *Funcțiuni poligonale*, Pozitiva, **I**, *2* (1940).
4. S. Cetățeanu, *Asupra funcțiilor poligonale*, Pozitiva, **I**, *2*, (1940).
5. H. B. Ionescu, *Funcțiuni poligonale*, Pozitiva, **I**, *2* (1940).
6. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I, București, Edit. Academiei. 1960.
7. — *Probleme plane în teoria elasticității* vol. II, București, Edit. Academiei, 1965.
8. K. Girkmann, *Flächentragwerke*, ed. 6, Viena Springer — Verlag, 1963.
9. S. Timoshenko, *Theory of elasticity* ed. 1, New York, *McGraw-Hill book company*, Inc,. 1934.

STABILITATEA AEROELASTICĂ A STRUCTURILOR PLANE DE TIP SANDVIŞ, PLASATE ÎNTR-UN CURENT DE GAZ SUPERSONIC

de L. LIBRESCU, ELEONORA MALAIU
Institutul de mecanică a fluidelor

Este prezentat un studiu teoretic privind stabilitatea aeroelastică în formulare liniară a panourilor plane de tip sandviş dreptunghiulare, plasate într-un curent de gaz supersonic ideal conductor.
O atenţie deosebită se acordă problemei stabilităţii aeroelastice a benzii sandviş infinite. În acest cadru se studiază influenţa pe care parametrii k_0^2 şi R_{11} (primul exprimînd flexibilitatea în forfecare transversală a structurii, al doilea legat de sarcinile axiale) o au asupra mărimilor critice (de flutter şi divergente).
Se cercetează şi se justifică concluziile formulate în cîteva lucrări recente privind neconcordanţa dintre o serie de rezultate din acest domeniu obţinute în mod exact şi aproximativ.

1. INTRODUCERE

Trecerea în revistă a imensei literaturi apărute în domeniul problemei stabilităţii aeroelastice a panourilor permite să tragem concluzia că aproape în exclusivitate studiile din acest domeniu au fost întreprinse luînd în considerare teoria clasică a panourilor subţiri (teorie bazată pe ipoteza Love-Kirchhoff). Puţine sînt, după cunoştinţele autorilor, acele lucrări în cadrul cărora problema stabilităţii aeroelastice a fost abordată ţinînd seama de deformaţiile de forfecare transversală a panourilor (vezi în acest sens lucrările [1] — [10]).

După cum se ştie (vezi, de exemplu, [11] — [14]), în cazul abordării problemelor de statică şi dinamică a panourilor groase, (izotrope sau anizotrope) sau al panourilor *geometric subţiri*, confecţionate însă dintr-un material cu un înalt grad de anizotropie, efectul deformaţiilor de forfecare transversală nu mai poate fi neglijat. Astfel, studiul stabilităţii aeroelastice a plăcilor omogene, al căror material transversal-izotrop posedă raporturi ale constantelor elastice $20 < E/G' < 50$ (E fiind modulul lui Young din planul de izotropie al materialului şi G' modulul de forfecare în planul normal planului de izotropie, cum este, de exemplu, cazul plă-

St. cerc. mec. apl., tom. 30, nr. 1, 1971, p. 171–196

cilor confecționate din grafit pyrolitic), sau studiul stabilității aeroelastice a panourilor de tip sandviș constituie tot atîtea cazuri care impun ca ecuațiile structurale să nu mai poată fi deduse adoptînd ca bază ipoteza Love-Kirchhoff.

Lucrarea de față este dedicată studiului stabilității aeroelastice a panourilor plane de tip sandviș dreptunghiulare, simetric construite, plasate într-un curent de gaz supersonic.

2. IPOTEZE. CONSIDERAȚII GEOMETRICE. ECUAȚII DE BAZĂ

Fie o placă plană dreptunghiulară ($a \times b$) de tip sandviș simetric construită, plasată într-un curent de gaz supersonic, nevîscos, ideal conductor (fig. 1). Vom presupune două cazuri de scurgere a curentului de gaz:

— *cazul a*: curentul de gaz se scurge paralel axei $0\xi_1$, pe fața de mărginire exterioară a panoului, cu viteza U_∞^+, ($U_\infty^- = 0$), fața inferioară a panoului considerîndu-se plasată în aer liniștit, rău conducător de electricitate;

— *cazul b*: curentul de gaz se scurge pe ambele fețe ale panoului, cu viteza $U_\infty^+ = U_\infty^-$.

În ambele cazuri, cîmpul magnetic se presupune uniform și *paralel* curentului de gaz neperturbat U_∞.

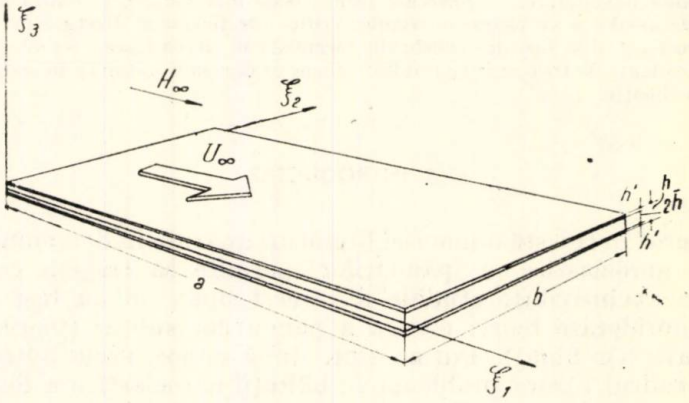


Fig. 1

În plus se consideră: în cazul a, $H_\infty = H_\infty^+$ ($H_\infty^- = 0$); în cazul b, $H_\infty^+ = H_\infty^-$, unde H_∞ reprezintă componenta cîmpului magnetic paralelă axei $0\ \xi_1$.

Vom presupune nule efectele electromagnetice în materialul plăcii.

Operatorul magnetoaerodinamic este exprimat în cazul *a* prin [15]

$$\mathcal{A}(w) = -\frac{\rho_\infty U_\infty (m^2 - 1)}{m^2 (K^2 - 1)^{1/2}} \left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial \xi_1} \right) \qquad (1)^*)$$

*) Expresia presiunii magnetoaerodinamice, dată de relația (1), a fost folosită în studiul stabilității panourilor plane de Lisunov [16] și Efremov [9].

şi în cazul *b* prin

$$\mathcal{A}(w) = -\frac{2\rho_\infty U_\infty (m^2-1)}{m^2(K^2-1)^{1/2}}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial \xi_1}\right), \tag{2}$$

unde

m este numărul Alfvèn, definit de $m = \dfrac{U_\infty}{\alpha}$, adică prin raportul vitezei U_∞ a curentului neperturbat la viteza de propagare a undelor Alfvèn, iar

$$\alpha = \frac{H_\infty}{(4\pi\rho_\infty)^{1/2}}; \qquad K^2 = \frac{(M_\infty^2-1)(m^2-1)}{M_\infty^2+m^2-1} + 1. \tag{3}$$

Se vede că în cazul absenţei cîmpului magnetic ($H_\infty \to 0$) numărul Alfvèn $m \to \infty$; $K^2 \to M^2 - 1$ şi deci (1) şi (2) trec respectiv, în binecunoscutele formule ale lui Ackeret:

$$\mathcal{A}(w) = \frac{\rho_\infty U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial \xi_1}\right),$$

$$\mathcal{A}(w) = -\frac{2\rho_\infty U_\infty}{\sqrt{M_\infty^2-1}}\left(\frac{\partial w}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial w}{\partial \xi_1}\right). \tag{4}$$

În ceea ce priveşte ecuaţiile rezolvente ale teoriei de încovoiere a structurilor plane, elastice, de tip sandviş, simetric construite, acestea au fost deduse într-un cadru general în [17].

Expresia operatorului structural va fi prezentată limitîndu-ne la cazul teoriei liniare a plăcilor sandviş dreptunghiulare, construite simetric (simetrie geometrică şi fizico-mecanică) din două straturi exterioare subţiri, izotrope, separate printr-un strat median gros, confecţionat dintr-un material transversal-izotrop (planul de izotropie al materialului inimii coincizînd cu planul $\xi_3 = 0$). În plus vom ţine seama de faptul că în problema vibraţiilor şi a stabilităţii structurilor sandviş, ecuaţia stratului-limită, corespunzînd forfecării transversale, poate fi ignorată (vezi în acest sens [18], [19]). Cu acestea ecuaţia de încovoiere transversală în teoria plăcilor sandviş simetric construite este dată de

$$\mathcal{D}\Delta\Delta w + T_{11}^0 w_{,11} + T_{22}^0 w_{,22} - k^2[T_{11}^0(w_{,1111} + w_{,1122}) +$$

$$+ T_{22}^0(w_{,2211} + w_{,2222})] - q + k^2(q_{,11} + q_{,22}) = 0, \tag{5}$$

unde

$\mathcal{D}$ reprezintă rigiditatea la încovoiere transversală,

$$\mathcal{D} = \frac{2}{3}\left[\frac{\overline{E}\overline{h}^3}{1-\overline{\nu}^2} + \frac{E'<(\overline{h}+h')^3 - \overline{h}^3>}{1-\nu'^2}\right],$$

$$k^2 = \frac{1}{\overline{G}_3}\left[\frac{2}{3}\frac{\overline{G}\overline{h}^2}{1-\overline{\nu}} + \frac{2G'\overline{h}h'}{1-\nu'}\right] \tag{6}$$

(în cadrul teoriei clasice a panourilor $k^2 \to 0$ $(\overline{G}_3 \to \infty)$); T^0_{11}, T^0_{22} — sarcinile normale din planul plăcii (pozitive în compresiune);

$$\overline{G} = \frac{\overline{E}}{2(1+\overline{\nu})}; \qquad G' = \frac{E'}{2(1+\nu')},$$

$\overline{E}, \overline{\nu}$; E', ν' — modulul lui Young, respectiv, constanta Poisson, corespunzînd stratului median, respectiv stratului superior;

$\overline{G}_3$ — modulul de forfecare corespunzînd materialului inimii în planul transversal la planul median;

$2\overline{h}$; $h' = h''$ — grosimea stratului-median, respectiv a stratului exterior;

$h = 2(\overline{h} + h')$ — grosimea totală a plăcii sandviș;

q — sarcina normală la planul median al plăcii, exprimată prin

$$q = -m_0\ddot{w} - m_0\varepsilon\dot{w} + \delta p,$$

unde m_0 este masa redusă a structurii, iar ε coeficientul de amortizare structurală; $\delta p \equiv \mathcal{A}(w)$;
Δ — operatorul Laplace bidimensional.

Peste tot în lucrare, mărimile afectate de o bară sau de un accent identifică proprietățile stratului-median, respectiv al stratului superior, iar derivata parțială în raport cu coordonata $\xi_i (i = 1,2,3)$ va fi indicată prin indicele i, precedat de o virgulă $\left(\frac{\partial}{\partial \xi_i}(\ ) \equiv (\ )_{,i}\right)$; punctul deasupra unei mărimi semnifică derivarea parțială în raport cu timpul t.

Cu acestea, ecuația echilibrului aeroelastic este exprimată prin

$$\mathcal{D}\Delta\Delta w + T^0_{11}w_{,11} + T^0_{22}w_{,22} - k^2[T^0_{11}(w_{,1111} + w_{,1122}) + T^0_{22}(w_{,2211} + w_{,2222})] +$$

$$+ m_0\ddot{w} + m_0\varepsilon\dot{w} - k^2 m_0\ddot{w}_{,11} - k^2 m_0\ddot{w}_{,22} + \frac{\rho_\infty U^2_\infty (m^2-1)}{m^2(K^2-1)^{1/2}} w_{,1} -$$

$$- k^2\frac{\rho_\infty U^2_\infty (m^2-1)}{m^2(K^2-1)^{1/2}} w_{,111} - k^2\frac{\rho_\infty U^2_\infty (m^2-1)}{m^2(K^2-1)^{1/2}} w_{,122} + \frac{\rho_\infty U_\infty (m^2-1)}{m^2(K^2-1)^{1/2}}\dot{w} = 0, \tag{7}$$

care poate fi transcrisă mai compact prin

$$(\mathcal{S} - \mathcal{A} - \mathcal{J} + k^2\Delta\mathcal{A} + k^2\Delta\mathcal{J})(w) = 0, \tag{8}$$

unde $\mathcal{S}(w)$ reprezintă operatorul structural, iar $\mathcal{A}(w)$ şi $\mathcal{J}(w)$ operatorul aerodinamic, respectiv de inerţie.

3. O ALTĂ FORMĂ PENTRU ECUAŢIA ECHILIBRULUI AEROELASTIC

În cele ce urmează vom proceda la transformarea ecuaţiei rezolvente (7) sub o formă mai propice analizei stabilităţii aeroelastice (vezi [19], [21]). În acest sens vom reprezenta pe $w(\xi_1, \xi_2, t)$ prin

$$w(\xi_1, \xi_2, t) = \sum_{m,n=1}^{\infty} w_{mn}(t) f_{mn}(\xi_1, \xi_2), \tag{9}$$

unde funcţiile $f_{mn}(\xi_1, \xi_2)$ satisfac toate condiţiile la limită în ceea ce priveşte deplasarea normală, $w_{mn}(t)$ fiind funcţii de timp ce trebuie determinate *).

Este demn de remarcat faptul că în contradicţie cu cazul în care efectul deformaţiilor de forfecare transversală este ignorat, în cazul de faţă în termenii aerodinamici (mai precis în termenul $k^2\,\Delta\mathcal{A}(w)$) apare cuplarea modurilor şi după direcţia ξ_2.

Aceasta impune ca în studiul stabilităţii aeroelastice a structurilor plane de tip sandviş, reprezentarea lui $w(\xi_1, \xi_2, t)$ să se facă conform relaţiei (9); aceeaşi reprezentare pentru $w(\xi_1, \xi_2, t)$ se impune evident şi în studiul stabilităţii aeroelastice a plăcilor omogene, în cazul în care se ia în considerare efectul deformaţiilor de forfecare transversală.

Apare deci destul de discutabilă în aceste cazuri reprezentarea lui $w(\xi_1, \xi_2, t)$ prin

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} w_{mn}(t) f_{mn}(\xi_1, \xi_2), \tag{9'}$$

reprezentare întîlnită într-o serie de lucrări recente.

Aplicînd ecuaţiei (8) tehnica lui Galerkin:

$$\int_0^a \int_0^b (\mathcal{S} - \mathcal{A} - \mathcal{J} + k^2\Delta\mathcal{J} + k^2\Delta\mathcal{A})(w) f_{\bar{r}n}\, \mathrm{d}\xi_1\, \mathrm{d}\xi_2 = 0$$

$$(\bar{r} = 1,2,\ldots;\quad n = 1,2,\ldots), \tag{10}$$

*) În [20], [21, p. 74] au fost prezentate expresiile lui $f_{mn}(\xi_1, \xi_2)$ în citeva cazuri de condiţii la limită.

se obține următorul sistem de ecuații diferențiale, liniar în raport cu coeficienții seriei (9) :

$$\ddot{w}_{rn} + \varepsilon_T \dot{w}_{rn} + \Omega_{rn}^2 w_{rn} + F_{rn} = 0, \tag{11}$$

care se pretează mai bine la analiza stabilității aeroelastice decît ecuația cu derivate parțiale (7).

Pentru a nu fi conduși la expresii exorbitant de complicate, vom restrînge analiza la cazul stabilității aeroelastice a benzii sandviș infinite (fig. 2).

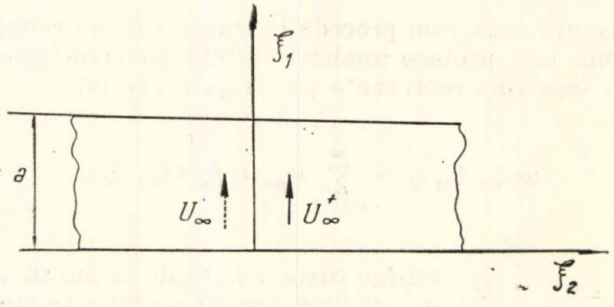


Fig. 2

În acest caz considerăm $w = w(\xi_1, t)$ și vom lua în considerare două cazuri de condiții de rezemare :

— cazul A : marginile perpendiculare direcției scurgerii curentului de gaz sînt simplu rezemate.

— cazul B : marginile perpendiculare direcției scurgerii curentului de gaz sînt încastrate.

Expresiile lui $w(\xi_1, t)$ în cele două cazuri de sprijinire menționate sînt date, respectiv, de

$$\begin{aligned} w(\xi_1, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} w_r(t) \sin \frac{r\pi\xi_1}{a}, \\ w(\xi_1, t) &= \sum_{r=1}^{\infty} w_r(t) \left(\cos \frac{(r-1)\pi\xi_1}{a} - \cos \frac{(r+1)\pi\xi_1}{a} \right). \end{aligned} \tag{12}$$

Folosind tehnica lui Galerkin, se obțin în cazul benzii infinite ecuațiile

$$\frac{\mathrm{d}^2\zeta_r}{\mathrm{d}\tau^2} + \varepsilon_T \frac{\mathrm{d}\zeta_r}{\mathrm{d}\tau} + w_r^2 \zeta_r + F_r(\zeta_p, M) = 0 \qquad (r = 1,2,\ldots), \tag{13}$$

unde au fost introduse variabilele adimensionale

$$\tau = \Omega t; \qquad \zeta_r = \frac{w_r}{h}, \tag{14}$$

precum şi parametrii adimensionali

$$R_{11}=\frac{T_{11}^0 a^2}{\pi^2\mathcal{D}}; \qquad \nu=\frac{hM_\infty^2(m^2-1)}{am^2(K^2-1)^{1/2}},$$

$$\Omega^2=\frac{\pi^4\mathcal{D}}{m_0a^4}; \qquad P_1=\frac{\varkappa p_\infty}{m_0h\Omega^2}. \tag{15}$$

În cazul scurgerii pe o singură faţă a panoului avem

$$\varepsilon_T=\frac{1}{\Omega}\left(\varepsilon+\frac{\varkappa p_\infty}{m_0c_\infty}\right); \qquad P=P_1, \tag{16}$$

iar în cazul scurgerii pe ambele feţe ale panoului cu viteza $U_\infty^+=U_\infty^-=U_\infty$, avem

$$\varepsilon_T=\frac{1}{\Omega}\left(\varepsilon+\frac{2\varkappa p_\infty}{m_0c_\infty}\right); \qquad P=2P_1. \tag{17}$$

Celelalte expresii ale parametrilor sînt identice în cazul scurgerii pe una sau pe ambele feţe ale panoului; în cazul de rezemare A sînt

$$\omega_r^2=\frac{r^4}{1+k_0^2r^2}-R_{11}r^2,$$

frecvenţele de vibrare proprii ale structurii în vid fiind

$$F_r=-4\lambda\frac{r}{1+k_0^2r^2}\sum_{p=1}^{\infty}\frac{2p+1-r}{(2p+1)(2p+1-2r)}\{1+k_0^2(2p+1-r)^2\}\zeta_{2p+1-r}$$
$$(r=1,2,\ldots), \tag{18}$$

iar în cazul de rezemare B

$$\omega_1^2=[16-4R_{11}(1+4k_0^2)](3+4k_0^2)^{-1},$$
$$\omega_r^2=[r^4+6r^2+1-R_{11}<r^2+1+k_0^2(r^4+6r^2+1)>][1+k_0^2(r^2+1)]^{-1}$$
$$(r=2,3,\ldots),$$

$$F_1=-\frac{128}{15}\lambda(1+4k_0^2)(3+4k_0^2)^{-1}\zeta_2,$$

$$F_r=-2\lambda(1+k_0^2(r^2+1))^{-1}\times$$
$$\times\sum_{t=1}^{\infty}\left\{\frac{(2t-r)^2}{(2t-1)(2t+1-2r)}(1+k_0^2(2t-r)^2)-\right.$$
$$-\frac{(2t-r)^2}{(2t+1)(2t-1-2r)}(1+k_0^2(2t-r)^2)- \tag{19}$$
$$-\frac{(2t+2-r)^2}{(2t+1)(2t+3-2r)}(1+k_0^2(2t+2-r)^2)+$$
$$\left.+\frac{(2t+2-r)^2}{(2t+3)(2t+1-2r)}(1+k_0^2(2t+2-r)^2)\right\}\zeta_{2t+1-r}$$
$$(r=2,3,\ldots),$$

unde $k_0^2 = \dfrac{k^2\pi^2}{a^2}$; $\lambda = P\nu$, parametrul caracterizînd rigiditatea la forfecare transversală, respectiv noul parametru de viteză.

Luînd în considerare modurile succesive ζ_p; ζ_{p+1}, se obţin în cazul de rezemare A ecuaţiile

$$\frac{d^2\zeta_p}{d\tau^2} + \varepsilon_T \frac{d\zeta_p}{d\tau} + \omega_p^2\zeta_p - \frac{4p(1+p)}{1+2p}\lambda\rho^2\zeta_{p+1} = 0, \tag{20}$$

$$\frac{d^2\zeta_{p+1}}{d\tau^2} + \varepsilon_T \frac{d\zeta_{p+1}}{d\tau} + \omega_{p+1}^2\zeta_{p+1} + \frac{4p(1+p)}{1+2p}\frac{\lambda}{\rho^2}\zeta_p = 0, \tag{21}$$

unde

$$\rho^2 = \frac{1 + k_0^2(p+1)^2}{1 + k_0^2p^2} \qquad (p = 1,2,\ldots),$$

iar în cazul de rezemare B

$$\frac{d^2\zeta_1}{d\tau^2} + \varepsilon_T\frac{d\zeta_1}{d\tau} + 4[4 - R_{11}(1+4k_0^2)](3+4k_0^2)^{-1}\zeta_1 -$$

$$-\frac{128}{15}\lambda(1+4k_0^2)(3+4k_0^2)^{-1}\zeta_2 = 0,$$

$$\frac{d^2\zeta_2}{d\tau^2} + \varepsilon_T\frac{d\zeta}{d\tau} + [41 - R_{11}(5+41k_0^2)](1+5k_0^2)^{-1}\zeta_2 +$$

$$+\frac{64}{15}\lambda(1+5k_0^2)^{-1}(1+4k_0^2)\zeta_1 = 0$$

şi

$$\frac{d^2\zeta_p}{d\tau^2} + \varepsilon_T\frac{d\zeta_p}{d\tau} + [p^4+6p^2+1 - R_{11}(p^4+6p^2+1)](1+k_0^2(p^2+1))^{-1}\zeta_p -$$

$$-2\lambda(1+k_0^2(p^2+1))^{-1}\left\{\frac{p^2(1+k_0^2p^2)}{2p-1} + \frac{p^2(1+k_0^2p^2)}{2p+1} -\right.$$

$$\left.-\frac{(p+2)^2(1+k_0^2(p+2)^2)}{3(2p+1)} + \frac{(p+2)^2(1+k_0^2(p+2)^2)}{2p+3}\right\}\zeta_{p+1} = 0, \tag{22}$$

$$\frac{d^2\zeta_{p+1}}{d\tau^2} + \varepsilon_T\frac{d\zeta_{p+1}}{d\tau} + [1+k_0^2((p+1)^2+1)]^{-1}\times[(p+1)^4 + 6(p+1)^2 +$$

$$+1 - R_{11}[(p+1)^2 + 1 + k_0^2 < (p+1)^4 + 6(p+1)^2 + 1 >]]\zeta_{p+1} -$$

$$- 2\lambda(1 + k_0^2 < (p+1)^2 + 1 >)\left\{\frac{(p+1)^2(1 + k_0^2(p-1))^2}{(1-2p)} + \right.$$

$$+ \frac{(p-1)^2(1 + k_0^2(p-1)^2)}{3(2p+1)} - \frac{(p+1)^2(1 + k_0^2(p+1)^2)}{2p+1} -$$

$$\left. - \frac{(p+1)^2(1 + k_0^2(p+1)^2)}{(2p+3)}\right\}\zeta_p = 0 \qquad (p = 2,3,\ldots).$$

Sub această ultimă formă, ecuațiile (21) și (22) vor fi folosite în studiul stabilității aeroelastice a benzii sandviș infinite.

4. ANALIZA STABILITĂȚII AEROELASTICE A BENZII SANDVIȘ INFINITE

Problema stabilității aeroelastice a benzii sandviș infinite va fi studiată pornind de la ecuațiile (21) și (22) obținute respectiv în cazul A și B.

Considerînd soluții de forma $\zeta_m = C_m e^{\omega t}$ unde $C_m (m = p,\ p+1)$ = constante arbitrare, și impunînd condiția de a avea soluții netriviale, se obține ecuația caracteristică

$$(\omega_p^2 - \zeta)(\omega_{p+1}^2 - \zeta) + b_p b_{p+1}\lambda^2 = 0, \tag{23}$$

unde parametrul de frecvență ζ este definit de

$$-\zeta = \left(\frac{\omega}{\Omega}\right)^2 + \varepsilon_T \frac{\omega}{\Omega}. \tag{24}$$

Din (24), pentru o valoare ζ dată, se obțin două valori pentru frecvența ω:

$$\omega_{(1),(2)} = -\frac{\varepsilon_T \Omega}{2} \pm \left[\left(\frac{\varepsilon_T \Omega}{2}\right)^2 - \Omega^2 \zeta\right]^{1/2}. \tag{25}$$

Ținînd seama că ω este în cazul general o mărime complexă ($\omega = \mathrm{Re}\,\omega + i\mathrm{Im}\omega$; $i = (-1)^{1/2}$), din (24) se deduce că una dintre cele două rădăcini, fie aceasta $\omega_{(1)}$, posedă proprietatea *)

$$\mathrm{Re}\,\omega_{(1)} < 0.$$

*) Corespunzător soluțiilor considerate starea de echilibru inițială este stabilă, neutral stabilă sau instabilă (instabilitate de tipul flutter) dacă și numai dacă $\mathrm{Re}\,\omega < 0$, $\mathrm{Re}\,\omega = 0$ sau $\mathrm{Re}\,\omega > 0$.

A doua frecvență $\omega_{(2)}$ satisface la condițiile $\mathrm{Re}\omega_{(2)} < 0$; $\mathrm{Re}\omega_{(2)} = 0$ sau $\mathrm{Re}\omega_{(2)} > 0$ dacă și numai dacă

$$\zeta = \mathrm{Re}\zeta(\lambda) + i\mathrm{Im}\zeta(\lambda) \tag{26}$$

se află în interiorul, pe frontiera sau, respectiv, în exteriorul „parabolei de stabilitate", definită de *)

$$(\mathrm{Im}\,\zeta(\lambda))^2 = \varepsilon_T^2\,\mathrm{Re}\,\zeta(\lambda), \tag{26'}$$

unde ε_T a fost considerat același pentru toate modurile.

Ținînd seama de (26) în (23) și separînd partea reală și imaginară, se obțin două polinoame:

$$\begin{aligned} &\mathrm{Re}: \ \omega_p^2\omega_{p+1}^2 - \zeta_R(\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2) + (\zeta_R^2 - \zeta_I^2) + (b_p b_{p+1}\lambda)^2 = 0, \\ &\mathrm{Im}: \ 2\zeta_R - (\omega_p^2 + \omega_{p+1}^2) = 0, \end{aligned} \tag{27}$$

unde $\zeta_R \equiv \mathrm{Re}\zeta$; $\zeta_I \equiv \mathrm{Im}\zeta$.

Punînd condiția ca sistemul să se afle în pragul instabilității de tipul flutter (condiție realizată ținînd seama de (26) în (27)) și impunînd condiția ca sistemul (27) să aibă o soluție unică (condiție satisfăcută dacă și numai dacă determinantul lui Sylvester corespunzînd sistemului de ecuație (27) (în care în prealabil se ține seama de (26')) este nul, se obține expresia vitezei critice de flutter:

$$\lambda_*^2 = \frac{1}{4b_p b_{p+1}}\left[(\omega_{p+1}^2 - \omega_p^2)^2 + 2\varepsilon_T^2(\omega_{p+1}^2 + \omega_p^2)\right], \tag{28}$$

precum și frecvența critică de flutter:

$$\zeta_R = \frac{1}{2}(\omega_{p+1}^2 + \omega_p^2). \tag{29}$$

Considerînd primele două moduri de vibrare ($p = 1$), în cazul de rezemare A avem

$$b_1 = b_2 = \frac{8}{3}, \tag{30}$$

*) Noțiunea de „parabolă de stabilitate" a fost introdusă în studiul stabilității aeroelastice de Movcian [22], [23] (vezi și Bolotin [24]) și folosită ulterior în același domeniu de Stepanov [25], Krumhaar [26], Grigoliuk și Mihailov [3]. În cadrul mai larg al stabilității generale neconservative, noțiunea de „parabolă de stabilitate" a fost introdusă de Leipholz [27], [28].

iar în cazul de rezemare B

$$b_1 = \frac{128}{15}\frac{1+4k_0^2}{3+4k_0^2}; \qquad b_2 = \frac{64}{15}\frac{1+4k_0^2}{1+5k_0^2}, \tag{31}$$

ω_1^2 și ω_2^2 fiind frecvențele de vibrare proprii, care în cele două cazuri de rezemare au fost definite prin (18) și, respectiv, prin $(19)_1$ și $(19)_2$.

Să considerăm cazul corespunzînd lui ε_T neglijabil de mic, unde vom considera soluții de forma $\zeta_m = C_m e^{i\omega t}$. Cu aceasta, din ecuațiile (22) (afectate de faptul că ε_T este neglijabil de mic) obținem în cazul de sprijinire A

$$\begin{aligned} &(\omega_p^2 - \omega^2)\, C_p - \frac{4p(1+p)}{1+2p}\,\lambda\rho^2 C_{p+1} = 0, \\ &\frac{4p(1+p)}{1+2p}\,\frac{\lambda}{\rho^2}\, C_p + (\omega_{p+1}^2 - \omega^2)\, C_{p+1} = 0, \end{aligned} \tag{32}$$

C_p fiind constante arbitrare ($p = 1,2,\ldots$), iar în cazul de sprijinire B, luînd în considerare primele două moduri succesive ζ_1, ζ_2, ($p = 1$) și, respectiv, a modurilor ζ_p, ζ_{p+1} ($p = 2,3,\ldots$), se obține

$$\begin{aligned} &(\omega_1^2 - \omega^2)\, C_1 - \frac{128}{15}\,\lambda\frac{1+4k_0^2}{3+4k_0^2}\, C_2 = 0, \\ &\frac{64}{15}\,\lambda\frac{1+4k_0^2}{1+5k_0^2}\, C_1 + (\omega_2^2 - \omega^2)\, C_2 = 0 \end{aligned} \tag{33}$$

și, respectiv,

$$\begin{aligned} &(\omega_p^2 - \omega^2)\, C_p - \lambda b_{p+1} C_{p+1} = 0\,, \\ &\lambda b_p C_p + (\omega_{p+1}^2 - \omega^2)\, C_{p+1} = 0 \qquad (p = 2,\ 3,\ldots). \end{aligned} \tag{34}$$

Impunînd condiția netrivialității constantelor C_p, rezultă ecuația caracteristică scrisă sub forma generală

$$\lambda^2 b_p b_{p+1} = (\omega_p^2 - \omega^2)\,(\omega^2 - \omega_{p+1}^2), \tag{35}$$

care poate fi specializată pentru cazul de rezemare A, respectiv B. Pentru $\lambda = 0$, frecvențele obținute corespund frecvențelor de vibrare proprii ω_p^2, ω_{p+1}^2.

Cu creșterea parametrului de viteza λ pentru o anumită valoare a acestuia $\lambda = \lambda_{*fl}$, ecuația caracteristică posedă o frecvență dublă nenulă; (pentru $\lambda > \lambda_{*fl}$, ecuația caracteristică posedă o pereche de rădăcini complex conjugate). Starea de echilibru astfel definită este nestabilă de

tipul flutter pentru toate vitezele $\lambda \geqslant \lambda_{*fl}$, iar λ_{*fl} reprezintă viteza critică de pierdere a stabilităţii de tipul flutter (definită pentru cazul ε_T neglijabil de mic).

Punînd condiţia de fuzionare a frecvenţelor $\omega^2_{(1)}$ şi $\omega^2_{(2)}$, se obţine viteza şi frecvenţa critică de flutter, definită de

$$\lambda_{*fl} = \frac{1}{4b_p b_{p+1}} (\omega^2_{p+1} - \omega^2_p)^2,$$
$$\omega^2_* = \frac{1}{2} (\omega^2_{p+1} + \omega^2_p). \tag{36}$$

Corespunzînd lui $\omega = 0$, din (35) se determină ecuaţia de pierdere a stabilităţii prin divergenţă

$$\lambda^2 b_p b_{p+1} + \omega^2_p \omega^2_{p+1} = 0. \tag{37}$$

Relaţiile (35), (36), (37), care pot fi specializate pentru cele două cazuri de condiţii la limită A şi B stau la baza studiului stabilităţii aeroelastice a benzii sandviş infinite. În cele ce urmează vom exprima dependenţa mărimilor critice în funcţie de parametrul k_0^2 (parametru k_0^2 definit prin (20) corespunde teoriei de încovoiere a plăcii sandviş cu *inimă rigidă;* în cazul în care în (20) se consideră $\overline{E} \to 0$, se obţine expresia lui k_0^2 corespunzînd teoriei plăcilor sandviş cu *inimă uşoară*; considerînd în (20) $h' \to 0$, se obţine expresia acestui parametru, care este propriu teoriei de încovoiere a plăcilor omogene, efectul deformaţiilor de forfecare transversale fiind luat în considerare.

În fine, pentru a pune în lumină influenţa numărului Alfvèn asupra vitezei critice de flutter, din (20), $(15)_2$, (3) se obţine dependenţa

$$h_* = \frac{M^2_\infty}{\lambda_*(M^2_\infty - 1)^{1/2}} \left(1 + \frac{M^2_\infty - 2}{m^2} + \frac{1 - M^2_\infty}{m^4}\right)^{1/2}, \tag{38}$$

de unde se determină influenţa numărului Alfvèn asupra vitezei critice de flutter.

5. EXEMPLU NUMERIC

În cadrul prezentului paragraf, pe baza unor rezultate numerice, vom pune în lumină influenţa parametrilor k_0^2 şi R_{11} asupra mărimilor critice (de flutter şi devergenţă).

În acest scop vom da relaţiile cele mai importante corespunzînd cazurilor de rezemare A şi B. Relaţiile prezentate se obţin particularizînd relaţiile generale deduse în § 4, prin luarea în considerare a primelor două moduri de vibraţii şi considerînd coeficientul de amortizare ε_T neglijabil de mic.

Avem astfel în cazul A

$$\lambda = \frac{3}{8}\left[(\omega^2 - \omega_1^2)\,(\omega_2^2 - \omega^2)\right]^{1/2}, \tag{39}$$

$$\lambda_{*div} = \frac{3}{8}\left[\left(R_{11} - \frac{1}{1+k_0^2}\right)\left(\frac{16}{1+4k_0^2} - 4R_{11}\right)\right]^{1/2} \tag{40}$$

Din condiția $\frac{\partial \lambda_{*div}}{\partial R_{11}}$ se deduc cu coordonatele $(\overline{\lambda}, \overline{R}_{11})$ ale punctului-limită

$$\overline{\lambda} = \frac{9}{8(1+k_0^2)\,(1+4k_0^2)},$$

$$\overline{R}_{11} = \frac{5+4k_0^2}{2(1+k_7^2)\,(1+4k_0^2)}, \tag{41}$$

$$\lambda_{*fl} = \frac{3}{16}\left[\frac{16}{1+4k_0^2} - \frac{1}{1+k_0^2} - 3R_{11}\right],$$

$$\omega_1^2 = \frac{1}{1+k_0^2} - R_{11}; \quad \omega_2^2 = \frac{16}{1+4k_0^2} - 4R_{11}, \tag{42}$$

iar în cazul B

$$\lambda = \frac{15}{64 \times 2^{1/2}}\,\frac{[(3+4k_0^2)\,(1+5k_0^2)]}{(1+4k_0^2)}\,[(\omega_1^2 - \omega^2)\,(\omega^2 - \omega_2^2)]^{1/2}, \tag{43}$$

$$\lambda_{*div} = \frac{15}{32 \times 2^{1/2}}\,\frac{1}{1+4k_0^2}\,[[(1+4k_0^2)\,R_{11} -$$

$$-4]\,[41 - R_{11}(5+41k_0^2)]]^{1/2},$$

cu coordonatele punctului-limită $(\overline{\lambda}, \overline{R}_{11})$

$$\overline{\lambda} = \frac{15}{32 \times 2^{1/2}}\,\frac{1}{1+4k_0^2}\left[\left(\frac{61+328k_0^2}{2(5+41k_0^2)} - 4\right)\left(41 - \frac{61+328k_0^2}{2(1+4k_0^2)}\right)\right]^{1/2},$$

$$\overline{R}_{11} = \frac{61+328k_0^2}{2(1+4k_0^2)\,(5+41k_0^2)},$$

$$\lambda_{*fl} = \frac{15}{128 \times 2^{1/2}}\,\frac{[(3+4k_0^2)\,(1+5k_0^2)]^{1/2}}{1+4k_0^2}\,(\omega_2^2 - \omega_1^2),$$

cu

$$\omega_1^2 = \frac{4\,[4 - R_{11}(1 + 4\,k_0^2)]}{3 + 4k_0^2},$$

$$\omega_2^2 = \frac{41 - R_{11}\,(5 + 41k_0^2)}{1 + 5k_0^2}.$$

În baza relaţiilor (41) şi (45), respectiv pentru cazul A şi B, se deduce dependenţa $\lambda_{*n} \sim k_0^2$ (fig. 3) şi $\lambda_{*n} \sim R_{11}$ (fig. 4).

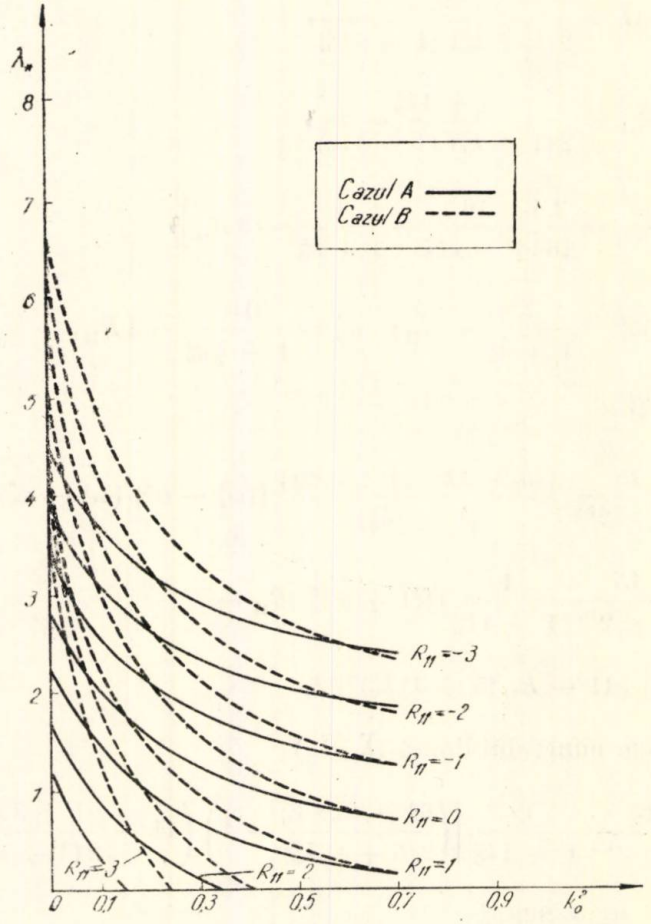


Fig. 3

În figura 5*b c* este reprezentat în planul coordonatelor (λ, R_{11}) domeniul de stabilitate a formei plane de echilibru a structurii sandviş. Acest domeniu mărginit de acele coordonate, de porţiunea *BC* a curbei

CBD și dreapta AB (vezi fig. 5*a*), rezultă reprezentînd în planul parametrilor menționați ecuațiile (40), (41) și (44), (45), corespunzînd cazului A, respectiv B. Curba BC corespunde frontierei de pierdere statice a stabilității (prin divergență); iar dreapta AB frontierei de pierdere dinamice a stabilității (prin flutter).

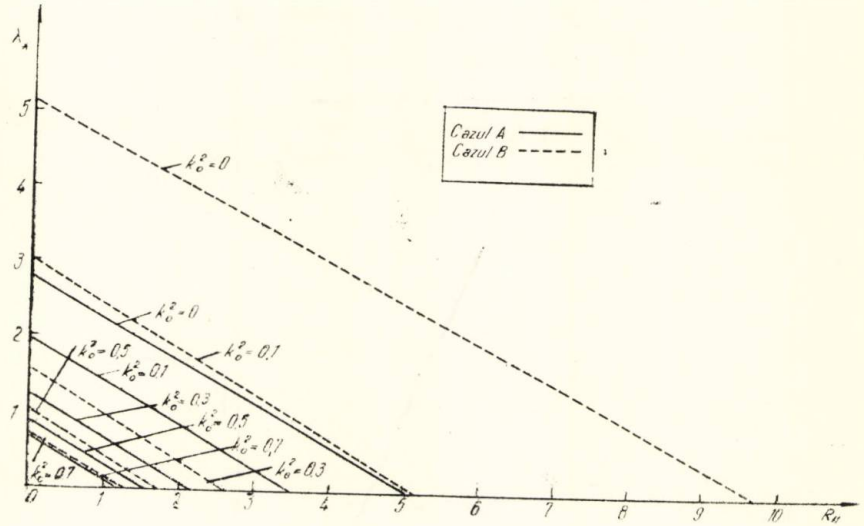


Fig. 4

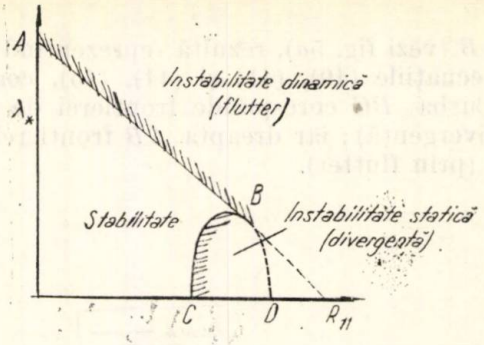
În figura 6*a* — *d*, folosind relațiile (39) și (43), este reprezentată dependența $\omega^2 \sim \lambda$ pentru diverse valori ale lui k_0^2 și R_{11}.

În fine, figura 7 *a* — *f* reprezintă, bazat pe relația (38), dependența $h_* \sim M_\infty$ pentru diverse valori ale numărului Alfvèn și ale parametrilor k_0^2 și R_{11}.

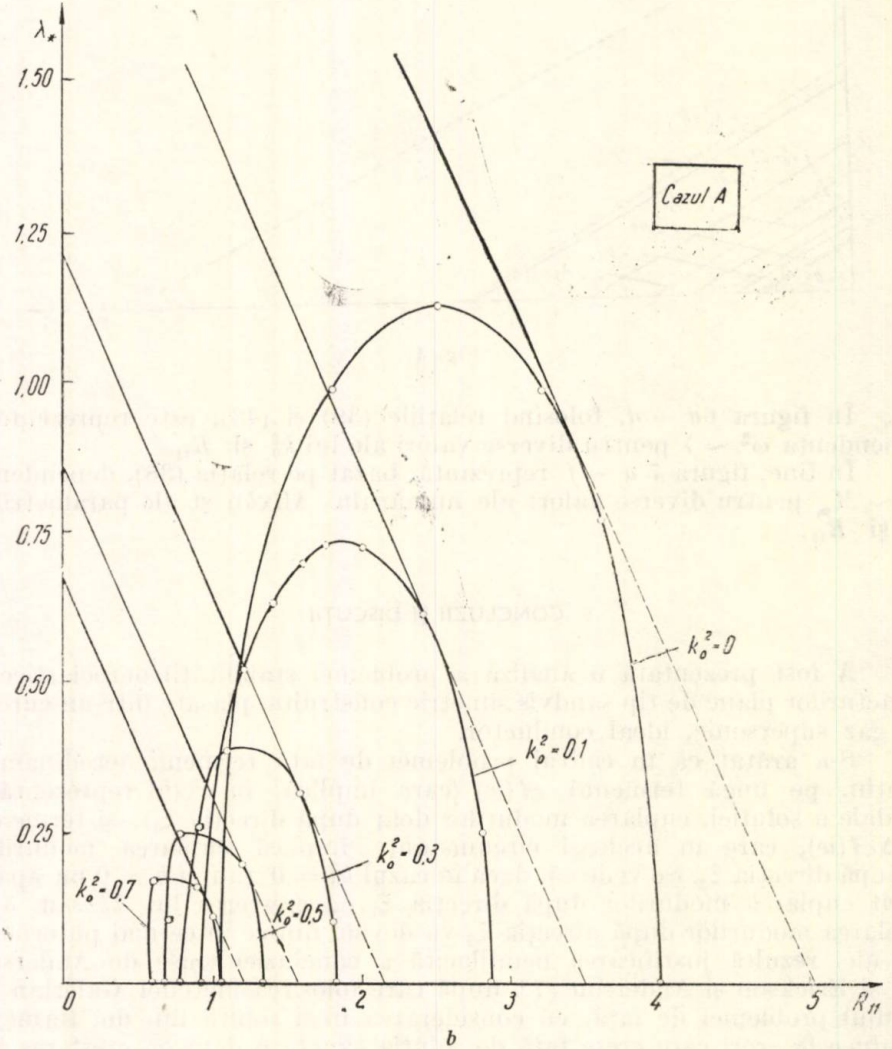
6. CONCLUZII ȘI DISCUȚII

A fost prezentată o analiză a problemei stabilității aeroelastice a structurilor plane de tip sandviș simetric construite, plasate într-un curent de gaz supersonic, ideal conductor.

S-a arătat că în cadrul problemei de față termenii aerodinamici conțin, pe lîngă termenul $\mathcal{A}(w)$ (care implică, în cazul reprezentării modale a soluției, cuplarea modurilor doar după direcția ξ_1), și termenul $k^2 \Delta\mathcal{A}(w)$, care în aceleași circumstanțe implică cuplarea modurilor și după direcția ξ_2. Se vede că, dacă în cazul $k_0^2 = 0$ sau $a/b = 0$ nu apare decît cuplarea modurilor după direcția ξ_1 cu creșterea lui k_0^2 sau a/b, cuplarea modurilor după direcția ξ_2 va deveni din ce în ce mai puternică. De aici rezultă justificarea nemijlocită a concluziei trase de Anderson [6] și Erickson și Anderson [7], după care folosirea metodei Galerkin în studiul problemei de față, cu considerarea unei soluții din doi termeni, conduce la erori care cresc față de soluția exactă o dată cu creșterea lui k_0^2 sau a/b.

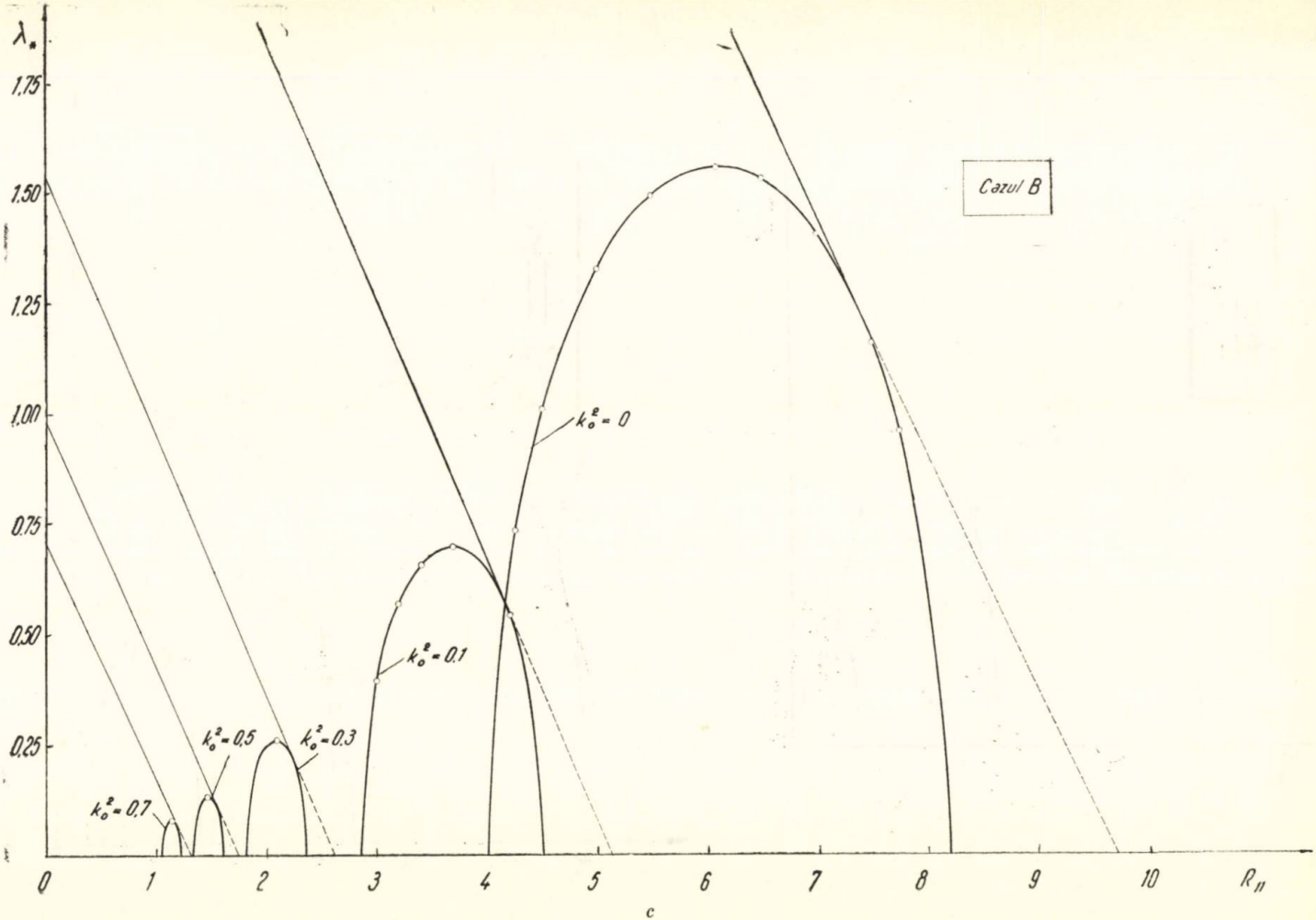

A
λ_*
Instabilitate dinamică
(flutter)
B
Stabilitate
Instabilitate statică
(divergență)
C
D
R_{11}

a


λ_*
1,50
1,25
1,00
0,75
0,50
0,25
Cazul A
$k_0^2=0$
$k_0^2=0.1$
$k_0^2=0.3$
$k_0^2=0.5$
$k_0^2=0.7$
0
1
2
3
4
5
R_{11}

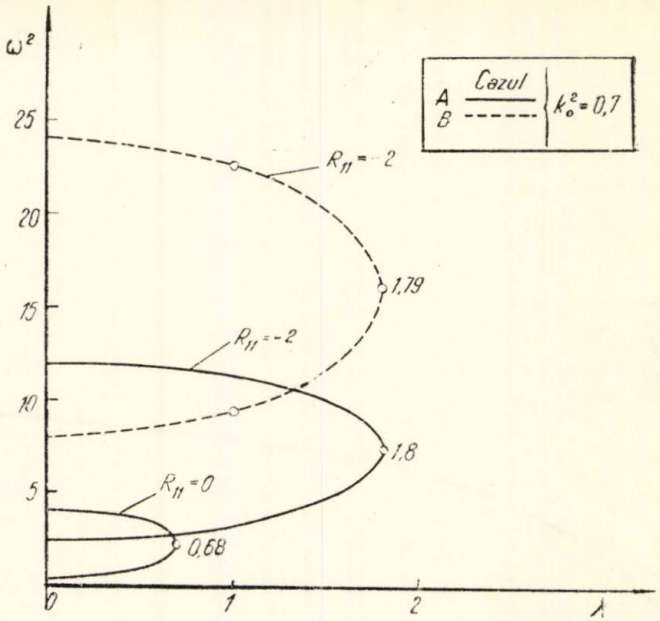
b

Fig. 5 *a* şi *b*

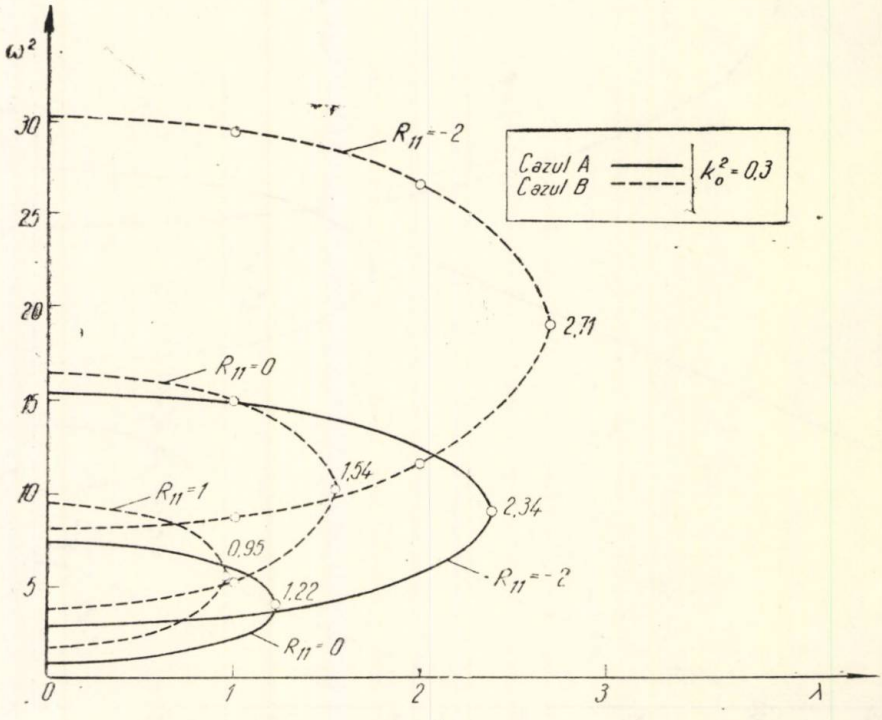

λ*
1.75
1.50
1.25
1.00
0.75
0.50
0.25
0
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
R_II
Cəzul B
k₀² = 0
k₀² = 0.1
k₀² = 0.3
k₀² = 0.5
k₀² = 0.7

c

Fig. 5 c

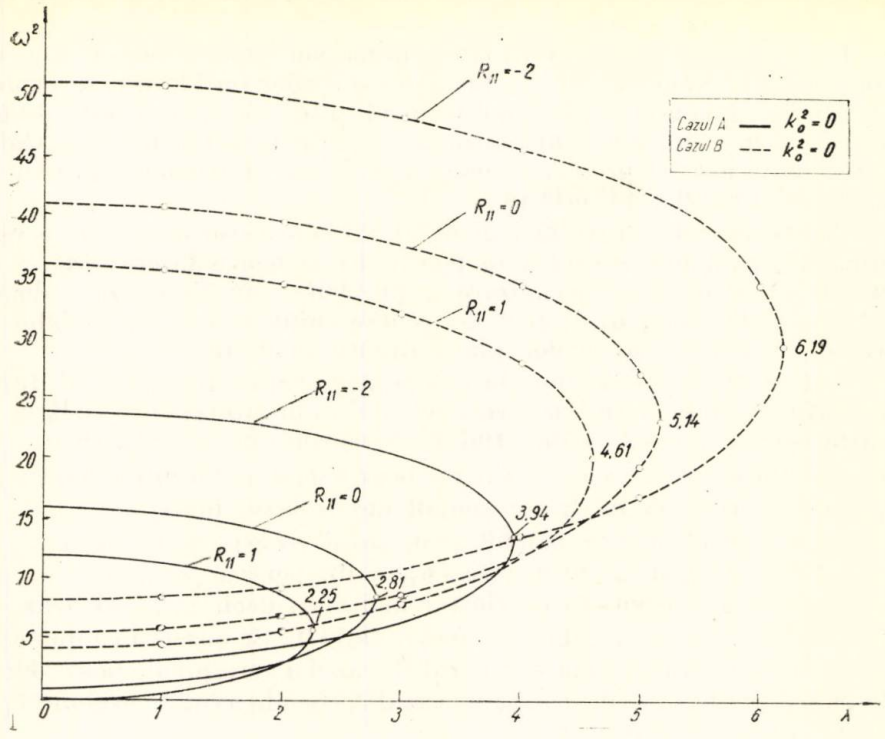

ω²
25
20
15
10
5
0
1
2
λ
Cazul
A
B
k₀² = 0,7
R₁₁ = -2
1,79
R₁₁ = -2
1,8
R₁₁ = 0
0,68

a

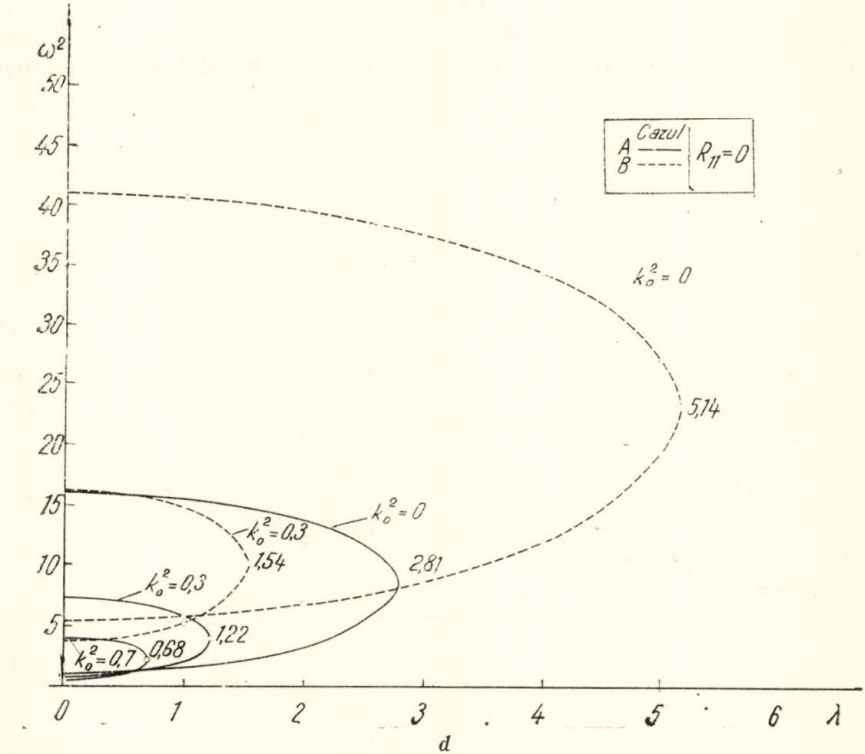

ω²
30
25
20
15
10
5
0
1
2
3
λ
Cazul A
Cazul B
k₀² = 0,3
R₁₁ = -2
2,71
R₁₁ = 0
1,54
R₁₁ = 1
2,34
0,95
1,22
R₁₁ = -2
R₁₁ = 0

b

Fig. 6 *a* și *b*


ω²
Cazul A —— k₀² = 0
Cazul B --- k₀² = 0
R₁₁ = -2
R₁₁ = 0
R₁₁ = 1
R₁₁ = -2
R₁₁ = 0
R₁₁ = 1
6,19
5,14
4,61
3,94
2,81
2,25
λ

c


ω²
Cazul
A
B
R₁₁ = 0
k₀² = 0
5,14
k₀² = 0
k₀² = 0,3
1,54
2,81
k₀² = 0,3
1,22
k₀² = 0,7
0,68
λ

d

Fig. 6 c şi d

Pentru evitarea unor eventuale confuzii vom înlocui formularea concluziei trase de Anderson [6] și Erickson și Anderson [7] (apare evident în acest sens că considerarea a doi termeni în dezvoltarea (9) este perfect justificabilă în cazul $a/b = 0$), afirmînd că, prin folosirea metodei Galerkin în studiul acestei probleme, funcția $w(\xi_1, \xi_2, t)$ trebuie reprezentată conform relației (9) și nu prin (9′).

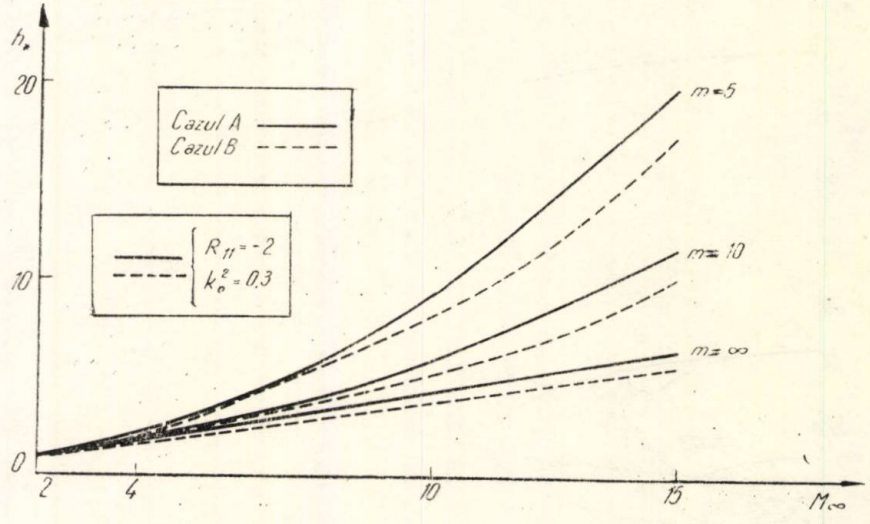
Pentru a evita dezvoltări deosebit de laborioase în cadrul acestui studiu, analiza a fost specializată pentru cazul benzii infinite ($a/b = 0$). Menționăm că această specializare a problemei nu limitează valoarea concluziilor obținute; din punct de vedere calitativ ele sînt valabile și în cazul problemei panourilor plane dreptunghiulare.

În figurile 3 și 4 se pune în evidență faptul că frontiera de flutter este foarte sensibilă la variația parametrului k_0^2 în intervalul $0 < k_0^2 < 0{,}7$ (această concluzie reiese și din studiile întreprinse în [3], [4], [9]).

Rezultă de asemenea că în cazul benzii sandviș infinite comprimate ($R_{11} > 0$), la creșterea lui k_0^2 corespunde descreșterea lui λ_{*fl}.

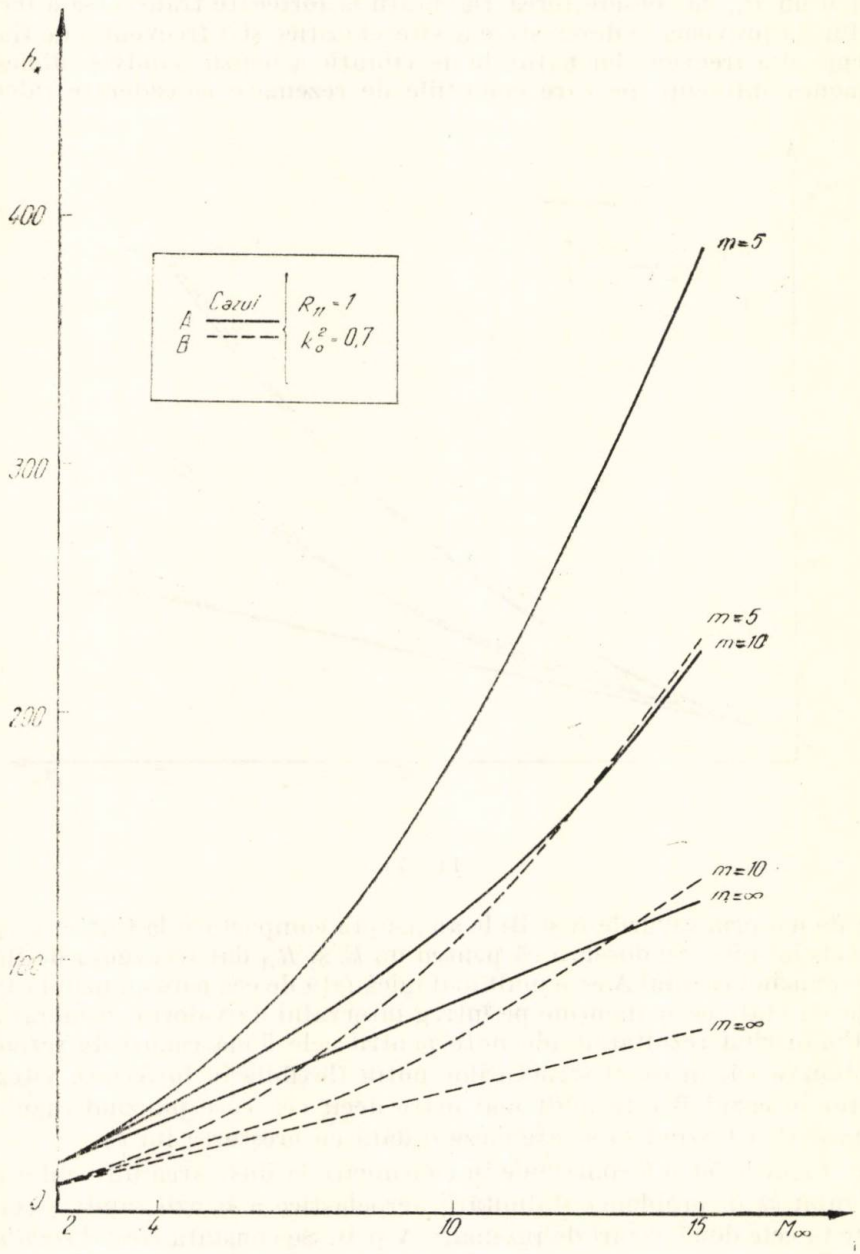
Același rezultat este valabil și în cazul corespunzînd lui $R_{11} = 0$. În cazul benzii sandviș tensionate ($R_{11} < 0$), pentru parametrii $k_0^2 > 0$ corespund valori ale vitezei de flutter mai mari decît în cazul benzii de geometrie identică, dar rigidă în forfecare ($k_0^2 = 0$). Se observă că domeniul anteflutter este mult mai mare în cazul B (cazul a corespunde benzii încastrate pe marginile $\xi_1 = 0$, a) față de cazul A (banda avînd marginile $\xi_1 = 0$, a simplu rezemate).

Această caracteristică, manifestată puternic în cazul benzii rigide în forfecare, se atenuează pe măsura creșterii lui k_0^2, astfel că în jurul valorii lui $k_0^2 = 0{,}7$ domeniul anteflutter rezultînd în cazul A practic coincide cu cel din cazul B.



a

Fig. 7 a

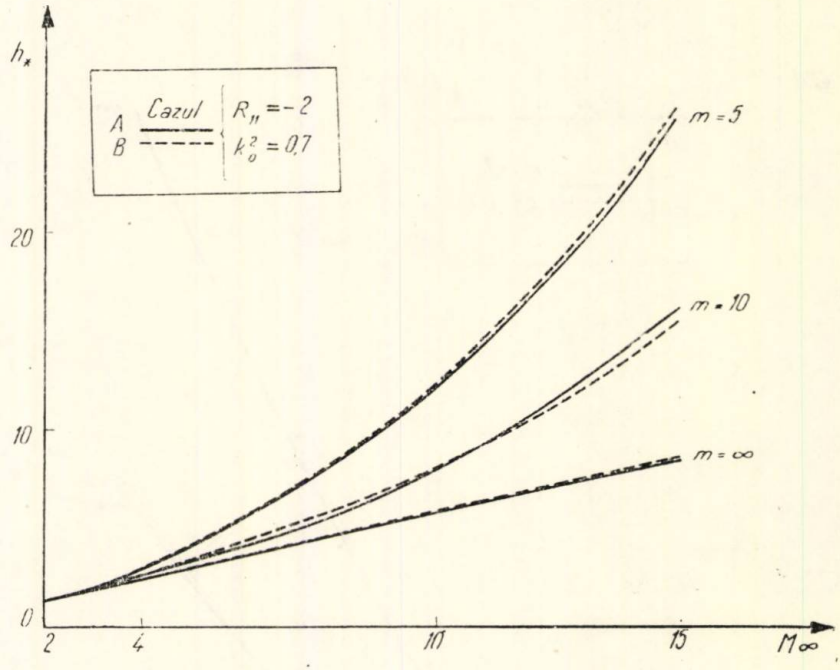


h_*
400
300
200
100
0
Cazul
A
B
$R_{11} = 1$
$k_0^2 = 0,7$
m=5
m=5
m=10
m=10
m=∞
m=∞
2
4
10
15
M_∞

b

Fig. 7 b

Figurile 6*a*—*d* pun de asemenea în lumină influența diverșilor parametri asupra comportării la flutter a benzii sandviș infinite. Se constată că pentru un R_{11} dat descreșterea rigidității la forfecare transversală (creșterea lui k_0^2) provoacă o descreștere a vitezei critice și a frecvenței de flutter, precum și a frecvențelor naturale de vibrație a benzii sandviș. Reiese de asemenea influența pe care condițiile de rezemare considerate (identifi-

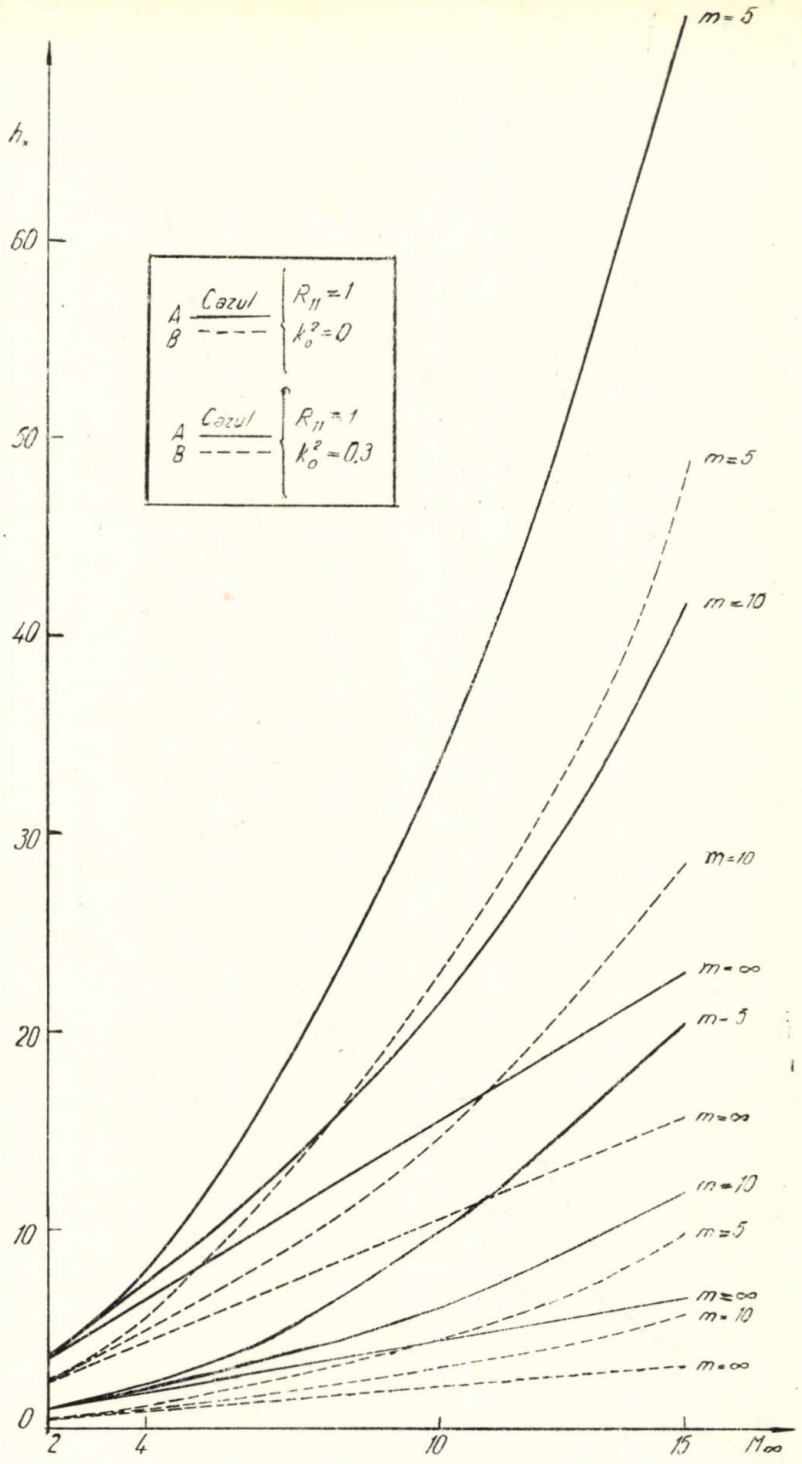


c

Fig. 7 c

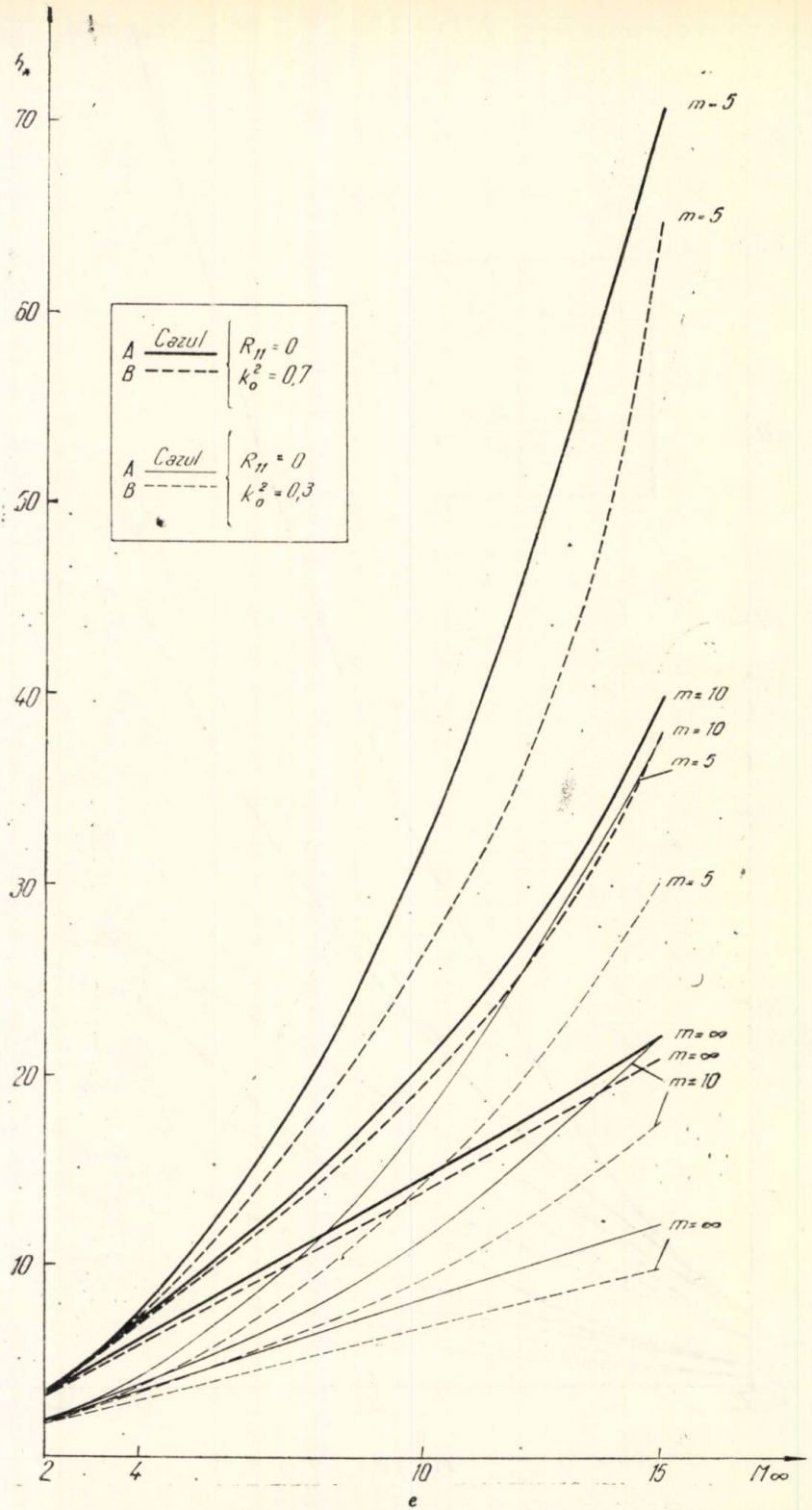
cate de noi prin cazurile A și B) le au asupra comportării la flutter a benzii sandviș infinite. Se observă că pentru un k_0^2 și R_{11} dat frecvența de flutter corespunzînd cazului A este mult mai mică față de cea corespunzînd cazului B, proprietate ce se menține pe întreg intervalul de valori considerat a lui k_0^2. Comparînd rezultatele obținute pentru cele două cazuri de rezemare, se observă că, în cazul structurilor puțin flexibile în forfecare, viteza de flutter în cazul B este mult mai mare decît cea corespunzînd cazului A, proprietatea tinzînd să se atenueze o dată cu creșterea lui k_0^2.

Figurile 5*a* și *b* contribuie în continuare la ilustrarea influenței parametrului k_0^2 în problema stabilității aeroelastice a benzii sandviș comprimate în cele două cazuri de rezemare A și B. Se constată *efectul stabilizator* al prezenței curentului de gaz în ceea ce privește pierderea de stabilitate prin divergență (fapt remarcat prin aceea că într-o anumită zonă de viteze tensiunea de compresiune critică R_{11} a panoului plasat în curentul de gaz este mai mare decît în cazul absenței curentului de gaz).


h_*
60
50
40
30
20
10
0
2
4
10
15
M_∞
A Cazul $R_{11}=1$ $k_0^2=0$
B
A Cazul $R_{11}=1$ $k_0^2=0.3$
B
m=5
m=5
m=10
m=10
m=∞
m=5
m=∞
m=10
m=5
m=∞
m=10
m=∞

d

Fig. 7 *d*


h_*
70
60
50
40
30
20
10
2
4
10
15
M_∞
A Cazul $R_{11} = 0$
B $k_0^2 = 0{,}7$
A Cazul $R_{11} = 0$
B $k_0^2 = 0{,}3$
m = 5
m = 5
m = 10
m = 10
m = 5
m = 5
m = ∞
m = ∞
m = 10
m = ∞

e

Fig. 7 e

Această proprietate se menține valabilă pentru toate valorile lui k_0^2 și în toate cazurile de rezemare considerate. Totuși, proprietatea apare mai pregnant în cazul benzii puțin flexibile în forfecare transversală.

Din figurile 7a — f se reobține concluzia formulată de Lisunov [16] și Efremov [9] după care la creșterea cîmpului magnetic (diminuarea numă-

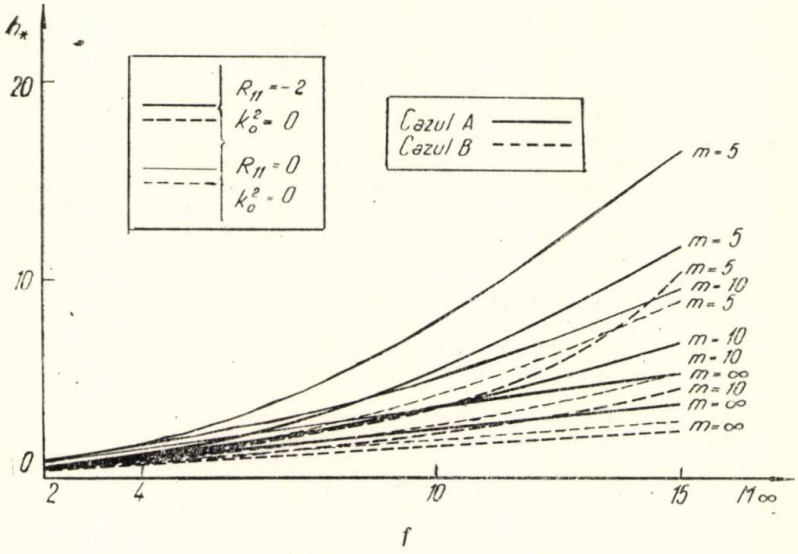


Fig. 7 *f*

rului Alfvèn) corespunde diminuării vitezei critice de flutter, proprietate valabilă pentru toate valorile parametrilor k_0^2 și R_{11} considerați. Corespunzător unui număr Alfvèn m și unui parametru R_{11} dat, o dată cu scăderea lui k_0^2 rezultă o creștere a vitezei critice de flutter, creștere mai pronunțată în cazul de rezemare B față de cazul A.

Figura 7*c* reflectă limita de variație a parametrilor R_{11} și k_0^2, în cadrul cărora pentru valori date ale numărului Alfvèn viteza de flutter din cazul A coincide cu cea rezultînd în cazul B.

Primită la redacție la 3 iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. S. A. Ambarțumian, J. E. Bagdasarian, *Ob ustoicivosti ortotropnih plastinok, obtekaemih sverhzvukovim potokom gaza*, Izv. AN SSSR, OTN, *5* (1961).
2. G. E, Bagdasarian, *Ob ustoicivosti trehsloinoi ortotropnoi plastinki v sverhzvukovom potoke gaza*, Izv. AN Arm. SSR, Fiz.-Mat. nauki **14**, *5*, 21—30 (1961).
3. E. I. Grigoliuk, D. G. Mihailov, *Trehsloinaia preamougolnaia plastinka v sverhzvukovom potoke gaza*, Dokl. AN SSSR, **158**, *3*, 554—557 (1964).
4. J. A. McElman, *Flutter of Curved and Plat Sandwich Panels Subjected to Supersonic Flow*, NASA TN D—2192, April 1964.
5. E. I. Grigoliuk, A. P. Mihailov, *Flater trehsloinoi krugovoi koniceskoi obolociki*, Dokl. AN SSSR, **163**, *5*, 1100—1103 (1965).
6. M. S. Anderson, *Flutter of Sandwich Panels at Supersonic Speeds*, Virginia Polytechnic Institute, Ph. D., 1965.

7. L. L. Erickson, M. S. Anderson, *Supersonic Flutter of Simply Supported Isotropic Sandwich Panels*, NASA TN D-3171, April 1966.
8. A. I. Smirnov, *Sverhzvukovoi flatter trehsloinih plastin*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **183**, *3*, 540–543 (1968).
9. E. A. Efremov, *Ustoicivost trehsloinih plastin v potoke sjimaemoi jidkosti v prisustvii magnitnogo polea*, Ghidroaeromehanika i teoria uprugosti, Izd. Gosud. Univ. imeni Gorkogo, Harkov, *9*, 74–83 (1968).
10. A. I. Smirnov, *Sobstvennie kolebania i flatter trehsloinih ţilindriceskih obolocek v sverhzvukovom potoke gaza*, Dokl. Akad. Nauk SSSR, **186**, *3*, 533–536 (1969).
11. S. A. Ambarţumian, *K teorii izghiba anizotropnnih plastinok i pologhih obolocek*, Prikladnaia matem. i mehanika, **24**, *2*, 350–360 (1962).
12. L. Librescu, *On the Theory of Anisotropic Elastic Shells and Plates*; *Internat*, Journal of Solids and Structures, *3*, 53–68 (1967).
13. L. Librescu, *The Elasto-Kinetic Problems in the Theory of Anisotropic Shells and Plates*, Part II, *Plates Theory*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **7**, *3*, (1969).
14. Cheng-Ih Wu, J. R. Winson, *Influence of Large Amplitudes, Transverse Shear Deformation and Rotatory Inertia on Lateral Vibrations of Transversely Isotropic Plates*, Journal of Applied Mechanics. Trans. of the ASME, June, 254–260 (1969).
15. W. R. Sears, *Magnetohydrodynamic Effects in Aerodynamic Flows*, A.R.S. Journal, **29**, *6*, 397–406 (1969).
16. A.D. Lisunov, *Flatter paneli v potoke sjimaemoi prohodiaşcei jidkosti v prisutsvii magnitnogo polia*, Priklad. mehanika i tehniceskaia fizika (PMTF), *4*, 65–67 (1960).
17. L. Librescu, *On a Geometrically Nonlinear Theory for Elastic Anisotropic Sandwich- Type Plates*, Rev. Roum. Sci. Techn. Série de Mécanique Appliquée, **15**, *2*, 323–339 (1970).
18. E. I. Grigoliuk, P. P. Ciulkov, *Kriticeskie nagruzki trehsloinih ţilindriceskih i koniceskih obolocek*, Novosibirsk, Zapadno-Sibirskoe knijnoe Izd., 1966.
19. E.I. Grigoliuk, P. P. Ciulkov, *K rascetu trehsloinih plastin s jestkim zapolnitelem*, Izv. AN SSSR, Mehan. i maşinostroenie, *1* (1964).
19'. V. V. Bolotin, *Temperaturnie vipucivania plastin i pologhih obolocek v sverhzvukovom potoke gaza*, Sbornik „Rasceti na procinost" *6*, 190–215 (1960).
20. L. Librescu, *Aeroelastic Stability of Orthotropic Heterogeneous Thin Panels in the Vicinity of the Flutter Critical Boundary* (Part I), Journal de Mécanique, **4**, *1*, (1965).
21. L. Librescu, *Statica şi Dinamica Structurilor Elastice, Anizotrope şi Eterogene*, Edit. Acad., 1969.
22. A. A. Movcian, *O kolebaniiah plastinki, dvijuşceisea v gaze*, Priklad. mat. i mehan., **20**, *2*, 221–222 (1956).
23. A. A. Movcian, *Ob ustoicivosti panelei, dvijuşcihsea v gaze*, Priklad. mat. i mehan., **21**, *2*, 231–243 (1957).
24. V. V. Bolotin, *Nekonservativnie zadaci teorii uprugoi ustoicivosti*, Gosud. Izd. Fiz.-Mat. Literaturi, Moskva, 1961.
25. R. D. Stepanov, *O flattere ţilindriceskih obolocek o panelei, dvijuşcihsea v potoke gaza*, Priklad. mat. i mehan. **21**, *5*, 1957.
26. H. Krumhaar, *Supersonic Flutter of Circular Cylindrical Shell of Finite Length in an Axisymmetrical Mode*, Int. J. Solids Structures, *1*, 23–57 (1965).
27. H. Leipholz, *Ueber den Einfluss der Dämfung bei nichtkonservativen Stabilitätsproblemen elastischer Stäbe*, Ingenieur-Archiv, **33**, *5*, 308–321 (1969).
28. H. Leipholz, *Grundzüge einer Stabilitätstheorie für elastischer Systeme unter nichtkonservativen Belastung*, Ingenieur-Archiv, **4**, *1*, 56–68 (1965).

DETERMINAREA SARCINII DE STABILIZARE A DEFORMAȚIILOR STRUCTURILOR FORMATE DIN BARE SUPUSE LA SARCINI REPETATE

de S. RĂUTU, VETURIA CHIROIU, V. BĂNUȚ
Centrul de mecanică a solidelor

Se prezintă o metodă de automatizare a calculului pentru determinarea sarcinii de stabilizare a deformațiilor structurilor formate din bare cu moment de inerție constant supus acțiunii sistemelor de forțe concentrate, fiecare variind independent, structura lucrînd în domeniul elasto-plastic.

1. INTRODUCERE

Metodele de determinare a sarcinii de rupere a structurilor static nedeterminate supuse la acțiunea sarcinilor concentrate funcție de un singur parametru, cu neglijarea efectului forțelor axiale și a forțelor tăietoare asupra capacității portante a structurii, au fost pînă în prezent verificate pentru o serie de structuri executate din oțel [1].

Totuși, două aspecte legate de calculul structurilor formate din bare în domeniul elasto-plastic rămîn încă nesoluționate. Primul aspect se referă la studiul instabilității acestor sisteme, iar al doilea aspect la faptul că sarcina de rupere în domeniul plastic nu dă indicații asupra comportării structurii la solicitările reale, variind independent și acționînd în mod repetat structura. Se pune întrebarea dacă coeficientul de siguranță determinat prin raportare la sarcina de rupere calculată pe baza teoriei plastice simple este un coeficient de siguranță efectiv sau trebuie privit cu oarecare rezerve în cazul solicitărilor reale.

S-a constatat că solicitările repetate produse de un sistem de forțe variind independent și acționînd în cicluri complete pot provoca ruperea plastică a structurii (pierderea capacității portante) pentru o valoare a sarcinilor mai mică decît sarcina de rupere [4] — [6], [8].

Această stare poate să apară fie sub forma unor deformații plastice alternative (în limba engleză *alternating plasticity*), fie sub forma creșterii progresive a deformațiilor plastice (în engleză *incremental collapse*).

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 1, 1971, P. 197–207

Primul fenomen va fi denumit *plasticitate alternativă*, iar al doilea *instabilitate a deformațiilor*.

Plasticitatea alternativă apare atunci cînd o articulație plastică se rotește alternativ într-un sens sau altul, astfel încît în fibrele extreme ale secțiunii transversale a elementelor structurii apar alternativ tensiuni de întindere și tensiuni de compresiune.

O stare de plasticitate alternativă poate duce la ruperea structurii. Dar, în timp ce ruperea prin oboseală a unei structuri se produce pentru un număr de solicitări alternate de ordinul milioanelor de ori, plasticitatea alternativă accelerează ruperea, aceasta producîndu-se pentru un număr de încărcări de ordinul sutelor sau al miilor de ori.

Fenomenul de instabilitate a deformațiilor corespunde unei creșteri gradate în același sens a deformațiilor plastice cînd sarcinile cresc peste o anumită valoare maximă, numită sarcina de stabilizare a deformațiilor.

Se consideră o structură solicitată de un sistem de forțe, fiecare variind independent, după o lege proprie, în interiorul unui domeniu prescris, a cărui limită superioară este cuprinsă între sarcina elastică maximă și sarcina-limită, calculată conform teoriei plastice simple. Sub acțiunea repetată, individuală sau în combinații, a sarcinilor reale, în anumite secțiuni ale structurii apar deformații plastice. Existența acestor deformații plastice au drept efect apariția de momente încovoietoare reziduale în autoechilibru. Dacă nici o sarcină care solicită structura nu depășește valoarea maximă a domeniului său, deformațiile plastice la solicitări repetate se atenuează treptat și în final se opresc. Se ajunge astfel la o stare de tensiune interioară, care la următoarele încărcări ale structurii determină numai schimbări de natură elastică a momentelor încovoietoare.

De aceea, dacă într-o structură supusă acțiunii unor cicluri de încărcări repetate cu forțe variind fiecare independent în domeniul propriu apare o distribuție de momente reziduale care face ca structura să se comporte ulterior elastic, se spune că deformațiile structurii s-au stabilizat.

Valoarea parametrului prin intermediul căruia se pot exprima limitele maxime ale domeniilor tuturor sarcinilor sistemului care determină această stare de stabilizare a deformațiilor se numește *sarcină de stabilizare*. Dacă sarcinile depășesc valoarea sarcinii de stabilizare, deformațiile cresc mult și structura se distruge.

2. CALCULUL SARCINII DE STABILIZARE

Analiza modului de determinare a sarcinii de stabilizare a deformațiilor este mai dificilă decît determinarea sarcinii de rupere, deoarece fenomenul de stabilizare este un fenomen esențial elastic. Ea a fost determinată pentru cazul structurilor cu moment de inerție constant și se bazează pe următoarele considerente. Sarcinile care solicită separat sau sub forma oricărei combinații posibile structura nu sînt funcție de un singur parametru. Forțele au fiecare un domeniu propriu de variație în interiorul căruia își pot atinge valoarea maximă, dar nu obligatoriu în același timp. Valorile maxime pe care le ating sarcinile în momentul producerii stabilizării deformațiilor nu sînt inițial cunoscute și problema care se pune este peterminarea acestei limite superioare a domeniilor de variație a forțelor.

Așa cum a propus și Bleich [2], se poate considera că forțele variază pînă la o valoare maximă oarecare și se caută să se stabilească un coeficient unic de multiplicare a tuturor domeniilor care determină extinderea acestor domenii pînă la limita apariției fenomenului de stabilizare. Acest coeficient este coeficientul de stabilizare.

Conform celor arătate mai înainte, apariția fenomenului de stabilizare a deformațiilor este în strînsă legătură cu existența unei diagrame de momente reziduale m, inițial necunoscută.

Alegînd o diagramă oarecare m, aceasta poate conduce la stabilizarea deformațiilor dacă sînt satisfăcute următoarele condiții:

a) momentele reziduale să fie în autoechilibru;

b) suprapunînd peste această distribuție de momente reziduale m orice distribuție de momente elastice M corespunzătoare tuturor combinațiilor posibile a solicitărilor exterioare, momentele încovoietoare rezultante să nu depășească în nici o secțiune a structurii momentul plastic al secțiunii respective în valoare absolută;

c) dacă sarcinile variază în domeniul lor, amplitudinea variației ΔM a momentului elastic nu poate întrece în valoare absolută $2M_{el}$, unde M_{el} este momentul încovoietor elastic capabil al secțiunii respective.

Matematic, condițiile necesare și suficiente pentru stabilizare se traduc sub forma

$$\begin{aligned} m + M_{\max} &\leqslant M_{pl}, \\ m + M_{\min} &\geqslant -M_{pl}, \\ M_{\max} - M_{\min} &\leqslant 2M_{el}, \end{aligned} \tag{1}$$

unde $M_{\max}$, $M_{\min}$ sînt valorile extreme ale momentelor încovoietoare elastice produse în secțiunea curentă pentru oricare dintre stările de încărcare considerate.

Momentele reziduale m care satisfac acestei trei condiții reprezintă o stare de stabilizare pentru domeniul de variație al sarcinilor.

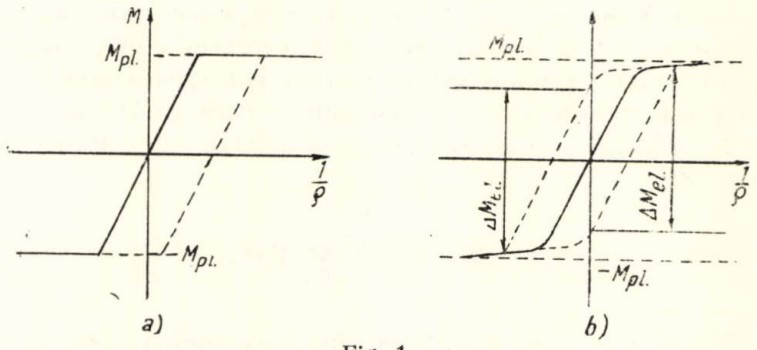


Fig. 1

Teorema fundamentală a calculului sarcinii de stabilizare a deformațiilor afirmă că condițiile necesare pentru stabilizare sînt în același timp și suficiente.

Bleich [2] a arătat că primele două condiții sînt suficiente pentru stabilizarea deformațiilor dacă se consideră diagrama moment-curbură idealizată din figura 1*a*.

Neal [4], luînd în considerație fenomenul real de plasticizare a barelor (existența unei zone elasto-plastice) și faptul că structura se comportă elastic ulterior apariției fenomenului de stabilizare, a propus ca relația moment-curbură să fie luată conform diagramei reprezentate în figura 1*b*.

Domeniul maxim în care se extinde comportarea elastică a structurii este în acest caz $\Delta M = 2M_{el}$, fără a lua în considerație fenomenul Bauschinger, care ar conduce la micșorarea domeniului elastic datorită faptului că, la diferitele combinații de încărcări, în unele secțiuni pot apărea momente elastice de semne diferite. Aceste considerații au condus la necesitatea introducerii celei de-a treia condiții de mai sus.

3. CALCULUL AUTOMAT AL SARCINII DE STABILIZARE

Sarcina de stabilizare a deformațiilor a fost determinată pentru cîteva structuri simple cu moment de inerție constant de către unii cercetători [2] — [5] prin diverse încercări de a găsi o distribuție de momente reziduale m pentru care cantitățile $m + M_{\max}$ și $m + M_{\min}$ să prezinte valori maxime egale într-un număr de secțiuni, astfel încît inserarea de articulații în aceste secțiuni să transforme structura sau o parte a sa în mecanism.

Pentru structuri multiplu static nedeterminate, acest procedeu devine practic imposibil. În continuare se prezintă o metodă de automatizare a calculului sarcinii de stabilizare pentru orice fel de structură alcătuită din bare drepte și supusă acțiunii sarcinilor repetate, variind independent.

Fie $P_k (k = 1, \ldots, p)$ sarcinile concentrate care solicită structura individual sau în combinații și fie $P_{k\min}$ și $P_{k\max}$ limitele domeniului lor de variație. În cele mai multe cazuri, $P_{k\min} = 0$ și $P_{k\max} = \alpha_k P$, cu α_k numere reale. Valoarea $P_{k\max}$ trebuie să fie cuprinsă între sarcina maximă elastică și sarcina de rupere, calculată conform teoriei plastice simple.

Dacă r sînt secțiunile critice în care pot apărea articulații plastice și dacă n este gradul de nedeterminare statică a structurii, momentul încovoietor elastic în secțiunea curentă pentru orice încărcare posibilă va fi dat de

$$M = M_p^0 + \sum_{j=1}^{n} X_j m_j,$$

unde M_p^0 este o diagramă de momente încovoietoare static admisibile, iar m_j sînt n diagrame de momente încovoietoare în autoechilibru. Necunoscutele static nedeterminate X_j sînt determinate din condițiile de compatibilitate [2]

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + \Delta_{ip} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n). \tag{2}$$

Ca diagramă virtuală de momente reziduale în autoechilibru m se poate lua orice combinație liniară de momente încovoietoare în autoechilibru m_j de forma

$$m = \sum_{j=1}^{n} Y_j m_j, \tag{3}$$

unde y_j sînt coeficienți necunoscuți.

În acest caz, condițiile (1) necesare și suficiente pe care trebuie să le satisfacă această distribuție virtuală de momente reziduale devin

$$\begin{aligned}
&\left(M_p^0 + \sum_{j=1}^{n} X_j m_j\right)_{\max} + \sum_{j=1}^{n} Y_j m_j \leqslant M_{pl}, \\
&\left(M_p^0 + \sum_{j=1}^{n} X_j m_j\right)_{\min} + \sum_{j=1}^{n} Y_j m_j \geqslant -M_{pl}, \\
&\left(M_p^0 + \sum_{j=1}^{n} X_j m_j\right)_{\max} - \left(M_p^0 + \sum_{j=1}^{n} X_j m_j\right)_{\min} \leqslant 2M_{el},
\end{aligned} \tag{4}$$

cu X_j date de sistemul de ecuații (2).

În condițiile satisfacerii relațiilor (4), diagrama de momente reziduale m va exista și va asigura stabilitatea deformațiilor structurii concomitent cu atingerea de către parametrul P a valorii sale maxime.

De aici rezultă modul în care se determină sarcina de stabilizare și coeficienții Y_j care apar în relația (3).

Sarcina de stabilizare reprezintă valoarea maximă a parametrului

$$P = \max.$$

în condițiile

$$Pm_{p\max}^0 + \sum_{j=1}^{n} Y_j m_j \leqslant M_{pl},$$

$$Pm_{p\min}^0 + \sum_{j=1}^{n} Y_j m_j \geqslant -M_{pl},$$

$$Pm_{p\max}^0 - Pm_{p\min}^0 \leqslant 2M_{el},$$

unde m_p^0 este o diagramă de moment încovoietor static admisibilă, corespunzătoare încărcării cu forțe egale cu unitatea pe direcția tuturor forțelor P_k din fiecare combinație posibilă de încărcare.

Introducînd condiții de nenegativitate pentru necunoscutele y_j:

$$y_j = y_j' - y_j'',$$

cu y_j', y_j'' pozitive, se obține o problemă de programare liniară ale cărei necunoscute sînt P și y_j.

Această problemă se rezolvă cu ajutorul calculatoarelor electronice prin metoda Simplex.

Calculul sarcinii de stabilizare presupune următoarele etape :

— calculul elastic al structurii, inclusiv determinarea diagramelor de moment încovoietor pentru orice combinație posibilă de încărcare ;

— calculul sarcinii de stabilizare.

În cazul unui calculator cu capacitate redusă, calculul se execută cu două programe, corespunzătoare celor două etape. Dacă se dispune de un calculator cu capacitate mare, sarcina de stabilizare se poate determina dintr-o singură problemă de programare liniară, fără a se mai executa calculul elastic al structurii, și anume din problema

$$P = \max,$$

în condițiile

$$|Pm_p^0 + \sum_{j=1}^{n} X_j m_j + \sum_{j=1}^{n} Y_j m_j| \leqslant M_{pl},$$

$$\sum_{j=1}^{n} \delta_{ij} X_j + P\delta_{ip} = 0.$$

Ultimul program este mai avantajos decît primul, deoarece se calculează direct valoarea sarcinii de stabilizare și diagrama virtuală de momente reziduale, pornind doar de la diagramele de momente încovoietoare static admisibile și de la diagramele de momente în autoechilibru ale structurii.

4. EXEMPLE DE CALCUL

1. Se consideră cadrul de două ori static nedeterminat din figura 2*a*, avînd secțiunea dreptunghiulară și solicitat cu sarcinile P', P''. Sarcinile variază independent în domeniul dat de valorile lor extreme

$$P'_{\min} = 0, \qquad P'_{\max} = P,$$

$$P''_{\min} = 0, \qquad P''_{\max} = P.$$

Structura va fi solicitată de fiecare dintre sarcini independent și de combinația dintre aceste sarcini. În figura 2 *b*, *c*, *d*, *e* sînt reprezentate diagramele de moment încovoietor static admisibile și diagramele de moment în autoechilibru.

Sarcina de stabilizare este dată de problema de programare liniară

$$P = \max,$$

în condițiile scrise în secțiunile caracteristice reprezentate în figura 2*a*:

$$0{,}0895P + Y_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-3{,}52\,P + Y_2 \geqslant -M_{pl},$$

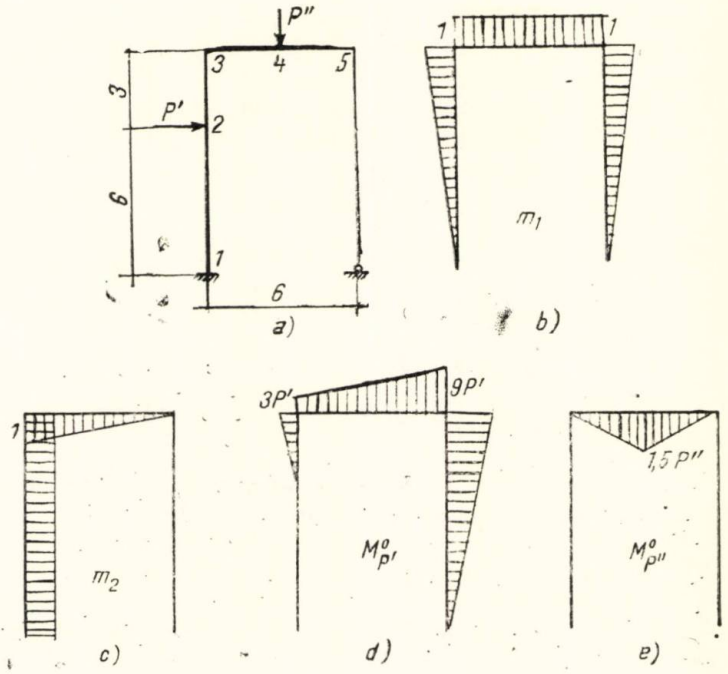


Fig. 2

$$3{,}6095\,P \leqslant \frac{4}{3}\,M_{pl},$$

$$1{,}66\,P - \frac{2}{3}\,Y_1 + Y_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-0{,}198\,P - \frac{2}{3}\,Y_1 + Y_2 \geqslant -M_{pl},$$

$$1{,}858\,P \leqslant \frac{4}{3}\,M_{pl},$$

$$1{,}25\,P - Y_1 + Y_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-0{,}342\,P - Y_1 + Y_2 \geqslant -M_{pl},$$

$$1{,}592\ P \leqslant \frac{4}{3} M_{pl},$$

$$1{,}384\ P - Y_1 + Y_2 \leqslant M_{pl},$$

$$1{,}384\ P \leqslant \frac{4}{3} M_{pl},$$

$$-1{,}662\ P - Y_1 \geqslant -M_{pl},$$

$$1{,}662\ P \leqslant \frac{3}{4} M_{pl}.$$

Introducînd

$$P = y_1,$$

$$Y_1 = y_2 - y_3,$$

$$y_2 = y_4 - y_5,$$

cu $y_i (i = 1, \ldots, 5)$ pozitive, se obţine o problemă Simplex cu 5 necunoscute şi 13 inegalităţi, a cărei soluţie este

$$P = 0{,}424,$$

$$Y_1 = 0{,}295,$$

$$Y_2 = 0{,}492.$$

Această soluţie corespunde apariţiei de articulaţii plastice în secţiunile 1, 2, 5. În calcule s-a luat $M_{pl} = 1$.

Pentru o încărcare proporţională $P' = P$ şi $P'' = P$, sarcina de rupere este 0,556. Sarcina de stabilizare reprezintă o reducere a capacităţii portante cu 26%.

2. Se consideră cadrul de trei ori static nedeterminat cu secţiune dublu T din figura 3*a*, solicitat cu sarcinile P', P'', P'''. Aceste sarcini variază independent între valorile lor extreme

$$P'_{\min} = 0, \qquad P'_{\max} = P_1$$

$$P''_{\min} = 0, \qquad P''_{\max} = 0{,}6P,$$

$$P'''_{\min} = 0, \qquad P'''_{\max} = 2P.$$

Structura se consideră solicitată de aceste sarcini independent şi de cele trei combinaţii posibile.

Diagramele de moment încovoietor static admisibile și diagramele de moment în autoechilibru sînt reprezentate în figura 3 *b*, *c*, *d*, *e*, *f*, *g*. Secțiunile caracteristice sînt reprezentate în figura 3*a*. Sarcina de stabilizare este dată de problema

$$P = \max,$$

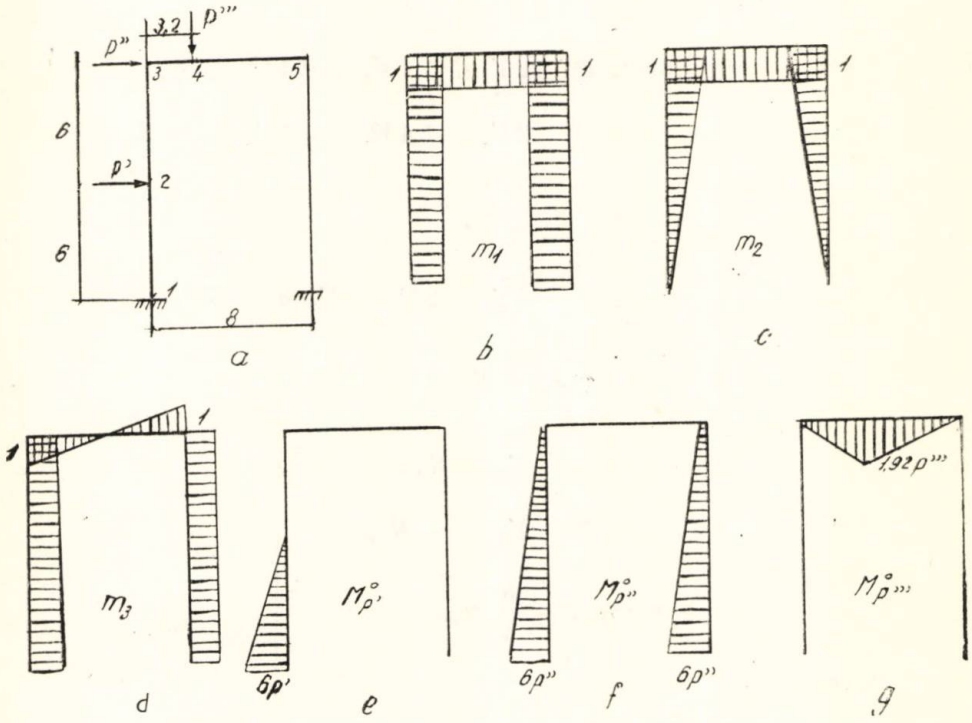


Fig. 3

în condițiile

$$3{,}146\ P - Y_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-5{,}711\ P - Y_2 \geqslant -M_{pl},$$

$$8{,}857\ P \leqslant \frac{5}{3} M_{pl},$$

$$3{,}924\ P + Y_1 \leqslant M_{pl},$$

$$-0{,}978\ P + Y_1 \geqslant -M_{pl},$$

$$4{,}902 P \leqslant \frac{4}{3} M_{pl},$$

$$5{,}047\,P + 2Y_1 + Y_2 \leqslant M_{pl},$$

$$-3{,}59\,P + 2Y_1 + Y_2 \geqslant -M_{pl},$$

$$8{,}637\,P \leqslant \frac{5}{3}M_{pl},$$

$$6{,}692\,P + 2Y_1 + 1{,}4Y_2 + 0{,}4Y_3 \leqslant M_{pl},$$

$$-1{,}982\,P + 2Y_1 + 1{,}4Y_2 + 0{,}4Y_3 \geqslant -M_{pl},$$

$$8{,}674\,P \leqslant \frac{5}{3}M_{pl},$$

$$-2{,}512\,P + 2Y_1 + 2Y_2 + Y_3 \geqslant -M_{pl},$$

$$2{,}512\,P \leqslant \frac{5}{3}M_{pl},$$

$$7{,}775\,P + Y_3 \leqslant M_{pl},$$

$$-2{,}109\,P + Y_3 \geqslant -M_{pl},$$

$$9{,}884\,P \leqslant \frac{5}{3}M_{pl}.$$

Introducînd

$$P = y_1,$$

$$Y_1 = y_2 - y_3,$$

$$Y_2 = y_4 - y_5,$$

$$Y_3 = y_6 - y_7,$$

se obține o problemă Simplex cu șapte necunoscute și 17 inegalități, a cărei soluție este

$$P = 0{,}162,$$

$$Y_1 = 0{,}364,$$

$$Y_2 = -0{,}49$$

$$Y_3 = -0{,}26.$$

Această soluție corespunde apariției de articulații plastice în secțiunile 1, 2, 3, 4, 6. În calcule s-a luat $M_{pl} = 1$.

Pentru o încărcare proporțională $P' = P$, $P'' = 0{,}6\,P$, $P''' = 2P$, sarcina de rupere este $P = 0{,}2$. Sarcina de stabilizare reprezintă o reducere a capacității portante cu 19%.

5. CONCLUZII

Calculul stabilizării deformațiilor se impune datorită faptului că sarcina de rupere calculată prin teoria plastică simplă este descoperitoare, structura pierzîndu-și capacitatea portantă în cazul solicitărilor reale pentru o valoare a sarcinii de rupere mai mică. În exemplele calculate în această lucrare și în alte lucrări [4], [6], [8], sarcina de stabilizare este cu 10—30% mai mică decît sarcina de rupere calculată pe baza teoriei plastice limită.

Metoda propusă prezintă un mod unitar de determinare a distribuției de momente reziduale care conduc la stabilizarea deformațiilor structurii, precum și a sarcinii de stabilitate.

Primită la redacție la 22 noiembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. S. RĂUTU, V. CHIROIU, *Quelques problèmes du calcul des structures statiquement non déterminées dans le domaine plastique*, Rev. Roum. des Sci. Techn. — Mec. Appl., **14**, *1* (1969).
2. H. BLEICH, *Über die Bemessung statisch unbestimmter Stahltragwerke unter Beruchsichtigung des elastich-plastischen Verhaltens des Baustoffes*, Bauingenieur, **13**, 2610 (1932).
3. E. MELAN, *Theorie statisch unbestimmter Systeme*, Public, prelimin. 2e Congres de l'A.I.P.C., Berlin, 1936, p. 43.
4. B. G. NEAL, *The plastic methods of structural Analysis*, Chapman and Hall, cap. 5.
5. W. T. KOITER, *General theorems for elastic-plastic solids*, în *Progress in solid, mech.* vol. 1, Amsterdam, North Holland, 1960.
6 CH. MASSONNET, M. SAVE, *Calcul plastique des constructions*, vol. 1, Bruxelles, 1967, cap. 7.
7. J. M. DAVIS,, *Collapse and shakedown loads of plane frames*, Journ. of the struct. div., Procc. of the Amer. of Civil Eng., **93**, *3* (1967).
8. M. YVES SAILLORD, *Efectele încărcărilor repetate asupra structurilor*, International Symposion *Efects of Repeated Loading of Materials and Structures*, RILEM Institutde ingeneria, 15—17 septembrie 1966.

STAREA DE SOLICITARE LIMITĂ A ELEMENTELOR DE BETON ARMAT ÎNCOVOIATE

de CORNELIU BOB
Institutul Politehnic Timişoara

În lucrare se determină expresia scurtării-limită a fibrei extreme, valoarea şi repartiţia eforturilor unitare în zona comprimată şi expresia poziţiei reale a axei neutre pentru o secţiune de beton armat de formă dreptunghiulară supusă la încovoiere pură în stadiul în care momentul încovoietor atinge valoarea maximă. Expresiile sînt determinate funcţie de deformaţiile unui element din acelaşi beton supus la compresiune centrică şi de procentul de armare pe baza studiilor şi experimentărilor existente în literatură.

1. INTRODUCERE

Starea de solicitare a elementelor de beton armat, caracterizată din punct de vedere static prin valoarea şi repartiţia eforturilor unitare, iar din punct de vedere geometric prin mărimea deformaţiilor specifice, interesează pe ingineri în studiul şi în proiectarea structurilor din beton armat static determinate sau nedeterminate.

Problema repartiţiei eforturilor unitare pe înălţimea zonei comprimate a elementelor supuse la diferite solicitări şi mărimile caracteristice ale acestor eforturi au fost studiate foarte pe larg încă de la începuturile teoriei betonului armat. Pe baza studiilor teoretice şi cercetărilor experimentale s-a admis în majoritatea normelor folosirea unei repartiţii constante a eforturilor în zona comprimată, ceea ce conduce la valori apropiate faţă de alte repartiţii şi în special la un calcul mai puţin laborios.

Valoarea deformaţiei specifice maxime a fibrei extreme comprimate este admisă în norme şi în recomandările C.E.B. [1] între limitele 3 — 7 mm/m, obişnuit luîndu-se valoarea constantă 3,5 mm/m.

La simpozionul de la Miami din 1964 [2], Baker şi Amarakone propun în cadrul studiului privind noua metodă de calcul a capacităţii de rotire a articulaţiilor plastice o expresie empirică pentru scurtarea maximă a fibrei extreme funcţie de trei parametri, pe care autorii îi consideră

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 1, 1971, P. 209–223

principali: procentul armării transversale, poziția relativă a axei neutre la rupere și marca betonului dată de rezistența cilindrică.

Rüsch explică în [3] influența unor parametri principali: durata de încărcare, poziția axei neutre și forma secțiunii asupra scurtării-limită a fibrei extreme de beton, și stabilește valoarea momentului de rupere maxim și scurtarea corespunzătoare pentru diverse durate de încărcare. Aceste valori însă sînt deduse considerîndu-se o poziție constantă a axei neutre $\left(\xi = \frac{x}{h_0} = 0{,}4\right)$.

În lucrarea [4] sînt prezentate rezultatele noilor lucrări de cercetare privind valorile caracteristice ale comportării zonei comprimate din încovoiere a grinzilor de beton armat cu secțiune dreptunghiulară sub acțiunea încărcărilor de scurtă durată. Este prezentat studiul zonei comprimate a elementelor încovoiate în cazul grinzilor de beton supraarmate.

Pornind de la o problemă mai simplă (eforturile și deformațiile unui element supus la solicitare axială), dependentă de un număr mai mic de parametri, în această lucrare se rezolvă o problemă mai complexă (eforturile și deformațiile unui element supus la încovoiere) funcție de mai mulți parametri. *S-a urmărit să se determine scurtarea specifică a fibrei extreme* ε_{c1}, *valoarea și repartiția eforturilor în zona comprimată și poziția relativă a axei neutre* ξ_r *la o grindă încovoiată atunci cînd momentul atinge valoarea maximă, stare considerată ca limita de rezistență a secțiunii de beton armat.* S-a rezolvat problema pentru încovoiere pură considerînd încărcări statice de scurtă durată. Armarea grinzilor este normală cu procente uzuale. A fost păstrată pentru zona comprimată a elementului supus la încovoiere condiția de compatibilitate a deformațiilor (ipoteza lui Bernoulli), lucru admis de toți cercetătorii în teoria betonului armat. De asemenea s-au folosit ecuațiile de echilibru static (ecuația de proiecții și ecuația de momente) pentru o secțiune transversală din dreptul unei fisuri.

2. DIAGRAMA TENSIUNI-DEFORMAȚII LA COMPRESIUNEA MONOAXIALĂ ȘI LA STAREA DE EFORT COMPLEXĂ A BETONULUI

2.1. *Compresiune monoaxială.* Legea dependenței tensiunilor de deformațiile specifice $\sigma = f(\varepsilon)$ în cazul compresiunii betonului are configurație curbilinie (fig. 1). Exprimarea analitică a acestei dependențe a dus la propunerea unui mare număr de diferite ecuații bazate pe legi experimentale, parabolice și hiperbolice, precum și pe ecuații mai complexe. Cercetările din ultimul timp, luînd în considerare sensul fizic al comportării betonului, au permis să fie mai bine precizată configurația diagramei de compresiune [4], [5]. Această diagramă (fig. 1) reprezintă o curbă avînd maximul corespunzător unei anumite valori a deformației specifice ε_1.

Se menționează că pentru trasarea segmentului descendent al curbei $\sigma - \varepsilon$, care influențează tensiunile ce apar în elementele de construcție [3] [7], încercările au fost făcute prin realizarea unei viteze constante a creșterii deformațiilor.

În această lucrare s-a admis pentru legea tensiuni-deformații specifice o ecuație unică a întregii curbe, rezultînd o rezolvare mai puțin labo-

rioasă a problemelor propuse a fi studiate. Ecuaţia curbei s-a luat de formă parabolică, coeficienţii ei fiind determinaţi funcţie de caracteristicile mecanice ale betonului (R_{pr}, ε_1) (fig. 1):

$$\sigma = A\,\varepsilon^2 + B\varepsilon = \frac{2R_{pr}}{\varepsilon_1}\varepsilon - \frac{R_{pr}}{\varepsilon_1^2}\varepsilon^2. \qquad (1)$$

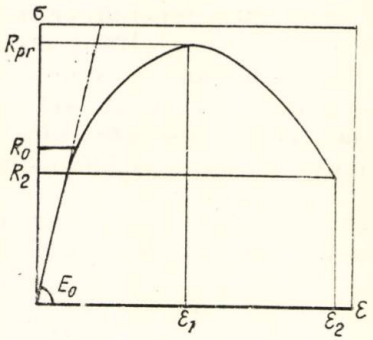


Fig. 1. — Diagrama compresiunii betonului

Valoarea deformaţiei specifice ε_1 corespunzătoare atingerii rezistenţei prismatice R_{pr} este dependentă de calitatea betonului. Experienţe efectuate pe epruvete de beton comprimate centric, la care măsurătorile deformaţiilor s-au făcut pe o bază de 10—15 cm, au arătat că deformaţia specifică ε_1 creşte cu mărirea mărcii betonului.

Din încercările efectuate de Pisanko şi Malko, citate în [5], se constată că pentru betoanele executate prin vibrare valorile lui ε_1 sînt ceva mai mici decît valorile corespunzătoare pentru betoanele plastice (fig. 2).

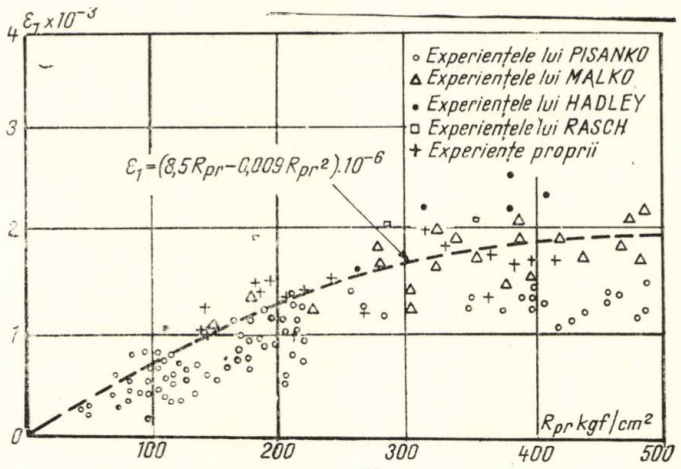


Fig. 2. — Variaţia deformaţiei specifice ε_1 funcţie de calitatea betonului la compresiune axială.

Din încercări s-a dedus că valoarea deformaţiei specifice ε_1 variază parabolic cu rezistenţa prismatică R_{pr} după relaţia

$$\varepsilon_1 = (8{,}5\,R_{pr} - 0{,}009\,R_{pr}^2)\,10^{-6}, \qquad (2)$$

unde R_{pr} se introduce în kgf cm².

2.2. *Starea de efort complexă.* Studiile teoretice şi experimentale privind analiza stării de efort complexă (biaxială şi triaxială) sînt foarte numeroase în literatura de specialitate. Plecînd de la teoriile clasice de rezistenţă, continuind cu generalizările matematice ale exprimării legăturii dintre cei trei invarianţi ai tensorului de eforturi, cu teoriile statistice sau ecuaţii bazate pe structura chimică şi fizică, determinarea stării de eforturi şi deformaţii în cazul solicitărilor complexe este o problemă pentru care nu a fost încă găsită o rezolvare corespunzătoare.

În această lucrare se admite că pentru cazul general al stării de efort ($\sigma_1 \neq \sigma_2 \neq \sigma_3 \neq 0$, toate cele trei eforturi unitare principale fiind de compresiune), curba $\sigma_1 - \varepsilon$ (σ_1 fiind efortul unitar principal cu valoare absolută maximă) este asemănătoare cu alura curbei de la compresiune monoaxială [5] (fig. 3).

Rezultă că pentru coordonatele βR_{pr} şi $\gamma\varepsilon_1$ ale maximului noii diagrame legea tensiunii deformaţii în cazul stării de efort complexe are expresia

$$\sigma = \frac{2\beta R_{pr}}{\gamma\varepsilon_1}\varepsilon - \frac{\beta R_{pr}}{\gamma^2\varepsilon_1^2}\varepsilon^2. \qquad (1')$$

Valoarea coeficientului β poate fi determinată prin aplicarea unuia dintre criteriile de rupere ale betonului sau din considerente ce se vor stabili în paragraful 4.

Pentru a determina valoarea coeficientului γ, care exprimă creşterea deformaţiilor în cazul solicitării complexe, se admite următoarea ipoteză:

La o solicitare complexă, deplasarea maximului diagramei $\sigma - \varepsilon$ a unei epruvete supuse la compresiune centrică se face după o dreaptă avînd

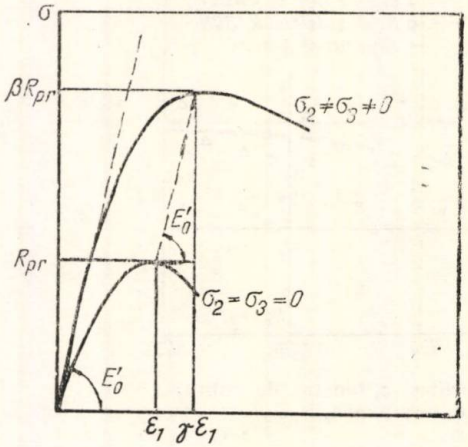


Fig. 3. — Diagrama tensiuni-deformaţii la compresiune monoaxială şi la starea de efort complexă.

înclinaţia faţă de axa ε modulul de elasticitate iniţial (în origine) al solicitării complexe. Aceasta presupune că deformarea suplimentară datorită solicitării complexe se face elastic, conform legilor de deformare ale teoriei elasticităţii (fig. 3).

Ipoteza de mai sus urmează a fi verificată în cadrul unui studiu experimental ce va fi efectuat.

Prin derivarea funcției (1') în raport cu deformația specifică se obține

$$\frac{d\sigma}{d\varepsilon} = \frac{2\beta R_{pr}}{\gamma\varepsilon_1} - \frac{2\beta R_{pr}}{\gamma^2 \varepsilon_1^2}\varepsilon. \tag{3}$$

Pentru $\varepsilon = 0$, modulul de elasticitate al solicitării complexe în origine este

$$E_0' = \left(\frac{d\sigma}{d\varepsilon}\right)_{\varepsilon=0} = \frac{2\beta R_{pr}}{\gamma\varepsilon_1}. \tag{4}$$

Din figura 3 rezultă pentru modulul de elasticitate E_0' expresia

$$E_0' = \frac{\beta R_{pr} - R_{pr}}{\gamma\,\varepsilon_1 - \varepsilon_1} = \frac{R_{pr}}{\varepsilon_1}\frac{\beta - 1}{\gamma - 1}. \tag{5}$$

Dacă se egalează relațiile (4) și (5) se obține

$$\gamma = \frac{2\beta}{\beta + 1}. \tag{6}$$

3. STAREA DE SOLICITARE-LIMITĂ ÎN CAZUL SIMPLIFICAT AL DEFORMĂRII INDEPENDENTE A FIBRELOR ZONEI COMPRIMATE

Se va determina în acest paragraf valoarea scurtării-limită a fibrei extreme ε_{11}' și poziția relativă a axei neutre ξ cînd momentul încovoietor atinge valoarea maximă, presupunînd pentru început ipoteza că fibrele

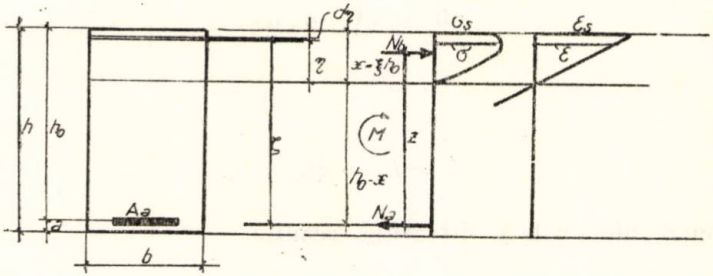


Fig. 4. — Repartizarea eforturilor și deformațiilor pe secțiunea dreptunghiulară de beton armat.

zonei comprimate se deformează independent fără a se influența reciproc [3]. Calculele se referă la o secțiune de beton armat dreptunghiulară din dreptul unei fisuri (fig. 4).

Din ipoteza lui Bernoulli rezultă că deformația specifică într-o fibră curentă este

$$\varepsilon = \varepsilon_s \frac{\eta}{x} = \varepsilon_s \frac{\eta}{\xi h_0}. \tag{7}$$

Înlocuind expresia (7) în (1), rezultă valoarea tensiunii într-o fibră curentă funcție de deformația specifică a fibrei extreme :

$$\sigma = A\varepsilon_s^2 \frac{\eta^2}{\xi^2 h_0^2} + B\varepsilon_s \frac{\eta}{\xi h_0}. \tag{8}$$

Scriind ecuațiile de echilibru static va rezulta expresia momentului în funcție de deformația specifică a fibrei extreme și de poziția axei neutre.

Cum grinda este supusă la încovoiere pură, rezultă

$$N_b = N_a = \sigma_c A_a, \tag{9}$$

unde

$$N_b = b\int_0^{\xi h_0} \sigma \, d\eta = b\int_0^{\xi h_0} \left(A\varepsilon_s^2 \frac{\eta^2}{\xi^2 h_0^2} + B\varepsilon_s \frac{\eta}{\xi h_0} \right) d\eta = \tag{10}$$

$$= \frac{bh_0\xi}{6}(2A\varepsilon_s^2 + 3B\varepsilon_s)$$

sau (9) devine

$$bh_0\xi(2A\varepsilon_s^2 + 3B\varepsilon_s) - 6N_a = 0. \tag{9'}$$

Din ecuația de momente va rezulta

$$M = b\int_0^{\xi h_0} \sigma\zeta \, d\eta, \tag{11}$$

unde ζ este

$$\zeta = h_0 - \xi h_0 + \eta. \tag{12}$$

Făcînd înlocuirile și integrînd, rezultă

$$M = b\int_0^{\xi h_0} \left(A\varepsilon_s^2 \frac{\eta^2}{\xi^2 h_0^2} + B\varepsilon_s \frac{\eta}{\xi h_0} \right) (h_0 - \xi h_0 + \eta) \, d\eta =$$

$$= \frac{bh_0^2}{12}[A\varepsilon_s^2(4\xi - \xi^2) + B\varepsilon_s(6\xi - 2\xi^2)]. \tag{13}$$

Din ecuația de proiecții (9') și din ecuația de momente (13) se vor determina valorile lui ε'_{s1} și ale lui ξ pentru stadiul cînd momentul are valoarea maximă.

Este vorba deci de o funcție M de două variabile ε_s și ξ, legate între ele prin relația (9′) de forma $f(\varepsilon, \xi) = 0$. Pentru aflarea extremelor funcției se formează funcția auxiliară

$$u = \frac{bh_0^2}{12}[A\varepsilon_s^2(4\xi - \xi^2) + B\varepsilon_s(6\xi - 2\xi^2)] +$$

$$+ \lambda[bh_0\xi(2A\varepsilon_s^2 + 3B\varepsilon_s) - 6N_a]. \tag{14}$$

Se formează următorul sistem:

$$\frac{\delta u}{\delta \varepsilon_s} = \frac{bh_0^2}{12}[2A\varepsilon_s(4\xi - \xi^2) + B(6\xi - 2\xi^2)] +$$

$$+ \lambda[bh_0\xi(4A\varepsilon_s + 3B)] = 0,$$

$$\frac{\delta u}{\delta \xi} = \frac{bh_0^2}{12}[A\varepsilon_s^2(4 - 2\xi) + B\varepsilon_s(6 - 4\xi)] + \tag{15}$$

$$+ \lambda[bh_0(2A\varepsilon_s^2 + 3B\varepsilon_s)] = 0,$$

$$bh_0\xi(2A\varepsilon_s^2 + 3B\varepsilon_s) - 6N_a = 0.$$

Din rezolvarea sistemului se determină ε'_{s1} și ξ pentru extremele funcției M.

Scurtarea-limită a fibrei extreme ε_{s1} rezultă din următoarea ecuație de gradul doi:

$$\varepsilon_{s1}'^2 + 3\frac{B}{A}\varepsilon'_{s1} + \frac{3}{2}\left(\frac{B}{A}\right)^2 = 0 \tag{16}$$

sau, înlocuind pe A și B din (2), rezultă

$$\varepsilon'_{s1} - 6\varepsilon_1\varepsilon'_{s1} + 6\varepsilon_1^2 = 0, \tag{16a}$$

valoarea lui ε'_{s1} fiind

$$\varepsilon'_{s1} = (3 \pm \sqrt{3})\,\varepsilon_1. \tag{17}$$

Se va păstra pentru deformația specifică limită a fibrei extreme numai valoarea corespunzătoare valorii maxime a momentului, cea corespunzătoare valorii minime fiind doar o indicație teoretică:

$$\varepsilon'_{s1} = 1{,}27\varepsilon_1. \tag{18}$$

Din relația (18) se poate trage o concluzie interesantă : în cazul deformării independente a fibrelor zonei comprimate scurtarea-limită a fibrei extreme depinde numai de deformația specifică ε_1 corespunzătoare rezistenței prismatice.

Înlocuind pe (18) în (9'), se va găsi și valoarea corespunzătoare a poziției axei neutre :

$$\xi = 1{,}36 \frac{A_a}{bh_0} \cdot \frac{\sigma_c}{R_{pr}} = 1{,}36\, \mu \frac{\sigma_c}{R_{pr}} \cdot \tag{19}$$

Este de observat că admiterea pentru diagrama $\sigma - \varepsilon$ a unei ecuații unice (1) pentru întreagă curbă în locul variației reale dă erori asupra lui ε'_{s1} de ordinul 3%.

Dacă se aplică ipotezele și raționamentele făcute la secțiunea dreptunghiulară și în cazul unei secțiuni de forma unui triunghi isoscel, vor rezulta următoarele valori ale scurtării-limită a fibrei extreme cînd momentul încovoietor atinge valoarea maximă :

— ecuația (16') devine

$$\varepsilon'^2_{s1} - 8\varepsilon_1 \varepsilon'_{s1} + 10\varepsilon_1^2 = 0\,; \tag{20}$$

— valorile lui ε_{s1} pentru secțiunea triunghiulară sînt

$$\varepsilon'_{s1} = (4 \pm \sqrt{6})\, \varepsilon_1\,; \tag{21}$$

— pentru deformația specifică se păstrează valoarea

$$\varepsilon'_{s1} = 1{,}55\ \varepsilon_1. \tag{22}$$

Se observă că la secțiunea triunghiulară creșterea deformației specifice este mult mai mare decît la cea dreptunghiulară, ceea ce era de așteptat.

4. STAREA DE SOLICITARE-LIMITĂ ÎN CAZUL COMPORTĂRII REALE A ZONEI COMPRIMATE

S-au determinat în paragraful precedent scurtarea-limită a fibrei extreme și poziția reală a axei neutre atunci cînd momentul atinge valoarea maximă, presupunînd că fibrele zonei comprimate se deformează independent.

Este cunoscut însă faptul că în zona comprimată a unei grinzi supuse la încovoiere, datorită repartizării neuniforme a eforturilor, fibrele acestei zone se influențează reciproc, avînd o stare de solicitare neomogenă.

Cantitatea de armătură din zona întinsă a unui element de beton armat creează o stare de neomogenitate diferită, dependentă de procentul de armare. Acest lucru este pus în evidență de curbele modificării coeficientului deformației transversale pe marginea cea mai comprimată a

unei grinzi dreptunghiulare [5]. Curbele arată că, în momentul în care este atinsă starea-limită a secțiunii, stările de efort și deformație sînt diferite, funcție de cantitatea de armătură.

Se va rezolva efectul procentului de armare (exprimat prin poziția relativă a axei neutre) și al solicitării neomogene asupra scurtării-limită a fibrei extreme și a poziției axei neutre prin corectarea rezultatelor teoretice obținute în paragraful precedent cu rezultatele obținute din experiențe. Această corecție se aplică unei mărimi care la încercări poate fi ușor stabilită: momentul încovoietor maxim.

Valoarea momentului încovoietor maxim determinat în teoria simplificată M_{ts}^{max} poate fi scris din relația (13) dacă se înlocuiesc ε_s și ξ cu valorile-limită din (18) și (19), iar R_{pr} se înlocuiește cu rezistența la compresiune din încovoiere R_i admisă în norme conform relației

$$R_i = 1{,}25\, R_{pr}. \tag{23}$$

Momentul încovoietor rezultă

$$M_{ts}^{max} = bh_0^2\, R_i\, \xi'(1 - 0{,}67\xi'). \tag{24}$$

Valoarea momentului redus cu care se va opera în continuare este

$$m_{ts} = \frac{M_{ts}^{max}}{bh_0^2\, R_i} = \xi'(1 - 0{,}67\xi'). \tag{25}$$

Pentru calculul momentului încovoietor în norme se admite o valoare constantă R_i a eforturilor unitare pe toată înălțimea zonei comprimate, rezultînd

$$M_t = bh_0^2\, R_i\, \xi'(1 - 0{,}5\xi') \tag{26}$$

și

$$m_i = \frac{M_t}{bh_0^2\, R_i} = \xi'(1 - 0{,}5\xi'), \tag{27}$$

unde

$$\xi' = \mu \frac{\sigma_c}{R_i} \tag{28}$$

este poziția relativă a axei neutre în cazul simplificat al valorii constante a eforturilor unitare în zona comprimată.

Datele experimentale, citate de Nicolau (8), privind încercările la ruperea unor grinzi încovoiate simplu armate de secțiune dreptunghiulară ale mai multor cercetători, precum și unele încercări proprii, arată că valoarea momentului încovoietor calculat cu relația (26) nu coincide cu

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

rezultatele încercărilor pe întreg domeniul procentelor uzuale de armare $0 < \xi' < 0{,}55$.

Din figura 5 se constată că, pentru mărimi ale lui ξ' sub 0,1, în toate cazurile momentul de rupere real a fost mai mare decît cel calculat conform

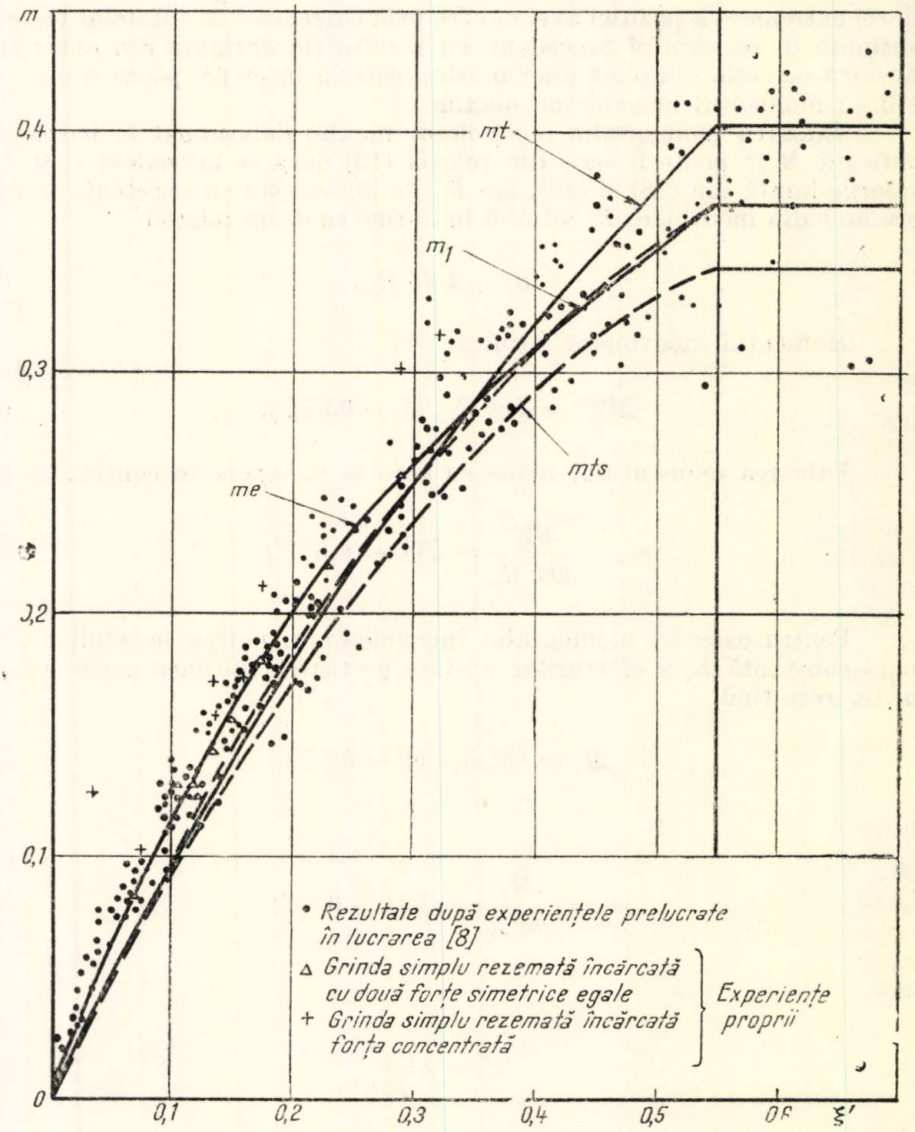


Fig. 5. — Variații teoretice și rezultate experimentale ale momentului de rupere la grinzi de secțiune dreptunghiulară.

normelor, iar pentru ξ' peste 0,35 valorile reale sînt în general mai mici decît cele calculate. Pentru valoarea de 0,55 a lui ξ', momentul de rupere nu mai crește, ci are o mărime medie constantă.

La încercările proprii s-a constatat că valoarea momentului încovoietor maxim la grinzile solicitate de o forță concentrată la mijlocul deschiderii sînt mai mari decît la grinzile solicitate de două forțe egale simetrice. Acest lucru este explicabil datorită influenței solicitării locale asupra zonei comprimate a secțiunii celei mai solicitate.

Expresia momentului încovoietor redus, rezultat din datele experimentale, este

$$m_e = \xi'(1{,}33 - 1{,}93\xi' + 1{,}35\xi'^2). \tag{29}$$

Din relațiile (26), (29) și din figura 5 se constată că pentru $\xi' = 0{,}35$ valorile momentului experimental și ale celui calculat după norme coincid.

Pentru a se putea găsi scurtarea-limită a fibrei extreme și poziția reală a axei neutre se va corecta valoarea momentului încovoietor dedus în teoria simplificată, astfel încît să capete valoarea reală (29). Diferența dintre valoarea momentului încovoietor conform calculului simplificat și cel real poate fi eliminată prin luarea în considerare a două cauze care au generat-o.

În primul rînd este vorba de ipoteza simplificată admisă în paragraful precedent, conform căreia fibrele zonei comprimate s-ar deforma independent după legea $\sigma - \varepsilon$, valabilă la compresiune centrică. Se constată că la încovoiere fibrele zonei comprimate vor avea, cînd momentul atinge valoarea maximă, valori mai mari decît cele care rezultă din legea tensiuni-deformații pentru solicitare axială.

Starea de solicitare neomogenă ce apare la încovoiere este asimilată cu o stare de solicitare în care fiecare fibră a zonei comprimate se deformează în continuare independent, dar după o curbă tensiuni-deformații corespunzătoare solicitării complexe (fig. 2).

Se presupune astfel că valoarea tensiunii maxime (maximul diagramei) este funcție de procentul de armare, avînd o variație lineară:

$$R = R_{pr}(C + D\xi') = \beta_1 R_{pr}. \tag{30}$$

Dacă în relația (19) se va introduce în locul valorii constante R_{pr} valoarea lui R din (30), va rezulta următoarea expresie pentru poziția reală a axei neutre:

$$\xi_r = \frac{\xi}{\beta_1} = \frac{1{,}7\xi'}{\beta_1}. \tag{31}$$

Expresia momentului încovoietor redus maxim m_1 în cazul cînd fibrele zonei comprimate au o curbă tensiuni-deformații corespunzătoare solicitării complexe se obține de asemenea din relația (13), însă R_{pr} și ξ se înlocuiesc cu R (30) și, respectiv, ξ_r (31):

$$m_1 = \frac{\xi'}{\beta_1}(\beta_1 - 0{,}67\xi'). \tag{32}$$

Valoarea coeficientului β_1 se determină din următoarele două condiții :

— expresia momentului m_1 coincide cu cea experimentală m_e (29) pentru armarea-limită $\xi' = 0{,}55$;

— pentru $\xi' = 0{,}35$, cînd valoarea momentului calculat după norme coincide cu cea experimentală, se poate scrie valoarea reală a poziției axei neutre [1] :

$$\xi_r = \frac{\xi'}{0{,}75} = \frac{0{,}35}{0{,}75}. \tag{33}$$

Valoarea coeficientului β_1 este

$$\beta_1 = 1{,}54 - 0{,}75\xi'. \tag{34}$$

Variația poziției relative reale a axei neutre și a celorlalte poziți simplificate este dată în figura 6.

În figura 5 s-a reprezentat și variația momentului m_1. Se observă că pentru valori sub $\xi' = 0{,}35$ momentul rămîne mai mic decît cel experi-

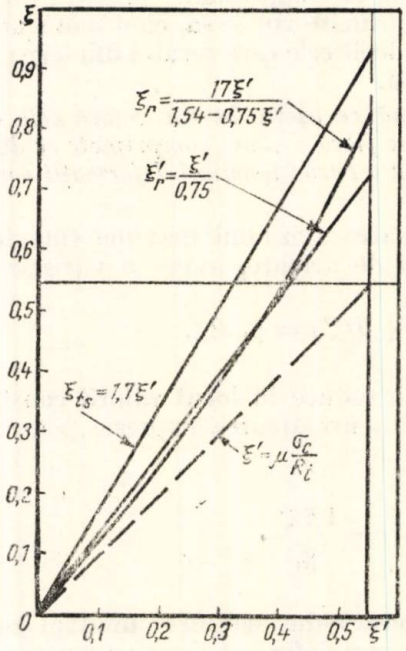


Fig. 6. — Variația scurtării-limită a fibrei extreme funcție de poziția relativă simplificată a axei neutre.

mental. Aceasta se datorește celei de-a doua cauze care dă diferențele dintre momentul teoretic și momentul real : la procente mici de armare, armătura depășește palierul de curgere, intrînd în zona de consolidare. Creșterea efortului total în armătură va duce, evident, la o sporire a eforturilor zonei comprimate.

Valoarea creşterii efortului maxim al zonei comprimate poate fi obţinut din raportul momentului experimental la momentul m_1:

$$\beta_2 = \frac{m_e}{m_1} = \frac{1{,}33 - 1{,}93\xi' + 1{,}35\xi'^2}{1{,}54 - 1{,}42\xi'}\,\beta_1. \tag{35}$$

Valcarea totală a creşterii efortului maxim astfel ca momentul încovoietor calculat cu teoria simplificată să coincidă cu cel rezultat din experienţe este, evident,

$$\beta = \beta_1 \cdot \beta_2 = \frac{3{,}15 - 7{,}65\xi' + 8{,}41\xi'^2 - 4{,}20\xi'^3 + 0{,}76\xi'^4}{1{,}54 - 1{,}42\xi'}. \tag{36}$$

Rezultă că fiecare fibră a zonei comprimate are o curbă tensiuni-deformaţii cu coordonatele maximului βR_{pr} şi $\gamma\varepsilon_1$, între β şi γ avînd relaţia (6). Dacă se refac raţionamentele din paragraful 3, scurtarea maximă reală a fibrei extreme va fi

$$\varepsilon_{s1} = 1{,}27\,\gamma\varepsilon_1 = \gamma\varepsilon'_{s1},$$

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_1} = 1{,}27\,\gamma = \frac{2{,}55\,\beta}{\beta + 1}, \tag{37}$$

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_1} = 2{,}55\,\frac{3{,}15 - 7{,}65\xi' + 8{,}41\xi'^2 - 4{,}20\xi'^3 + 0{,}76\xi'^4}{4{,}69 - 9{,}07\xi' + 8{,}41\xi'^2 - 4{,}20\xi'^3 + 0{,}76\xi'^4}. \tag{38}$$

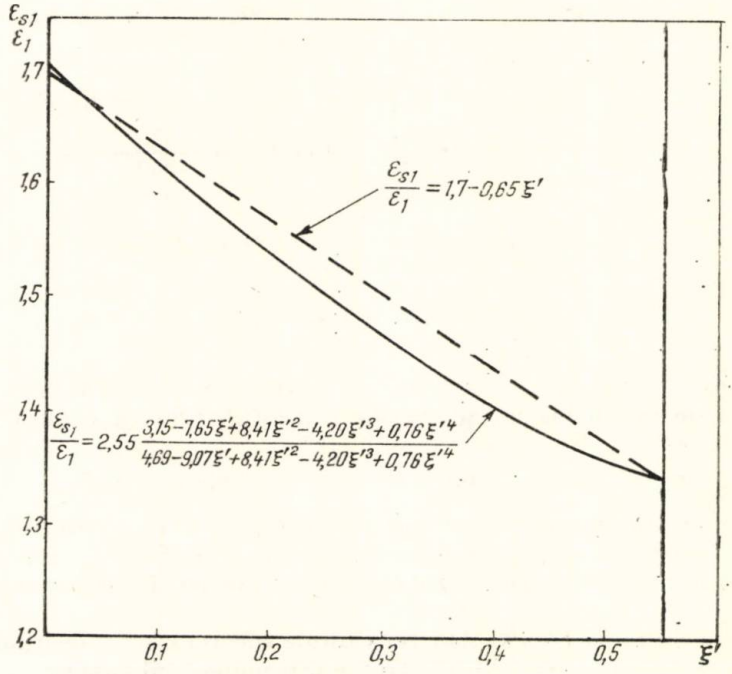


Fig. 7. — Variaţia poziţiilor axei neutre funcţie de poziţia relativă simplificată.

În figura 6 s-a reprezentat variația $\frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_1}$ în funcție de ξ'. Se observă că se poate admite o variație liniară fără că erorile să depășească 2,5%:

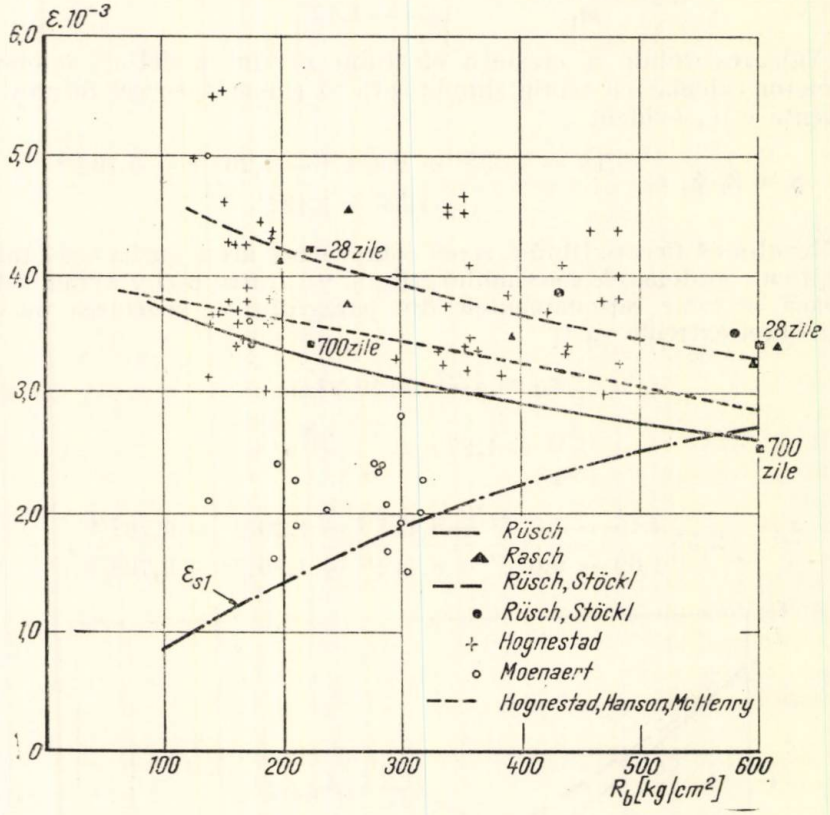


Fig. 8. — Variația scurtării maxime și scurtării-limită a fibrei extreme funcție de rezistența betonului.

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{\varepsilon_1} = 1{,}70 - 0{,}65\xi'. \tag{39}$$

În final se poate scrie că valoarea scurtării-limită a fibrei extreme a unei grinzi de beton armat de secțiune dreptunghiulară supusă la încovoiere pură este

$$\varepsilon_{s1} = (8{,}5R_{pr} - 0{,}009R_{pr}^2)\,(1{,}70 - 0{,}65\xi')\,10^{-6}. \tag{40}$$

Mărimea deformațiilor într-o fibră curentă în stadiul-limită se poate calcula cu relația (7), unde se înlocuiește ε_s și ξ cu ε_{s1}, respectiv ξ_r. Valoarea eforturilor unitare ale zonei comprimate pot fi deduse din relația (1)'.

În [4] Rüsch și Stöckl dau rezultatele încercărilor diferiților autori privind valoarea scurtării fibrei extreme din momentul ruperii.

Diferențele mari obținute în valorile deformațiilor de rupere sînt explicate prin influența modului de a se efectua încercarea și mai ales al

precizării momentului de rupere, adică atunci cînd trebuie măsurată deformația specifică.

Figura 8 redă rezultatele prezentate de Rüsch, fiind trasată și variația scurtării-limită conform relației (40) pentru cazul-limită de armare $\xi' = 0{,}55$.

Se observă că tendința de variație și valorile scurtării limită deduse în această lucrare diferă de cele prezentate în [4].

Este de subliniat că s-a urmărit să se determine nu scurtarea maximă corespunzătoare ruperii, ci scurtarea-limită a fibrei extreme corespunzătoare atingerii valorii maxime a momentului încovoietor. Această deformație este considerată de bază în calculul plastic al structurilor din beton armat.

5. CONCLUZII

Pe baza studiilor și experimentărilor, în această lucrare sînt stabilite valoarea și repartiția eforturilor unitare în zona comprimată, expresia poziției reale a axei neutre și este determinată mărimea scurtării-limită a fibrei extreme în cazul unei grinzi de beton armat de secțiune dreptunghiulară atunci cînd momentul încovoietor atinge valoarea maximă.

În stabilirea acestor relații s-au făcut cîteva considerații și ipoteze de a căror valabilitate depinde exactitatea coeficienților existenți în relații, dar nu modifică structura formulelor și posibilitatea utilizării lor în urma precizărilor mai exacte rezultate din experiențe. Este vorba de ipoteza privind deplasarea maximului diagramei $\sigma - \varepsilon$ în cazul solicitării complexe și de valoarea deformației specifice ε_1 funcție de calitatea betonului. Aceste probleme vor fi abordate în studiile și cercetările experimentale ulterioare.

Relațiile stabilite pentru un caz particular de solicitare vor trebui generalizate și pentru elemente la care să intervină și forța axială și forța tăietoare. Efectul etrierilor și armăturilor comprimate, precum și efectul duratei de acțiune a încărcărilor, sînt parametri a căror influență a fost deja abordată în literatură, fiind necesare precizări suplimentare privind efectul lor asupra stării de solicitare a elementelor de beton armat.

Primită la redacție la 20 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Comité Européen du Béton, *Recommandations I*, 1964.
2. A. L. L. Baker, M. N. Amarakone, *Inelastic hyperstatic frames analysis. Flexural mechanics of reinforced concrete*, International Symposium, Miami, Nov. 1964.
3. H. Rüsch, *Essai d'une nouvelle théorie à la flexion du béton armé*, Mémoires du centre d'études de recherches et d'essais scientifiques du genie civil, Université de Liège., **2** (1961).
4. H. Rüsch, S. Stöckl, *Kennzahlen für das Verhalten einer rechteckigen Biegedruckzone von Stahlbetonbalken unter kurzzeitiger Belastung. Zusammenfassung neuerer Forschungsarbeiten*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, *196* (1967).
5. O. I. Berg, *Fiziceschie osnovi teorii procinosti betona i jelezobetona*, Moskva, Gosstroizdat, 1961.
6. — *Die Hauptentwicklungsrichtungen der Theorie der Festigkeit und Verformung des Betons*, Kolloquium Beton, vom 17. bis 19. Juni 1968, in Dresden.
7. Chr. Rasch, *Spannungs-Dehnungs-Linien des Betons und Spannungsverteilung in der Biegedruckzone bei konstanter Dehngeschwindigkeit*, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, *154* (1962).
8. V. Nicolau, *Betonul armat*, București, Edit. tehnică., 1962.

DETERMINAREA EFORTURILOR DE LEGĂTURĂ ÎN SISTEMELE STATICE COMBINATE PRIN UTILIZAREA MODELELOR REDUSE *

de R. MARINOV
Centrul de cercetări fizice și tehnice Timișoara

În lucrare se expune procedeul de determinare a eforturilor în barele de legătură ale unui sistem static mixt prin metoda eforturilor, utilizînd modelul redus la obținerea matricelor de deformabilitate. Eforturile în barele de legătură sînt : forța axială, ca efort principal, și momentul la capătul barei, ca efort secundar. Matricele de deformabilitate se obțin prin măsurarea deplasărilor nodurilor modelului structurii statice mixte și a modelelor structurilor statice principale și a modelelor structurilor statice principale și auxiliare. În lucrare se expune modul de ajustare a matricelor obținute din măsurători pe model. Se dă în continuare un exemplu pentru un cadru—diafragmă ; calculul eforturilor de legătură se efectuează cu ajutorul calculatorului electronic cifric, fără care nu este practic posibilă utilizarea modelului redus în rezolvarea sistemelor statice combinate.

1. INTRODUCERE

Sistemele statice combinate sînt larg folosite în practica construcțiilor, datorită avantajelor tehnice oferite mai ales pentru structurile cu deschideri sau înălțimi mari. Cele mai cunoscute sisteme statice combinate sînt grinzile Langer, arcele conlucrînd cu tablierul, grinzi cu cabluri (suspendate și cadrele cu diafragmă, numărul acestor sisteme statice fiind mereu în creștere.

În general, sistemul static combinat este alcătuit din două structuri diferite ca schemă statică (grindă continuă sau simplu rezemată combinată cu arc sau cablu, cadru multietajat combinat cu diafragmă etc.), legate prin bare (tiranți, suspenți, rigle). Una dintre structuri este principală, cealaltă avînd un rol auxiliar de descărcare a celei principale. Sarcinile utile încarcă direct numai una dintre structuri (nu neapărat cea principală).

Eforturile de legătură independente dintre cele două sisteme sînt eforturi axiale N și momente M pentru sisteme plane și eforturi axiale N

* Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23—27 iunie 1969.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 1, 1971, P. 225—235

și momente M_x, M_y și M_t pentru sisteme spațiale. În cazurile cele mai frecvente apar numai eforturi N (bare articulate).

2. DETERMINAREA EFORTURILOR DE LEGĂTURĂ

Calculul eforturilor de legătură prin metoda forței implică determinarea deformațiilor celor două structuri din încărcarea cu sarcina mobilă $P = 1$ (vom considera numărul pozițiilor forței P egal cu numărul barelor de legătură).

În cele ce urmează se va nota cu indicele A mărimile aferente structurii direct încărcate, cu indicele B pe cele aferente structurii neîncărcate direct și cu indicele C pe cele aferente barelor de legătură (fig. 1).

Pentru bara de legătură i, ecuațiile de deformații sînt, conform figurii 1, următoarele :

$$\delta_{ij}^A - \sum X_{ij} \cdot \delta_{ii}^A - X_{ij} \cdot \delta_i^C - \sum Y_{ij} \cdot \eta_{ii}^A - Y_{ij} \cdot \eta_i^C = \sum X_{ij} \cdot \delta_{ii}^B + \sum Y_{ij} \cdot \eta_{ii}^B,$$

$$\varphi_{ij}^A - \sum \varphi_{ii}^A \cdot Y_{ij} - \varphi_i^C \cdot Y_{ij} - \sum \eta_{ii}^A \cdot X_{ij} - \eta_{ic}^C \cdot X_{ij} = \sum Y_{ij} \cdot \varphi_{ii}^B + \sum X_{ij} \cdot \eta_{ii}^B, \quad (1)$$

unde

δ_{ij} reprezintă deplasarea pe direcția efortului axial X_{ij} pentru $X_{ij} = 1$,
η_{ij} — rotirea secțiunii i pentru $X_{ij} = 1$ (sau deplasarea secțiunii i pentru momentul $Y_{ij} = 1$),
φ_{ij} — rotirea secțiunii i pentru $Y_{ij} = 1$.

Sub forma matriceală, relațiile (1) se vor scrie

$$\begin{aligned} D_A - X \cdot D - Y \cdot H &= 0, \\ \Phi_A - Y \cdot \Phi - X \cdot H &= 0, \end{aligned} \quad (2)$$

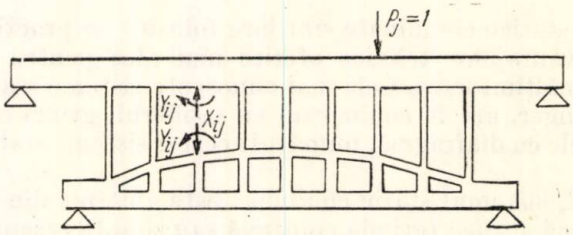


Fig. 1. — Schema sistemului static combinat.

unde

$$\begin{aligned} D &= \{\delta_{ij}^A + \delta_{ij}^B + \delta_{ij}^C\}, \\ D_A &= \{\delta_{ij}^A\}\ ;\ \Phi_A = \{\varphi_{ij}^A\}, \\ H &= \{\eta_{ij}^A + \eta_{ij}^B + \eta_{ij}^C\}, \\ \Phi &= \{\varphi_{ij}^A + \varphi_{ij}^B + \varphi_{ij}^C\}. \end{aligned} \quad (3)$$

Cele două ecuații din (2) se pot separa cînd $M = 0$. Acest caz apare la structurile foarte rigide în comparație cu barele de legătură.

Pentru aceste structuri avem

$$X = D^{-1} \cdot D_A,$$
$$Y = \Phi^{-1} \cdot \Phi_A. \tag{4}$$

În cazul cînd nu există certitudini asupra condiției $M \simeq 0$, determinarea lui X și Y se va face conform algoritmului

$$X_n = X_0 - Y_{n-1} \cdot H \cdot D^{-1},$$
$$Y_n = Y_0 - X_{n-1} \cdot H \cdot \Phi^{-1}, \tag{5}$$

în care X_0 și Y_0 au expresiile de la (4). Iterația de la (5) este convergentă dacă

$$H < D \text{ și } H < \Phi. \tag{6}$$

În majoritatea structurilor, $H \ll D$ și $H \simeq \Phi$, ceea ce asigură o convergență suficientă.

Pentru determinarea matricelor D, D_A, H, Φ, calculul deplasărilor și al rotirilor δ, φ, η comportă dificultăți mai ales pentru cazul structurilor ce se îndepărtează de scheme statice simple (grinzi simplu rezemate, continue și console).

Determinarea acestor deformații este facilitată prin utilizarea modelelor cu ajutorul cărora prin măsurători directe se obțin matricele de deformabilitate.

Pentru determinarea lui X, pe lîngă relația (A) se mai pot utiliza și relațiile

$$X = (D_B + D_C)^{-1} \cdot C,$$
$$X = E - D_A^{-1} \cdot C, \tag{7}$$

unde

$C = \{c_{ij}\}$ este matricea deplasărilor c_{ij} ale sistemului combinat sub acțiunea lui $P = 1$, iar E matricea unitară.

În cazurile cele mai frecvente se admite $D_c \simeq 0$ (barele de legătură fiind incompresibile, cu excepția sistemelor suspendate).

Relațiile (4) și (7) trebuie să fie compatibile pentru a rezulta o soluție unică pentru matricea X.

Deoarece matricele D_A, D_B, D_C și C se obțin din măsurători experimentale, ele sînt afectate de erori, ceea ce conduce la nesatisfacerea condițiilor de compatibilitate

$$C^{-1} = D_A^{-1} + (D_B + D_C)^{-1}. \tag{8}$$

Pentru a avea asigurată condiția (8) este necesară ajustarea matricelor primare D_A, D_B, D_C și C astfel:

$$\overline{D}_A = [C^{-1} - (D_B + D_C)^{-1}]^{-1},$$

$$\overline{D_B + D_C} = [C^{-1} - D_A^{-1}]^{-1}, \tag{9}$$

$$\overline{C} = [2C^{-1} - D_A^{-1} - (D_B + D_C)^{-1}]^{-1}.$$

Matricele ajustate D_A, $\overline{D_B + D_C}$ și C vor satisface relația (8).

Tehnica actuală a măsurătorilor pe modele reduse permite determinarea suficient de precisă a deplasărilor δ, dar nu și a rotirilor φ. Din această cauză, determinarea momentelor pe barele de legătură, respectiv a matricei Y, se va face în alt mod, și anume prin încercarea a două modele similare în primul cu barele de legătură articulate, al doilea având barele de legătură încastrate. Matricea de deformabilitate a sistemului combinat a primului model este C, iar a modelului secund este C'. Matricea $\Delta = C - C'$, în cazul sistemului static pentru care se poate face separarea lui X de Y ($M = 0$), este determinată numai de momentele care apar pe barele de legătură. Evident că $C' < C$, datorită rigidității sporite prin încovoierea barelor de legătură. Astfel, conform figurii 2 avem

$$\Delta = \{c_{ij} - c'_{ij}\} = \{t_{ij}\}, \tag{10}$$

$$t_{ij} = \sum_{K=1} \int \frac{Y_{Ki} \cdot Y_{Kj}}{EI} \, ds. \tag{11}$$

Suma se extinde asupra tuturor barelor de legătură:

$$\int \frac{Y_{Ki} \cdot Y_{Kj}}{EI} \, ds = \frac{l_K}{GEI_K} [(2Y_{Ki} - Y'_{Ki}) \cdot Y_{Kj} - (Y_{Ki} - 2Y'_{Ki}) \cdot Y_{Kj}]. \tag{12}$$

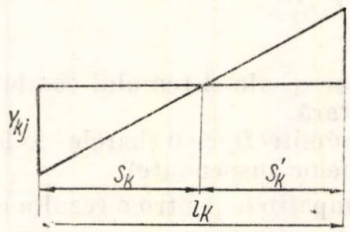


Fig. 2. — Eforturile Y_{Ki} (momente) pe barele de legătură.

Introducînd $Y'_{K1} = \alpha_{K1} Y_{K1}$ obținem (13)

$$\int \frac{Y_{Ki} \cdot Y_{Kj}}{EI} \, ds = \frac{l_K}{GEI_K} [2(1 + \alpha_{Ki} \cdot \alpha_{Kj}) - \alpha_{Ki} - \alpha_{Kj}] \cdot Y_{Ki} \cdot Y_{Kj}, \tag{14}$$

Notînd

$$\gamma_{ij}^{K} = \frac{l_K}{GEI_K} \cdot [2\,(1 + \alpha_{Ki} \cdot \alpha_{Kj}) - \alpha_{Ki} - \alpha_{Kj}], \tag{15}$$

vom avea

$$t_{ij} = \sum_{K=1} \gamma_{ij}^{K} \cdot Y_{Ki} \cdot Y_{Kj} \tag{16}$$

sau

$$\Delta = Y^* \cdot \Gamma \cdot Y. \tag{17}$$

Coeficienții α_{Ki} se determină pe modele fotoelastice prin măsurarea lui s'_{Ki} și s'_{Kj}. Matricea Γ este dreptunghiulară de ordinul $n^2 \times n$; pentru cazul general, ecuația matriceală (17) este nedeterminată. Matricea necunoscută Y poate fi determinată numai pentru cazul cînd Γ este o matrice pătrată. Eforturile de legătură Y sînt secundare în raport cu X, deci pentru evaluarea lor este admisibilă simplificarea

$$\alpha_{Ki} = \alpha_{Kj} = \ldots = \alpha_K. \tag{18}$$

În acest fel, matricea Γ devine pătrată de ordinul $n \times n$ și diagonală, avînd numai coeficienți γ_K.

Simplificarea (18) nu modifică substanțial valoarea lui Y_{ij}, deoarece nici valoirle α_{Ki} nu variază în limite prea mari.

Rezolvarea ecuației (17) se conduce astfel: matricea Δ se scrie sub forma

$$\Delta = V^* \cdot L \cdot V, \tag{19}$$

unde

V este matricea vectorilor proprii ai lui Δ și L matricea diagonală formată din valorile proprii a lui Δ.

Astfel ecuația (1.27) devine

$$V^* \cdot L \cdot V = Y^* \cdot \Gamma \cdot Y \tag{20}$$

sau

$$V^* \cdot L^{1/2} \cdot L^{1/2} \cdot V = Y^* \cdot \Gamma^{1/2} \cdot \Gamma^{1/2} \cdot Y, \tag{20'}$$

de unde

$$L^{1/2}\, V = \Gamma^{1/2} \cdot Y \tag{20''}$$

și

$$Y = (\Gamma^{1/2})^{-1} \cdot L^{1/2} \cdot V \tag{20'''}$$

Pentru ca soluția (20''') să fie reală, trebuie ca matricea Δ să fie pozitiv definită (toate valorile proprii să fie pozitive).

Principala dificultate în rezolvarea ecuației (19) o constituie determinarea valorilor proprii și a vectorilor proprii ai matricei Δ. Această ope-

rație este posibilă numai cu ajutorul calculatoarelor electronice, prin metoda ortogonalizărilor succesive sau a rotațiilor succesive.

De altfel și pentru calculul lui X este nevoie de inversarea unor matrice, operație ce se execută comod numai cu ajutorul calculatoarelor electronice.

Pentru sistemele statice la care $H \neq 0$ se va aplica algoritmul indicat la (5), pornind cu valorile lui X și Y determinate ca mai sus. De observat că în acest caz matricea H se determină tot experimental, măsurînd deplasările η_i' produse de cupluri unitare în nodurile j.

3. EXEMPLUL UNUI CADRU-DIAFRAGMĂ

În cele ce urmează se arată un exemplu de utilizare a modelului la scară redusă pentru determinarea eforturilor din barele de legătură ale unui sistem static combinat sub acțiunea sarcinilor orizontale în noduri.

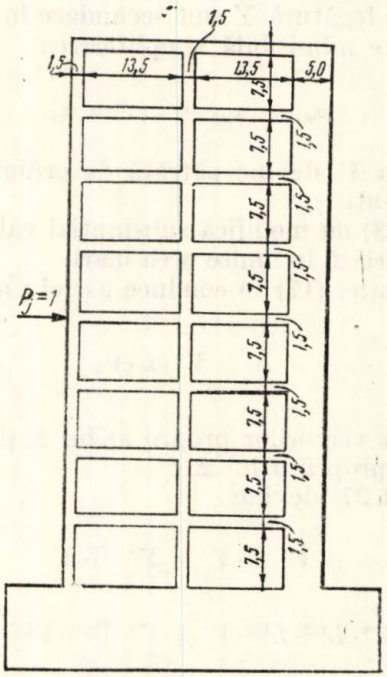


Fig. 3. — Modelul unui cadru-diafragmă (scara 1 :30).

În figura 3 este arătat modelul unui cadru-diafragmă executat din plexiglas cu opt nivele. Structura este alcătuită dintr-un cadru-scară (cu o deschidere) și o diafragmă plină legată de cadru prin rigle încastrate în diafragmă și cadru.

Modelul a fost încărcat cu o sarcină $P = 2{,}33$ kg în fiecare nod, măsurîndu-se deplasările cu ajutorul unor microcomparatoare de precizia

1/1000 mm (fig. 4.) Modulul de plasticitate al plexiglasului modelului a fost de 33 200 kgf/cm^2. Precizia măsurătorilor a fost între 1 şi 6%.

Pentru a se obţine matricea Δ, după măsurătorile pe modelul cu barele încastrate (matricea C') s-a trecut la realizarea articulaţiilor prin creşterea barei în secţiunea de îmbinare cu diafragma şi cu cadrul.

Prin îndepărtarea definitivă a barelor s-au măsurat săgeţile pe cadrul simplu şi pe diafragmă (fig. 5). Ţinînd cont de rigiditatea barelor de legătură, s-a considerat $D_C = 0$.

Matricele de deformabilitate obţinute în urma măsurătorilor sînt următoarele :

$$D_A = \begin{matrix} 2690 & 2350 & 1940 & 1520 & 1100 & 780 & 430 & 140 \\ 2350 & 2150 & 1860 & 1480 & 1080 & 760 & 420 & 132 \\ 1940 & 1860 & 1670 & 1360 & 1050 & 740 & 400 & 130 \\ 1520 & 1480 & 1360 & 1200 & 960 & 721 & 370 & 120 \\ 1100 & 1080 & 1050 & 960 & 890 & 710 & 340 & 112 \\ 780 & 760 & 740 & 725 & 710 & 560 & 320 & 103 \\ 430 & 420 & 400 & 370 & 340 & 320 & 250 & 91 \\ 140 & 132 & 130 & 120 & 112 & 103 & 91 & 44 \end{matrix} \times 10^{-4} \text{ cm},$$

$$D_B = \begin{matrix} 7825 & 6400 & 5150 & 3815 & 2600 & 1590 & 708 & 180 \\ 6400 & 5300 & 4225 & 3210 & 2200 & 1370 & 612 & 157 \\ 5150 & 4225 & 3350 & 2604 & 1825 & 1140 & 516 & 135 \\ 3820 & 3212 & 2604 & 2000 & 1430 & 903 & 420 & 111 \\ 2600 & 2200 & 1825 & 1430 & 1050 & 690 & 324 & 88 \\ 1590 & 1370 & 1140 & 903 & 690 & 480 & 228 & 65 \\ 708 & 612 & 516 & 420 & 324 & 223 & 132 & 42 \\ 180 & 157 & 135 & 111 & 88 & 65 & 42 & 20 \end{matrix} \times 10^{-4} \text{ cm},$$

$$C = \begin{matrix} 1400 & 1180 & 940 & 705 & 520 & 310 & 145 & 45 \\ 1180 & 1050 & 820 & 660 & 450 & 270 & 140 & 41 \\ 940 & 820 & 720 & 575 & 370 & 225 & 125 & 38 \\ 705 & 660 & 575 & 516 & 380 & 220 & 122 & 36 \\ 520 & 450 & 370 & 380 & 315 & 200 & 117 & 34 \\ 310 & 270 & 225 & 220 & 200 & 171 & 100 & 30 \\ 145 & 140 & 125 & 122 & 117 & 100 & 67 & 24 \\ 45 & 41 & 38 & 36 & 34 & 30 & 24 & 18 \end{matrix} \times 10^{-4} \text{ cm},$$

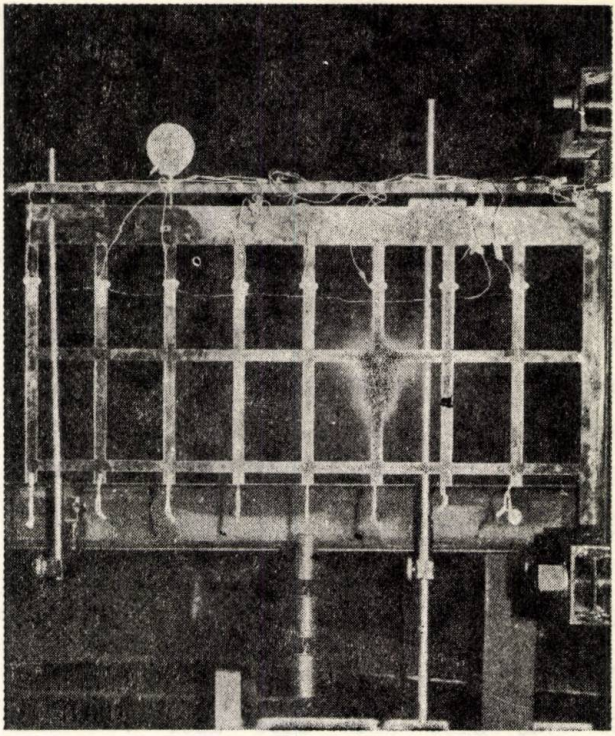


Fig. 4. — Încercarea modelului cadru-diafragmă.

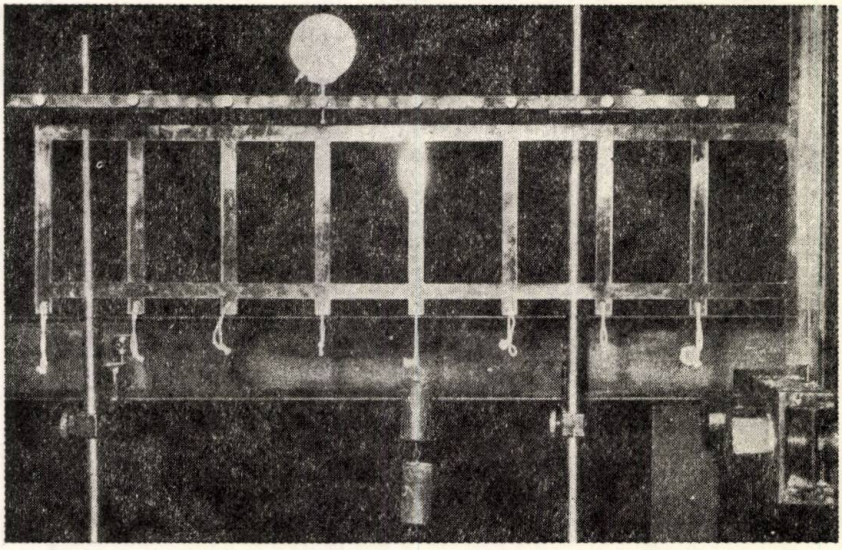


Fig. 5. — Încercarea modelului cadru simplu.

$$\Delta = \begin{matrix} 415 & 375 & 320 & 250 & 175 & 110 & 60 & 18 \\ 375 & 340 & 290 & 235 & 170 & 100 & 50 & 16 \\ 320 & 290 & 260 & 215 & 160 & 90 & 42 & 15 \\ 250 & 235 & 215 & 190 & 145 & 83 & 37 & 14 \\ 175 & 170 & 160 & 145 & 117 & 75 & 32 & 13 \\ 110 & 100 & 90 & 83 & 75 & 55 & 27 & 12 \\ 60 & 50 & 42 & 37 & 32 & 27 & 20 & 18 \\ 18 & 16 & 15 & 14 & 13 & 12 & 10 & 7 \end{matrix} \times 10^{-4}\text{cm}.$$

Matricea necunoscută X rezultă din relaţia (4):

$$X = (D_A + D_B)^{-1} \cdot D_A$$

$$X = \begin{matrix} 0{,}195 & -1{,}306 & 1{,}109 & 0{,}369 & 0{,}545 & -0{,}351 & -0{,}214 & -0{,}061 \\ 0{,}364 & 3{,}150 & 3{,}172 & -1{,}040 & 0{,}820 & 0{,}429 & 0{,}458 & 0{,}120 \\ -0{,}473 & -1{,}288 & 2{,}851 & 0{,}946 & -0{,}661 & 0{,}058 & -0{,}231 & -0{,}047 \\ 0{,}552 & -0{,}856 & 0{,}023 & -0{,}150 & 0{,}241 & -0{,}256 & -0{,}112 & -0{,}037 \\ 0{,}106 & 1{,}150 & 0{,}086 & 0{,}763 & 1{,}517 & 0{,}106 & 0{,}099 & 0{,}007 \\ -0{,}567 & -0{,}436 & -0{,}585 & -0{,}404 & -1{,}046 & -0{,}805 & -0{,}078 & 0{,}010 \\ 0{,}833 & 0{,}124 & 1{,}163 & 0{,}487 & 0{,}362 & -0{,}305 & 0{,}789 & 0{,}044 \\ -0{,}329 & 0{,}757 & -1{,}662 & -0{,}534 & 0{,}177 & 0{,}490 & 0{,}118 & 0{,}648 \end{matrix}$$

Componentele X_{ij} sînt exprimate în kgf pentru sarcina $P = 1$ kgf.

Pentru a rezolva ecuaţia matriceală (17) s-au determinat valorile proprii şi vectorii proprii pentru matricea Δ. Calculul s-a efectuat cu calculatorul electronic MECIPT—2 prin metoda rotaţiilor succesive, obţinîndu-se valorile proprii

3,49; 6,05; 1 306,96; 7,29; 1,54; 66,15; 27,17; 0,06;

şi următoarea matrice a vectorilor proprii:

$$V = \begin{matrix} -0{,}1879 & -0{,}0004 & 0{,}5535 & 0{,}5270 & 0{,}2178 & -0{,}4660 & 0{,}2723 & 0{,}2052 \\ 0{,}5366 & 0{,}2970 & 0{,}5057 & -0{,}3400 & -0{,}3578 & -0{,}2706 & -0{,}0060 & -0{,}2263 \\ -0{,}6500 & -0{,}2810 & 0{,}4435 & -0{,}4348 & -0{,}1014 & 0{,}0233 & -0{,}2938 & -0{,}1255 \\ 0{,}4249 & -0{,}2810 & 0{,}3660 & -0{,}0225 & 0{,}4008 & 0{,}3890 & -0{,}3647 & 0{,}4014 \\ -0{,}0601 & 0{,}1720 & 0{,}2706 & 0{,}5282 & -0{,}2170 & 0{,}5878 & -0{,}0849 & -0{,}4636 \\ -0{,}2004 & 0{,}4916 & 0{,}1634 & -0{,}2951 & 0{,}0315 & 0{,}4290 & 0{,}5067 & 0{,}4034 \\ 0{,}1438 & -0{,}4202 & 0{,}0808 & -0{,}2010 & 0{,}3854 & 0{,}1185 & 0{,}5906 & -0{,}4944 \\ 0{,}0969 & -0{,}5534 & 0{,}0278 & 0{,}1035 & -0{,}6761 & 0{,}1192 & 0{,}3062 & 0{,}3284. \end{matrix}$$

Deoarece eforturile Y (momente pe barele de legătură) sînt secundare, pentru determinarea calitativă (a ordinului de mărime) a acestora s-a admis luare în considerare a valorilor medii pentru coeficienţii α, determinaţi pe modelul fotoelastic astfel:

$$\alpha_K = 1{,}00;\ 1{,}50;\ 2{,}25;\ 1{,}50;\ 1{,}00;\ 1{,}75;\ 1{,}25;\ 1{,}00,$$

cărora le vor corespunde coeficienţii γ

$$2{,}00;\ 3{,}50;\ 7{,}60;\ 3{,}50;\ 2{,}00;\ 4{,}60;\ 2{,}62;\ 2{,}00,$$

multiplicaţi cu coeficientul $\frac{1}{GEI}$.

Din relaţia (20''') rezultă matricea necunoscută Y

$$Y = \sqrt{\frac{GEI}{l \cdot P}} \cdot \Gamma^{-\frac{1}{2}} \cdot L^{\frac{1}{2}} \cdot V \qquad (20''')$$

unde P = mărimea în kgf a sarcinii de solicitare a modulului:

$$P = 2{,}33 \text{ kgf}$$

sau

$$Y = \begin{matrix} -0{,}2483 & -0{,}0005 & 0{,}7320 & 0{,}6960 & 0{,}2880 & -00{,}615 & 0{,}3600 & 0{,}2710 \\ 0{,}7060 & 0{,}3910 & 0{,}6650 & -0{,}4480 & -0{,}4710 & -0{,}3560 & -0{,}0079 & -0{,}2980 \\ -8{,}5000 & -3{,}7100 & 5{,}8000 & -5{,}6800 & -1{,}3250 & 0{,}3220 & -3{,}8400 & -1{,}6420 \\ 0{,}6140 & -0{,}4500 & -0{,}5280 & -0{,}0325 & 0{,}5800 & 0{,}5620 & 0{,}5270 & 0{,}5800 \\ -0{,}0526 & 0{,}1317 & 0{,}2370 & 0{,}4630 & -0{,}1900 & 0{,}5150 & -0{,}0744 & -0{,}4070 \\ -0{,}7080 & 1{,}8650 & 0{,}6190 & -1{,}1180 & -0{,}1194 & 1{,}6300 & 1{,}9200 & 1{,}5300 \\ 0{,}4620 & -1{,}3500 & 0{,}2600 & -0{,}6450 & 1{,}2350 & 0{,}3810 & 1{,}8950 & -1{,}5850 \\ 0{,}0171 & -0{,}0976 & 0{,}0049 & 0{,}0183 & -0{,}1193 & 0{,}0210 & 0{,}0541 & 0{,}0580 \end{matrix}$$

Valorile sînt exprimate în $\frac{\text{kgf cm}}{\text{kgf}}$ și trebuie multiplicate cu $39{,}4 \cdot 10^{-2}$.

4. CONCLUZII

Rezultă că utilizarea modelelor este eficace și avantajoasă în cazul unui număr mare de legături și mai ales cînd structurile componente ale sistemului static combinat sînt, la rîndul lor, complexe sau nu pot fi reduse la scheme statice simple. De remarcat însă că utilizarea modelelor pentru determinarea eforturilor de legătură nu poate constitui un mijloc practic și eficace fără utilizarea calculatoarelor electronice. Metoda utilizării concomitente a modelelor și a calculatoarelor electronice devine o problemă de actualitate în calculul structurilor, determinată de dezvoltarea tehnicii măsurătorilor de precizie pe modele și de răspîndirea calculatoarelor electronice.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Beaujoint N., *Similitude et théorie des modèles*, Bul. RILEM, 7, (1960).
2. Charlton T. M., *Model Analysis of Plane Structures* Londra, Pergamon Press, 1966.
3. Fadeev D. K., *Vtcialitelntie methodt lineinoi alghebrt*, Fizmatghiz, 1960.
4. Fink K., Rohrbach C., *Handbuch der Spannungs-und Dehnungsmessungen*, Düsseldorf, VDI Verlag, 1968.
5. Mazilu P., *Statica construcțiilor* vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
6. Ricaldoni I., *Curso de analisis experimental de structures*, Publication del Instituto de estetica, Montevideo, 1957.

CERCETĂRI PRIVIND CONSTRUCȚIA UNUI DINAMOMETRU PENTRU STUDIEREA CELOR TREI COMPONENTE ALE FORȚEI DE AȘCHIERE

de GHEORGHE ZGURĂ, CONSTANTIN ISPAS

Institutul politehnic București

Lucrarea prezintă studiul unui dinamometru destinat măsurării simultane și independente a celor trei componente ale forței de așchiere. Studiul se referă la schema de montare a traductorilor tenzometrici și la verificarea de rezistență și de rigiditate ale dinamometrului.

Pentru a aprecia comportarea dinamică a sistemului tehnologic la prelucrarea prin așchiere, este necesar să se cunoască mărimea forțelor care iau naștere în procesul de lucru. Determinarea acestor forțe se face cu ajutorul unor dinamometre de construcție specială, adecvate modului de generare a suprafeței și sistemului de referință al mașinii-unelte.

În cele ce urmează se prezintă un dinamometru cu traductori tensometrici de construcție originală, utilizat pentru măsurarea forțelor de așchiere în cazul frezării. Dinamometrul permite măsurarea simultană a celor trei componente ale forței de așchiere, fără influența lor reciprocă. Construcția deosebită a dinamometrului permite studierea comportării dinamice a sistemului tehnologic pentru diferite rigidități ale piesei de prelucrat prin așezarea dinamometrului pe masa mașinii pe suprafața A, B sau C (fig. 1) și prin modificarea lungimii în consolă a piesei.

Piesa de prelucrat (fig. 2) are forma unei bare de secțiune dreptunghiulară și se fixează în dinamometru cu ajutorul a trei șuruburi M 16.

Dinamometru este construit pe principiul elementului elastic circular. Acest principiu constă în următoarele :

Dacă asupra inelului din figura $3a$ acționează o forță radială P, în punctele *1* și *4* (secțiunea I —II) iau naștere eforturi unitare maxime de întindere, iar în punctele *2* și *3* de compresiune. Lipind în aceste locuri mărci tensometrice sub influența forței aplicate P, rezistența electrică a mărcilor *1* și *4* se va mări, iar a mărcilor *2* și *3* se va micșora. Prin legarea acestor mărci în punte Wheatstone, această variație a rezistenței mărcilor va provoca în diagonala de măsurare AB un dezechilibru ΔU_{AB}.

Diferența de potențial U_{AB} dintre capetele diagonalei punții Wheatstone se poate calcula cunoscînd tensiunea de alimentare E și rezistențele mărcilor R_1, R_2, R_3 și R_4:

$$U_{AB} = \frac{ER_1}{R_1 + R_3} - \frac{ER_2}{R_2 + R_4}. \tag{1}$$

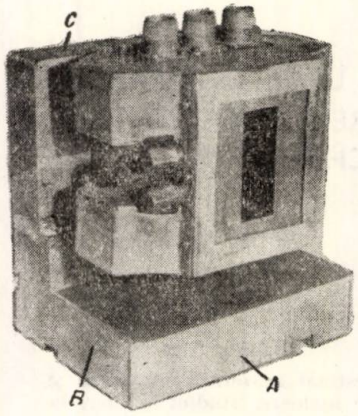


Fig. 1

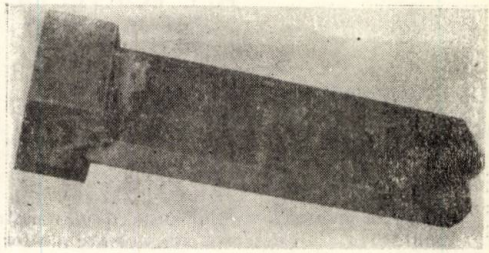


Fig. 2

În momentul aplicării forței P, mărcile își modifică rezistența electrică, ceea ce va conduce la crearea unei diferențe de potențial suplimentare ΔU_{AB}, care se poate calcula din expresia funcției diferenței de potențial $U_{AB} = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$. Astfel, dezechilibrul punții de măsurare

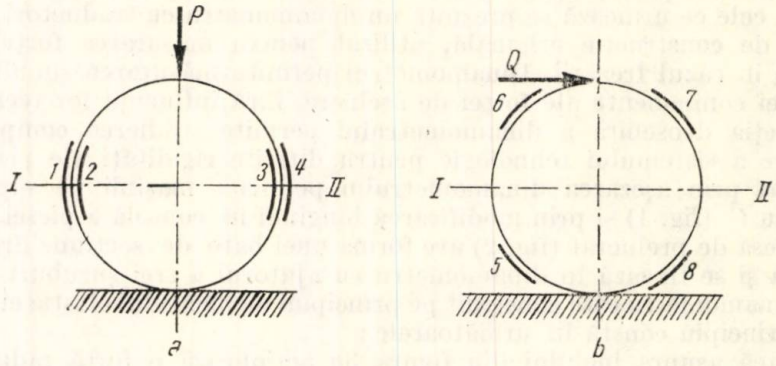


Fig. 3

se poate determina prin intermediul diferențialei totale a funcției U_{AB}, considerînd variabile rezistențele R_1, R_2, R_3, R_4 prin aplicarea forței P:

$$\mathrm{d}U_{AB} = \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_1}\mathrm{d}R_1 + \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_2}\mathrm{d}R_2 + \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_3}\mathrm{d}R_3 + \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_4}\mathrm{d}R_4. \tag{2}$$

Aplicînd formula diferențialei totale (2) expresiei (1), se obține

$$dU_{AB} = E\left[\frac{R_3}{(R_1+R_3)^2}dR_1 - \frac{R_4}{(R_2+R_4)^2}dR_2 - \right.$$

$$\left. - \frac{R_1}{(R_1+R_3)^2}dR_3 + \frac{R_2}{(R_2+R_4)^2}dR_4\right]. \qquad (3)$$

Făcînd observația că mărcile tensometrice se aleg cu rezistență egală R pentru a putea echilibra puntea Wheatstone și scriind expresia (3) cu creșteri finite, se ajunge la

$$\Delta U_{AB} = \frac{E}{2R}(\Delta R_1 + \Delta R_4 - \Delta R_2 - \Delta R_3). \qquad (4)$$

Dar, cum mărcile *1* și *4* sînt întinse, iar *2* și *3* comprimate, au aceeași bază și sînt simetric dispuse, rezultă că între variațiile de rezistență ale lor există relația

$$|\Delta R_1| = |\Delta R_2| = |\Delta R_3| = |\Delta R_4| = \Delta R. \qquad (5)$$

Cu aceste considerente, expresia (4) devine

$$\Delta U_{AB} = \frac{2E}{R}\Delta R. \qquad (6)$$

Rezultă deci că sensibilitatea măsurării depinde de numărul mărcilor tensometrice, de modul de dispunere a lor pe elementul elastic și de poziția lor reciprocă în puntea Wheatstone.

Dacă asupra elementului elastic circular (fig. 3*b*) acționează forța tangențială Q, aceasta va produce în punctele *5* și *7* eforturi de întindere, iar în *6* și *8* de compresiune. Lipind în aceste puncte mărcile tensometrice R_5, R_6, R_7, R_8 și legîndu-le în punte Wheatstone, se obține în diagonala de măsurare un dezechilibru $\Delta' U_{AB}$:

$$\Delta' U_{AB} = \frac{E}{2R}[\Delta R_6 + \Delta R_7 - \Delta R_5 - \Delta R_8]. \qquad (7)$$

Dar, cum

$$|\Delta R_6| = |\Delta R_7| = |\Delta R_8| = |\Delta R_9| = \Delta' R, \qquad (8)$$

rezultă că

$$\Delta' U_{AB} = \frac{2E}{R}\Delta' R. \qquad (9)$$

Folosind principiul expus mai sus, s-a proiectat și s-a construit dinamometrul reprezentat schematic în figura 4, destinat măsurătorii componen-

telor forței de așchiere P_x, P_y și P_z (în desen se vede modul de acționare al lor asupra piesei de prelucrat).

Dinamometrul este construit din două elemente elastice I și II. Asupra acestor două elemente acționează forța de așchiere P, ale cărei componente trebuie măsurate.

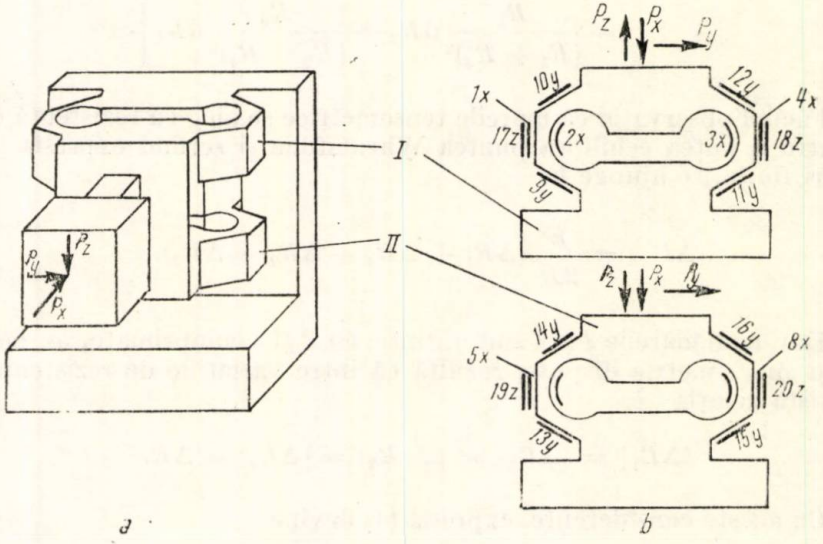


Fig. 4

Măsurarea componentei P_x. Componenta P_x exercită o acțiune de apăsare asupra celor două elemente elastice I și II. Ca urmare a acestei apăsări, în mărcile $1x$, $4x$, $5x$ și $8x$ iau naștere eforturi de întindere, iar în mărcile $2x$, $3x$, $6x$, $7x$, de compresiune. Cu aceste mărci se alcătuiește o punte Wheatstone, așa cum se arată în figura 5*a*.

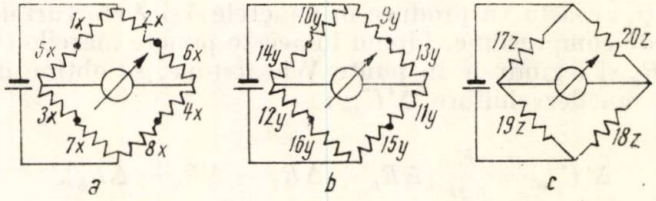


Fig. 5

Dezechilibrul care apare în diagonala de măsurare prin variația rezistenței celor opt mărci tensometrice va fi

$$\Delta U_{P_x} = \frac{E}{2R}(\Delta R_1 + \Delta R_4 + \Delta R_5 + \Delta R_8 - \\ - \Delta R_2 - \Delta R_3 - \Delta R_6 - \Delta R_7). \tag{10}$$

Deoarece mărcile sînt dispuse simetric pe elementele elastice și au aceeași bază, rezultă

$$|\Delta R_1| = |\Delta R_4| = |\Delta R_5| = |\Delta R_8| = |\Delta R_2| =$$

$$= |\Delta R_3| = |\Delta R_6| = |\Delta R_7| = \Delta R. \qquad (11)$$

Înlocuind în (10), obținem

$$\Delta U_{P_x} = \frac{4E}{R} \Delta R. \qquad (12)$$

Rezultă deci că legarea în punte de măsurare a mărcilor tensometrice $R_1 - R_8$ s-a făcut în așa fel, încît variația de sens contrar a rezistențelor din brațele opuse să ducă la mărirea sensibilității de măsurare.

În cazul în care asupra dinamometrului acționează componenta P_y, mărcile $2x$, $4x$, $6x$ și $8x$ sînt supuse la întindere, iar $1x$, $3x$, $5x$ și $7x$ la compresiune. Dezechilibrul care apare în diagonala punții de măsurare a componentei P_x ca urmare a acțiunii lui P_y va fi

$$\Delta' U_{P_x} = \frac{E}{2R} (\Delta' R_1 + \Delta' R_4 + \Delta' R_5 + \Delta' R_8 -$$

$$- \Delta' R_2 - \Delta' R_3 - \Delta' R_6 - \Delta' R_7). \qquad (13)$$

Dar

$$|\Delta' R_2| = |\Delta' R_4| = |\Delta' R_6| = |\Delta' R_8| = |\Delta' R_1| =$$

$$= |\Delta' R_3| = |\Delta' R_5| = |\Delta' R_7| = \Delta' R, \qquad (14)$$

pe considerentele indicate mai sus. Dacă înlocuim aceste egalități în (13), rezultă

$$\Delta' U_{P_x} = 0.$$

Se poate trage deci concluzia că componenta P_y nu influențează asupra indicațiilor punții de măsurare a componentei P_x.

Dacă însă asupra dinamometrului acționează componenta P_z, aceasta provoacă în mărcile $1x$, $4x$, $6x$ și $7x$ eforturi de întindere, iar în mărcile $2x$, $3x$, $5x$ și $8x$ eforturi de compresiune.

Dezechilibrul care apare la puntea de măsurare a componentei P_x ca urmare a acțiunii lui P_z va fi

$$\Delta'' U_{P_x} = \frac{E}{2R} [\Delta' R_1 + \Delta'' R_4 + \Delta'' R_5 +$$

$$+ \Delta'' R_8 - \Delta'' R_2 - \Delta'' R_3 - \Delta'' R_6 - \Delta'' R_8]; \qquad (15)$$

însă

$$|\Delta''R_1| = |\Delta''R_4| = |\Delta''R_6| = |\Delta''R_7| = |\Delta'' R_2| = |\Delta'' R_3| = \\ = |\Delta''R_5| = |\Delta''R_8| = \Delta''R, \tag{16}$$

rezultă deci

$$\Delta''U_{P_x} = 0,$$

ceea ce demonstrează că nici componenta P_z nu influenţează asupra indicaţiilor punţii de măsurare a componentei P_x.

Măsurarea componentei P_y. Componenta P_y a efortului de aşchiere produce în mărcile tensometrice $9y$, $12y$ $13y$ şi $16y$ eforturi de întindere, iar în mărcile $10y$, $11y$, $14y$ şi 15 y eforturi de compresiune (fig. 4*b*).

Legarea în punte Wheatstone a traductorilor tensometrici pentru măsurarea componentei P_y este arătată în figura 5*b*.

Ca urmare a acţiunii lui P_y, la diagonala de măsurare apare un dezechilibru ΔU_{P_y}:

$$\Delta U_{P_y} = \frac{E}{2R}(\Delta R_9 + \Delta R_{12} + \Delta R_{13} + \Delta R_{16} - \Delta R_{10} - \\ - \Delta R_{11} - \Delta R_{14} - \Delta R_{15}). \tag{17}$$

Cu consideraţiile făcute pentru componenta P_x, expresia (17) devine

$$\Delta U_{P_y} = \frac{4E}{R}\Delta R. \tag{18}$$

Prezenţa în acelaşi timp cu P_y a componentei P_x creează în toate mărcile tensometrice $9y$ — $15y$ eforturi de acelaşi sens şi aceeaşi mărime, dar dezechilibrul $\Delta' U_{P_y}$ produs în diagonala punţii de măsurare a componentei P_y este nul. Acest lucru este evident dacă în expresia (17) variaţia rezistenţei mărcilor se înlocuieşte cu

$$\Delta' R_9 = \Delta' R_{10} = \Delta' R_{11} = \Delta' R_{12} = \Delta' R_{13} = \Delta' R_{14} = \\ = \Delta' R_{15} = \Delta' R_{16} = \Delta' R.$$

Componenta P_z creează în mărcile tensometrice $9y$, $10y$, $11y$ şi $12y$ eforturi de întindere, iar în mărcile $13y$, $14y$, $15y$ şi $16y$ de compresiune, dar dezichilibrul $\Delta'' U_{P_y}$ produs în puntea de măsurare a componentei P_y va fi nul, deoarce variaţiile rezistenţelor traducătorilor dispuşi pe acelaşi braţ sînt de sensuri contrare şi egale în mărime.

Măsurarea componentei P_z. Componenta P_z (fig. 4*b*) a forţei de aşchiere provoacă întinderea elementului elastic superior şi compresiunea celui inferior, astfel că mărcile 17 z şi $18z$ vor fi supuse unor eforturi de întindere, iar $19z$ şi $20z$ de compresiune.

Prin legarea acestor mărci în puntea Wheatstone (fig. 5*c*), în diagonala de măsurare va apărea un dezechilibru de potențial ΔU_{P_z} :

$$\Delta U_{P_z} = \frac{E}{2R}(\Delta R_{17} + \Delta R_{18} - \Delta R_{19} - \Delta R_{20}). \tag{19}$$

Pe baza considerentelor enunțate și pentru celelalte componente rezultă

$$\Delta U_{P_z} = \frac{2E}{R}\Delta R. \tag{20}$$

Deoarece, datorită acțiunii componentei P_x, toate mărcile tensometrice destinate măsurării componentei P_z sînt supuse unor eforturi de întindere, iar

$$\Delta' R_{17} = \Delta' R_{18} = \Delta' R_{19} = \Delta' R_{20} = \Delta' R,$$

rezultă

$$\Delta' U_{P_z} = 0.$$

Componenta P_y produce în mărcile 17 z și 19z eforturi de întindere, iar în mărcile 18z și 20z eforturi de compresiune.

Dar dezechilibrul produs de P_y asupra indicațiilor punții de măsurare a componentei P_z este nul, deoarece variațiile de rezistență a traductorilor din două brațe opuse sînt de sensuri contrare, însă egale în mărime. Deci și

$$\Delta'' U_{P_z} = 0.$$

În acest fel, cele trei componente ale forței de așchiere pot fi măsurate independent, înlesnindu-se studiul fenomenelor pe cele trei direcții ale triedului de referință al mașinii-unelte.

Etalonarea dinamometrului s-a efectuat prin metoda directă cu ajutorul unui dinamometru-inel (fig. 6), iar în figurile 7*a* și *b* sînt prezentate curbele de etalonare pe direcțiile y și z.

Pentru a preveni ieșirea din domeniul de liniaritate a traductoarelor tensometrice și pentru a asigura o sensibilitate suficientă dinamometrului, s-a făcut verificarea de rezistență și s-au determinat deformațiile elementelor elastice în zonele periculoase.

În acest scop s-a adoptat schema reprezentată în figura 8. Se consideră că asupra fiecărui element elastic al dinamometrului acționează forța $P_{y/2}$. Reacțiunile exterioare vor fi

$$P_1 = 0,$$

$$Q_1 = P_{y/2},$$

$$M_1 = P_{y/2} \cdot H.$$

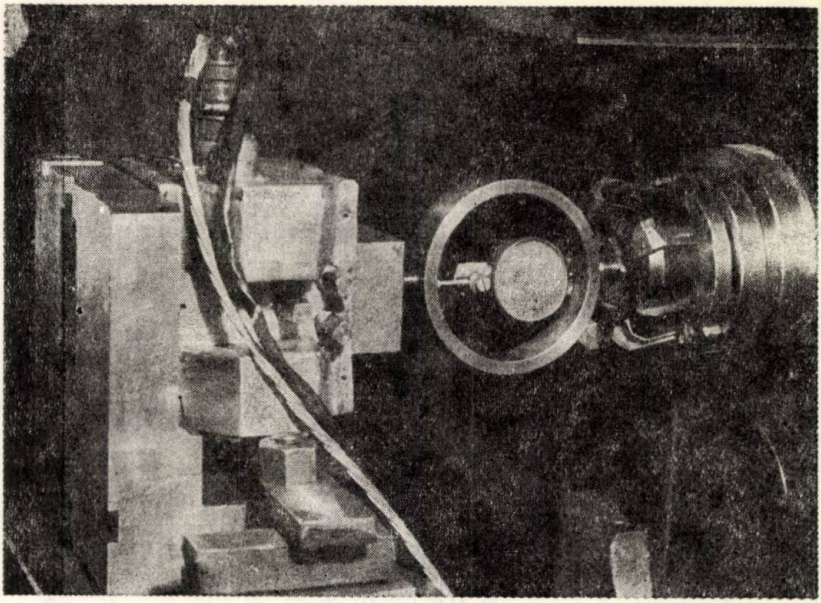


Fig. 6

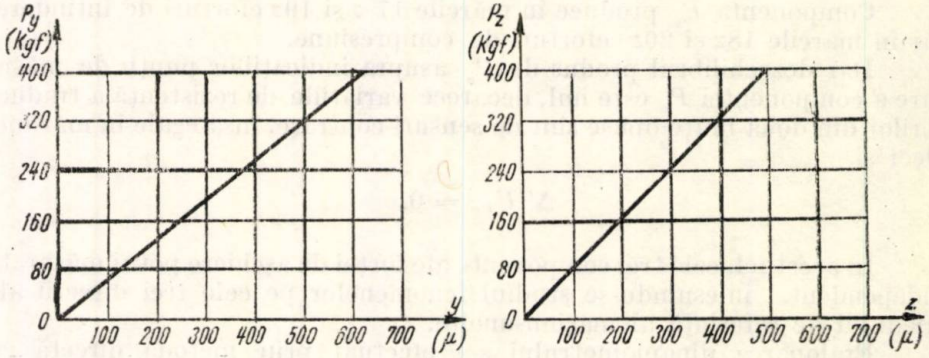


Fig. 7

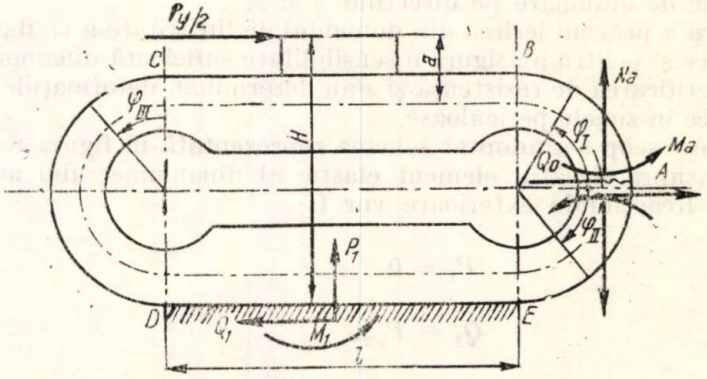


Fig. 8

Pentru a simplifica calculul se vor considera porțiunile BC și ED absolut rigide.

Într-o secțiune oarecare A a conturului elementului elastic acționează momentul M_a și forțele N_a și, Q_a. Pentru determinarea lor vom aplica teorema lui Castigliano.

În porțiunea I a elementului elastic va acționa momentul exprimat prin :

$$M(\varphi) = M_a + Q_a R_0 \sin \varphi - N_a R_0 (1 - \cos \varphi), \tag{21}$$

de unde

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = 1; \quad \frac{\partial M}{\partial Q_a} = R_0 \sin \varphi; \quad \frac{\partial M}{\partial N_a} = - R_0 (1 - \cos \varphi). \tag{22}$$

În porțiunea a II-a în mod analog avem

$$M(\varphi) = M_a - Q_a R_0 \sin \varphi - N_a R_0 (1 - \cos \varphi) \tag{23}$$

și

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = 1; \quad \frac{\partial M}{\partial Q_a} = - R_0 \sin \varphi; \quad \frac{\partial M}{\partial N_a} = - R_0 (1 - \cos \varphi), \tag{24}$$

iar în porțiunea a III-a

$$M(\varphi) = M_a - N_a (l + R_0 \sin \varphi + R_0) + Q_a R_0 \cos \varphi + P_{y/2} (a + R_0 - R_0 \cos \varphi), \tag{25}$$

și

$$\frac{\partial M}{\partial M_a} = 1; \quad \frac{\partial M}{\partial Q_a} R_0 \cos \varphi; \quad \frac{\partial M}{\partial N_a} = - (l + R_0 + R_0 \sin \varphi). \tag{26}$$

Pentru a determina pe M_a, Q_a și N_a se pun condițiile ca derivatele parțiale ale întregii energii de deformație a elementului elastic în raport cu M_a, Q_a și, respectiv, N_a să fie nule :

$$\theta = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M(\varphi)}{EI} \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_a} R_0 \, d\varphi = 0, \tag{27}$$

$$y_{\text{oriz}} = \frac{\partial U}{\partial Q_a} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M(\varphi)}{EI} \frac{\partial M(\varphi)}{\partial Q_a} R_0 \, d\varphi = 0, \tag{28}$$

$$y_{\text{vert}} = \frac{\partial U}{\partial N_a} = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{M(\varphi)}{EI} \cdot \frac{\partial M(\varphi)}{\partial N_a} R_0 \, d\varphi = 0. \tag{29}$$

Dacă se înlocuiesc în relaţiile (27), (28) şi (29) expresiile (21), (23) şi (25) ale momentelor încovoietoare din fiecare porţiune şi (22), (24) şi (26) ale derivatelor lor, după rezolvarea integralelor definite în domeniile corespunzătoare fiecărei porţiuni se obţine sistemul de ecuaţii

$$2\pi M_a - \pi (2R_0 + l) N_a = -\pi (a + R_0) P_{y/2};$$

$$\pi R_0 Q_a = \frac{\pi}{2} R_0 P_{y/2}, \tag{30}$$

$$-\pi (2R_0 + l) M_a + (3\pi R_0^2 + 4l R_0 + 2\pi l R_0) N_a =$$

$$= [\pi al + \pi l R_0 + (2 + \pi) a R_0 + (2 + \pi) R_0^2] P_{y/2}.$$

Rezolvînd sistemul, se determină valorile lui M_a, Q_a şi N_a :

$$M_a = \frac{1}{4}(a + R_0) \frac{(4 - \pi) R_0^2 + (\pi - 2) l R_0}{\pi R_0^2 + 4l R_0 + \frac{\pi}{2} l^2} P_y,$$

$$Q_a = \frac{1}{4} P_y, \tag{31}$$

$$N_a = \frac{1}{2} \cdot \frac{(a + R_0)\left(\frac{\pi}{2} l + 2R_0\right)}{\pi R^2 + 4lR_0 + \frac{\pi}{2} l^2} P_y.$$

Dacă asupra dinamometrului va acţiona forţa P_x şi dacă porţiunile BC şi DE vor fi socotite de asemenea absolut rigide, atunci se poate face un studiu orientativ, considerînd elementul elastic ca fiind un inel cilindric asupra căruia va acţiona forţa respectivă (fig. 9). Din motive de simetrie, calculul se poate face pe un sfert de inel, considerîndu-l o bară curbă încastrată în B (fig. 9*b*).

Necunoscuta M_a se determină utilizînd din nou teorema lui Castigliano, adică se pune condiţia ca unghiul de rotire al barei în dreptul cuplului M_a fie egal cu 0 (zero) :

$$\theta_A = \frac{\partial U}{\partial M_a} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{M(\varphi)}{EI} \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_a} R_0 \, d\varphi = 0. \tag{32}$$

Momentul încovoietor $M(\varphi)$ are expresia

$$M(\varphi) = M_a - \frac{P_x}{8} R_0 (1 - \cos \varphi) \quad \text{şi} \quad \frac{\partial M(\varphi)}{\partial M_a} = 1. \tag{33}$$

Înlocuind în relația (32), se obține

$$\frac{1}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left[M_a - \frac{P_x}{8}R_0(1-\cos\varphi)\right]R_0\,d\varphi = 0$$

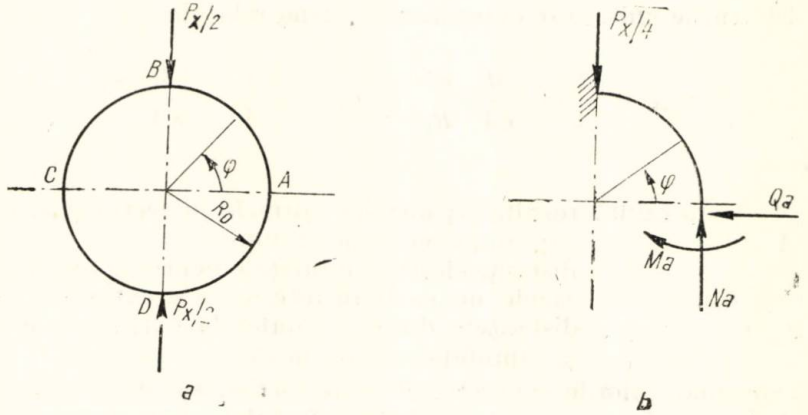


Fig. 9

și

$$M_a = \frac{1}{8}P_x R_0\left(1-\frac{2}{\pi}\right) = 0{,}045\,P_x R_0. \qquad (34)$$

În secțiunea B deci

$$M_B = M_a - \frac{P_x}{8}R_0(1-\cos\varphi) = -0{,}080\,P_x R_0$$

și

$$N_B = \frac{P}{8}\cos\varphi = 0.$$

În secțiunea inelului corespunzătoare lui $\varphi = 50°\ 30'$, momentul încovoietor este egal cu zero. Încărcarea cu această forță P_x este periculoasă în secțiunea B, unde momentul încovoietor are valoarea sa maximă $M_B = -0{,}080\,P_x R_0$, chiar dacă forța normală este egală cu zero.

Luîndu-se în considerație și componenta P_z, se poate vedea că natura influenței sale este asemănătoare cu cea a forței P_x. Pentru elementul elastic II al dinamometrului va avea loc o suprapunere de efecte a celor două componente, iar pentru elementul elastic I, efectul celor două componente fiind contradictoriu. Pe baza calculelor efectuate s-au construit diagramele momentelor încovoietoare, ale forțelor normale și ale celor tangențiale pentru fiecare caz în parte. Prin suprapunerea lor s-a constatat că secțiunea periculoasă pentru dinamometru este în planul B al elementului elastic II.

Considerîndu-se un proces de aşchiere cu următorii parametri maximi: avansul $s_z = 0{,}17$ mm/dinte, adîncimea de aşchiere $t = 5$ mm, viteza de aşchiere $v = 200$ m/min şi lăţimea de frezare $B = 75$ mm cu o freză frontală avînd diametrul $D = 100$ mm şi 17 dinţi, pe baza relaţiilor din teoria aşchierii se determină $P_x = 500$ kgf, $P_y = 1\,100$ kgf şi $P_z = 1\,000$ kgf.

Eforturile unitare se determină utilizînd relaţiile [1]

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{eA}\frac{d_1}{R_1} \text{ şi } \sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{eA}\frac{d_2}{R_2},$$

unde

N	reprezintă	rezultanta forţelor normale în secţiune în kgf,
A	—	suprafaţa secţiunii, în mm^2,
e	—	distanţa dintre suprafeţele neutre şi axiale, în mm,
R_1, R_2	—	razele de curbură interioare şi exterioare, în mm,
d_1, d_2	—	distanţele dintre suprafeţele extreme ale inelului şi suprafaţa neutră, în mm.

Înlocuind valorile concrete ale construcţiei, s-a determinat $\sigma_{max} = 16$ kgf/mm^2 şi $\sigma_{min} = -13{,}05$ kgf/mm^2, valori care se încadrează în limitele admise.

Folosind legea lui Hooke, se poate constata că şi deformaţiile elastice din zonele de dispunere a mărcilor se află sub valoarea admisă pentru acestea ($5\,10^{-3}$ [2]).

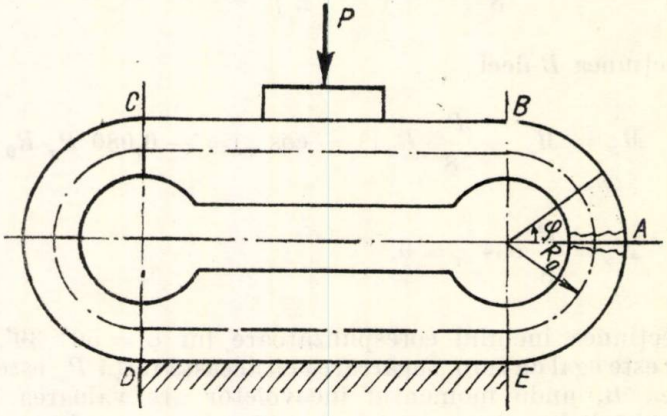


Fig. 10

Verificarea de rigiditate a dinamometrului se efectuează determinînd deplasarea pe verticală a punctului B faţă de E (fig. 10) sub acţiunea forţei normale P. Pentru aceasta se utilizează expresia energiei de deformaţie:

$$U = \int_s \frac{M^2\,ds}{2EI} + \int_s \frac{N^2\,ds}{2EA} + \int_s \frac{NM\,ds}{EAR_0}. \qquad (35)$$

Față de punctul A avem

$$M(\varphi) = M_a - \frac{P}{2} R_0 (1 - \cos \varphi),$$
$$N(\varphi) = \frac{P}{2} \cos \varphi \tag{36}$$

și deplasarea punctului B față de E va fi

$$y = 2 \frac{\partial U}{\partial P/2} = 2 \left[\int_r \frac{M\, ds}{EI} \frac{\partial M}{\partial P/2} + \int_s \frac{N ds}{EA} \frac{\partial N}{\partial P/2} + \right.$$
$$\left. + \int \frac{M\, ds}{EA\, R_0} \frac{\partial N}{\partial P/2} + \int_s \frac{N\, ds}{EAR_0} \frac{\partial M}{\partial P/2} \right], \tag{37}$$

unde

$$\frac{\partial M}{\partial P/2} = - R_0 (1 - \cos \varphi) \text{ și } \frac{\partial N}{\partial P/2} = \cos \varphi. \tag{38}$$

După înlocuirea expresiilor (38) în formula (37) și efectuînd calculele necesare, se obține

$$y = 0{,}144 \frac{PR_0^2}{EA \cdot e} + 0{,}724 \frac{PR_0}{EA}.$$

Raportul $R_a = \frac{P}{y}$ determină rigiditatea dinamometrului și trebuie să fie mult mai mare decît cea a mașinii unelte.

Pentru construcția dinamometrului descris, rigiditatea este $R_a = 35\,000$ kgf/mm, iar a mașinii-unelte pe care s-a experimentat (pentru aceeași direcție a forței) $R_{mu} = 7.100$ kgf/m.

În concluzie, dinamometrul descris permite măsurarea separată a componentelor forței de așchiere fără să modifice prea mult rigiditatea sistemului tehnologic mașină-unealtă — dispozitiv — piesă — sculă.

Influența reciprocă a componentelor forței de așchiere se înlătură prin această construcție a dinamometrului, dar separarea lor depinde în mare măsură de corectitudinea lipirii mărcilor tensometrice pe elementele elastice. În condiții normale, interdependența componentelor forței de așchiere nu depășește 3%.

Înaintea fiecărei serii de experiențe este recomandabil a se verifica etalonarea dinamometrului, aducîndu-se corecțiile necesare.

Dinamometrele cu o construcție asemănătoare celei descrise mai sus pot fi utilizate cu succes pentru măsurarea componentelor forței de așchiere la diferite genuri de prelucrare pe mașini-unelte: frezare, strunjire, rectificare plană, găurire, broșare etc.

Primită la redacție la 7 martie 1969

BIBLIOGRAFIA

1. Buzdugan, Gh., *Rezistența materialelor*, vol II, București, Edit. tehnică, 1960.
2. Buzdugan, Gh., *Tensometria electrică rezistivă*, București, Edit. tehnică, 1966.
3. Cook N. H. și colab., *Machine-tool dynamometers*, American machinist, **98**, 10 (1954).
4. Poletika M. F., *Pribori dlia izomerenia sil rezania i crutiașcih momentov*, Moskva, Mașghiz, 1963.

RECENZII

Applied Mechanics, Proceedings of the Twelfth International Congress of Applied Mechanics, Stanford University, August 26—31, 1968 (Mecanica aplicată, Lucrările celui de-al XII Congres internațional de mecanică aplicată, Universitatea Stanford, 26—31 august 1968), Editors M. Hetényi, W. G. Vincenti, Berlin — Heidelberg — New York, Springer-Verlag, 1969, XXIV + 420 p., 317 fig.

Congresul Uniunii internaționale de mecanică teoretică și aplicată (IUTAM), care se ține din patru în patru ani, a avut ultima sa desfășurare la Universitatea Stanford din California (S.U.A.) în 1968. Această manifestare științifică este, fără îndoială, cea mai importantă din domeniul mecanicii aplicate, deoarece reunește numeroși specialiști de seamă din toate ramurile acestei științe.

Pentru prima oară, volumul de lucrări tipărit reunește numai cele patru conferințe generale și 26 din cele 281 de comunicări prezentate la congres. Comunicările tipărite în volum sînt acelea pentru a căror prezentare s-a acordat 20 de minute, celelalte 255 fiind prezentate în cîte 15 minute fiecare.

Dintre cele patru conferințe generale, două sînt de mecanica solidelor (L. Gauthier și F. K. G. Odqvist), iar două de mecanica fluidelor (M. A. Lavrentiev și J. W. Miles). Conferința prezentată de L. Gauthier are ca obiect problema flambajului și a instabilității, iar aceea a lui F. K. G. Odqvist reprezintă o trecere în revistă a problemelor mecanicii neliniare în dezvoltarea lor trecută, în stadiul actual și cu enunțarea unor perspective de viitor. M. A. Lavrentiev a vorbit despre unele modele matematice în hidrodinamică, iar J. W. Miles despre unde și rezistența de undă în scurgerile stratificate.

Dintre cele 26 de comunicări, 16 tratează probleme de mecanica solidelor, iar 10 se încadrează în domeniul mecanicii fluidelor. Această proporție nu reflectă ponderea reală a celor două ramuri în activitatea actuală de cercetare pe plan mondial, dar alegerea a fost făcută ținînd-se seama de faptul că pentru mecanica fluidelor există mai multe manifestări științifice cu tematică specializată.

Atît în mecanica solidelor, cît și în mecanica fluidelor, întîlnim comunicări referitoare la o mare varietate de probleme. Astfel, în mecanica fluidelor, trei comunicări au ca obiect probleme de mișcare în regim supersonic (S. B. Berndt; P. Carrière, M. Sirieix și J. L. Soĳgnac; V. V. Rusanov și A. N. Liubimov), trei se referă la stabilitatea mișcării (W. Debler, E. Funner și B. Schlaaf; K. Kirchgässer și P. Sorger; G. I. Taylor), două la mișcări turbulente (A. Favre, R. Dumas și E. Verollet; R. E. Kaplan și J. Laufer), una la mișcarea în fluide stratificate (C. C. Mei) și ultima la scurgerea pulsatorie în artere (S. C. Ling, H. B. Atabek și J. J. Carmody).

În ceea ce privește mecanica solidelor, întîlnim o lucrare asupra generalizării orbitelor kapleriene pentru sateliți mari (W. Schiehlen și O. Kolbe), una asupra unei probleme de sinteză a mecanismelor (L. S. Woo și F. Freundenstein), una referitoare la o problemă de stabilitate a rotorilor de mașini (P. T. Pedersen), una asupra unor ecuații stohastice neliniare care

intervin în studiul fenomenelor de oboseală (J. Drexler și O. Kropáč), una referitoare la vibrații aleatorii (J. D. Robson), una asupra mecanicii mediilor continue generalizate (J. Baumgarte și E. Kröne), cinci referitoare la diferite probleme din mecanica mediilor elastoviscoplastice sau plastice (J. Bejda; W. Flügge și J. C. Gerdeen; L. E. Hulbert, G. T. Hahn, A. R. Rosenfield și M. F. Kanninen; T. Kunio și Y .Miyano; J. Lipkin și R. J. Clifton), trei asupra fenomenelor de flambaj și postflambaj (A. van der Neut; E. H. Mansfield; J. Kempner și Y. N. Chen), una referitoare la o problemă de optimizare a structuiilor aeroelastice (H. Ashley și S. C. McIntosh) și una asupra ruperii prin fluaj (Y. N. Rabotnov).

Toate aceste lucrări au subiecte de mare actualitate și se disting fie prin tratarea matematică de înalt nivel, fie prin îngrijirea cu care au fost efectuate cercetările experimentale.

Volumul mai conține cuvintările rostite la deschiderea și la închiderea congresului, lista participanților și lista comunicărilor care nu au fost publicate.

Prin înalta ținută științifică și prin importanța subiectelor comunicărilor, volumul este deosebit de util pentru toți cei care au preocupări în domeniul mecanicii aplicate.

T. Oroveanu

O. TIETJENS, *Strömungslehre. Physikalische Grundlagen vom technischen Standpunkt* (Mecanica fluidelor. Bazele fizice din punct de vedere tehnic), **vol. II**, *Bewegung der Flüssigkeiten und Gasen* (Mișcarea lichidelor și gazelor), Berlin — Heidelberg — New York, Springer-Verlag, 1970, XII + 440 p., 270 fig.

Al doilea volum al manualului elaborat de fostul colaborator al lui L. Prandtl este consacrat studiului mișcărilor în care fluidele nu pot fi considerate lipsite de viscozitate sau incompresibile. Intenția autorului, mărturisită în prefață, nu a fost aceea de a elabora un tratat complet care să cuprindă dezvoltarea teoriei sub toate aspectele ei, ci un manual în care să se găsească esențialul pentru formarea unei idei de ansamblu asupra acestei discipline.

Lucrarea este împărțită în patru mari capitole, care corespund unor diviziuni clasice ale materiei. Astfel, primul este consacrat mișcării laminare în general și problemelor de mișcare la numere Reynolds mici, al doilea stratului-limită, al treilea turbulenței și ultimul unei introduceri în dinamica gazelor.

Primul capitol debutează cu o parte introductivă, în care este prezentată într-o tratare elementară mișcarea laminară în tuburi de secțiune circulară. Urmează apoi deducerea ecuațiilor Navier-Stokes, precedată de studiul stării de tensiune în fluid. În continuare se trece la studiul mișcărilor lente, mai întîi în aproximația lui Stokes și apoi în aceea a lui Oseen, principala aplicație studiată fiind mișcarea în jurul unei sfere. Analiza rezultatelor, inclusiv acelea ale lui Lamb, este interesantă, deoarece scoate în evidență unele defecte ale încercărilor de a se ameliora aproximația lui Stokes.

Capitolul mai conține cîteva soluții ale ecuațiilor Navier-Stokes; se tratează astfel mișcarea Hele-Shaw și, ca exemplu de mișcare nestaționară, aceea datorită unui plan care capătă o viteză constantă în momentul inițial.

În cel de-al doilea capitol, înainte de prezentarea teoriei stratului-limită sub aspectul ei matematic, sînt date o serie de considerații de natură fizică asupra fenomenului, referitoare la apariția, evoluția și desprinderea stratului-limită. Pentru înțelegerea acestei analize apare necesară introducerea anticipată a unor noțiuni referitoare la mișcarea turbulentă, ceea ce strică oarecum desfășurarea normală a expunerii problemelor.

În partea a doua a capitolului sînt deduse ecuațiile stratului-limită laminar. Urmează cîteva soluții devenite clasice, și anume stratul-limită pe o placă plană și pe un corp ci-

lindric (aplicație la cilindrul circular). Sînt date, de asemenea, considerații teoretice asupra desprinderii, cu considerarea mai amănunțită și sub aspectul experimental a procesului de desprindere la un cilindru circular. În încheiere, utilizarea teoremei impulsului la stratul-limită are ca unică aplicație mișcarea în jurul unei plăci plane.

Capitolul al treilea, referitor la turbulență, are, la rîndul său, trei părți. În prima sînt cuprinse mai multe probleme referitoare la turbulența dezvoltată. Considerațiile teoretice sînt bazate pe introducerea noțiunii de lungime de amestec în prezentarea dată de Prandtl, la care se adaugă și considerațiile de similitudine ale lui von Kármán. Aplicațiile sînt cele obișnuite, respectiv mișcarea turbulentă în țevi și în lungul plăcilor plane,netede sau rugoase. Este tratată de asemenea și problema turbulenței libere.

Partea a doua a capitolului are ca obiect trecerea de la regimul laminar la cel turbulent, în special sub aspectul experimental. Problema apariției turbulenței este tratată în partea a treia, unde, după prezentarea unor aspecte experimentale, se expune destul de sumar metoda micilor perturbații și în special rezultatele lui Rayleigh și acelea ale lui Tollmien.

Ultimul capitol, o introducere în dinamica gazelor, conține în prima parte teoria elementară a mișcării unidimensionale. Partea a doua conține o serie de considerații asupra vitezei sunetului și undelor de șoc plane. În sfîrșit, în partea a treia se studiază cîteva probleme de mișcare potențială plană, apoi undele de șoc oblice, iar în încheiere se prezintă metoda caracteristicilor.

Materialul grafic este de foarte bună calitate, iar fotografiile de vizualizări ale unor mișcări sînt excelente, multe fiind de altfel acelea clasice ale lui Prandtl.

Lucrarea încearcă să degajeze, prin modul de prezentare a materialului selecționat, aspectele fundamentale în fiecare capitol în parte. Caracterul introductiv este subliniat atît prin tratarea matematică simplificată la maximum, cît și prin accentul deosebit pus pe aspectele de ordin fizic. În prezentarea materialului, cu unele excepții, este urmată o ordine logică, în expunere cunoscîndu-se aportul unui vechi specialist și, ca atare, excelent cunoscător al domeniului. Rezultă un foarte bun manual de inițiere în mecanica fluidelor, dar în același timp considerațiile amănunțite asupra unor aspecte, uneori trecute cu vederea în tratatele mai pretențioase, fac din această lucrare un instrument util de lucru și pentru specialiști.

T. Oroveanu

P. P. TEODORESCU, *Probleme spațiale în teoria elasticității*, București, Edit. Academiei, 1970, 377 p.

Lucrarea de față urmează unei lucrări anterioare, *Probleme plane în teoria elasticității*, publicată în aceeași editură (vol. 1, 1961 ; vol. 2, 1966). Consacrată unor probleme spațiale ale teoriei elasticității, lucrarea constituie, prin modul de abordare a acestor probleme și a metodelor de calcul folosite, o continuare firească și o unitate cu cea precedentă.

Față de bibliografia bogată existentă și în acest domeniu pe plan mondial, volumul de față este axat în cea mai mare parte pe studiile și pe rezultatele autorului.

Cartea este împărțită în două părți : elemente generale de teoria elasticității și problemele paralelipipedului elastic.

Partea întîi cuprinde elementele generale de teoria elasticității, necesare dezvoltării ulterioare a problemelor specifice. Cele trei capitole tratează despre : 1) Ecuațiile generale ale teoriei elasticității ; 2) Formularea problemelor spațiale ale teoriei elasticității și 3) Principii și teoreme generale ale teoriei elasticității. Metode de calcul.

Partea a doua cuprinde problemele privind „un domeniu finit de forma paralelipipedului sau domenii infinite ce se pot obține din aceasta prin aruncarea la infinit a uneia sau a mai multora din fețele sale". Enumerarea titlurilor celor trei capitole ale acestei părți va da o imagine a domeniilor tratate : 4) Spațiul elastic ; 5) Optimea de spațiu elastic. Sfertul de spațiu elastic. Semispațiul elastic ; 6) Paralelipipedul elastic. Banda elastică. Stratul elastic. Placa plană groasă.

Două anexe cuprinzînd unele funcții utilizate în cursul lucrării și unele integrale definite, împreună cu un indice de autori, încheie lucrarea.

Cartea este destinată cercetătorilor științifici din domeniul mecanicii solidelor deformabile, precum și inginerilor constructori și mecanici și studenților din ultimii ani ai facultăților cu profil matematic și tehnic.

Prin forma clară și sistematizată de expunere, prin conținutul său ilustrînd nenumăratele rezultate originale ale autorului, lucrarea constituie o contribuție valoroasă la patrimoniul științific din țara noastră.

Mircea V. Soare

J. BRÓDKA și J. KŁOBUKOWSKI, *Vorgespannte Stahlkonstruktionen* (Construcții metalice pretensionate), Berlin-München, Verlag von Wilhelm Ernst & Sohn, 1969, 180 p., 143 fig.

Lucrarea de față reprezintă traducerea în limba germană a originalului polonez apărut în 1965 în Editura Arkady din Varșovia.

Construcțiile metalice pretensionate au apărut acum circa 20 de ani, cînd Dischinger și Magnel au realizat primele lucrări de acest gen. De atunci tehnica pretensionării construcțiilor metalice a făcut progrese rapide și se cunosc realizări multiple, fără însă a avea aceeași răspîndire ca în cazul aplicării betonului precomprimat.

Datorită avantajelor economice pe care le reprezintă, în special în acela al reducerii consumului de metal, acest sistem de construcție prezintă un interes deosebit. Lucrarea celor doi autori polonezi răspunde în acest fel unor necesități reale atît pentru proiectare, cît și pentru învățămîntul tehnic superior.

Cartea conține opt capitole, și anume : 1) Introducere și baze ; 2) Materiale ; 3) Baze de calcul ; 4) Îmbinări ; 5) Bazele proiectării elementelor ; 6) Montarea construcției ; 7) Exemple de construcții executate ; 8) Tipuri speciale de pretensionare. Fiecare capitol este urmat de o bibliografie bogată, dînd posibilitatea cititorului să se documenteze selectiv în fiecare problemă care-l interesează.

Textul este redactat clar, iar problemele sînt prezentate sistematizat și bine ilustrate prin exemple de calcul detaliate.

Se cuvine să semnalăm că în această direcție nu dispunem de o lucrare similară ; de aceea ar fi, poate, utilă editarea cărții și în limba română, cu eventuale aduceri la zi din partea autorilor.

Mircea V. Soare

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea, ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 30 nr.2 1971

SUMAR

STUDII

Pag.

A. L. GOLDENVEIZER, Despre ecuaţiile bidimensionale ale teoriei liniare generale a învelitorilor elastice subţiri 257

MIRCEA SOARE, Încovoierea cilindrică a reţelelor spaţiale planar pătrate diagonale 275

S. RĂUTU, VETURIA CHIROIU, Determinarea capacităţii portante a structurilor static nedeterminate supuse la momente încovoietoare şi forţe axiale 307

HORST I. KLEPP, Studiul autooscilaţiilor cvasiarmonice datorite frecării uscate 317

GH. NIŢESCU, P. SIMA, Contribuţii la studiul proprietăţilor dinamice ale cutiilor de viteze ale tractoarelor 327

R. C. BOGDAN, D. LARIONESCU, Program la calculatorul electronic pentru tabelarea şi trasarea parametrilor cinematici ai mecanismelor 363

CHR. PELECUDI, I. SAVA, S. CONONOVICI, Comportarea mecanismelor cu came la viteze ridicate (I) 385

M. ATANASIU, I. ROŞCA, Clasificarea mecanismelor plane cu ajutorul grafului asociat 401

N. MOŞU, Momentul de inerţie redus pentru mecanismul bielă-manivelă generală . . 409

D. PANTAZOPOL, F. MUNTEANU, Studiul local al scurgerilor însoţite de unde de şoc şi de combustie cu ajutorul unui nou tip de polară 421

ŞT. STAICU, Studiul scurgerii supersonice în jurul aripilor delta cu antisimetrie forţată ţinînd seama de desprinderea curentului la bordurile de atac 431

V. TOMA, H. DUMITRESCU, ST. N. SĂVULESCU, Cercetări experimentale asupra scurgerii de intrare cu jeturi însoţitoare 453

M. POPESCU, C. STERE, P. NOVOTNY, Model matematic pentru calculul oscilaţiilor maxime din castele şi din sisteme de castele de echilibru 469

RECENZII 487

DESPRE ECUAȚIILE BIDIMENSIONALE ALE TEORIEI LINIARE GENERALE A ÎNVELITORILOR ELASTICE SUBȚIRI

de A. L. GOLDENVEIZER
Institutul pentru problemele mecanicii, Moscova, U.R.S.S.

În lucrarea de față se studiază problema teoriei bidimensionale asimptotic optime a învelitorilor pentru cazurile în care, în cadrul teoriei clasice, starea de tensiune căutată fie că are o mare variabilitate, fie că poate fi descompusă în starea de tensiune fără momente și efecte marginale nedegenerate.

Starea de tensiune a învelitorii subțiri se compune din starea de tensiune interioară și efectul de strat-limită. Această concepție, care a căpătat azi o largă răspîndire, apare în mod firesc dacă problema reducerii ecuațiilor tridimensionale ale teoriei elasticității la ecuațiile bidimensionale ale teoriei învelitorilor se rezolvă cu ajutorul metodei asimptotice [3]—[6], [8]—[9], în care fiecăreia dintre cele două stări amintite îi corespunde procesul său iterativ de rezolvare a ecuațiilor tridimensionale ale teoriei elasticității.

În articol va fi vorba numai de starea de tensiune internă. Ei îi corespunde un proces iterativ, numit în lucrarea [1] proces de bază *). Prin aceasta se înțelege procesul iterativ în care ca aproximație inițială putem utiliza una dintre variantele teoriei clasice (teoriei de tip Love).

Este firesc să se pună problema teoriei bidimensionale asimptotic optime a învelitorilor, înțelegîndu-se prin aceasta acea variantă a teoriei clasice căreia îi corespunde aproximația inițială a procesului iterativ de bază, care duce la eroarea asimptotică formală minimă (fără evaluarea termenilor reziduali). Această problemă are sens numai la o anumită restrîngere a clasei problemelor pentru care este destinată teoria căutată. În prezenta lucrare ea este studiată pentru o clasă de probleme foarte vastă, dar nu atotcuprinzătoare, și anume pentru problemele în care în cadrul teoriei clasice a învelitorilor starea de tensiune căutată fie că are o mare variabilitate, fie poate fi descompusă în starea de tensiune fără momente și efecte marginale nedegenerate.

---

*) În această lucrare și în unele care au succedat-o, și starea de tensiune interioară este numită stare de bază.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 2, 1971, P. 257—274

Se arată că în acest caz varianta asimptotic optimă a teoriei învelitorilor reprezintă o modificare a teoriei lui Love. Eroarea ei asimptotică formală la determinarea stării de tensiune interioare are ordinul $O(h_*^{2-2t})$, unde h_* este semigrosimea relativă, iar t reprezintă indicele de variație.

1. Vom referi spațiul elastic la coordonatele curbilinii (x^1, x^2, x^3), dînd raza vectoare prin egalitatea

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{r}(x^1, x^2) + x^3 \boldsymbol{n},$$

unde $\boldsymbol{r}$ este vectorul suprafeței mediane S, iar $\boldsymbol{n}$ vectorul unitar care corespunde normalei la această suprafață.

Notăm cu g_{ij} tensorul metric de bază al mediului elastic tridimensional, iar cu $a_{\alpha\beta}$, $b_{\alpha\beta}$ tensorii primei și celei de-a doua forme pătratice ale suprafeței S. Aici și în cele ce urmează se consideră că indicii latini pot avea valorile 1, 2, 3, iar cei grecești valorile 1, 2.

Au loc următoarele formule care leagă g_{ij} de $a_{\alpha\beta}$ și $b_{\alpha\beta}$:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2x^3 b_{\alpha\beta} + (x^3)^2 b_\alpha^\lambda b_{\beta\lambda}; \quad g_{\alpha 3} = 0; \quad g_{33} = 1,$$

$$\sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - x^3 b_\lambda^\lambda + (x^3)^2 K; \quad a = |a_{\alpha\beta}|; \quad g = |g_{ij}|, \tag{1.1}$$

$$K = b_1^1 b_2^2 - b_2^1 b_1^2.$$

Vom nota tensorul tensiunilor prin σ^{ij} și vom da vectorul deplasărilor mediului elastic $\boldsymbol{U}$ prin formula

$$\boldsymbol{U} = u^\alpha \boldsymbol{r}_\alpha - W\boldsymbol{n}.$$

Considerăm tensorul asimetric al tensiunilor τ^{ij}, definindu-l prin formulele

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma_\beta^i = (a_{\lambda\beta} - x^3 b_{\lambda\beta})\tau^{i\lambda}; \quad \sqrt{\frac{g}{a}}\,\sigma^{i3} = \tau^{i3}. \tag{1.2}$$

Atunci ecuațiile diferențiale ale teoriei elasticității pentru corpul izotrop se vor scrie astfel:

— ecuațiile de echilibru:

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha\beta} - b_\alpha^\beta \tau^{\alpha 3} + \frac{\partial \tau^{3\beta}}{\partial x^3} = 0, \tag{1.3}$$

$$\nabla_\alpha \tau^{\alpha 3} + b_{\alpha\beta}\tau^{\alpha\beta} + \frac{\partial \tau^{33}}{\partial x^3} = 0; \tag{1.4}$$

(∇_α fiind simbolul derivării covariante în metrica $a_{\alpha\beta}$);

— condițiile de simetrie a tensorului σ^{ij} :

$$c_{\lambda\beta}(\tau^{\lambda\beta} - x^3 b_\alpha^\lambda \tau^{\alpha\beta}) = 0\,; \quad \tau^{3\lambda} = \tau^{\lambda 3} - x^3 b_\rho^\lambda \tau^{\rho 3}$$

($c_{\alpha\beta}$ fiind tensorul discriminant oblic simetric cu componentele $c_{11} = c_{22} = 0\,;\ c_{12} = -c_{21} = \sqrt{a}$) ;

— relațiile elasticității :

$$M \equiv -E\sqrt{\frac{g}{a}}\frac{\partial W}{\partial x^3} + \sigma(a_{\lambda\rho} - x^3 b_{\lambda\rho})\tau^{\lambda\rho} = \tau^{33}, \tag{1.5}$$

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\,N_\alpha \equiv \frac{E}{2}\sqrt{\frac{g}{a}}\left[f_\alpha + (a_\alpha^\lambda - x^3 b_\alpha^\lambda)\frac{\partial u_\lambda}{\partial x^3}\right] = (1+\sigma)\,g_{\alpha\lambda}\tau^{\lambda 3}, \tag{1.6}$$

$$R_{\alpha\beta} \equiv E\sqrt{\frac{g}{a}}(e_{\alpha\beta} - x^3 r_{\alpha\beta}) - (1+\sigma)\,g_{\alpha\lambda}(a_{\rho\beta} - x^3 b_{\rho\beta})\tau^{\lambda\rho} + \\ + \sigma g_{\alpha\beta}[(a_{\lambda\rho} - x^3 b_{\lambda\rho})\tau^{\lambda\rho} + \tau^{33}] = 0, \tag{1.7}$$

unde E, σ sînt modulul de elasticitate și coeficientul lui Poisson și în afară de aceasta

$$e_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_\beta u_\alpha + \nabla_\alpha u_\beta + 2b_{\alpha\beta}W)\,; \quad f_\alpha = -\nabla_\alpha W + b_\alpha^\lambda u_\lambda,$$

$$r_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}[b_\beta^\lambda(\nabla_\alpha u_\lambda + b_{\lambda\alpha}W) + b_\alpha^\lambda(\nabla_\beta u_\lambda + b_{\lambda\beta}W)]. \tag{1.8}$$

Egalitățile scrise sub formă dezvoltată sînt echivalente cu 13 ecuații scalare (3 ecuații de echilibru, 3 condiții de simetrie și 7 relații ale elasticității), care leagă 12 necunoscute (9 componente ale tensorului tensiunilor și 3 componente ale deplasărilor). În plus există prima condiție de simetrie : ea decurge din ultima relație tensorială a elasticității. În cele ce urmează, prima condiție de simetrie nu va fi luată în considerare. Aceasta corespunde ignorării ecuației a șasea de echilibru din teoria învelitorilor.

Ecuațiile teoriei elasticității le vom integra în domeniul îngust $-h \leqslant x^3 \leqslant +h$ (h fiind semigrosimea constantă a învelitorii) și vom nota cu S suprafața mediană a învelitorii.

Condițiile pe suprafața exterioară și interioară le vom lua sub forma

$$\tau^{33} = \sqrt{\frac{g}{a}}\left(\pm\frac{1}{2}\overset{*}{x} - \frac{1}{2}\overset{*}{m}\right); \quad \tau^{\alpha 3} = \sqrt{\frac{g}{a}}\left(\pm\frac{1}{2}\overset{*}{X}_\rho + \frac{1}{2}\overset{*}{Y}_\rho\right)a^{\alpha\rho} \tag{1.9}$$

(pentru $x^3 = \pm h$).

Dacă suprafaţa mediană a învelitorii S este referită la liniile de curbură şi dacă

$$\frac{1}{2}Q_\alpha \pm \frac{1}{2}M_\beta;\ \frac{1}{2}Q_\beta \pm \frac{1}{2}M_\alpha;\ \frac{1}{2}Q_\gamma \mp \frac{1}{2}m$$

reprezintă proiecţiile vectorului sarcinii exterioare care revine pe unitatea de arie a suprafeţelor $x^3 = \pm h$, atunci au loc următoarele formule ce descifrează sensul fizic al mărimilor $\overset{*}{X}_\rho$, $\overset{*}{Y}_\rho$, $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{m}$ care intră în (1.9):

$$\frac{\overset{*}{X}_1}{A} + \frac{h}{R_1}\frac{\overset{*}{Y}_1}{A} = Q_\alpha;\ \frac{\overset{*}{Y}_1}{A} + \frac{h}{R_1}\frac{\overset{*}{X}_1}{A} = M_\beta,$$

$$\frac{\overset{*}{X}_2}{B} + \frac{h}{R_2}\frac{\overset{*}{Y}_2}{B} = Q_\beta;\ \frac{\overset{*}{Y}_2}{B} + \frac{h}{R_2}\frac{\overset{*}{X}^2}{B_2} = M_\alpha,$$

$$\overset{*}{x} = Q_\gamma; \qquad \overset{*}{m} = m,$$

unde A^2, B^2, R_1, R_2 sînt coeficienţii primei forme pătratice şi razele de curbură principale ale suprafeţei mediane.

2. Varianta asimptotic optimă a teoriei învelitorilor, descrisă în introducere, poate fi construită cu ajutorul raţionamentelor pur matematice, aşa cum se va arăta în paragrafele 5—6. Însă, pentru comoditatea comparării acestei variante a teoriei bidimensionale a învelitorilor cu altele, vom formula iniţial ipotezele care duc la ea imediat.

Ipoteza 1. În raport cu variabila

$$\zeta = \frac{x^3}{h}, \tag{2.1}$$

tensiunile şi deplasările stării de tensiune căutate variază după următoarele legi:

$$\tau^{\alpha\beta} = \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta} + \zeta\overset{1}{\tau}{}^{\alpha\beta};\quad \tau^{\alpha 3} = \overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3} + \zeta\overset{1}{\tau}{}^{\alpha 3} + \zeta^2\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3},$$

$$\tau^{33} = \overset{0}{\tau}{}^{33} + \zeta\overset{1}{\tau}{}^{33} + \zeta^2\overset{2}{\tau}{}^{33} + \zeta^3\overset{3}{\tau}{}^{33}, \tag{2.2}$$

$$u_\alpha = \overset{0}{u}_\alpha + \zeta\overset{1}{u}_\alpha;\quad W = \overset{0}{W} + \zeta\overset{1}{W},$$

de unde, în conformitate cu (1.8), obținem

$$e_{\alpha\beta} = \overset{0}{e}_{\alpha\beta} + \zeta \overset{1}{e}_{\alpha\beta}; \quad f_\alpha = \overset{0}{f}_\alpha + \zeta \overset{1}{f}_\alpha; \quad r_{\alpha\beta} = \overset{0}{r}_{\alpha\beta} + \zeta \overset{1}{r}_{\alpha\beta}. \tag{2.3}$$

Aici și în cele ce urmează literele cu cifre deasupra reprezintă funcții de două variabile x^1, x^2 (cifra deasupra arată pentru ce putere a lui ζ apare ca factor mărimea dată).

Ipoteza 2. În relațiile elasticității (1.5)—(1.6) putem neglija τ^{33} și, respectiv, τ^{13}.

Ipoteza 3. În relația elasticității (1.7), mărimea τ, fiind de importanță secundară, poate fi exprimată prin componentele sarcinii superficiale cu ajutorul formulei aproximative

$$\tau^{33} = \overset{0}{\tau}^{33} + \zeta \overset{1}{\tau}^{33} = \frac{1}{2}(-\overset{*}{m} + \zeta \overset{*}{x}). \tag{2.4}$$

Ea se obține din prima condiție (1.9) dacă se ia $\sqrt{g/a} = 1$, iar pentru τ^{33} în formulele (2.2) se păstrează în membrul al doilea numai primii doi termeni.

În operațiile ulterioare vom neglija totdeauna mărimile de ordinul h_*^2 în comparație cu cele de ordinul unității. De aici, în particular, decurge că prima și a patra din formulele (1.1), ținînd seama de (2.1), pot fi scrise astfel:

$$g_{\alpha\beta} = a_{\alpha\beta} - 2h\zeta b_{\alpha\beta}; \quad \sqrt{\frac{g}{a}} = 1 - h\zeta b_\lambda^\lambda. \tag{2.5}$$

3. Vom lua ecuațiile de echilibru (1.3)—(1.4), relațiile elasticității (1.5)—(1.7) și condițiile pe suprafețe (1.9), vom elimina din (1.3) mărimea $\tau^{3\beta}$ cu ajutorul condiției a doua de simetrie și vom neglija din (1.5)—(1.6), în conformitate cu ipoteza 2, mărimile care se găsesc în membrul al doilea. În egalitățile obținute vom face schimbarea de variabilă (2.1), vom substitui forma postulată a soluției (2.2)—(2.3) și în fiecare ecuație vom egala cu zero coeficienții de pe lîngă aceleași puteri ale lui ζ. Ecuațiile obținute, divizîndu-le în trei grupe, le vom scrie astfel:

— grupa I:

$$\dot{\nabla}_\alpha \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s)} - 2\dot{b}_\alpha^\beta \overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s-q)} + \frac{1}{h} \overset{1}{\tau}{}^{\beta 3}_{(s)} = 0 \quad [(1.3),\ \zeta^q],$$

$$\dot{\nabla}_\alpha \overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s+2p-q-c)} + \dot{b}_{\alpha\beta} \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s-c)} + \frac{1}{h} \overset{1}{\tau}{}^{33}_{(s)} = 0 \quad [(1.4),\ \zeta^0], \tag{3.1}$$

$$\dot{\nabla}_\lambda \overset{1}{\tau}{}^{\lambda\alpha}_{(s)} - 3\dot{b}_\lambda^\alpha \overset{1}{\tau}{}^{\lambda 3}_{(s-q)} + \frac{2}{h} \overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s)} = 0 \quad [(1.3),\ \zeta^1];$$

$$\dot{E}\overset{0}{e}{}^{(s)}_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\lambda\rho}\overset{0}{\tau}{}^{\lambda\rho}_{(s)} - \sigma a_{\alpha\beta}\overset{0}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)} \quad [(1.7),\ \zeta^0],$$

$$\dot{E}\,(\overset{1}{e}{}^{(s)}_{\alpha\beta} - h\overset{0}{r}{}^{(s-q)}_{\alpha\beta}) = \dot{E}h\dot{b}^{\lambda}_{\lambda}\overset{0}{e}{}^{(s-q)}_{\alpha\beta} + P_{\alpha\beta\lambda\rho}\overset{1}{\tau}{}^{\lambda\rho}_{(s)} - hL_{\alpha\beta\lambda\rho}\overset{0}{\tau}{}^{\lambda\rho}_{(s-q)} -$$

$$- \sigma a_{\alpha\beta}\overset{1}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)} + 2\sigma h\dot{b}_{\alpha\beta}\overset{0}{\tau}{}^{33}_{s-2q+c} \quad [(1.7),\ \zeta^1], \tag{3.2}$$

$$\dot{E}\overset{1}{W}{}^{(s)} = h\sigma a_{\lambda\rho}\overset{0}{\tau}{}^{\lambda\rho}_{(s-q+c)} \quad [(1.5),\ \zeta^0],$$

$$\overset{1}{u}{}^{(s)}_{\alpha} + h\overset{0}{f}{}^{(s-q+2p-c)}_{\alpha} = 0 \quad [(1.6),\ \zeta^\circ];$$

— grupa II:

$$\dot{\nabla}_{\alpha}\overset{1}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s+2p-q-c)} + \dot{b}_{\alpha\beta}\overset{1}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s-c)} + \frac{2}{h}\overset{2}{\tau}{}^{33}_{(s)} = 0 \quad [(1.4),\ \zeta^1],$$

$$\dot{\nabla}_{\alpha}\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s+2p-q-c)} + \frac{3}{h}\overset{3}{\tau}{}^{33}_{(s)} = 0 \quad [(1.4),\ \zeta^2],$$

$$\overset{0}{\tau}{}^{33}_{(s)} + \overset{2}{\tau}{}^{33}_{(s)} = -\frac{1}{2}\delta^0_{s-c-d}\overset{*}{m} - \frac{h}{2}\delta^0_{s-c-q-d}\dot{b}^{\lambda}_{\lambda}\overset{*}{x}, \tag{3.3}$$

$$\overset{1}{\tau}{}^{33}_{(s)} + \overset{3}{\tau}{}^{33}_{(s)} = \frac{1}{2}\delta^0_{s-c-d}\overset{*}{x} + \frac{h}{2}\delta^0_{s-c-q-d}\dot{b}^{\lambda}_{\lambda}\overset{*}{m},$$

$$\overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s)} + \overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(3)} = \frac{1}{2}\delta^0_{s-p-d}\overset{*}{Y}{}^{\alpha} - \frac{h}{2}\delta^0_{s-p-q-d}\dot{b}^{\lambda}_{\lambda}\overset{*}{X}{}^{\alpha},$$

$$\overset{1}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s)} = \frac{1}{2}\delta^0_{s-p-d}\overset{*}{X}{}^{\alpha} - \frac{h}{2}\delta^0_{s-p-q-d}\dot{b}^{\lambda}_{\lambda}\overset{*}{Y}{}^{\alpha};$$

— grupa III:

$$\dot{b}^{\beta}_{\alpha}\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s-q)} = 0 \quad [(1.3),\ \zeta^2];\ \overset{l}{M} = 0 \quad (l = 1,2) \quad [(1.5),\ \zeta^1,\ \zeta^2], \tag{3.4}$$

$$\sqrt{\frac{g}{a}}\overset{1}{N}_{\alpha} = 0 \quad [(1.6),\ \zeta^1];\ \overset{l}{R}_{\alpha\beta} = 0 \quad (l = 2,\ 3,\ 4) \quad [(1.7),\ \zeta^2,\ \zeta^3,\ \zeta^4]$$

($\overset{l}{M}$, $\overset{l}{N}_{\alpha}$, $\overset{l}{R}_{\alpha\beta}$ fiind coeficienţii lui ζ^l din expresiile (1.5)—(1.7) pentru M, N_{α}, $R_{\alpha\beta}$).

În relațiile (3.1)—(3.3) s-au folosit notațiile

$$P_{\alpha\beta\lambda\rho} = (1+\sigma)\, a_{\alpha\lambda}\, a_{\beta\rho} - \sigma a_{\alpha\beta}\, a_{\lambda\rho},$$

$$L_{\alpha\beta\lambda\rho} = (1+\sigma)\,(a_{\alpha\lambda}\, b_{\rho\beta} + 2b_{\alpha\lambda}\, a_{\rho\beta}) - \sigma\,(a_{\alpha\beta}\, b_{\lambda\rho} + 2b_{\alpha\beta}\, a_{\lambda\rho}),$$

$$\overset{i}{e}{}^{(s)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,(\dot\nabla_\beta \overset{i}{u}{}^{(s)}_{\alpha} + \dot\nabla_\alpha \overset{i}{u}{}^{(s)}_{\beta} + 2\dot b_{\alpha\beta} \overset{i}{W}{}^{(s-c)}), \tag{3.5}$$

$$\overset{i}{f}{}^{(s)}_{\alpha} = -\,\dot\nabla_\alpha \overset{i}{W}{}^{(s)} + \dot b^{\lambda}_{\alpha}\, \overset{i}{u}{}^{(s-2p+c)}_{\lambda},$$

$$\overset{i}{r}{}^{(s)}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,[\dot b^{\lambda}_{\beta}(\dot\nabla \overset{i}{u}{}^{(s)}_{\lambda} + \dot b_{\lambda\alpha} \overset{i}{W}{}^{(s-c)}) + \dot b^{\lambda}_{\alpha}(\dot\nabla_\beta \overset{i}{u}{}^{(s)}_{\lambda} + \dot b_{\lambda\beta} \overset{i}{W}{}^{(s-c)})] \quad (i = 0,1),$$

iar pentru comoditatea verificării în paranteză mare este indicat numărul ecuației inițiale și puterea lui ζ al cărei coeficient era egalat cu zero pentru obținerea ecuației date (ultimele patru egalități din grupa II decurg din condițiile (1.9) pe suprafețe). În afară de aceasta, în paragraful de față deasupra unor litere se găsesc puncte, sînt introduși indici suplimentari în paranteze și s-au pus factori de forma δ^0_r. Aceștia vor fi necesari pe viitor, dar deocamdată ei pot fi ignorați, considerînd

$$\dot\nabla = \nabla,\ \dot b = b,\ \dot E = E,\ \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(r)} = \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}, \ldots,\ \delta^0_r = 1. \tag{3.6}$$

Egalitățile (3.1) le transformăm în felul următor: din ((1.3), ζ^0) scădem penultima egalitate (3.3), înlocuind în ea s cu $s-q$ și înmulțind-o cu $\dot b^{\beta}_{\alpha}$; la ((1.4), ζ^0) adăugăm ((1.4), ζ^2), înmulțit cu 1/3; din ((1.3), ζ^1), înmulțit cu 1/3, scădem penultima egalitate (3.3), înmulțită cu $1/h$. Atunci, eliminînd din egalitățile obținute mărimile $\overset{1}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(r)}$ și $\overset{1}{\tau}{}^{33}_{(r)} + \overset{3}{\tau}{}^{33}_{(r)}$ cu ajutorul lui (3.3) și introducînd notația

$$\tau^{\alpha}_{(r)} = \overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(r)} + \frac{1}{3}\,\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(r)}, \tag{3.7}$$

vom avea, cu precizie pînă la mărimi de ordinul h^2_*,

$$\dot\nabla_\alpha \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s)} - 3\dot b^{\beta}_{\alpha}\tau^{\alpha}_{(s-q)} + \frac{1}{2h}\,\delta^0_{s-p-d}\,\overset{*}{X}{}^{\beta} + \frac{1}{2}\,\delta^0_{s-p-q-d}(\dot b^{\beta}_{\rho} - \dot b^{\lambda}_{\lambda}\, a^{\beta}_{\rho})\,\overset{*}{Y}{}^{\rho} = 0,$$

$$\dot\nabla_\alpha \tau^{\alpha}_{(s+2p-q+c)} + \dot b_{\alpha\beta}\,\overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s-c)} + \frac{1}{2h}\,\delta^0_{s-c-d}\,\overset{*}{x} + \frac{1}{2}\,\delta^0_{s-q-c-d}\,\dot b^{\lambda}_{\lambda}\overset{*}{m} = 0, \tag{3.8}$$

$$\frac{1}{3}\,\dot\nabla_\lambda\,\overset{1}{\tau}{}^{\lambda\alpha}_{(s)} - \frac{1}{h}\,\tau^{\alpha}_{(s)} + \frac{1}{2h}\,\delta^0_{s-p-d}\,\overset{*}{Y}{}^{\alpha} - \frac{1}{2}\,\delta^0_{s-p-q-d}\,(a^{\alpha}_{\rho}\,\dot b^{\lambda}_{\lambda} + \dot b^{\alpha}_{\rho})\,\overset{*}{X}{}^{\rho} = 0.$$

Ecuaţiile (3.8), (3.2) formează un sistem de 16 ecuaţii cu 16 necunoscute :

$$\overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta},\ \overset{1}{\tau}{}^{\alpha\beta},\ \tau^{\alpha},\ \overset{0}{u}_{\alpha},\ \overset{1}{u}_{\alpha},\ \overset{0}{W},\ \overset{1}{W}. \tag{3.9}$$

Mărimile $\overset{0}{e}{}^{\alpha\beta}$, $\overset{1}{e}{}^{\alpha\beta}$, $\overset{0}{r}_{\alpha\beta}$, $\overset{0}{f}_{\alpha}$ care intră în aceste ecuaţii sînt date prin ultimele trei egalităţi (3.5), iar $\overset{0}{\tau}{}^{33}$ şi $\overset{1}{\tau}{}^{33}$ se exprimă prin $\overset{*}{x}$ şi $\overset{*}{m}$ cu ajutorul lui (2.4).

Grupa II, dacă în ea se consideră cunoscute mărimile (3.9), formează un sistem de opt egalităţi, din care prin operaţii directe se determină opt mărimi :

$$\overset{0}{\tau}{}^{33},\ \overset{1}{\tau}{}^{33},\ \overset{2}{\tau}{}^{33},\ \overset{3}{\tau}{}^{33},\ \overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3} + \overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3},\ \overset{1}{\tau}{}^{\alpha 3}. \tag{3.10}$$

Printre mărimile (3.9) şi (3.10) sînt conţinuţi toţi coeficienţii expresiilor (2.2), care definesc toate tensiunile şi deplasările. În felul acesta, ecuaţiile din grupele I şi II sînt ecuaţii diferenţiale ale stării de tensiune internă, care rezolvă cu oarecare grad de exactitate problema reducerii ecuaţiilor tridimensionale ale teoriei elasticităţii la cele bidimensionale.

Grupa III este de prisos şi ipoteza I adoptată mai sus poate fi tratată ca ipoteză asupra admisibilităţii ignorării acestor ecuaţii.

4. Comparăm teoria construită în paragrafele 2, 3 cu teoria clasică a învelitorilor. Ecuaţiile diferenţiale ale acesteia din urmă se scriu astfel 1 :

— ecuaţiile de echilibru :

$$\nabla_{\lambda} T^{\alpha\beta} - b^{\alpha}_{\lambda} N^{\lambda} + X^{\alpha} = 0\,; \quad b_{\lambda\rho} T^{\lambda\rho} + \nabla_{\lambda} N^{\lambda} - x = 0,$$
$$\nabla_{\lambda} M^{\alpha\lambda} - N^{\alpha} + e^{\rho\alpha} Y_{\rho} = 0\,; \tag{4.1}$$

— formulele deformaţiei-deplasării :

$$\varepsilon_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}(\nabla_{\alpha} v_{\beta} + \nabla_{\beta} v_{\alpha} + 2 b_{\alpha\beta} w),$$
$$\mu_{\alpha\beta} = \nabla_{\beta}(\nabla_{\alpha} w - b^{\lambda}_{\alpha} v_{\lambda}) + \frac{1}{2} c_{\lambda\alpha} b^{\lambda}_{\beta} c^{\rho\nu} \nabla_{\rho} v_{\nu}\,; \tag{4.2}$$

— relaţiile elasticităţii :

$$2Eh\,\varepsilon_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\lambda\rho} T^{\lambda\rho} + Q_{\alpha\beta\lambda\rho} M^{\lambda\rho},$$
$$\frac{2Eh^3}{3}\,\mu_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta\lambda\rho} M^{\lambda\rho} + \frac{h^2}{3} S_{\alpha\beta\lambda\rho} T^{\lambda\rho}, \tag{4.3}$$

unde $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, N^{α} sînt tensorii eforturilor tangenţiale, momentelor şi eforturilor tăietoare, $\varepsilon_{\alpha\beta}$, $\mu_{\alpha\beta}$ tensorii deformaţiei suprafeţei mediane,

v_α, w componentele deplasării suprafeței mediane, X^α, x, Y_ρ componentele forțelor și momentelor superficiale exterioare, iar P, Q, R, S tensorii elasticității, care în diferite variante ale teoriei clasice se aleg în mod diferit.

Ținînd seama de (2.2), vom scrie formulele care leagă $T^{\alpha\beta}$, $M^{\alpha\beta}$, N^α, v_α, w cu tensorul asimetric al tensiunilor $\tau^{\alpha\beta}$ și cu componentele deplasării mediului tridimensional:

$$T^{\beta\alpha} = \int_{-h}^{h} \tau^{\alpha\beta}\,dx^3 = 2h\overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta};\quad M^{\beta\alpha} = \int_{-h}^{h} \tau^{\alpha\beta}\,x^3\,dx^3 = \frac{2h^2}{3}\overset{1}{\tau}{}^{\alpha\beta},$$

$$N^\alpha = \int_{-h}^{h} \tau^{\alpha 3}\,dx^3 = 2h\left(\overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3} + \frac{1}{3}\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}\right) = 2h\tau^\alpha, \tag{4.4}$$

$$u_\alpha|_{x^3=0} = v_\alpha = \overset{0}{u}_\alpha;\quad W|_{x^3=0} = w = \overset{0}{W},$$

și formulele care leagă mărimile $\overset{*}{X}{}^\alpha$, $\overset{*}{Y}{}^\alpha$, $\overset{*}{x}$, $\overset{*}{m}$ prin care se caracterizează încărcarea suprafețelor $x^3 = \pm h$ cu componentele sarcinii superficiale, redusă la suprafața mediană:

$$\overset{*}{X}{}^\alpha - h(b^\alpha_\rho - b^\lambda_\lambda a^\alpha_\rho)\overset{*}{Y}{}^\rho = X^\alpha,$$

$$h\overset{*}{Y}{}^\alpha = c^{\rho\alpha}Y_\rho,\qquad \overset{*}{x} + hb^\lambda_\lambda \overset{*}{m} = -x. \tag{4.5}$$

Ambele grupe de formule se verifică ușor, considerînd cazul cînd suprafața mediană este referită la liniile de curbură.

Vom lua egalitățile (3.2), (3.8), vom descifra notațiile adoptate în ele cu ajutorul (3.5), (3.6) și vom introduce acolo (4.4) și (4.5). După unele transformări, aceasta ne va conduce la a doua și a treia ecuație de echilibru (4.1), la formulele deformației-deplasării (4.2) și la relațiile elasticității de forma:

$$2Eh\varepsilon_{\alpha\beta} = P_{\alpha\beta\lambda\rho}T^{\lambda\rho} + \sigma h a_{\alpha\beta}\overset{*}{m},$$

$$\frac{2Eh^3}{3}\frac{1}{2}(\mu_{\alpha\beta} + \mu_{\beta\alpha}) = R_{\alpha\beta\lambda\rho}M^{\rho\lambda} + \frac{h^2}{3}S_{\alpha\beta\lambda\rho}T^{\rho\lambda} - \tag{4.6}$$

$$-\frac{\sigma h^2}{3}a_{\alpha\beta}\overset{*}{x} - \frac{\sigma h^3}{3}(b^\gamma_\gamma a_{\alpha\beta} + b_{\alpha\beta})\overset{*}{m},$$

unde

$$P_{\alpha\beta\lambda\rho} = R_{\alpha\beta\lambda\rho} = a_{\alpha\lambda}a_{\beta\rho} - \sigma C_{\alpha\lambda}C_{\beta\rho} = (1+\sigma)a_{\alpha\lambda}a_{\beta\mu} - \sigma a_{\alpha\beta}a_{\lambda\rho},$$

$$2S_{\alpha\beta\lambda\rho} = b^\gamma_\beta P_{\alpha\gamma\lambda\rho} + b^\gamma_\alpha P_{\gamma\beta\lambda\rho} + 2b^\gamma_\gamma P_{\alpha\beta\lambda\rho} - \{2\sigma b_{\alpha\beta}a_{\lambda\rho}\} - 2L_{\alpha\beta\lambda\rho}, \tag{4.7}$$

$$Q_{\alpha\beta\lambda\rho} = 0.$$

În afară de aceasta, din prima ecuație (3.8) se obține egalitatea

$$\nabla_\alpha T^{\beta\alpha} - b^\beta_\alpha N^\alpha + X^\beta - \{2b^\beta_\alpha(N^\alpha - c^{\rho\alpha}Y_\rho)\} = 0, \tag{4.8}$$

care diferă de prima din ecuațiile de echilibru (4.1) prin termenul cuprins în acoladă.

Așadar, teoria construită în paragrafele 2—3, care se reduce la ecuațiile (3.8), (3.2), (3.6), este echivalentă teoriei clasice puțin modificată a învelitorilor, în care în primul rînd relațiile elasticității sînt neomogene (depind de $\overset{*}{x}$ și $\overset{*}{m}$), iar tensorii care intră în ele, P, Q, R și S, se definesc prin formulele (4.7) și, în al doilea rînd, în prima ecuație tensorială a echilibrului există inexactitatea menționată mai sus.

Formulele (4.7) pentru tensorii P, R, S, dacă în acesta din urmă se neglijează termenul luat în acoladă, coincid cu expresiile la care a ajuns Lurie [7]. Dar, pentru tensorul Q, în lucrarea lui Lurie s-a obținut o expresie diferită de zero. Termenul cuprins în acoladă provine de la faptul că în ipoteza I deplasarea normală nu se consideră constantă pe grosime. Apariția în relațiile elasticității a termenilor care depind de $\overset{*}{x}$ și $\overset{*}{m}$ constituie o simplă consecință a efectului Poisson.

5. Trecem la discuția teoriei construite în paragrafele 2—4, considerînd-o drept aproximație inițială a unui proces iterativ de bază al integrării ecuațiilor diferențiale ale teoriei elasticității.

Fie un parametru adimensional mare $\varkappa$ definit de egalitățile

$$\varkappa^{-q} = \frac{h}{R} = h_*,$$

unde R este raza de curbură caracteristică a suprafeței mediane, iar q un număr întreg pozitiv. Convenim să socotim că toți parametrii sistemului de coordonate curbilinii (x^1, x^2, x^3) au dimensiunea lungimii și facem schimbarea de variabile după formulele

$$x^\alpha = R\varkappa^{-p}\xi^\alpha; \qquad x^3 = h\zeta = R\varkappa^{-q}\zeta, \tag{5.1}$$

în care p este număr întreg nenegativ.

Se presupune că starea de tensiune căutată are indice de variabilitate pozitiv t, adică derivarea în raport cu x^α duce la o creștere substanțială (de h_*^{-t} ori) a mărimilor căutate și prima egalitate (5.1) reprezintă operația de întindere a scării, obișnuită pentru metodele asimptotice. Atunci numerele p, q trebuie luate în dependență de t:

$$\varkappa^{-p} = h_*^t, \tag{5.2}$$

adică $t = \dfrac{p}{q}$.

Introducem notația

$$\nabla_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} + \pi_\alpha = \frac{\varkappa^p}{R}\dot{\nabla}_\alpha, \tag{5.3}$$

unde $\dot{\nabla}_\alpha = \dfrac{\partial}{\partial \xi^\alpha} + R\varkappa^{-p}\pi_\alpha$, π_α fiind termeni care nu conțin simboluri de derivare.

Ne adresăm din nou ecuațiilor diferențiale ale teoriei elasticității (1.3)—(1.7). Eliminăm din ele $\tau^{3\beta}$ cu ajutorul condiției a doua de simetrie, facem schimbarea de variabile independente după formulele (5.1) și postulăm că funcțiile căutate pot fi prezentate sub forma

$$\begin{aligned}
&\tau^{\alpha\beta} = \varkappa^{q+d}\sum \varkappa^{-s}\tau^{\alpha\beta}_{(s)}; \qquad \tau^{\alpha 3} = \varkappa^{p+d}\sum \varkappa^{-s}\tau^{\alpha 3}_{(s)},\\
&\tau^{33} = \varkappa^{c+d}\sum \varkappa^{-s}\tau^{33}_{(s)},\\
&u_\alpha = \varkappa^{q-p+d}\sum \varkappa^{-s}u^{(s)}_\alpha; \qquad W = \varkappa^{q-c+d}\sum \varkappa^{-s}W^{(s)},
\end{aligned} \tag{5.4}$$

unde c este un număr nenegativ, definit prin egalitățile

$$c = 0 \text{ pentru } q \geqslant 2p;\ c = 2p - q \text{ pentru } q \leqslant 2p. \tag{5.5}$$

Atunci, anulînd în fiecare ecuație coeficienții tuturor puterilor lui $\varkappa$, obținem următoarea succesiune de sisteme de ecuații:

$$\dot{\nabla}_\alpha \tau^{\alpha\beta}_{(s)} - \dot{b}^\beta_\alpha \tau^{\alpha 3}_{(s-q)} + \frac{\partial \tau^{\beta 3}_{(s)}}{\partial \zeta} - \dot{b}^\beta_\rho \frac{\partial}{\partial \zeta}(\zeta \tau^{\rho 3}_{(s-q)}) = 0,$$

$$\dot{\nabla}_\alpha \tau^{\alpha 3}_{(s-q+2p-c)} + \dot{b}_{\alpha\beta}\,\tau^{\alpha\beta}_{(s-c)} + \frac{\partial \tau^{33}_{(s)}}{\partial \zeta} = 0,$$

$$\begin{aligned}
M^{(s)} \equiv &- \dot{E}\left(\frac{\partial W^{(s)}}{\partial \zeta} - \dot{b}^\lambda_\lambda \zeta \frac{\partial W^{(s-q)}}{\partial \zeta}\right) + \sigma a_{\lambda\rho}\,\tau^{\lambda\rho}_{(s-q+c)} -\\
&- \sigma \dot{b}_{\lambda\rho}\zeta \tau^{\lambda\rho}_{(s-2q+c)} = \tau^{33}_{(s-2q+2c)},
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
\sqrt{\frac{g}{a}}\, N^{(s)}_\alpha \equiv &\frac{\dot{E}}{2}\left[\left(f^{(s-q+2p-c)}_\alpha + \frac{\partial u^{(s)}_\alpha}{\partial \zeta}\right) - \dot{b}^\rho_\rho \zeta\left(f^{(s-2q+2p-c)}_\alpha + \frac{\partial u^{(s-q)}_\alpha}{\partial \zeta}\right) -\right.\\
&\left. - \dot{b}^\lambda_\alpha \zeta \frac{\partial u^{(s-q)}_\lambda}{\partial \zeta} + \dot{b}^\rho_\rho b^\lambda_\alpha \zeta^2 \frac{\partial u^{(s-2q)}_\lambda}{\partial \zeta}\right] = (1+\sigma)\, a_{\alpha\lambda}\,\tau^{\lambda 3}_{(s-2q+2p)} -\\
&- 2(1+\sigma)\dot{b}_{\alpha\lambda}\zeta \tau^{\lambda 3}_{(s-3q+2p)},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R^{(s)}_{\alpha\beta} \equiv &\dot{E}(e^{(s)}_{\alpha\beta} - \dot{b}^\lambda_\lambda \zeta e^{(s-q)}_{\alpha\beta} - \zeta r^{(s-q)}_{\alpha\beta} + \dot{b}^\lambda_\lambda \zeta^2 r^{(s-2q)}_{\alpha\beta}) - P_{\alpha\beta\lambda\rho}\tau^{\lambda\rho}_{(s)} -\\
&- \zeta L_{\alpha\beta\lambda\rho}\tau^{\lambda\rho}_{(s-q)} - \zeta^2 U_{\alpha\beta\lambda\rho}\tau^{\lambda\rho}_{(s-2q)} + \sigma a_{\alpha\beta}\tau^{33}_{(s-q+c)} - 2\sigma \dot{b}_{\alpha\beta}\zeta \tau^{33}_{(s-2q+c)} = 0.
\end{aligned}$$

În ecuațiile (5.6) și peste tot în cele ce urmează, mărimile cu indice negativ în paranteză trebuie considerate identic nule. În afară de aceasta, în (5.6) s-au folosit notațiile

$$\dot{b}_{\alpha\beta} = Rb_{\alpha\beta}; \qquad \dot{E} = \frac{E}{R}; \qquad \dot{\nabla}_\alpha = \frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} + R\varkappa^{-p}\pi_\alpha, \tag{5.7}$$

$$U_{\alpha\beta\lambda\rho} = 2(1+\sigma)\dot{b}_{\alpha\lambda}\dot{b}_{\rho\beta} - 2\sigma\dot{b}_{\alpha\beta}\dot{b}_{\lambda\rho}, \tag{5.8}$$

iar sensul mărimilor $e^{(s)}_{\alpha\beta}$, $r^{(s)}_{\alpha\beta}$, $f^{(s)}_\alpha$ este descoperit de ultimele trei egalități (3.5), în care trebuie să neglijăm indicele i.

Cum se va vedea ulterior, ecuațiile (5.6) împreună cu condițiile pe suprafețe (1.9) permit să se găsească succesiv, în ordinea creșterii indicelui s, coeficienții dezvoltărilor (5.4). În legătură cu aceasta vom spune că soluția ecuațiilor elasticității este găsită cu eroarea asimptotică formală $\varepsilon = O(\varkappa^{-r}) = O(h_*^{r/q})$ dacă în aceste dezvoltări s-au găsit primii r termeni (eroarea se numește formală în sensul că nu se pune problema evaluării termenilor reziduali).

În a treia din ecuațiile (5.6), termenul $\tau^{33}_{(s-2q+c)}$ diferă de zero numai pentru $s \geqslant 2q - 2c$ și, prin urmare, poate fi neglijat fără a modifica rezultatele ce se referă la primii $2q - 2c$ termeni ai dezvoltărilor (5.4), adică cu o eroare asimptotică formală de ordinul

$$\varepsilon = O(\varkappa^{-2q+2c}) = \begin{cases} O(h_*^2) \text{ pentru } q \geqslant 2p \left(t \leqslant \dfrac{1}{2}\right), \\ O(h_*^{4-4t}) \text{ pentru } q \leqslant 2p \left(t \geqslant \dfrac{1}{2}\right). \end{cases} \tag{5.9}$$

În mod asemănător, în ecuația a patra (5.6) putem neglija ambii termeni, conținînd $\tau^{\lambda 3}$ cu o eroare asimptotică formală de ordinul

$$\varepsilon = O(\varkappa^{-2q+2p}) = O(h_*^{2-2t}). \tag{5.10}$$

Neglijările descrise corespund neglijărilor prevăzute de ipoteza II a mărimilor τ^{33} și $\tau^{\lambda 3}$ în relațiile elasticității (1.5) și (1.6). Aceasta înseamnă că erorile asimptotice formale ale ipotezei II, se determină cu ajutorul formulelor (5.9), (5.10).

Neglijăm în (5.6) termenii cu τ^{33} din ecuația a treia și termenii cu $\tau^{\lambda 3}$ din ecuația a patra și vom rezolva sistemul obținut considerînd că coeficienții dezvoltărilor (5.4) au următoarea formă:

$$\tau^{\alpha\beta}_{(s)} = \overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s)} + \zeta\overset{1}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s)}; \qquad \tau^{\alpha 3}_{(s)} = \overset{0}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s)} + \zeta\overset{1}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s)} + \zeta^2\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s)},$$

$$\tau^{33}_{(s)} = \overset{0}{\tau}{}^{33}_{(s)} + \zeta\overset{1}{\tau}{}^{33}_{(s)} + \zeta^2\overset{2}{\tau}{}^{33}_{(s)} + \zeta^3\overset{3}{\tau}{}^{33}_{(s)}, \tag{5.11}$$

$$u^{(s)}_\alpha = \overset{0}{u}{}^{(s)}_\alpha + \zeta\overset{1}{u}{}^{(s)}_\alpha; \qquad W^{(s)} = \overset{0}{W}{}^{(s)} + \zeta\overset{1}{W}{}^{(s)}.$$

Introducem (5.11) în (5.6) și egalăm în fiecare din ecuații coeficienții de pe lîngă aceleași puteri ale lui ζ. Apoi în condițiile pe suprafețe (1.9) introducem (5.4) și (5.11) și egalăm coeficienții de pe lîngă aceleași puteri ale lui $\varkappa$. Atunci în totalitate se vor obține trei grupe de ecuații, din care prima coincide cu (3.1), (3.2), (3.5), iar a doua cu (3.3), însă acum în aceste egalități trebuie să ținem seama de indicii din paranteză, punctelor de deasupra literelor trebuie să le atribuim semnificația (5.7) și să considerăm că

$$h = 1, \quad \delta_r^0 \text{ fiind simbolul lui Kronecker.} \tag{5.12}$$

A treia grupă de ecuații se scrie astfel:

$$\begin{aligned} &b_\alpha^\beta \overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s-q)} = 0; \qquad \overset{l}{M}{}^{(s)} = 0 \qquad (l = 1, 2), \\ &\sqrt{\frac{g}{a}}\, \overset{1}{N}{}_\alpha^{(s)} = 0; \qquad \overset{l}{R}{}_{\alpha\beta}^{(s)} = 0 \qquad (l = 2, 3, 4), \end{aligned} \tag{5.13}$$

unde $\overset{l}{M}{}^{(s)}$, $\sqrt{g/a}\, \overset{l}{N}{}_\alpha^{(s)}$ și $\overset{l}{R}{}_{\alpha\beta}^{(s)}$ sînt coeficienții lui ζ^l din expresiile lui $M^{(s)}$, $\sqrt{g/a}\, N_\alpha^{(s)}$, $R_{\alpha\beta}^{(s)}$, definiți de formulele (5.6).

Observare asupra alegerii numărului d. În dezvoltările (5.4), mărimile notate cu indicele (0) nu trebuie să se anuleze identic simultan. Presupunerea contrarului ar însemna că exponenții factorilor sumelor au fost aleși incorect. Însă dezvoltările (5.4), în final, duc la o succesiune a problemelor la limită, a căror formă depinde de alegerea numărului d din (5.4), iar anularea identică a tuturor mărimilor cu indicele (0) înseamnă că problema la limită în aproximația inițială a fost omogenă. Dacă, în particular, pe suprafețele laterale ale învelitorii se pun condiții la limită omogene, atunci trebuie să impunem ca pentru $s = 0$ în membrul al doilea al ultimelor patru din egalitățile (3.3) să se păstreze cel puțin un termen. De aici obținem:

— dacă $\overset{*}{X}{}^\alpha = \overset{*}{Y}{}^\alpha = 0$, $(\overset{*}{x}, \overset{*}{m}) = O(1)$, atunci $d = -c$;

— dacă $(\overset{*}{X}{}^\alpha, \overset{*}{Y}{}^\alpha) = O(1)$, $\overset{*}{x} = \overset{*}{m} = 0$, atunci $d = -p$.

6. Vom arăta acum că eroarea asimptotică formală a ipotezei I are de asemenea ordinul (5.10). Pentru aceasta trebuie să demonstrăm că pentru

$$s < 2q - 2p \tag{6.1}$$

ecuațiile (5.13) sînt o consecință a ecuațiilor (3.1)—(3.3), (3.5), (5.7), (5.12). La demonstrare trebuie să se considere două cazuri:

— cazul 1: $q \geqslant 2p$, adică $c = 0$. Atunci, considerînd succesiv a treia și a patra din egalitățile (3.2), ultimele trei egalități (3.5) și a doua

egalitate (3.2) şi punînd în ele mărimile cu indicii negativi în paranteză egale cu zero, obţinem

$$\overset{1}{u}{}^{(s)}_{\alpha} = \overset{1}{e}{}^{(s)}_{\alpha\beta} = \overset{1}{r}{}^{(s)}_{\alpha\beta} = \overset{1}{\tau}{}^{\lambda\rho}_{(s)} = 0 \quad \text{pentru} \quad s < q - 2p,$$
$$\overset{1}{W}{}^{(s)} = \overset{1}{f}{}^{(s)}_{\alpha} \equiv 0 \qquad \text{pentru} \quad s < q; \tag{6.2}$$

apoi, înlocuind în a treia egalitate (3.1) s cu $s-q$, obţinem

$$\dot{\nabla}_{\lambda} \overset{1}{\tau}{}^{\lambda\alpha}_{(s-q)} - 3\dot{b}^{\alpha}_{\lambda} \overset{1}{\tau}{}^{\lambda 3}_{(s-2q)} + 2\overset{2}{\tau}{}^{\alpha 3}_{(s-q)} = 0. \tag{6.3}$$

Totodată, din (6.1) rezultă inegalităţile $s - q < q - 2p$ şi $s - 2q < -2p \leqslant 0$. De aici pe baza (6.2) reiese că în membrul întîi al egalităţii (6.3) putem neglija primii doi termeni, identic egali cu zero, şi în privinţa primei egalităţi (5.13) afirmaţia necesară devine evidentă.

Din primele două egalităţi (3.3), cu ajutorul (6.2) obţinem

$$\overset{2}{\tau}{}^{33}_{(s)} = \overset{3}{\tau}{}^{33}_{(s)} = 0 \qquad \text{pentru} \quad s < q - 2p,$$

de unde rezultă

$$\overset{2}{\tau}{}^{33}_{(s-q)} = \overset{2}{\tau}{}^{33}_{(s-q)} \equiv 0 \qquad \text{pentru} \quad s < 2q - 2p. \tag{6.4}$$

În egalităţile a doua, a treia şi a patra (5.13), expresiile

$$\overset{l}{M}{}^{(s)} \ (l = 1, 2); \qquad \sqrt{\frac{g}{a}}\, \overset{l}{N}{}^{(s)}_{\alpha}; \qquad \overset{l}{R}{}^{(s)1}_{\alpha\beta} \qquad (l = 2,\ 3,\ 4)$$

pot fi întocmite cu ajutorul formulelor (5.6) şi ne putem convinge uşor că toate se anulează fie pe baza inegalităţii (6.1), fie datorită lui (6.2) şi (6.4). Condiţia necesară pentru cazul I este demonstrată;

— cazul 2 : $q \leqslant 2p$, adică $c = 2p - q$. Pentru aceste valori ale lui p, q, ţinînd seama de (6.1), vom avea

$$s - q < 0. \tag{6.5}$$

În afară de aceasta, din egalităţile a treia (3.2) şi a patra (3.5), pe baza (6.5), obţinem

$$\overset{1}{W}{}^{(s)} = \overset{1}{f}{}^{(s)} \equiv 0 \qquad \text{pentru} \quad s < 2q - 2p.$$

Ţinînd seama de toate acestea, cu ajutorul (5.6) ne convingem uşor că toate egalităţile (5.13) şi în cazul al doilea devin identităţi.

Trecem la evaluarea erorii asimptotice formale, legată de ipoteza III. Ea corespunde afirmației că în primele două egalități (3.2) mărimile

$$\overset{0}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)}, \qquad \overset{1}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)}, \qquad \overset{0}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)} \tag{6.6}$$

pot fi exprimate prin componentele sarcinii exterioare cu ajutorul egalităților a treia și a patra (3.3), păstrînd în primul și al doilea membru numai primii termeni. O vom demonstra bazîndu-ne pe inegalitatea (6.1).

În privința mărimii a treia (6.6), problema nu se pune : ea poate fi exclusă complet, ca avînd pe baza (6.1) indice realmente negativ. De aici, de altfel, decurge că în teoria propusă putem introduce o simplificare suplimentară, neglijînd termenul care conține $\overset{0}{\tau}{}^{33}$ în a doua egalitate (3.2), ceea ce corespunde neglijării termenului cu $\overset{*}{m}$ în a doua relație a elasticității (4.6).

În primele două mărimi (6.6), pentru $q \leqslant 2p$, cînd $c = 2p - q$, indicii vor fi negativi pentru orice s care satisface inegalitatea (6.1) și ele de asemenea pot fi neglijate în întregime. Pentru $q \geqslant 2p$, cînd $c = 0$, afirmația necesară devine evidentă dacă în egalitățile a treia și a patra (3.3) înlocuim pe s prin $s - q$ și ținem seama de (6.4).

Așadar, eroarea asimptotică formală legată de ipoteza 3 nu depășește eroarea (5.10). Ea reprezintă tocmai eroarea asimptotică formală a teoriei propuse în ansamblu, deoarece mărimea (5.9) este mai mică decît ea (de aici rezultă de altfel legitatea neglijărilor efectuate anterior ale mărimilor de ordinul h_*^2 în comparație cu unitatea).

Se demonstrează ușor că eroarea teoriei clasice a învelitorilor întrece (5.10). Într-adevăr, revenind din nou la ecuațiile (3.2), observăm că neglijarea mărimilor $\overset{0}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)}$ și $\overset{1}{\tau}{}^{33}_{(s-q+c)}$, folosite în teoria clasică a învelitorilor, din prima și a doua din ele, ca și neglijarea lui $\overset{0}{\tau}{}^{\alpha\beta}_{(s-q+c)}$ din a treia din aceste egalități sînt legate de erori asimptotice formale de ordinul

$$\varepsilon = O(\varkappa^{-q+c}) = \begin{cases} O(h_*^1) & \text{pentru } q \geqslant 2p \quad (t \leqslant 1/2), \\ O(h_*^{2-2t}) & \text{pentru } q \leqslant 2p \quad (t \geqslant 1/2). \end{cases}$$

În concluzie, să facem o observare cu privire la ecuațiile (3.8). Ele corespund la trei ecuații de echilibru tensoriale, (4.1) ale teoriei clasice a învelitorilor, în prima ecuație corespondența fiind nedeplină. Înlocuim pe s prin $s-q$ în a treia ecuație (3.8) (5.12) și o vom transcrie astfel :

$$\frac{1}{3} \nabla_\lambda \overset{1}{\tau}{}^{\lambda\alpha}_{(s-q)} - \tau^\alpha_{(s-q)} + \frac{1}{2} \delta^0_{s-q-p-d} \overset{*}{Y}{}^\alpha - \tag{6.7}$$

$$- \frac{1}{2} \delta^0_{s-2q-p-d} (a^\alpha_\rho \dot{b}^\lambda_\lambda + \dot{b}^\alpha_\rho) \overset{*}{X}{}^\rho = 0.$$

Cu ajutorul acestei egalități, în prima din ecuațiile (3.8) putem elimina mărimea $\tau^{\alpha}_{(s-q)}$ care corespunde eforturilor tăietoare N^{α}, însă, aplicînd aceeași schemă de raționamente ca și anterior, se poate arăta ușor că pe baza (6.1) în membrul întîi al relației (6.7) vor fi diferiți de identic zero numai al doilea și al treilea termen. De aceea în locul lui (6.7) putem scrie

$$-\tau^{\alpha}_{(s-q)} + \frac{1}{2}\delta^{0}_{s-q-p-d}\overset{*}{Y}{}^{\alpha} = 0. \tag{6.8}$$

Egalitatea (6.7) corespunde ecuației a treia complete de echilibru (4.1), iar egalitatea (6.8) corespunde ecuației simplificate

$$N^{\alpha} - c^{\rho\alpha}Y_{\rho} = 0. \tag{6.9}$$

Aceasta înseamnă că termenii în plus luați în acoladă în prima ecuație tensorială de echilibru (4.8) pot fi puși egali cu zero, fără a ieși din limitele erorii asimptotice formale (5.10).

7. În paragrafele 5 și 6 s-a arătat că ipotezele din paragraful 2 sînt introduse numai pentru păstrarea tradiției. Pentru deducerea teoriei din paragrafele 2—4, esențial nu este adoptarea acestor ipoteze, ci postulatul privind legitatea formulelor (5.4) pe care se bazează toate concluziile din paragrafele 5—6. Însă cu ajutorul formulelor (5.4) se stabilesc anumite proprietăți asimptotice ale tensiunilor și deplasărilor, pe care s-ar putea nici să nu le posede toate stările de tensiune ipotetice, iar aceasta înseamnă că ipotezele din paragrafele 2—4 sînt valabile numai pentru o anumită clasă de probleme. Acest din urmă fapt nu este un neajuns prin el însuși, deoarece o teorie bidimensională absolut universală a învelitorilor probabil este imposibil de construit. Însă este important de lămurit în ce măsură este esențială restricția care apare.

Dezvoltările (5.4) pot fi recunoscute legitime pentru toate cazurile cînd, în primul rînd, există soluții ale problemelor la limită, la care duce (5.4), și, în al doilea rînd, cînd procesul iterativ respectiv are un caracter asimptotic.

Prima dintre aceste cerințe, pentru simplificare, va fi tratată aici doar ca o condiție de existență a soluțiilor problemelor la limită ale aproximației inițiale. Ea permite să se emită afirmații mai determinate asupra clasei problemelor admisibile. În lucrarea [3] sînt analizate procesele iterative care decurg din (5.4) și se arată că ele corespund în terminologia monografiei [2] stării de tensiune fără momente și stări de tensiune cu variație mare. În etapa inițială, din (5.4) se obțin ecuațiile diferențiale aproximative ale acestor stări de tensiune [1]). Starea de tensiune cu mare variație conține drept cazuri particulare efecte marginale nedegenerate. De aceea una dintre condițiile de aplicabilitate a teoriei din paragraful 2—4 constă în aceea că starea de tensiune căutată, dacă este privită din punctul de vedere al teoriei clasice, trebuie fie să aibă o mare variație,

[1]) La verificarea acestei afirmații trebuie să avem în vedere că în [3] s-a comis o eroare : în formulele (6.4) în loc de $u_{\alpha} \to r = x - p$ trebuie să avem $u_{\alpha} \to r = x + q - p$.

fie să admită o divizare în stare de tensiune fără moment și efect marginal nedegenerată, fie să reprezinte o superpoziție a acestor stări de tensiune. Studiului clasei corespunzătoare de probleme îi este consacrată în mare măsură monografia [2]. Se arată că el este foarte vast, deși nu cuprinde toate cazurile. Fac excepție cazurile :

a) cînd suprafața mediană a învelitorii are unele singularități ;

b) cînd starea de tensiune căutată cuprinde efect marginal degenerat ;

c) cînd suprafața mediană a învelitorii se întinde la infinit ;

d) cînd starea de tensiune a învelitorii la depărtare de margini este stare numai de momente.

Dintre suprafețele speciale despre care s-a vorbit în cazul (a) fac parte planele, suprafețele tangente la plan de-a lungul unei curbe închise (cum este torul) sau suprafețele care au un vîrf ascuțit (cum este conul). La asemenea învelitori, starea de tensiune la depărtare de margini în general nu va fi fără momente pentru nici un indice de variație și pentru nici o condiție de fixare a marginelor.

Ca exemplu de caz (b) servește învelitoarea cilindrică suficient de lungă. El este un caz special, deoarece ecuațiile efectului marginal degenerat nu se obțin în aproximația inițială a procesului iterativ, care corespunde dezvoltărilor (5.4).

Învelitorile care se întind la infinit din cazul (c) necesită de asemenea un studiu special. La ele eforturile și momentele, dacă sînt construite după teoria fără momente, pot fi infinite, în timp ce calculul mai exact dă pentru ele valori finite. Drept ilustrare a acestui fapt poate servi învelitoarea cilindrică închisă, încărcată cu forțe marginale autoechilibrate.

Cazul (d) are loc atunci cînd învelitoarea nu este suficient de rigid fixată la margini. În ea va apărea o stare de tensiune numai de momente pentru care în locul lui (5.4) trebuie să luăm alte dezvoltări ale tensiunilor și deplasărilor ; în articolul [3] aceste dezvoltări sînt determinate de formulele (3.1) și (4.2).

Lista enumerată de cazuri speciale nu are pretenția de a fi completă. În afară de aceasta trebuie să avem în vedere că necesită un studiu special și cazul cînd învelitoarea este „aproape specială", adică diferă puțin de cea specială (de exemplu învelitoarea de mică curbură și învelitoarea cilindrică închisă lungă). Pentru asemenea învelitori aproape speciale, soluția poate fi construită formal prin metoda divizării, adică să căutăm separat starea de tensiune fără momente și efecte marginale, însă ea va fi foarte departe de cea adevărată, iar acest lucru va avea influență asupra naturii convergenței procesului iterativ care decurge din (5.4).

Dacă problema este specială, aceasta nu înseamnă totdeauna că pentru ea teoria propusă este inaccesibilă. Aplicabilitatea teoriei din paragrafele 2—4 la învelitorile de mică curbură din considerente formale este îndoielnică. Dar în cazul dat ele nu sînt fundamentate. Toți termenii care intră în teoria aproximativă binecunoscută a învelitorilor de mică curbură sînt conținuți și în teoria despre care este vorba aici, iar eroarea în coeficientul lui N^{α} din prima ecuație tensorială a echilibrului (4.8) este neesențială, deoarece acest termen în teoria aproximativă a învelitorilor de mică curbură este neglijat. Ca exemple de caracter opus servesc problemele privind învelitoarea cilindrică lungă și starea de tensiune

numai de momente. În prima dintre ele este inacceptabilă inexactitatea admisă în (4.8), deoarece termenul respectiv în cazul dat este de primă importanţă. În a doua problemă, în relaţiile elasticităţii (4.3), un rol esenţial îl joacă tensorul elasticităţii Q, valoarea nulă obţinută pentru el (4.7) fiind prea grosieră.

Firește, putem îmbunătăți teoria propusă neglijînd în ecuaţia (4.8) termenul din acoladă şi înlocuind formula pentru Q cu una mai exactă. Atunci clasa problemelor admisibile se va lărgi, însă problema universalităţii acestei teorii corectate tot va rămîne deschisă, deoarece nu se vede posibilitatea neglijării tuturor problemelor imaginabile.

Evaluările de mai sus ale erorii se referă numai la construirea stării de tensiune internă. Ele depind în mod substanţial de indicele de variaţie [1]) şi pentru $t = 1$, cum era şi de aşteptat, duc la $\varepsilon = O(1)$. Dacă starea de tensiune căutată este neomogenă (în diferite puncte) în ceea ce priveşte variaţia sa, ea trebuie divizată în termeni omogeni, iar evaluările obţinute trebuie aplicate fiecărui termen în parte. În particular, dacă în învelitoare apare o stare de tensiune fără momente şi un efect marginal simplu, atunci în formula de evaluare (5.10) pentru prima din ele trebuie să luăm o valoare a lui t care corespunde condiţiilor problemei (de exemplu $t = 0$ pentru sarcina netedă şi condiţii la limită), iar pentru a doua trebuie să luăm totdeauna $t = 1/2$.

În concluzie, menţionăm că prin metoda expusă s-ar putea obţine o eroare asimptotică formală mai mică chiar decît (5.10). Totuşi, teoriile bidimensionale corespunzătoare ale stării de tensiune interne vor diferi de data aceasta substanţial de teoria clasică : vor fi necesare alte noţiuni, se va schimba ordinul ecuaţiilor etc. Varianta propusă a teoriei învelitorilor a fost numită în introducere variantă asimptotic optimă, în sensul că exactitatea atinsă în ea este maximum posibilă din toate cele care pot fi atinse, fără o modificare esenţială a principiilor de bază ale teoriei clasice.

Primită la redacţie la 8 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A. L., Goldenveizer, *Kacestvenoe işledovanie napriajenovo sostoiania tonkoi obolociki*, P.M.M., **9**, *6*, 463–478 (1945).
2. Goldenveizer A. L., *Teoria uprughih tonkih obolocek*, M., 1953.
3. Goldenveizer A. L., *Postroenie priblijenoi teorii obolocek pri pomoşci asimptoticeskovo integrirovania uravnenii teorii uprugosti*, P.M.M., **27**, *4*, 593–608 (1963).
4. Green A. E., *On the Linear Theory of Thin Elastic Schells*, Proc. Roy. Soc. London, **A266**, *1325*, 143–160 (1962).
5. Green A.E., *Bovndary-Layer Equations in the Linear Theory of Thin Elastic Shells*, Proc. Roy. Soc. London, A **269**, *1339*, 481–491 (19).
6. Johnson M. W., Reissner E., *On the Foundations of the Theory of Thin Elastic Shells*, J. Math. and Phys., **37**, *4*, 371–392.
7. Lurie A. I., *Obşceaia teoria uprughih tonkih obolocek*, P. M.M., **4**, *2*, 7–34 (1940).
8. Reiss E., L., *A Theory for the Small Rotationally Symmetric Deformations of Cylindrical Shells*, Communs Pure and Appl. Math., 13 ; 3, 531–550 (1960).
9. Reissner E., *On the Derivation of the Theory of Thin Elastic Shells*, J. Math. and Phys., **42**, *4*, 263–277 (1963).

[1]) Acest termen s-a introdus în monografia [2] şi este larg utilizat în literatura sovietică de specialitate. În literatura străină, lui îi corespunde noţiunea probabil introdusă în [6] despre lungimea caracteristică a graficului deformaţiei d. Legătura dintre ele poate fi exprimată prin egalitatea $d_* = h_*^t$, unde d_* este raportul dintre d şi raza de curbură tipică a suprafeţei mediane.

Academicianului AUREL A. BELEŞ în semn de respectuos omagiu cu prilejul împlinirii a 80 de ani de viaţă
Mircea V. Soare

ÎNCOVOIEREA CILINDRICĂ A REŢELELOR SPAŢIALE PLANAR PĂTRATE DIAGONALE

de MIRCEA V. SOARE
Institutul de cercetări în construcţii şi economia construcţiilor (INCERC), Bucureşti

În studiu se examinează un nou tip de reţea planar pătrată, caracterizată prin conformarea diferită a celor două feţe paralele.
Pentru cazul general se aplică metoda deformaţiilor, stabilind sistemul de ecuaţii cu diferenţe finite pe care îl satisfac cele nouă deplasări necunoscute, corespunzătoare celor trei tipuri distincte de noduri din reţea.
În continuare, se dezvoltă studiul încovoierii cilindrice, se dau soluţii complete în cazul sarcinilor nodale egale, şi prin trecere la limită, se asimilează structura reticulată cu un mediu continuu echivalent.

1. INTRODUCERE

Într-un studiu anterior [3] am numit reţea spaţială planară o structură reticulată la care barele sînt dispuse în două feţe paralele legate între ele cu diagonale şi constituind un sistem indeformabil. Ceea ce caracterizează în principal o asemenea structură este caracterul de regularitate a conformării ochiurilor (distribuţia discretă a nodurilor), fapt care a condus la elaborarea unor metode speciale de calcul.

În afara reţelelor planar pătrate simple şi oblice, un alt tip oferă avantaje tehnice şi economice, datorită conformării sale speciale, şi anume reţeaua planar pătrată diagonală.

Reţeaua planar pătrată diagonală de care ne ocupăm în studiul de faţă prezintă particularitatea unor carelaje diferite în cele două feţe; presupunînd că conturul reţelei are o formă dreptunghiulară, barele feţei inferioare sînt dispuse paralel cu laturile conturului, în timp ce barele feţei superioare sînt orientate la 45° faţă de laturile conturului. În felul acesta, fiecare nod superior se proiectează în mijlocul unei bare inferioare. Diagonalele care unesc nodurile din cele două feţe sînt situate în plane verticale, care conţin şi barele inferioare (fig. 1).

Legătura barelor la noduri se face prin articulaţii sferice perfecte, iar rezemarea pe contur se face la faţa superioară.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 2, 1971, P. 275–306

Notaţiile sînt precizate în text acolo unde apar prima dată şi sînt reunite în anexa 1.

Dacă se notează cu l lungimea unei bare din faţa inferioară (pasul reţelei), cu γ unghiul de înclinare a diagonalelor faţă de planul orizontal

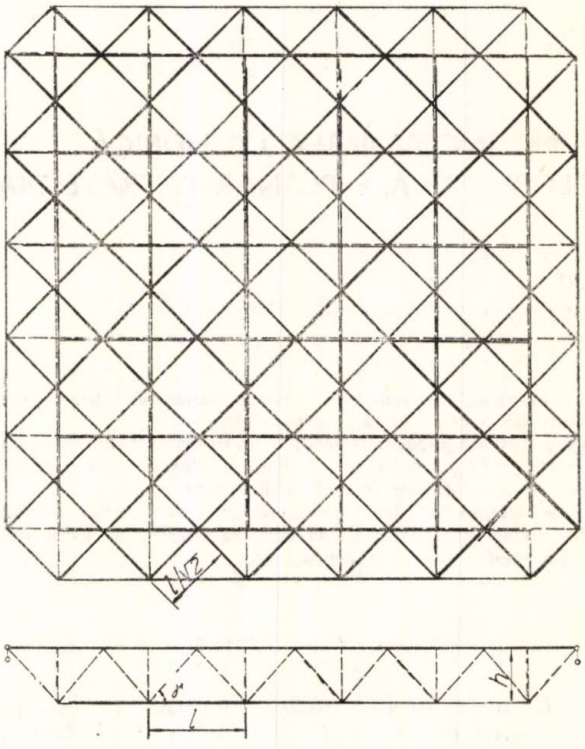


Fig. 1. — Geometria reţelei spaţiale planar pătrate diagonale.

şi cu h înălţimea reţelei (distanţa dintre cele două feţe paralele), lungimile barelor din faţa superioară, respectiv ale diagonalelor, sînt

$$l_s = \frac{l}{\sqrt{2}}, \quad l_d = \frac{l}{2\cos\gamma} = \frac{h}{\sin\gamma} \qquad \left(\operatorname{cotg}\gamma = \frac{l}{2h}\right). \tag{1.1}$$

În cele ce urmează se aplică metoda deformaţiilor pentru cazul general de solicitare, obţinîndu-se un sistem de ecuaţii cu diferenţe finite parţiale. Cazul general este apoi particularizat pentru încovoierea cilindrică.

2. RELAŢIILE GENERALE ÎN METODA DEFORMAŢIILOR

În lucrarea [3] am expus principiile aplicării metodei deformaţiilor. Vom presupune că barele din fiecare faţă sînt identice, avînd rigidităţile axiale k_t, respectiv k_s, şi analog diagonalele au o rigiditate k_d.

Examinarea rețelei spațiale planar pătrate diagonale considerată arată că există doar trei tipuri de noduri distincte, dintre care unul în fața inferioară (A) și celelalte două în fața superioară (B și C) [2].

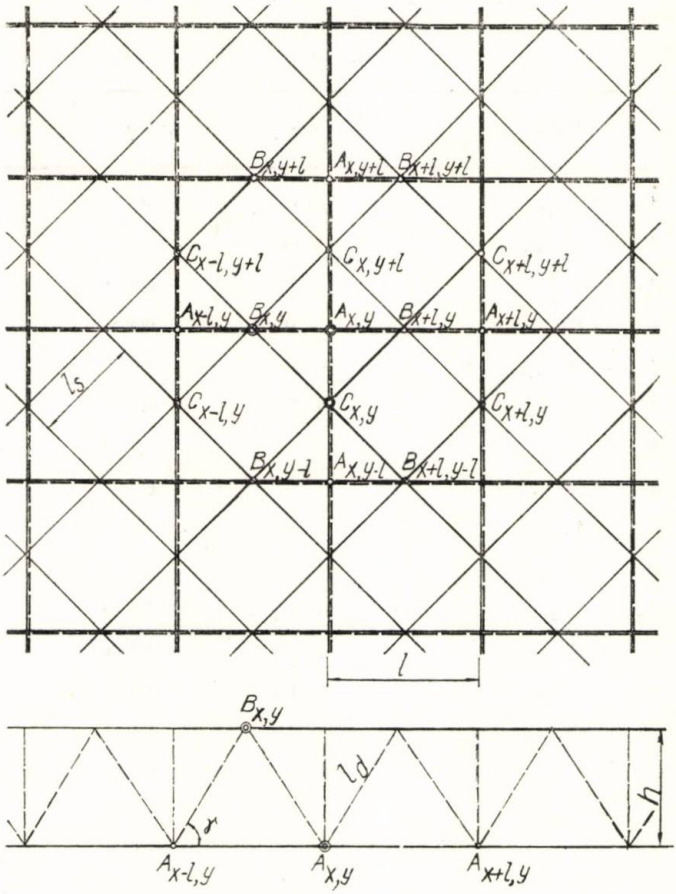


Fig. 2. — Nodurile tip A, B și C și nodurile vecine.

În raport cu un sistem de axe de coordonate xyz având originea în planul feței superioare, axele Ox și Oy paralele cu barele feței inferioare și axa Oz dirijată în jos, cele trei noduri curente vor fi notate $A_{x,y}$, $B_{x,y}$ și $C_{x,y}$; nodurile vecine sînt notate conform figurii 2.

Se va observa că diferențierea între nodurile tip B și C intervine doar din punct de vedere analitic, barele din fața inferioară și diagonalele corespunzătoare fiind orientate în sensul axei x, respectiv y.

Barele care concurează la cele trei noduri și cosinusurile directoare corespunzătoare au fost trecute în tabela 1.

Reamintim (vezi, de exemplu, [3], relațiile (3.1) și (3.2)) că pentru o bară 1—2, ale cărei capete suferă deplasările elastice u_1, v_1, w_1 și,

respectiv, u_2, v_2, w_2, efortul în bara N_{1-2}, considerat ca plecînd din nodul 1, se evaluează cu ajutorul relației

$$N_{1-2} = k\,[(u_2 - u_1)\cos\gamma_x + (v_2 - v_1)\cos\gamma_y + (w_2 - w_1)\cos\gamma_z], \qquad (2.1)$$

Tabela 1

Bara	$\cos\gamma_x$	$\cos\gamma_y$	$\cos\gamma_z$
$A_{x,y} - B_{x,y}$	$-\cos\gamma$	0	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - B_{x+l,y}$	$+\cos\gamma$	0	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - C_{x,y}$	0	$-\cos\gamma$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - C_{x,y+l}$	0	$+\cos\gamma$	$-\sin\gamma$
$A_{x,y} - A_{x-l,y}$	-1	0	0
$A_{x,y} - A_{x+l,y}$	$+1$	0	0
$A_{x,y} - A_{x,y+l}$	0	$+1$	0
$A_{x,y} - A_{x,y-l}$	0	-1	0
$B_{x,y} - A_{x,y}$	$+\cos\gamma$	0	$+\sin\gamma$
$B_{x,y} - A_{x-l,y}$	$-\cos\gamma$	0	$+\sin\gamma$
$B_{x,y} - C_{x,y}$	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$B_{x,y} - C_{x,y+l}$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$B_{x,y} - C_{x-l,y+l}$	$-1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$B_{x,y} - C_{x-l,y}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y} - A_{x,y}$	0	$+\cos\gamma$	$+\sin\gamma$
$C_{x,y} - A_{x,y-l}$	0	$-\cos\gamma$	$+\sin\gamma$
$C_{x,y} - B_{x+l,y}$	$+1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y} - B_{x,y}$	$-1/\sqrt{2}$	$+1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y} - B_{x,y-l}$	$-1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0
$C_{x,y} - B_{x+l,y-l}$	$+1/\sqrt{2}$	$-1/\sqrt{2}$	0

în care $\cos\gamma_x$, $\cos\gamma_y$, $\cos\gamma_z$ reprezintă cosinusurile directoare ale suportului dreptei 1—2.

Proiecțiile efortului N_{1-2} pe cele trei axe de coordonate sînt, respectiv,

$$X_{1-2} = N_{1-2}\cos\gamma_x, \quad Y_{1-2} = N_{1-2}\cos\gamma_y, \quad Z_{1-2} = N_{1-2}\cos\gamma_z. \qquad (2.1')$$

Să arătăm modul de scriere a ecuațiilor de echilibru, alegînd, de exemplu, ecuația $\Sigma X_A = 0$.

În această ecuație intervin eforturile din barele $A_{x,y} - A_{x-l,y}$; $A_{x,y} - A_{x+l,y}$; $A_{x,y} - B_{x,y}$ și $A_{x,y} - B_{x+l,y}$.

Proiecțiile acestor eforturi pe axa x (respectiv în ordinea enumerării lor) sînt *:

$$\begin{aligned} &k_i\,(u^A_{x-1,y} - u^A_{x,y}),\\ &k_i\,(u^A_{x+1,y} - u^A_{x,y}),\\ &k_d\,[(u^B_{x,y} - u^A_{x,y})\cos^2\gamma + (w^B_{x,y} - w^A_{x,y})\sin\gamma\cos\gamma],\\ &k_d\,[(u^B_{x+1,y} - u^A_{x,y})\cos^2\gamma - (w^B_{x+1,y} - w^A_{x,y})\sin\gamma\cos\gamma]. \end{aligned} \tag{2.2}$$

Însumînd termenii precedenți și ținînd seama de componenta sarcinii exterioare F_{Ax}, ecuația de proiecții se scrie

$$k_i\,(u^A_{x+1,y} - 2u^A_{x,y} + u^A_{x-1,y}) + k_d\,[(u^B_{x+1,y} + u^B_{x,y} - 2u^A_{x,y})\cos^2\gamma - (w^B_{x+1,y} - w^B_{x,y})\sin\gamma\cos\gamma] + F_{Ax} = 0.$$

Împărțind cu $k_d\cos^2\gamma$ și punînd

$$\psi_i = \frac{k_i}{k_d\cos^2\gamma} \tag{2.3}$$

și analog

$$\psi_s = \frac{k_s}{k_d\cos^2\gamma} \tag{2.3'}$$

și introducînd încă operatorii cu diferențe finite E:

$$u^A_{x,y} = u_A, \quad u^A_{x+1,y} = E_x\,u_A, \quad u^A_{x-1,y} = E_x^{-1}\,u_A \text{ etc.}, \tag{2.4}$$

ecuația de proiecții se poate scrie sub forma finală

$$\begin{aligned} &-[\psi_i\,(1 - E_x)\,(1 - E_x^{-1}) + 2]\,u_A + (1 + E_x)\,u_B +\\ &+ \operatorname{tg}\gamma\cdot(1 - E_x)\,w_B = -\frac{F_{Ax}}{k_d\cos^2\gamma}. \end{aligned} \tag{2.5}$$

Pe o cale asemănătoare sînt scrise și celelalte ecuații de echilibru, și anume

$$\Sigma Y_A = 0, \quad \Sigma Z_A = 0, \quad \Sigma X_B = 0, \quad \Sigma Y_B = 0, \quad \Sigma Z_B = 0, \quad \Sigma X_C = 0,$$

$$\Sigma Y_C = 0, \quad \text{și} \quad \Sigma Z_C = 0.$$

*) Indicii A și B sînt plasați sus în vederea simplificării scrierii.

Pentru simplificarea scrierii se mai introduc următoarele notații pentru termenii liberi:

$$\frac{F_{Ax}}{k_a \cos^2 \gamma} = \mathcal{F}_{Ax}; \quad \frac{F_{Ay}}{k_a \cos^2 \gamma} = \mathcal{F}_{Ay}; \quad \frac{F_{Az}}{k_a \sin \gamma \cos \gamma} = \mathcal{F}_{Az},$$

$$\frac{F_{Bx}}{k_a \cos^2 \gamma} = \mathcal{F}_{Bx}; \quad \frac{F_{By}}{k_a \cos^2 \gamma} = \mathcal{F}_{By}; \quad \frac{F_{Bz}}{k_a \sin \gamma \cos \gamma} = \mathcal{F}_{Bz}, \tag{2.6}$$

$$\frac{F_{Cx}}{k_a \cos^2 \gamma} = \mathcal{F}_{Cx}; \quad \frac{F_{Cy}}{k_a \cos^2 \gamma} = \mathcal{F}_{Cy}; \quad \frac{F_{Cz}}{k_a \sin \gamma \cos \gamma} = \mathcal{F}_{Cz}.$$

Termenii $\mathcal{F}$ reprezintă din punct de vedere dimensional deplasări liniare.

Se pot scrie, așadar, nouă ecuații de echilibru. Ele constituie un sistem de ecuații cu diferențe finite parțiale, a cărui matrice a fost trecută în tabela 2.

Pe marginea ecuațiilor trecute în tabela 2 se poate observa că unele ecuații pot fi deduse din altele prin permutarea indicilor și a simbolurilor; de exemplu ecuația (Cy) se deduce din (Bx) prin schimbarea indicilor x și y între ei, analog pentru ecuațiile (Ax) și (Ay) etc. De asemenea, dacă se consideră ca necunoscute săgețile w multiplicate cu $\operatorname{tg} \gamma$ și se schimbă între ei operatorii cu diferențe finite la dreapta (E_x, E_y) și la stînga (E_x^{-1}, E_y^{-1}), matricea sistemului este simetrică în raport cu diagonala principală.

Sub o formă similară, sistemul de ecuații cu diferențe finite a fost stabilit anterior de J. D. Renton [2]. În paragraful 4 se va arăta modul cum se simplifică aceste ecuații în cazul încovoierii cilindrice și modul corespunzător de obținere a soluției.

3. ÎNCOVOIEREA CILINDRICĂ A REȚELEI

În cele ce urmează ne vom ocupa de un caz remarcabil de solicitare a rețelei și anume încovoierea cilindrică. Această situație se întîmplă atunci cînd în plan una dintre deschideri este foarte mare în raport cu cealaltă deschidere a. Prin analogie cu încovoierea cilindrică a dalelor, se poate admite că rețeaua spațială se întinde la infinit într-o direcție y și lucrează doar în sensul axei x pe deschiderea a.

Studiul analitic poate fi abordat fie direct, stabilind ecuațiile de echilibru ale eforturilor în jurul nodurilor de tip A, B, C și asociind ecuațiile de deformații, fie particularizînd ecuațiile generale din metoda deformațiilor, stabilite în paragraful 2.

În cadrul paragrafului de față vom da pe scurt ecuațiile de echilibru și de deformații caracterizînd metoda mixtă, împreună cu condițiile marginale ce trebuie asociate pentru determinarea constantelor de integrare atunci cînd se integrează ecuațiile cu diferențe finite.

Tabela 2

	u_A	u_B	u_C	v_A	v_B	v_C	w_A	w_B	w_C	= Termen liber
Ax	$-\psi_i(1-E_x)(1-E_x^{-1})-2$	$1+E_x$	·	·	·	·	·	$\mathrm{tg}\gamma(1-E_x)$	·	$-\mathcal{F}_{Ax}$
Bx	$1+E_x^{-1}$	$-2(1+\psi_s)$	$\frac{1}{2}\psi_s(1+E_x^{-1})(1+E_y)$	·	·	$-\frac{1}{2}\psi_s(1-E_x^{-1})(1-E_y)$	$\mathrm{tg}\gamma(1-E_x^{-1})$	·	·	$-\mathcal{F}_{Bx}$
Cx	·	$\frac{1}{2}\psi_s(1+E_x)(1+E_y^{-1})$	$-2\psi_s$	·	$\frac{1}{2}\psi_s(1-E_x)(1-E_y^{-1})$	·	·	·	·	$-\mathcal{F}_{Cx}$
Ay	·	·	·	$-\psi_i(1-E_y)(1-E_y^{-1})-2$	$1+E_y$	·	·	·	$\mathrm{tg}\gamma(1-E_y)$	$-\mathcal{F}_{Ay}$
By	·	·	$-\frac{1}{2}\psi_s(1-E_x^{-1})(1-E_y)$	·	$-2\psi_s$	$+\frac{1}{2}\psi_s(1+E_x^{-1})(1+E_y)$	·	·	·	$-\mathcal{F}_{By}$
Cy	·	$\frac{1}{2}\psi_s(1-E_x)(1-E_y^{-1})$	·	$1+E_y^{-1}$	$\frac{1}{2}\psi_s(1+E_x)(1+E_y^{-1})$	$-2(1+\psi_s)$	$\mathrm{tg}\gamma(1-E_y^{-1})$	·	·	$-\mathcal{F}_{Cy}$
Az	·	$1-E_x$	·	·	$1-E_y$	·	$-4\mathrm{tg}\gamma$	$\mathrm{tg}\gamma(1+E_x)$	$\mathrm{tg}\gamma(1+E_y)$	$-\mathcal{F}_{Az}$
Bz	$1-E_x^{-1}$	·	·	·	·	·	$\mathrm{tg}\gamma(1+E_x^{-1})$	$-2\mathrm{tg}\gamma$	·	$-\mathcal{F}_{Bz}$
Cz	·	·	·	$1-E_y^{-1}$	·	·	$g\gamma(1+E_y^{-1})$	·	$-2\mathrm{tg}\gamma$	$-\mathcal{F}_{Cz}$

3.1. ECUAȚIILE DE ECHILIBRU

Încovoierea cilindrică a rețelei este caracterizată de faptul că starea de eforturi și de deformații este independentă de una dintre coordonate, de exemplu y; cu alte cuvinte, în secțiuni y = multiplu de l (pasul rețelei) se întîlnesc aceleași eforturi și deplasări.

Poziția nodurilor va fi fixată printr-un singur indice : $m=0, 1, 2, \ldots, p$ în fața superioară și $m' = m + 1/2$ în fața inferioară.

Pentru simplificare ne vom limita la forțe verticale P_{Am}, P_{Bm}, P_{Cm} aplicate la noduri. Eforturile care concurează la cele trei noduri curente au fost reprezentate în figura 3 *a*, *b*, *c*.

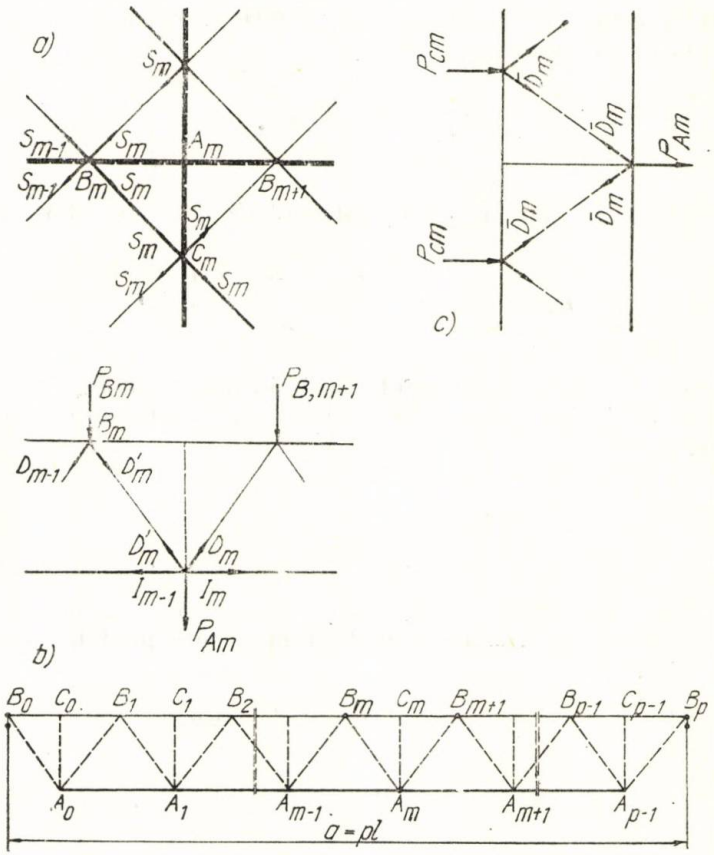


Fig. 3. — Notarea nodurilor și a eforturilor în cazul încovoierii cilindrice : *a* — plan ; *b* — secțiune verticală în lungul axei x ; *c* — secțiune transversală.

Ecuațiile de echilibru care pot fi scrise sînt următoarele :
— pentru nodul A :

$$(\Sigma X)\ I_m - I_{m-1} + (D_m - D'_m)\cos\gamma = 0, \tag{3.1}$$

$$(\Sigma Z)\ (D_m + D'_m + 2\bar{D}_m)\sin\gamma - P_{Am} = 0\,; \tag{3.1'}$$

— pentru nodul B:

$$(\Sigma X)\ (S_m - S_{m-1})\sqrt{2} + (D'_m - D_{m-1})\ \cos\gamma = 0, \tag{3.2}$$

$$(\Sigma Z)\ (D'_m + D_{m-1})\ \sin\gamma + P_{Bm} = 0\,; \tag{3.2'}$$

— pentru nodul C:

$$(\Sigma Z)\ 2\overline{D}_m\ \sin\gamma + P_{Cm} = 0. \tag{3.3}$$

Celelalte ecuații de proiecții sînt identic verificate.
Din (3.3) rezultă direct

$$\overline{D}_m = -\frac{P_{Cm}}{2\sin\gamma}. \tag{3.4}$$

Prin eliminarea lui $\overline{D}_m$ și D'_m între (3.1'), (3.2') și (3.3), se obține

$$D_m - D_{m-1} = \frac{P_{Am} + P_{Bm} + P_{Cm}}{\sin\gamma}, \tag{3.5}$$

care constituie o ecuație cu diferențe finite în raport cu D_m.

Efortul în cealaltă diagonală rezultă dintr-una din relațiile (3.2), (3.4), de exemplu

$$D'_m = -\frac{P_{Bm}}{\sin\gamma} - D_{m-1}. \tag{3.6}$$

Izolînd pe $(I_m - I_{m-1})$ și $(S_m - S_{m-1})$ în primul membru al relațiilor (3.1) și (3.3), rezultă noi ecuații cu diferențe finite pentru eforturile din cele două fețe:

$$I_m - I_{m-1} = -(D_m - D'_m)\ \cos\gamma, \tag{3.7}$$

$$S_m - S_{m-1} = -(D'_m - D_{m-1})\frac{\cos\gamma}{\sqrt{2}}, \tag{3.7'}$$

în care eforturile în diagonale, care apar în membrii secunzi, sînt presupuse cunoscute din integrarea ecuației (3.7).

Soluția ecuațiilor cu diferențe finite de mai sus poate fi obținută cunoscînd încărcările P_{Am}, P_{Bm}, P_{Cm}. De exemplu, cînd aceste sarcini nodale sînt constante ($P_{Am} = P_A$, $P_{Bm} = P_B$, $P_{Cm} = P_C$), avem

$$D_m = \frac{1}{\sin\gamma}\left[(P_A + P_B + P_C)\, m + C_1\right], \tag{3.8}$$

$$D'_m = \frac{1}{\sin\gamma}\left[-(P_A + P_B + P_C)\,m + P_A + P_C - C_1\right], \tag{3.8'}$$

$$I_m = \operatorname{cotg}\gamma\left[-(P_A + P_B + P_C)\,m^2 - (C_3 + 2C_1)\,m + C_2\right] \tag{3.8''}$$

$$S_m = \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\left[(P_A + P_B + P_C)\,m^2 - (P_A + P_C - 2C_1)\,m + C_3\right], \tag{3.8'''}$$

în care C_1, C_2, C_3 reprezintă constante de integrare; așa cum se va arăta la punctul 3.3, constantele C_2 și C_3 nu sînt independente între ele.

3.2. ECUAȚIILE DE DEFORMAȚII

În cazul special studiat, deplasările nodurilor în sensul axei Oy sînt nule, adică $v_A = v_B = v_C = 0$. Din particularizarea ecuației generale 2.17), aplicată succesiv pentru barele cu eforturi I_m, S_m, D_m și D'_m, rezultă

$$I_m = k_i\,(u_{A,m+1} - u_{A,m}), \tag{3.9}$$

$$S_m = \frac{k_s}{\sqrt{2}}\,(u_{C,m} - u_{B,m}), \tag{3.9'}$$

$$D_m = k_d\,\cos\gamma\,\left[u_{B,m+1} - u_{A,m} - (w_{B,m+1} - w_{A,m})\,\operatorname{tg}\gamma\right], \tag{3.9''}$$

$$D'_m = k_d\,\cos\gamma\,\left[u_{A,m} - u_{B,m} + (w_{A,m} - w_{B,m})\,\operatorname{tg}\gamma\right], \tag{3.9'''}$$

Din simple considerente geometrice rezultă

$$u_{C,m} = \frac{1}{2}\,(u_{B,m+1} + u_{B,m}). \tag{3.10}$$

Săgeata nodului C_m se compune din săgeata nodului A_m, la care se adaugă scurtarea diagonalelor D_m sub acțiunea sarcinilor nodale P_{Cm}:

$$w_{C,m} = w_{A,m} + \frac{P_{Cm}}{2k_d \sin^2\gamma}. \tag{3.10}$$

Din (3.9) se deduce

$$u_{A,m+1} - u_{A,m} = \frac{I_m}{k_i}. \tag{3.11}$$

Eliminînd pe $u_{C,m}$ între (3.9') și (3.10) rezultă

$$u_{B,m+1} - u_{B,m} = \frac{2\sqrt{2}\,S_m}{k_s}. \tag{3.11'}$$

Prin scăderea relațiilor (3.9″) și (3.9‴) și apoi prin gruparea convenabilă a termenilor, rezultă

$$w_{B,m+1} - w_{B,m} = \frac{u_{B,m+1} + u_{B,m} - 2u_{A,m}}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{D'_m - D_m}{k_d \sin\gamma}. \qquad (3.11'')$$

Relațiile (3.11) — (3.11″) constituie ecuații cu diferențe finite în raport cu deplasările u_A, u_B, w_B dacă se presupune că membrii din dreapta ai acestor relații au fost determinați în prealabil. Prin integrarea lor rezultă trei noi constante de integrare, C_4, C_5, C_6.

Săgețile w_A rezultă direct dintr-una din relațiile (3.9″) sau (3.9‴), de exemplu

$$w_{A,m} = w_{B,m} + \frac{u_{B,m} - u_{A,m}}{\operatorname{tg}\gamma} + \frac{D'_m}{k_d \sin\gamma}. \qquad (3.11''')$$

În felul acesta, toate deplasările nodurilor pot fi complet precizate. Se observă că eforturile și deplasările au fost stabilite în două trepte succesive, mai puțin constantele de integrare.

3.3. CONDIȚII MARGINALE

Constantele de integrare sînt determinate din condiții marginale. Ne vom mărgini să exemplificăm cazul static determinat cînd rețeaua este simplu rezemată la capete și încărcată cu sarcini egale.

Dacă se notează cu p numărul intervalelor din fața superioară (nodurile de reazem fiind 0 și p), reacțiunea are valoarea

$$V_0 = (P_A + P_C)\frac{p}{2} + P_B\frac{p-1}{2}. \qquad (3.12)$$

Aplicînd metoda izolării nodurilor O și O', rezultă (fig. 4)

$$D'_0 = \frac{V_0}{\sin\gamma},$$

$$D_0 = -\frac{V_0 - P_A - P_C}{\sin\gamma}, \qquad (3.13)$$

$$S_0 = -V_0\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}},$$

$$I_0 = (2V_0 - P_A - P_C)\operatorname{cotg}\gamma.$$

Dacă se consideră în (3.8) $m = 0$ și valorile astfel obținute sînt egalate cu expresiile (3.13), rezultă constantele de integrare

$$C_1 = -(P_A + P_C)\frac{p-2}{2} - P_B\frac{p-1}{2},$$

$$C_2 = (P_A + P_B + P_C)\ (p-1), \tag{3.14}$$

$$C_3 = -(P_A + P_C)\frac{p}{2} - P_B\frac{p-1}{2}.$$

Eliminînd pe V_0 între expresiile lui S_0 și I_0 avem

$$2\sqrt{2}\,S_0 + I_0 + (P_A + P_C)\operatorname{cotg}\gamma = 0;$$

exprimînd această relație prin intermediul constantelor de integrare

$$C_2 + 2C_3 = -(P_A + P_C),$$

reiese că cele două constante C_2 și C_3 nu sînt independente între ele.

Atît expresiile (3.8), cît și (3.14) arată că în expresiile eforturilor sarcinile nodale P_A și P_C intervin doar prin suma lor. Acest fapt se explică foarte simplu din punct de vedere static prin faptul că sarcinile nodale P_C se transmit direct la nodurile A prin diagonale, întrucît barele orizontale care leagă nodurile C nu se încarcă. În felul acesta, prin reducerea forțelor, la nodurile A acționează sarcina finală $(P_A + P_C)$.

Expresiile eforturilor vor fi detaliate la paragraful 4.

Pentru deplasări se pot impune condițiile ca în axa de simetrie deplasările orizontale să fie, nule, adică

$$-\text{ pentru } m = \frac{p}{2} \to u_B = 0;$$

$$-\text{ pentru } m = \frac{p-1}{2} \to u_A = 0.$$

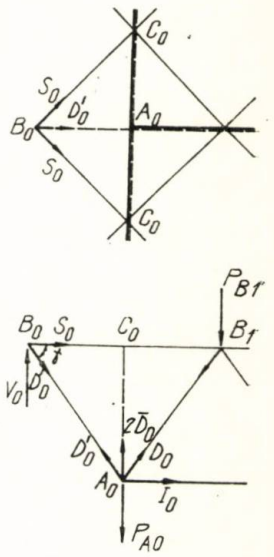


Fig. 4. — Echilibrul nodurilor O și O': a — plan; b — secțiune verticală în lungul axei x.

Dacă la unul dintre capete, de exemplu $m = 0$, structura este articulată, condiția marginală va fi modificată în consecință, fapt care nu schimbă însă starea de eforturi.

O a treia condiție privește săgețile w_B, și anume

$$-\text{ pentru } m = 0 \to w_{B,0} = 0.$$

Datorită simetriei, condiția de săgeată nulă la celălalt capăt va fi satisfăcută automat. Determinarea concretă a deplasărilor va fi făcută la paragraful următor.

Tabela 3

u_A	u_B	w_A	w_B	= Termen liber
$-\psi_i(1-E_x)(1-E_x^{-1})-2$	$1+E_x$	·	$+\mathrm{tg}\gamma(1-E_x)$	0
$1+E_x^{-1}$	$-\overline{\psi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})-2$	$+\mathrm{tg}\gamma(1-E_x^{-1})$	·	0
·	$1-E_x$	$-2\mathrm{tg}\gamma$	$+\mathrm{tg}\gamma(1+E_x)$	$-\dfrac{F_{Az}+F_{Cz}}{k_d \sin\gamma\cos\gamma}$
$1-E_x^{-1}$	·	$+\mathrm{tg}\gamma(1+E_x^{-1})$	$-2\mathrm{tg}\gamma$	$-\dfrac{F_{Bz}}{k_d \sin\gamma\cos\gamma}$

4. APLICAREA METODEI DEFORMAȚIILOR

În continuare vom relua problema încovoierii cilindrice, aplicînd în mod sistematic metoda deformațiilor; în acest scop, vom pleca de la sistemul de ecuații cu diferențe finite trecut în tabela 2.

4.1. SISTEMUL DE ECUAȚII CU DIFERENȚE FINITE

Ținînd seama că $v_A = v_B = v_C = 0$, sistemul se simplifică. În primul rînd dispar ecuațiile de proiecții pe axa y (Ay, By și Cy).

Mai departe, din ecuația (Cx) se exprimă deplasarea u_C în funcție de u_B; rezultă în acest fel relația (3.10 a), cu ajutorul căreia este eliminată deplasarea u_C. La fel se procedează cu săgețile w_C. Din ecuația (Cz) se exprimă w_C în funcție de w_A; rezultă relația (3.11'''), stabilită anterior.

După toate aceste eliminări rezultă un sistem de patru ecuații cu diferențe finite, a cărui matrice este redată în tabela 3.

Pentru simetria scrierii s-a notat

$$\bar{\psi}^s = \frac{1}{2}\,\psi_s = \frac{k_s}{2k_d\cos^2\gamma}, \tag{4.1}$$

iar conform celor stabilite la paragraful 3 ne-am limitat la acțiunea încărcărilor verticale.

4.2. INTRODUCEREA UNUI POTENȚIAL

Un procedeu unitar de obținere a soluției constă în a reduce sistemul de patru ecuații cu diferențe finite la o singură ecuație, în care funcția necunoscută este un potențial, din care apoi derivă deplasările și eforturile.

Pentru obținerea acestui potențial, mersul calculului poate fi sistematizat după cum urmează.

Fie

$$\begin{aligned}
L_{11}u_A + L_{12}u_B + L_{13}w_A + L_{14}w_B &= 0,\\
L_{21}u_A + L_{22}u_B + L_{23}w_A + L_{24}w_B &= 0,\\
L_{31}u_A + L_{32}u_B + L_{33}w_A + L_{34}w_B &= 0,\\
L_{41}u_A + L_{42}u_B + L_{43}w_A + L_{44}w_B &= L_{04},
\end{aligned} \tag{4.2}$$

în care coeficienții L_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) sînt operatori cu diferențe finite ale căror expresii rezultă din compararea cu sistemul de ecuații din tabela 3. Pentru termenii liberi se va proceda prin suprapunerea efectelor, mai sus fiind considerat cazul încărcărilor din fața superioară a rețelei F_{Bs}.

Potențialul Φ_B satisface o ecuație cu diferențe care se obține din egalarea determinantului principal al sistemului (4.2) cu termenul liber :

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} & L_{34} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_B = L_{04}. \tag{4.3}$$

Necunoscutele u_A, u_B, w_A, w_B se obțin prin aplicarea asupra potențialului Φ_B a unui operator care rezultă înlocuind în determinantul principal coloana necunoscutei respective prin coloana termenilor liberi, în care se ia $L_{04} = 1$. Pe această cale rezultă

$$u_A = -\begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{32} & L_{33} & L_{34} \end{vmatrix} \Phi_B ; \; u_B = +\begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{23} & L_{24} \\ L_{31} & L_{33} & L_{34} \end{vmatrix} \Phi_B ,$$

$$w_A = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{24} \\ L_{31} & L_{32} & L_{34} \end{vmatrix} \Phi_B ; \; w_B = +\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} \Phi_B . \tag{4.4}$$

Ducînd soluțiile (4.4) în ultima ecuație (4.2), se regăsește relația (4.3), în care determinantul a fost dezvoltat după termenii ultimei linii.

În mod asemănător se va proceda pentru încărcarea $(F_{Az} + F_{Cz})$ și anume în sistemul (4.2) va figura termenul liber L_{03} în ecuația a treia.

Potențialul Φ_A satisface o ecuație cu diferențe finite a cărei matrice este tot determinantul principal, iar ca termen liber figurează L_{03}. Pentru necunoscutele u_A, u_B, w_A, w_B se obțin expresiile

$$u_A = +\begin{vmatrix} L_{12} & L_{13} & L_{14} \\ L_{22} & L_{23} & L_{24} \\ L_{42} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_A ; \; u_B = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{13} & L_{14} \\ L_{21} & L_{23} & L_{24} \\ L_{41} & L_{43} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_A ,$$

$$w_A = +\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{14} \\ L_{21} & L_{22} & L_{24} \\ L_{41} & L_{42} & L_{44} \end{vmatrix} \Phi_A ; \; w_B = -\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{41} & L_{42} & L_{43} \end{vmatrix} \Phi_A . \tag{4.5}$$

Odată cunoscute deplasările, eforturile se deduc cu ajutorul relațiilor (3.9).

4.3. CAZUL ÎNCĂRCĂRILOR P_B

Vom aplica expresiile deduse anterior în cazul încărcării nodurilor B. Ținînd seama de matricea sistemului de ecuații cu diferențe finite din tabela 3, expresia deplasării u_A din (4.4) se scrie

$$u_A = -\begin{vmatrix} 1+E_x & 0 & \operatorname{tg}\gamma(1-E_x) \\ -\bar{\psi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})-2 & \operatorname{tg}\gamma(1-E_x^{-1}) & 0 \\ 1-E_x & -2\operatorname{tg}\gamma & \operatorname{tg}\gamma(1+E_x) \end{vmatrix} \Phi_B =$$

$$= -2\bar{\psi}_s \operatorname{tg}^2\gamma(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})\,\Phi_B.$$

Pe o cale absolut analogă se obține

$$u_B = -\psi_i \operatorname{tg}^2\gamma(1-E_x)(1-E_x^{-1})^2(1+E_x)\,\Phi_B,$$

$$w_A = -\operatorname{tg}\gamma(1-E_x)(1-E_x^{-1})\,[\psi_i\bar{\psi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})(1+E_x)+$$

$$+2(\psi_i+\bar{\psi}_s)(1+E_x)]\,\Phi_B,$$

$$w_B = -\operatorname{tg}\gamma(1-E_x)(1-E_x^{-1})\,[2\psi_i\bar{\psi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})+$$

$$+\psi_i(1+E_x)(1+E_x^{-1})+4\bar{\psi}_s]\,\Phi_B,$$

$$\operatorname{tg}^2\gamma\cdot\psi_i\bar{\psi}_s(1-E_x)^3(1-E_x^{-1})^3\,\Phi_B = -\frac{F_{Bz}}{k_d\sin\gamma\cos\gamma}.$$

Este interesant de observat că operatorul $(1-E_x)(1-E_x^{-1})$ apare în toate expresiile precedente. De aceea vor rezulta expresii mai simple dacă se va face schimbarea de potențial

$$-\operatorname{tg}^2\gamma(1-E_x)(1-E_x^{-1})\,\Phi_B = F_B. \tag{4.6}$$

În acest fel rezultă că noul potențial F_B satisface ecuația cu diferențe finite de ordinul patru

$$(1-E_x)^2(1-E_x^{-1})^2\,F_B = \frac{F_{Bz}}{\psi_i\bar{\psi}_s k_d\sin\gamma\cos\gamma}; \tag{4.7}$$

Deplasările capătă expresiile finale

$$u_A = 2\bar{\psi}_s(1-E_x)\,F_B, \tag{4.8}$$

$$u_B = \psi_i(1-E_x^{-1})(1+E_x)\,F_B, \tag{4.8'}$$

$$w_A = \operatorname{cotg}\gamma[\psi_i\bar{\psi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})(1+E_x)+2(\psi_i+\bar{\psi}_s)(1+E_x)]F_B, \tag{4.8''}$$

$$w_B = \operatorname{cotg}\gamma[2\psi_i\bar{\psi}_s(1-E_x)(1-E_x^{-1})+\psi_i(1+E_x)(1+E_x^{-1})+4\bar{\psi}_s]F_B. \tag{4.8'''}$$

Pentru obținerea eforturilor se pleacă de la relațiile (3.9), respectiv (3.11'), în care se introduc în prealabil operatorii E_x și E_x^{-1}.

$$I = k_i(E_x u_A - u_A) = -k_i(1 - E_x)\,u_A = -2k_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)^2 F_B, \tag{4.9}$$

$$S = \frac{k_s}{2\sqrt{2}}(E_x u_B - u_B) = -\frac{k_s}{2\sqrt{2}}(1 - E_x)\,u_B =$$
$$-\frac{k_s\psi_i}{2\sqrt{2}}(1 - E_x)(1 - E_x^{-1})(1 + E_x)F_B, \tag{4.9'}$$

$$D = k_d \cos\gamma[E_x u_B - u_A - (E_x w_B - w_A)\operatorname{tg}\gamma] =$$
$$= \cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})\,F_B, \tag{4.9''}$$

$$D' = k_d \cos\gamma[u_A - u_B + (w_A - w_B)\operatorname{tg}\gamma] =$$
$$= -\cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})F_B = -D. \tag{4.9'''}$$

Revenind de la operatorii cu diferențe E_x și E_x^{-1} la valorile funcțiilor în nodul m și la nodurile vecine și notînd $F_{Bz} = P_{Bm}$, relațiile precedente se scriu[1]

$$F_{m+2} - 4F_{m+1} + 6F_m - 4F_{m-1} + F_{m-2} = \frac{P_{Bm}}{\psi_i\bar{\psi}_s k_d \sin\gamma\cos\gamma}, \tag{4.10}$$

$$u_{A,m} = 2\bar{\psi}_s(F_m - F_{m+1}),$$
$$u_{B,m} = \psi_i(F_{m+1} - F_{m-1}), \tag{4.10'}$$
$$w_{A,m} = \operatorname{cotg}\gamma[-\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+2} - F_{m+1} - F_m + F_{m-1}) + 2(\psi_i + \bar{\psi}_s)(F_{m+1} + F_m)],$$
$$w_{B,m} = \operatorname{cotg}\gamma[-2\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+1} - 2F_m + F_{m-1}) +$$
$$+ \psi_i(F_{m+1} + 2F_m + F_{m-1}) + 4\bar{\psi}_s F_m],$$
$$I_m = -2k_i\bar{\psi}_s(F_{m+2} - 2F_{m+1} + F_m),$$
$$S_m = +\frac{1}{2\sqrt{2}}k_s\psi_i(F_{m+2} - F_{m+1} - F_m + F_{m-1}), \tag{4.10''}$$
$$D_m = -D'_m = \cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+2} - 3F_{m+1} + 3F_m - F_{m-1}).$$

Soluția ecuației (4.10) poate fi căutată așa cum s-a indicat într-un studiu anterior [4] pentru cazul rețelei planar pătrate simple.

În cazul sarcinilor nodale egale ($P_{Bm} = P_B$) se obține următoarea soluție:

$$F_m = \frac{P_B}{\psi_i\bar{\psi}_s k_d \sin\gamma\cos\gamma}\left(\frac{1}{4!}m^4 + \frac{C_3}{3!}m^3 + \frac{C_2}{2!}m^2 + C_1 m + C_0\right), \tag{4.11}$$

în care C_0, C_1, C_2, C_3 reprezintă constante de integrare (diferite de cele introduse la punctul 3.3).

[1] Pentru simplificarea scrierii se suprimă indicele B, care caracterizează poziția sarcinilor nodale.

Înlocuind în (4.11) pe m prin $(m+1)$, $(m-1)$ și $(m+2)$, rezultă expresiile lui F_{m+1}, F_{m-1}, F_{m+2} pe care nu le mai redăm.

Cu aceste relații, expresiile eforturilor și ale deplasărilor devin

$$I_m = -P_B \operatorname{cotg}\gamma\left[m^2 + 2(C_3+1)\,m + 2C_3 + 2C_2 + \frac{7}{6}\right],$$

$$S_m = P_B \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2 + (2C_3+1)\,m + C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3}\right], \qquad (4.12)$$

$$D_m = -D'_m = \frac{P_B}{\sin\gamma}\left(m + C_3 + \frac{1}{2}\right),$$

$$u_{A,m} = -\frac{P_B}{k_i}\operatorname{cotg}\gamma\left[\frac{1}{3}m^3 + \left(C_3 + \frac{1}{2}\right)m^2 + \left(C_3 + 2C_2 + \frac{1}{3}\right)m + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{3}C_3 + C_2 + 2C_1 + \frac{1}{12}\right],$$

$$u_{B,m} = \frac{2P_B}{k_s}\operatorname{cotg}\gamma\left[\frac{1}{3}m^3 + C_3 m^2 + \left(2C_2 + \frac{1}{3}\right)m + \frac{1}{3}C_3 + 2C_1\right], \qquad (4.13)$$

$$w_{A,m} = P_B \operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left[\frac{1}{6}m^4 + \frac{2C_3+1}{3}m^3 + \left(C_3 + 2C_2 + \frac{1}{2}\right)m^2 + \right.$$

$$+ \left(C_3 + 2C_2 + 4C_1 + \frac{1}{3}\right)m + \frac{1}{3}C_3 + C_2 + 2C_1 + 2C_0 +$$

$$\left. + \frac{1}{12}\right] - \frac{P_B}{k_d \sin^2\gamma}\left[(2C_3+1)\,m + C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3}\right],$$

$$w_{B,m} = P_B \operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left(\frac{1}{6}m^4 + \frac{2}{3}C_3 m^3 + 2C_2 m^2 + 4C_1 m + 4C_0\right) +$$

$$+ P_B\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} - \frac{1}{k_d \sin^2\gamma}\right)\left(m^2 + 2C_3 m + 2C_2 + \frac{1}{6}\right).$$

★

Întrucît, datorită conformării sale geometrice, rețeaua are o comportare statică favorabilă atunci cînd se întinde pe o singură deschidere, ne vom limita la această situație, examinînd cazul simplei rezemări la capete.

Condițiile marginale au fost examinate și la punctul 3.3; ele pot fi exprimate succint după cum urmează:

$$\text{— pentru } m = 0: \quad D_0 = -\frac{V_0}{\sin\gamma} = -\frac{P_B}{\sin\gamma}\frac{p-1}{2},$$

$$S_0 = -V_0\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}} = -P_B\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\frac{p-1}{2}, \tag{4.14}$$

$$w_{B,0} = 0;$$

$$\text{— pentru } m=p: \quad w_{B,p} = 0.$$

Impunînd condițiile precedente, rezultă următoarele valori ale constantelor de integrare:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{p^3+p}{24}; \quad C_2 = -\frac{1}{12}; \quad C_3 = -\frac{p}{2}. \tag{4.15}$$

Ducînd aceste valori în (4.12) și (4.13), se obține expresiile definitive ale eforturilor și deplasărilor:

$$I_m = +P_B\operatorname{cotg}\gamma[-m^2+(p-2)\,m+p-1], \tag{4.16}$$

$$S_m = P_B\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2-(p-1)\,m-\frac{p-1}{2}\right], \tag{4.16'}$$

$$D_m = -D'_m = \frac{P_B}{\sin\gamma}\left(m-\frac{p-1}{2}\right), \tag{4.16''}$$

$$u_{A,m} = -\frac{P_B\operatorname{cotg}\gamma}{3k_i}\left[m^3-\frac{3}{2}(p-1)\,m^2-\frac{3p-1}{2}m+\frac{p^3-p}{4}\right], \tag{4.17}$$

$$u_{B,m} = +\frac{2P_B\operatorname{cotg}\gamma}{3k_s}\left[m^3-\frac{3}{2}pm^2+\frac{1}{2}m+\frac{p^3-p}{4}\right], \tag{4.17'}$$

$$w_{A,m} = \frac{P_B\operatorname{cotg}^2\gamma}{6}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)\left[m^4-2(p-1)m^3-(3p-2)m^2+\right.$$

$$\left.+(p^3-2p+1)\,m+\frac{p^3-p}{2}\right]-\frac{P_B}{k_d\sin^2\gamma}\left[m^2-\right.$$

$$\left.-(p-1)\,m-\frac{3p+1}{6}\right], \tag{4.17''}$$

$$w_{B,m} = -\frac{P_B\operatorname{cotg}^2\gamma}{6}\left(\frac{1}{k_i}+\frac{2}{k_s}\right)[m^4-2pm^3-m^2+(p^3+p)m]-$$

$$-P_B\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s}-\frac{1}{k_d\sin^2\gamma}\right)(pm-m^2). \tag{4.17'''}$$

4.4. CAZUL ÎNCĂRCĂRILOR $P_A + P_C$

Procedînd la fel ca în cazul sarcinilor P_B (parag. 4.3), se arată că potențialul F_A satisface ecuația cu diferențe finite [2]

$$(1 - E_x)^2 (1 - E_x^{-1})^2 F_A = \frac{F_{Az} + F_{Cz}}{\psi_i \bar{\psi}_s k_d \sin\gamma \cos\gamma}.$$

Din el derivă deplasările

$$u_A = \bar{\psi}_s(1 - E_x)\ (1 + E_x^{-1})\ F_A,$$

$$u_B = 2\psi_i(1 - E_x^{-1})\ F_A,$$

$$w_A = \operatorname{cotg}\gamma[2\psi_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)\ (1 - E_x^{-1}) + 4\psi_i + \bar{\psi}_s(1+E_x)\ (1+E_x^{-1})]\ F_A,$$

$$w_B = \operatorname{cotg}\gamma[\psi_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)\ (1 - E_x^{-1})\ (1+E_x^{-1}) + 2(\psi_i + \bar{\psi}_s)\ (1 + E_x^{-1})]F_A$$

și eforturile

$$I = - k_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)^2\ (1 + E_x^{-1})\ F_A,$$

$$S = -\frac{k_s\psi_i}{\sqrt{2}}(1 - E_x)\ (1 - E_x^{-1})\ F_A,$$

$$D = \cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)^2\ (1 - E_x^{-1})\ F_A,$$

$$D' = \cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(1 - E_x)\ (1 - E_x^{-1})^2\ F_A.$$

Transcrise în diferențe finite, relațiile precedente devin [3]

$$F_{m+2} - 4F_{m+1} + 6F_m - 4F_{m-1} + F_{m-2} = \frac{P_{Am} + P_{Cm}}{\psi_i\bar{\psi}_s k_d \sin\gamma \cos\gamma}, \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}
u_{A,m} &= - \bar{\psi}_s(F_{m+1} - F_{m-1}),\\
u_{B,m} &= 2\psi_i(F_m - F_{m-1}),\\
w_{A,m} &= \operatorname{cotg}\gamma[- 2\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+1} - 2F_m + F_{m-1}) + 4\psi_i F_m +\\
&\quad + \bar{\psi}_s(F_{m+1} + 2F_m + F_{m-1})],\\
w_{B,m} &= \operatorname{cotg}\gamma[-\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+1} - F_m - F_{m-1} + F_{m-2}) + 2(\bar{\psi}_i + \bar{\psi}_s)(F_m + F_{m-1})].
\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}
I_m &= - k_i\bar{\psi}_s(F_{m+2} - F_{m+1} - F_m + F_{m-1}),\\
S_m &= + \frac{k_s\bar{\psi}_i}{\sqrt{2}}(F_{m+1} - 2F_m + F_{m-1}),
\end{aligned} \tag{4.20}$$

$$\begin{aligned}
D_m &= \cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+2} - 3F_{m+1} + 3F_m - F_{m-1}),\\
D'_m &= - \cos\gamma \cdot k_d\psi_i\bar{\psi}_s(F_{m+1} - 3F_m + 3F_{m-1} - F_{m-2}) = - D_{m-1}.
\end{aligned}$$

---

[2] Pentru simplificarea scrierii se notează F_A în loc de F_{A+C}.

[3] Pentru simplificarea scrierii se suprimă indicele A care caracterizează poziția sarcinilor nodale.

În cazul sarcinilor nodale egale ($F_{Az} + F_{Cz} = P_A + P_C$) se obține următoarea soluție a ecuației care determină potențialul F_A:

$$F_m = \frac{P_A + P_C}{\psi_i \bar{\psi}_e k_d \sin\gamma \cos\gamma}\left(\frac{1}{4!}m^4 + \frac{C_3}{3!}m^3 + \frac{C_2}{2!}m^2 + C_1 m + C_0\right), \tag{4.21}$$

în care C_0, C_1, C_2, C_3 reprezintă constante de integrare.

Introducînd soluția (4.21) în relațiile (4.19) și (4.20), rezultă următoarele expresii generale pentru eforturi și deplasări:

$$\begin{aligned}
I_m &= -(P_A + P_C)\operatorname{cotg}\gamma\left[m^2 + (2C_3 + 1)\,m + C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3}\right],\\
S_m &= +(P_A + P_C)\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2 + 2C_3 m + 2C_2 + \frac{1}{6}\right],\\
D_m &= \frac{P_A + P_C}{\sin\gamma}\left(m + C_3 + \frac{1}{2}\right),\\
D'_m &= -D_{m-1} = -\frac{P_A + P_C}{\sin\gamma}\left(m + C_3 - \frac{1}{2}\right);\\
u_{A,m} &= -\frac{P_A + P_C}{k_i}\operatorname{cotg}\gamma\left[\frac{1}{3}m^3 + C_3 m^2 + \left(2C_2 + \frac{1}{3}\right)m + \frac{1}{3}C_3 + 2C_1\right],\\
u_{B,m} &= 2\frac{P_A + P_C}{k_e}\operatorname{cotg}\gamma\left[\frac{1}{3}m^3 + \left(C_3 - \frac{1}{2}\right)m^2 - \left(C_3 - 2C_2 - \frac{1}{3}\right)m + \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{3}C_3 - C_2 + 2C_1 - \frac{1}{12}\right].
\end{aligned} \tag{4.22}$$

$$\begin{aligned}
w_{A,m} &= (P_A + P_C)\operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left(\frac{1}{6}m^4 + \frac{2}{3}C_3 m^3 + 2C_2 m^2 + 4C_1 m + \right.\\
&\quad \left. + 4C_0\right) + (P_A + P_C)\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} - \frac{1}{k_d \sin^2\gamma}\right)\left(m^2 + 2C_3 m + 2C_2 + \frac{1}{6}\right),\\
w_{B,m} &= (P_A + P_C)\operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_e}\right)\left[\frac{1}{6}m^4 + \frac{2C_3 - 1}{3}m^3 + \left(-C_3 + 2C_2 + \frac{1}{2}\right)m^2 + \right.\\
&\quad \left. + \left(C_3 - 2C_2 + 4C_1 - \frac{1}{3}\right)m - \frac{1}{3}C_3 + C_2 - 2C_1 + 4C_0 + \frac{1}{12}\right] -\\
&\quad - (P_A + P_C)\frac{1}{k_d \sin^2\gamma}\left[m^2 + (2C_3 - 1)\,m - C_3 + 2C_2 + \frac{2}{3}\right].
\end{aligned} \tag{4.23}$$

Pentru rețeaua simplu rezemată la capete, condițiile marginale se scriu astfel:

$$\text{— pentru } m = 0: \quad D_0 = \frac{-V_0 + P_A + P_C}{\sin\gamma} = -\frac{(P_A + P_C)(p-2)}{2\sin\gamma},$$

$$S_0 = \frac{-V_0 \operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}} = -(P_A + P_C)\frac{p}{2}\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}, \tag{4.24}$$

$$\text{— pentru } m = p \quad \begin{matrix} w_{B,0} = 0; \\ w_{B,p} = 0. \end{matrix}$$

Rezultă următoarele valori ale constantelor de integrare:

$$C_0 = \frac{p^3 + 2p}{48}; \quad C_1 = \frac{p^3 + p - 2}{24}; \quad C_2 = -\frac{3p+1}{12}; \quad C_3 = -\frac{p-1}{2}. \tag{4.25}$$

Ducînd aceste valori în (4.22) și (4.23), se obțin expresiile definitive ale eforturilor și deplasărilor:

$$I_m = (P_A + P_C)\operatorname{cotg}\gamma[-m^2 + (p-2)\,m + p - 1],$$

$$S_m = (P_A + P_C)\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2 - (p-1)\,m - \frac{p}{2}\right],$$

$$D_m = \frac{P_A + P_C}{\sin\gamma}\left(m - \frac{p}{2} + 1\right), \tag{4.26}$$

$$D'_m = \frac{P_A + P_C}{\sin\gamma}\left(\frac{p}{2} - m\right),$$

$$u_{A,m} = -\frac{P_A + P_C}{3k_t}\operatorname{cotg}\gamma\left[m^3 - \frac{3}{2}(p-1)\,m^2 - \frac{3p-1}{2}m + \frac{p^3 - p}{4}\right],$$

$$u_{B,m} = +\frac{2(P_A + P_C)}{3k_s}\operatorname{cotg}\gamma\left(m^3 - \frac{3}{2}pm^2 - m + \frac{p^3 + 2p}{4}\right),$$

$$w_{A,m} = \frac{1}{6}(P_A + P_C)\operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_t} + \frac{2}{k_s}\right)\left[m^4 - 2(p-1)\,m^3 - \right. \tag{4.27}$$

$$\left. - (3p+1)\,m^2 + (p^3 + p - 2)\,m + \frac{1}{2}p^3 + p\right] +$$

$$+ (P_A + P_C)\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} - \frac{1}{k_d \sin^2\gamma}\right)\left[m^2 - (p-1)\,m - \frac{p}{2}\right],$$

$$w_{B,m} = \frac{1}{6}(P_A + P_C)\operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)[m^4 - pm^3 - m^2 +$$

$$+ (p^3 + p)\,m] + (P_A + P_C)\frac{1}{k_d \sin^2\gamma}(pm - m^2).$$

În lucrarea [5] a fost descrisă o metodă aproximativă de calcul al eforturilor și săgeților rețelei planar pătrate diagonale, încărcată cu sarcini verticale uniforme. Aproximația rezidă în faptul că se consideră că în toate cele patru bare superioare, adiacente unui nod inferior, apar eforturi egale.

Cum, în cazul încovoierii cilindrice, aceasta se întîmplă în mod riguros, reiese că metoda aproximativă conduce la rezultate exacte în cazul de față.

Față de lucrarea citată corespund notațiile $P_A = P_i$ și $P_B = P_C = P_s$.

4.5. ECUAȚII CU DIFERENȚE FINITE SATISFĂCUTE DE EFORTURI ȘI DEPLASĂRI

Pentru stabilirea directă a unor rezultate sau deducerea anumitor proprietăți ale rețelei, poate apărea necesar să exprimăm fiecare necunoscută sub formă diferențială în funcție de încărcarea exterioară. Aceste expresii se obțin simplu eliminînd potențialul dintre ecuația care îl caracterizează și relația care determină necunoscuta dorită în funcție de potențial.

Trecînd peste operațiile intermediare, se obțin următoarele ecuații, corespunzător tipului de încărcare P_B sau $(P_A + P_C)$:

— încărcarea nodurilor B :

$$(1 - E_x)(1 - E_x^{-1})^2 u_A = \frac{2\operatorname{cotg}\gamma}{k_i} F_{Bz},$$

$$(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})\,u_B = \frac{2\operatorname{cotg}\gamma}{k_s}(1 + E_x)\,F_{Bz},$$

$$(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})^2 w_A = \left[\frac{1}{k_d \sin^2\gamma}(1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\right](1 + E_x)\,F_{Bz},$$

$$(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})^2 w_B = 2\left[\frac{1}{k_d \sin^2\gamma}(1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) + \right. \tag{4.28}$$

$$\left. + \frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s}(1 + E_x)(1 + E_x^{-1}) + \frac{2\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_i}\right]F_{Bz},$$

$$(1 - E_x^{-1})^2 I = -2\operatorname{cotg}\gamma \cdot F_{Bz},$$

$$(1 - E_x)(1 - E_x^{-1})\, S = -\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}(1 + E_x),$$

$$(1 - E_x^{-1})\, D = \frac{1}{\sin\gamma} F_{Bz};$$

— încărcarea nodurilor A și C:

$$(1 - E_x)(1 - E_x^{-1})^2 u_A = \frac{\operatorname{cotg}\gamma}{k_i}(1 + E_x^{-1})(F_{Az} + F_{Cz}),$$

$$(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})\, u_B = \frac{4\operatorname{cotg}\gamma}{k_s}(F_{Az} + F_{Cz}),$$

$$(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})^2 w_A = \left[\frac{2}{k_d \sin^2\gamma}(1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) + \right.$$

$$\left. + \frac{8\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} + \frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_i}(1 + E_x)(1 + E_x^{-1})\right](F_{Az} + F_{Cz}), \tag{4.29}$$

$$(1 - E_x)^2(1 - E_x^{-1})^2 w_B = \left[\frac{1}{k_d \sin^2\gamma}(1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) + \right.$$

$$\left. + 2\operatorname{cotg}^2\gamma\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\right](1 + E_x^{-1})(F_{Az} + F_{Cz}),$$

$$(1 - E_x^{-1})^2 I = -\operatorname{cotg}\gamma(1 + E_x^{-1})(F_{Az} + F_{Cz}),$$

$$(1 - E_x)(1 - E_x^{-1})\, S = -\sqrt{2}\operatorname{cotg}\gamma(F_{Az} + F_{Cz}),$$

$$(1 - E_x^{-1})\, D = \frac{1}{\sin\gamma}(F_{Az} + F_{Cz}),$$

$$(1 - E_x)\, D' = \frac{1}{\sin\gamma}(F_{Az} + F_{Cz}).$$

5. MEDIUL CONTINUU ECHIVALENT

Dacă pasul rețelei este foarte mic în raport cu deschiderea, rețeaua spațială poate fi asimilată cu un mediu continuu echivalent, ale cărui proprietăți elastice urmează să le stabilim în cele ce urmează.

Trecerea de la structura discontinuă la una continuă se face utilizînd dezvoltările în serie Taylor :

$$F_{m+1} = E_x F_m = F(x_{m+1}) = F_m + l\frac{\mathrm{d}F_m}{\mathrm{d}x} + \frac{l^2}{2!}\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} +$$

$$+ \frac{l^3}{3!}\frac{\mathrm{d}^3F_m}{\mathrm{d}x^3} + \frac{l^4}{4!}\frac{\mathrm{d}^4F_m}{\mathrm{d}x^4} + \dots$$

şi expresii similare pentru F_{m-1}, F_{m+2} şi F_{m-2}.

Să ne ocupăm de cazul încărcărilor aplicate în nodurile B.

Introducînd dezvoltările în serie în ecuaţia cu diferenţe finite, (4.10) dă

$$F_{m+2} - 4F_{m+1} + 6F_m - 4F_{m-1} + F_{m-2} = 24\frac{l^4}{4!}\frac{\mathrm{d}^4F}{\mathrm{d}x^4} +$$

$$+ 120\frac{l^6}{6!}\frac{\mathrm{d}^6F}{\mathrm{d}x^6} + \dots = \frac{P_{Bm}}{\psi_i \bar{\psi}_s k_d \sin\gamma\cos\gamma}.$$

Neglijînd termenii multiplicaţi cu l^6 şi la puteri superioare, din expresia precedentă rezultă ecuaţia diferenţială satisfăcută de potenţialul F

$$\frac{\mathrm{d}^4F}{\mathrm{d}x^4} = \frac{P_{Bm}}{l^4 \psi_i \bar{\psi}_s k_d \sin\gamma\cos\gamma}. \tag{5.1}$$

Urmînd o cale asemănătoare, din relaţiile (4.10′) şi (4.10″) se deduce

$$u_A = -2l\bar{\psi}_s\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x},$$

$$u_B = 2l\psi_i\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = -\frac{2k_i}{k_e}u_A, \tag{5.2}$$

$$w_A = w_B = w = 2\operatorname{cotg}\gamma\left[2(\psi_i + \bar{\psi}_s)F - \psi_i\bar{\psi}_s l^2\frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2}\right];$$

$$I = -2l^2 k_i \bar{\psi}_s \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2},$$

$$S = \frac{l^2}{\sqrt{2}} k_s \psi_i \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{I}{\sqrt{2}}, \tag{5.3}$$

$$D = -D' = l^3 \psi_i \bar{\psi}_s k_d \cos\gamma \cdot \frac{\mathrm{d}^3F}{\mathrm{d}x^3}.$$

Soluția ecuației diferențiale (5.1) este imediată; în cazul sarcinilor nodale egale ($P_{Bm} = P_B$), ea se scrie

$$F = \frac{P_B}{l^4 \psi_i \bar{\psi}_s k_d \sin\gamma \cos\gamma}\left(\frac{1}{4!}x^4 + \frac{C_3}{3!}x^3 + \frac{C_2}{2!}x^2 + C_1 x + C_0\right), \qquad (5.4)$$

în care C_0, C_1, C_2, C_3 reprezintă constante de integrare ca și în cazul diferențelor finite.

Ducînd expresiile lui F și ale derivatelor succesive în (5.2) și (5.3) rezultă

$$u_A = -\frac{2 P_B \operatorname{cotg}\gamma}{l^3 k_i}\left(\frac{x^3}{6} + \frac{C_3}{2}x^2 + C_2 x + C_1\right),$$

$$u_B = -\frac{2k_i}{k_s} u_A, \qquad (5.5)$$

$$w = \frac{4P_B \operatorname{cotg}^2\gamma}{l^4}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left(\frac{x^4}{24} + \frac{C_3}{6}x^3 + \frac{C_2}{2}x^2 + C_1 x + C_0\right) -$$

$$- \frac{P_B}{l^2 k_d \sin^2\gamma}(x^2 + 2C_3 x + 2C_2);$$

$$I = -\frac{P_B \operatorname{cotg}\gamma}{l^2}(x^2 + 2C_3 x + 2C_2),$$

$$S = -\frac{I}{\sqrt{2}}, \qquad (5.5')$$

$$D = -D' = \frac{P_B}{\sin\gamma}(x + C_3),$$

În cazul rețelei simplu rezemată la cele două capete, condițiilor marginale

$$I = 0 \quad \text{și} \quad w = 0 \quad \text{pentru} \quad x = 0 \quad \text{și} \quad x = a$$

le corespund următoarele valori ale constantelor de integrare:

$$C_0 = 0; \quad C_1 = \frac{a^3}{24}, \quad C_2 = 0; \quad C_3 = -\frac{a}{2}.$$

Expresiile finale ale eforturilor şi deplasărilor se scriu

$$I = \frac{P_B \operatorname{cotg}\gamma}{l^2}(ax - x^2),$$

$$S = -\frac{I}{\sqrt{2}}, \tag{5.6}$$

$$D = -D' = \frac{P_B}{\sin\gamma}\left(x - \frac{a}{2}\right);$$

$$u_B = \frac{P_B \operatorname{cotg}\gamma}{6l^3 k_s}(4x^3 - 6ax^2 + a^3),$$

$$u_A = -\frac{k_s}{2k_i} u_B, \tag{5.6'}$$

$$w = \frac{P_B \operatorname{cotg}^2\gamma}{6l^4}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)(x^4 - 2ax^3 + a^3x) + \frac{P_B}{2k_s \sin^2\gamma}(ax - x^2).$$

În cazul încărcării nodurilor A şi C se obţin aceleaşi relaţii ca în cazul sarcinilor P_B, înlocuind P_B prin $(P_A + P_C)$. Condiţiile marginale rămîn, în consecinţă, aceleaşi.

Mai interesează în cazul mediului continuu echivalent precizarea absciselor x pentru care trebuie să fie calculate eforturile. Conform figurii 3, se va lua:

$$\begin{aligned}
&\text{— pentru } I_m && x = (m+1)\,l && (m = 0, 1, 2, \ldots p-2);\\
&\text{— pentru } S_m && x = \left(m + \frac{1}{2}\right)l && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-1);\\
&\text{— pentru } D_m,\ D'_m && x = \left(m + \frac{1}{2}\right)l && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-1);\\
&\text{— pentru } u_{A,m} && x = \left(m + \frac{1}{2}\right)l && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-1);\\
&\text{— pentru } u_{B,m} && x = ml && (m = 0, 1, 2, \ldots, p);\\
&\text{— pentru } w_{A,m} && x = \left(m + \frac{1}{2}\right)l && (m = 0, 1, 2, \ldots, p-1);\\
&\text{— pentru } w_{B,m} && x = ml && (m = 0, 1, 2, \ldots, p).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

În încheierea paragrafului vom căuta o analogie cu plăcile plane. Vom pleca de la relaţia (4.28), care determină săgeţile w_B.

Luînd

$$w = w_1 - w_2, \tag{5.8}$$

cele două săgeți parțiale satisfac ecuațiile

$$(1 - E_x)^2 (1 - E_x^{-1})^2 w_1 = 2 \operatorname{cotg}^2 \gamma \left[\frac{1}{k_t} + \frac{2}{2k_s} (1 + E_x)(1 + E_x^{-1}) \right] F_{Bz}, \tag{5.8'}$$

$$(1 - E_x)^2 (1 - E_x^{-1})^2 w_2 = - \frac{2}{k_d \sin^2 \gamma} (1 - E_x)(1 - E_x^{-1}) F_{Bz}.$$

Prin trecere la limită, din relațiile precedente rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^4 w_1}{dx^4} = \frac{2 \operatorname{cotg}^2 \gamma}{l^2} \left(\frac{1}{k_t} + \frac{2}{k_s} \right) \frac{F_{Bz}}{l^2}$$

și

$$\frac{\mathrm{d}^4 w_2}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{k_d \sin^2 \gamma} \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2} \left(\frac{F_{Bz}}{l^2} \right).$$

Dacă se notează

$$\lim_{l \to 0} \frac{F_{Bz}}{l^2} = p_x$$

și se ține seama de (1.1), obținem

$$\frac{\mathrm{d}^4 w_1}{\mathrm{d}x^4} = \frac{1}{2h^2} \left(\frac{1}{k_t} + \frac{2}{k_s} \right) p_x, \tag{5.9}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2 w_2}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{k_d \sin^2 \gamma} p_x. \tag{5.9'}$$

Termenul w_2 din relația (5.8) reprezintă influența forțelor tăietoare la o dală; ea este redusă, așa cum se va arăta la exemplul de calcul (paragr. 7) și, într-o primă aproximație, poate fi neglijată.

Dacă acum în (5.8) se notează

$$K = \frac{2h^2}{\frac{1}{k_t} + \frac{2}{k_s}}, \tag{5.10}$$

atunci ecuația diferențială (5.8) scrisă sub forma

$$\frac{\mathrm{d}^4 w}{\mathrm{d}x^4} = \frac{p}{K},$$

reprezintă ecuația suprafeței medii deformate la încovoierea cilindrică a unei dale de rigiditate K.

Așadar, rețeaua planar pătrată diagonală lucrează la încovoiere cilindrică cu o rigiditate K, dată de relația (5.10).

6. EXEMPLU DE CALCUL

Vom aplica rezultatele precedente pe un exemplu de calcul, alegînd următoarele date numerice:

— numărul intervalelor $p = 8 \quad (l = a/8)$;

— înălțimea structurii $h = l/2 = a/16$;

— secțiunea barelor $A_i = A_s = A, \quad A_d = 0{,}5A$;

— încărcarea constă din sarcini egale în fața superioară $P_B = P_C = P$.

Înclinarea diagonalelor rezultă din relația

$$\operatorname{cotg}\gamma = \frac{2h}{l} = 1, \text{ deci } \gamma = 45^\circ \text{ și } \sin\gamma = 1/\sqrt{2}.$$

Vom stabili mai întîi expresiile generale ale eforturilor și deplasărilor în cazul cînd $P_B = P_C = P$. Rezultatele se obțin prin suprapunerea efectelor din grupele de relații (4.16), (4.17) și, respectiv, (4.26), (4.27), în care se consideră $P_A = 0$.

Pe această cale rezultă

$$I_m = 2P\operatorname{cotg}\gamma[-m^2 + (p-2)\,m + p - 1],$$

$$S_m = 2P\frac{\operatorname{cotg}\gamma}{\sqrt{2}}\left[m^2 - (p-1)\,m - \frac{p}{2} + \frac{1}{4}\right],$$

$$D_m = \frac{2P}{\sin\gamma}\left(m - \frac{p}{2} + \frac{3}{4}\right), \tag{6.1}$$

$$D'_m = \frac{2P}{\sin\gamma}\left(-m + \frac{p}{2} - \frac{1}{4}\right),$$

$$u_{A,m} = -\frac{3}{2}\,\frac{P\operatorname{cotg}\gamma}{k_i}\left[m^3 - \frac{3}{2}(p-1)\,m^2 - \frac{3p-1}{2}\,m + \frac{p^3-p}{4}\right],$$

$$u_{B,m} = +\frac{4}{3}\,\frac{P\operatorname{cotg}\gamma}{k_s}\left(m^3 - \frac{3}{2}\,pm^2 - \frac{1}{4}\,m + \frac{2p^3+p}{8}\right), \tag{6.2}$$

$$w_{A,m} = \frac{P\operatorname{cotg}^2\gamma}{3}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)\left[m^4 - 2(p-1)\,m^3 - \left(3p - \frac{1}{2}\right)m^2 + \right.$$

$$\left. + \left(p^3 - \frac{p+1}{2}\right)m + \frac{2p^3+p}{4}\right] + P\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} - \right.$$

$$\left. - \frac{2}{k_d\sin^2\gamma}\right)\left[m^2 - (p-1)\,m - \frac{p}{2}\right] + \frac{P}{6k_d\sin^2\gamma},$$

$$w_{B,m} = \frac{P\operatorname{cotg}^2\gamma}{3}\left(\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s}\right)[m^4 - 2pm^3 - m^2 + (p^3+p)\,m] -$$

$$- P\left(\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} - \frac{2}{k_d\sin^2\gamma}\right)(pm - m^2).$$

Variația eforturilor și a deplasărilor u depinde de un factor dimensional și de numărul intervalelor p. Pentru determinarea săgeților este însă necesar să se precizeze raportul rigidităților axiale.

Conform datelor din enunț, avem

$$k_i = \frac{EA_i}{l} = k, \quad k_s = \frac{EA_s}{l_s} = k\sqrt{2}, \quad k_d = \frac{EA_d}{l_d} = \frac{k}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{k_i} + \frac{2}{k_s} = \frac{\sqrt{2}+1}{k} \approx \frac{2{,}4142136}{k},$$

$$\frac{\operatorname{cotg}^2\gamma}{k_s} - \frac{2}{k_d \sin^2\gamma} = \frac{1}{k\sqrt{2}} - \frac{4\sqrt{2}}{k} = -\frac{7}{\sqrt{2}k} \approx$$

$$\approx -\frac{4{,}9497475}{k}. \qquad \frac{1}{6k_d \sin^2\gamma} = \frac{\sqrt{2}}{3k} \approx \frac{0{,}4714045}{k}.$$

Ținînd seama de valorile numerice precedente, se obține în final:

$$I_m = 2(-m^2 + 6m + 7)\,P,$$

$$S_m = 2(m^2 - 7m - 3{,}75)\,P,$$

$$D_m = 2\sqrt{2}(m - 3{,}25)\,P,$$

$$D'_m = -2\sqrt{2}(m - 3{,}75)\,P,$$

$$\bar{D}_m = -\frac{1}{\sqrt{2}}P,$$

$$u_{A,m} = -\frac{2}{3}(m^3 - 10{,}5m^2 - 11{,}5m + 128)\frac{P}{k_i},$$

$$u_{B,m} = +\frac{4}{3}(m^3 - 12m^2 - 0{,}25m + 129)\frac{P}{k_s} =$$

$$= \frac{2\sqrt{2}}{3}(m^3 - 12m^2 - 0{,}25m + 129)\frac{P}{k},$$

$$w_{A,m} = \Big[0{,}8047379(m^4 - 14m^3 - 23{,}5m^2 + 507{,}5m + 258) -$$

$$- 4{,}9497475(m^2 - 7m - 4) + 0{,}4714045\Big]\frac{P}{k},$$

$$w_{B,m} = \Big[0{,}8047379(m^4 - 16m^3 - m^2 + 520m) + 4{,}9497475(8m - m^2)\Big]\frac{P}{k},$$

$$u_{C,m} = \frac{1}{2}(u_{B,m+1} + u_{B,m}) = \frac{2\sqrt{2}}{3}(m^3 - 10{,}5m^2 - 10{,}75m + 123{,}375)\frac{P}{k},$$

$$w_{C,m} = w_{A,m} + \frac{P}{2k_d \sin^2\gamma} = w_{A,m} + \sqrt{2}\frac{P}{k}.$$

Diagramele de variație ale eforturilor S_m, I_m, D_m, D'_m și ale deplasărilor $u_{A,m}$, $u_{B,m}$, $w_{A,m}$ și $w_{B,m}$ au fost reprezentate în figura 5*b* — *i*.

Dacă se consideră mediul continuu echivalent se folosesc relațiile (5.6), în care se înlocuiește P_B prin $P_B + P_C = 2P$ și $a = 8\frac{x}{l}$.

Astfel rezultă

$$I = 2P\left(8\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right); \qquad S = -\frac{I}{\sqrt{2}},$$

$$D = -D' = P\sqrt{2}(x - 4l),$$

$$u_B = \frac{2\sqrt{2}}{3}\frac{P}{k}\left(\frac{x^3}{l^3} - 12\frac{x^2}{l^2} + 128\right); \qquad u_A = -\frac{u_B}{\sqrt{2}},$$

$$w = \frac{\sqrt{2}+1}{3}\frac{P}{k}\left(\frac{x^4}{l^4} - 16\frac{x^3}{l^3} + 512\frac{x}{l}\right) + 4\sqrt{2}\frac{P}{k}\left(8\frac{x}{l} - \frac{x^2}{l^2}\right).$$

Abscisele x pentru care se determină eforturile și deplasările sînt definite de relațiile (5.7).

Comparînd rezultatele obținute prin soluția exactă și soluția aproximativă (corespunzătoare mediului continuu echivalent), rezultă următoarele:

1) valorile eforturilor I, S, D, D' concordă;

2) înlocuind în formulele de mai sus $x = ml$, pentru deplasările $u_{B,\,aprox}$ se obține relația

$$u_{B,\,aprox.} = u_{B,m} + \frac{2\sqrt{2}}{3}(0{,}25m - 1)\frac{P}{k}.$$

Corecția adusă este neînsemnată, reprezentînd pe reazeme

$$\Delta u_B = -0{,}9428091\frac{P}{k}, \text{ adică } 0{,}78\,\% \text{ (eroare în minus)};$$

3) pentru săgețile nodurilor B se obține pe o cale asemănătoare

$$w_{B,\,aprox} = w_{B,m} + \frac{2\sqrt{2}-1}{3}(8m - m^2)\frac{P}{k}.$$

Corecția adusă este de asemenea neînsemnată, reprezentînd la centru

$$\Delta w_B = +9{,}7516112\frac{P}{k}, \text{ adică } 0{,}87\,\% \text{ (eroare prin exces)}.$$

Atît soluția exactă, cît și cea aproximativă cuprind relații simple, astfel încît aplicarea uneia sau a celeilalte rămîne la preferința calculatorului.

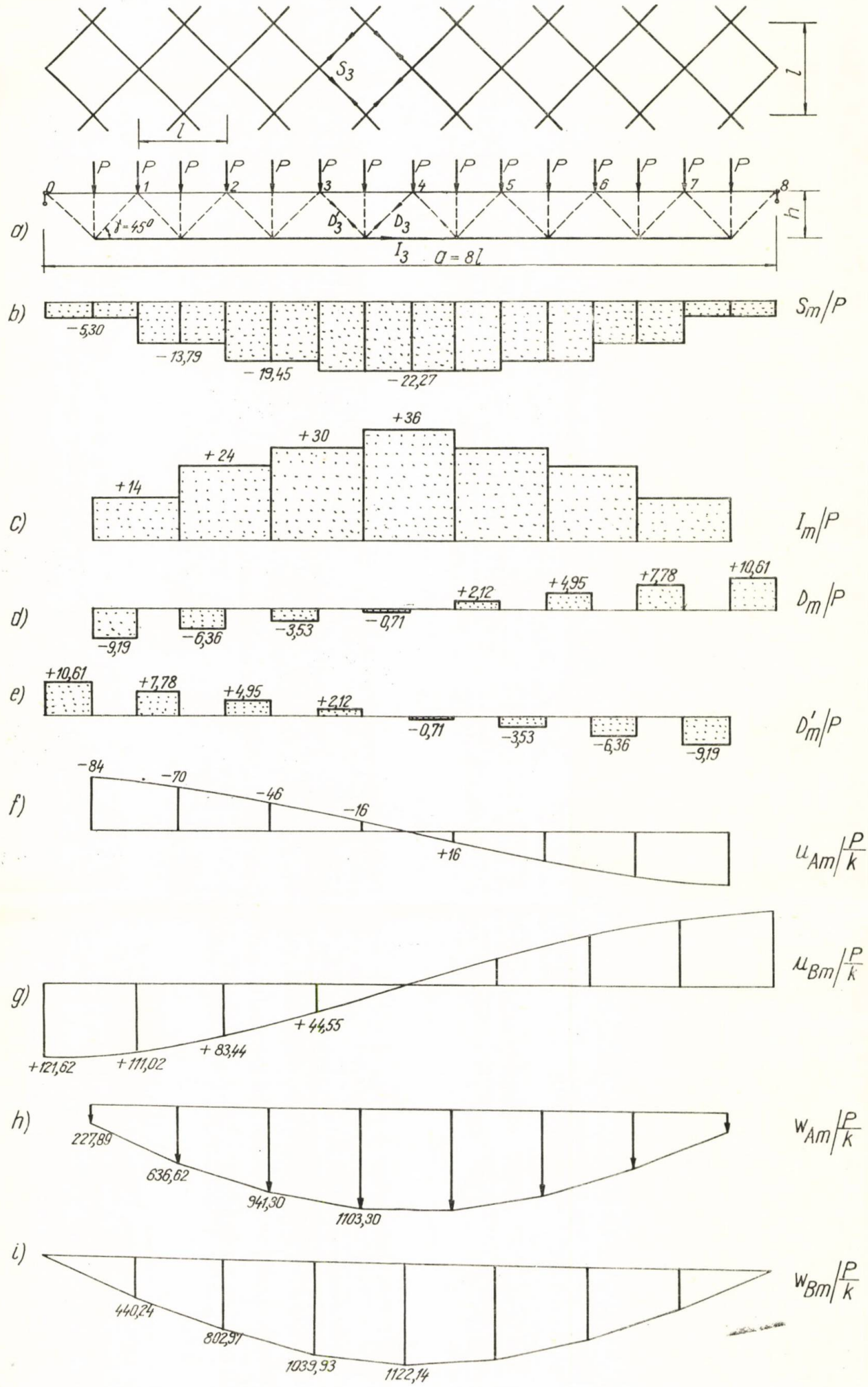


Fig. 5. — Variația eforturilor și a deplasărilor ; a — geometria structurii ; b — efortul I_m ; c — efortul S_m ; d — efortul D_m ; e — efortul D'_m ; f — deplasarea $u_{A,m}$; g — deplasarea $u_{B,m}$; h — deplasarea $w_{A,m}$; i — deplasarea $w_{B,m}$.

SIMBOLURI ȘI NOTAȚII

A_d — aria secțiunii transversale a diagonalelor;

A_i — aria secțiunii transversale a barelor din fața inferioară;

A_s — aria secțiunii transversale a barelor din fața superioară;

D, D', $\overline{D}$ — eforturi în diagonale;

E_x, E_y, E_x^{-1}, E_y^{-1} — operatori cu diferențe finite (la dreapta și la stînga);

F_A, F_B — potențiali;

$F_{Ax}, F_{Ay}, F_{Az}, F_{Bx}, F_{By}, F_{Bz}, F_{Cx}, F_{Cy}, F_{Cz}$ — componentele încărcării exterioare, presupusă concentrată la nodurile de tip A, B, C și dirijate în sensul axelor x, y, z;

I — efort într-o bară din fața inferioară;

$K = \dfrac{2h^2}{\dfrac{1}{k_i} + \dfrac{2}{k_s}}$ — rigiditatea la încovoiere a rețelei;

P_{Am}, P_{Bm}, P_{Cm} — sarcini nodale verticale aplicate în nodurile A_m, B_m și C_m;

S — efort într-o bară din fața superioară;

V_0 — reacțiunea rețelei (în nodul O);

$\mathcal{F}_{Ax}$, $\mathcal{F}_{Ay}$, $\mathcal{F}_{Az}$, $\mathcal{F}_{Bx}$ etc. — termeni de încărcare;

$a = pl$ — deschiderea rețelei;

h — înălțimea structurii reticulate (distanța dintre fețele paralele);

k_d, k_i, k_s — rigiditățile axiale ale barelor;

l — lungimea unei bare din fața inferioară (pasul rețelei);

$l_d = \dfrac{l}{2\cos\gamma}$ — lungimea diagonalelor;

$l_s = \dfrac{l}{\sqrt{2}}$ — lungimea unei bare din fața superioară;

m — nod curent;

p — numărul de intervale;

u, v, w — componentele deplasării unui nod în direcția axelor de coordonate;

γ — unghiul pe care diagonalele îl fac cu planul orizontal;

$$\psi_i = \frac{k_i}{k_d \cos^2\gamma}; \qquad \psi_s = \frac{k_s}{k_d \cos^2\gamma}; \qquad \overline{\psi}_s = \frac{1}{2}\psi_s.$$

Primită la redacție la 25 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. KATO, B., TAKANASHI, K., TSUSHIMA, Y. HIRATA, Y., *The analysis of a space truss composed of square pyramid units.* în *Space Structures* (R. N. Davies ed.), Oxford — Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, 1967, p. 201—212.
2. RENTON, J. D., *The related behaviour of plane grids, space grids and plates,* în, *Space Structures* (R. N. Davies ed.), Oxford — Edinburgh, Blackwell Scientific Publications, 1967, p. 19—32.
3. SOARE, M., *Aplicarea ecuațiilor cu diferențe finite la calculul rețelelor spațiale planare pătrate*, St. cerc. mec. apl. **28**, *3*, 631—664 (1969).
4. SOARE, M., *Contribution à l'étude des réseaux spatiaux planaires simples par la méthode des différences fineis*, Rev. Roum. Sci. Tech.-Méc. Appl., **14**, *5*, 949—984 (1969).
5. SOARE, M., *Contribuții la studiul rețelelor spațiale planar pătrate diagonale.* Rev. constr. și mat. construc. **24**, *8*, 423—440 (1970).
6. SUZUKI, E., KITAMURA, H., YAMADA, M., *The analysis of the space truss plate by difference equations.* în *Space Structures* (R. N. Davies ed.), Oxford — Edinburgh, Blackwell, Scientific Publications, 1967, p. 136—144.

DETERMINAREA CAPACITĂȚII PORTANTE A STRUCTURILOR STATIC NEDETERMINATE SUPUSE LA MOMENTE ÎNCOVOIETOARE ȘI FORȚE AXIALE

S. RĂUTU, VETURIA CHIROIU
Centrul de mecanică a solidelor

Se prezintă o metodă aproximativă de calcul a sarcinii de rupere pentru structuri solicitate la moment încovoietor și forțe axiale.

În cazul structurii cu efort axial important, efectul acestuia din urmă asupra capacității portante nu mai poate fi neglijat. Cunoscînd dimensiunile elementelor structurii și secțiunile în care pot apărea articulații plastice, capacitatea portantă a structurii se obține utilizînd noțiunile de diagramă de moment static compatibilă și de diagramă de forță axială static compatibilă.

Capacitatea portantă a structurii este determinată de sarcina sa de rupere. Pe baza teoremei de maxim a sarcinii de rupere, capacitatea portantă se obține determinînd valoarea maximă a parametrului P în raport cu care variază sarcinile exterioare:

$$P = \max, \tag{1}$$

în condițiile de rezistență ale structurii.

Pentru o structură supusă dominant la încovoiere cu neglijarea influenței forțelor axiale și tăietoare, calculul sarcinii de rupere, al ordinii de apariție a articulațiilor plastice și determinarea mecanismului de cedare plastică (sau de rupere) au condus la probleme de programare liniară [1].

Cînd efortul de întindere N nu este neglijat, determinarea sarcinii de rupere conduce la o problemă de programare neliniară:

$$P = \max$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 2, 1971, P. 307–315

în condițiile de rezistență [2]

$$\alpha \left| \frac{M}{M_{pl}} \right| + \beta \frac{N^2}{N_{pl}^2} \leqslant 1. \tag{2}$$

În cazul încovoierii pure, condiția de rezistență pentru o secțiune este

$$|M| \leqslant M_{pl},$$

adică momentul încovoietor dintr-o secțiune nu depășește în valoare absolută momentul plastic de care este capabilă secțiunea respectivă. Cînd efortul de întindere N nu este neglijat, condiția de plasticitate va fi o relație neliniară de tipul (2).

Parametrii α și β depind de forma secțiunii. Pentru o secțiune dreptunghiulară se obține $\alpha = 1$, $\beta = 1$.

Într-un sistem de axe $\frac{M}{M_{pl}}$, $\frac{N}{N_{pl}}$, condiția de plasticitate

$$\left| \frac{M}{M_{pl}} \right| + \frac{N^2}{N_{pl}^2} = 1 \tag{3}$$

se reprezintă sub forma unei parabole (fig. 1). Pentru o secțiune dublu T se obține [2]

$$\alpha = 1,$$

$$\beta = \frac{1 + \left(\frac{A_t}{A_i}\right)^2}{1 + 2\frac{A_t}{A_i}},$$

unde A_t este aria tălpilor secțiunii și A_i aria inimii.

În cazul acestei secțiuni, condiția de rezistență (2) se completează cu relația liniară

$$\alpha' \left| \frac{M}{M_{pl}} \right| + \beta' \left| \frac{N}{N_{pl}} \right| \leqslant 1, \tag{4}$$

unde

$$\alpha' = \frac{\frac{1}{2} + \frac{A_t}{A_i}}{1 + \frac{A_t}{A_i}},$$

$$\beta' = 1.$$

În același sistem de axe, condiția de plasticitate

$$\alpha \left| \frac{M}{M_{pl}} \right| + \beta \frac{N^2}{N_{pl}^2} = 1$$

$$\alpha' \left| \frac{M}{M_{pl}} \right| + \beta' \left| \frac{N}{N_{pl}} \right| = 1$$

se reprezintă sub forma unei curbe bc și a unei drepte ab (fig. 2).

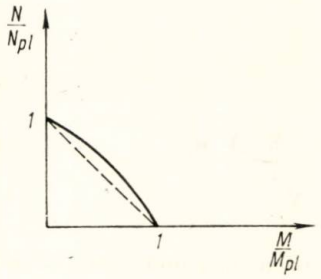


Fig. 1

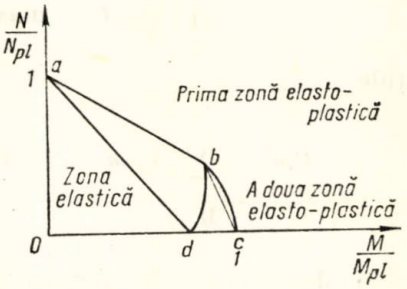


Fig. 2

Dreapta ab limitează zona în care tensiunea de curgere este atinsă numai în talpa superioară a secțiunii și curba bc limitează zona în care atît talpa superioară, cît și talpa inferioară se plastifică.

Procedeul propus în cele ce urmează, de determinare a sarcinii de rupere, se bazează pe aproximarea condiției de rezistență (2) sub forma liniară:

$$\alpha \left| \frac{M}{M_{pl}} \right| + \beta \left| \frac{N}{N_{pl}} \right| \leqslant 1. \tag{5}$$

Aceasta revine la aproximarea curbelor din figurile 1 și 2 prin drepte. În felul acesta, determinarea sarcinii de rupere se reduce la o problemă de programare liniară.

Din exemplele tratate, care au permis și o rezolvare directă, utilizînd metoda multiplicatorilor Lagrange, s-a constatat că pentru cazurile întîlnite în practică eroarea este admisibilă. Calculul propus este simplu, avînd în vedere faptul că poate fi ușor introdus în mașina electronică de calcul.

Diagramele de moment încovoietor M și forță axială N se pot scrie sub forma

$$M = Pm_p^0 + \sum_i X_i m_i, \tag{6}$$

$$N = Pn_p^0 + \sum_i X_i n_i, \tag{7}$$

unde m_p^0, n_p^0 sînt diagrame de moment încovoietor şi forţă axială în echilibru cu solicitările exterioare pentru valoarea parametrului P egală cu unitatea. Aceste diagrame se scriu utilizînd pentru fiecare încărcare un sistem de bază avantajos.

Diagramele m_i şi n_i sînt diagrame de moment încovoietor şi forţă axială în autoechilibru şi care reprezintă combinaţii pe conture a diagramelor tip liniar independente [1].

Introducînd expresiile (6) şi (7) în (5), se obţine pentru o secţiune dreptunghiulară ($\alpha = 1$; $\beta = 1$) problema

$$P = \max$$

în condiţiile

$$\left| \frac{Pm_p^0 + \sum_i X_i m_i}{M_{pl}} \right| + \left| \frac{Pn_p^0 + \sum_i X_i n_i}{N_{pl}} \right| \leqslant 1. \tag{8}$$

Sarcina de rupere va fi valoarea maximă a parametrului P în raport cu care variază sarcinile exterioare, astfel încît condiţiile (8) să fie îndeplinite. Necunoscutele problemei de programare liniară obţinută sînt parametrul P şi necunoscutele static nedeterminate X_i ($i = 1, \ldots, n$), n fiind gradul de nedeterminare statică.

Pentru o secţiune oarecare, sarcina de rupere se obţine din următoarea problemă de programare liniară:

$$P = \max,$$

în condiţiile

$$\alpha \left| \frac{Pm_p^0 + \sum_i X_i m_i}{M_{pl}} \right| + \beta \left| \frac{Pn_p^0 + \sum_i X_i n_i}{N_{pl}} \right| \leqslant 1,$$

unde α şi β depind de forma secţiunii

Exemplul nr. 1. Se consideră cadrul din figura 3*a* cu secţiune dreptunghiulară, avînd secţiunea stîlpilor variabilă în trepte şi supus unei sarcini uniform distribuite pe riglă $P/10$ şi unei forţe concentrate P, acţionînd pe console. Diagrama de moment încovoietor în echilibru cu solicitările exterioare M_p^0 şi diagrama de efort axial în echilibru cu solicitările exterioare N_p^0 sînt reprezentate în figura 3*c*, *d*. Diagramele de momente în autoechilibru m_1, m_2 şi diagrama de efort axial în autoechilibru n_2 sînt reprezentate în figura 3 *e*, *f*, *g*.

Diagrama n_1 este identic nulă. Momentele de plasticitate pe porţiuni şi punctele caracteristice sînt reprezentate în figura 3*b*. Datorită sime-

triei cadrului, calculul se efectuează pe jumătate de structură. Sarcina de rupere P se obține din problema

$$P = \max,$$

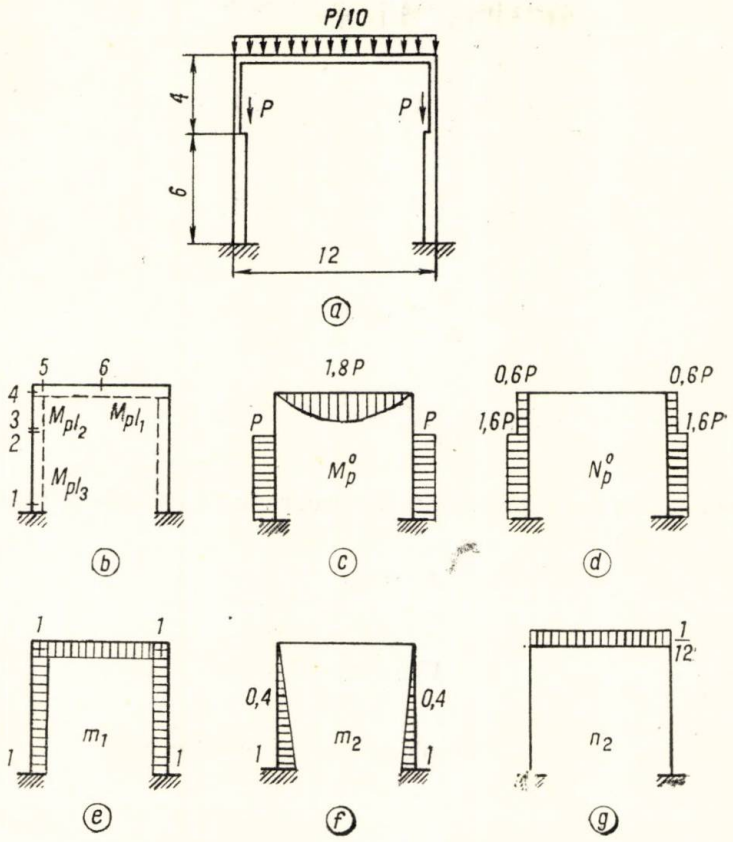


Fig. 3

în condițiile

$$\left| -X_1 + X_2 + \frac{3}{5}P \right| \leqslant 3,$$

$$\left| -X_1 + \frac{2}{5}X_2 + \frac{3}{5}P \right| \leqslant 1,$$

$$\left| -X_1 + \frac{3}{5}P \right| \leqslant 1,$$

$$\left| -X_1 + \frac{1}{12}X_2 + \frac{9}{5}P \right| \leqslant 4,$$

$$\left| -X_1 + X_2 - \frac{13}{5} P \right| \leqslant 3,$$

$$\left| -X_1 + \frac{2}{5} X_2 - \frac{13}{5} P \right| \leqslant 3,$$

$$\left| -X_1 + \frac{2}{5} X_2 - \frac{3}{5} P \right| \leqslant 1,$$

$$\left| -X_1 + \frac{2}{5} X_2 - \frac{3}{5} P \right| \leqslant 1,$$

$$\left| -X_1 - \frac{3}{5} P \right| \leqslant 1,$$

$$\left| -X_1 - \frac{1}{12} X_2 + \frac{9}{5} P \right| \leqslant 4.$$

Pentru a obține o problemă de programare liniară se introduc în inegalitățile de mai sus

$$P = x_1,$$
$$X_1 = x_2 - x_3,$$
$$X_2 = x_4 - x_5,$$

cu x_i $(i = 1, \ldots, 5)$ pozitive.

Se obține o problemă simplex, a cărei soluție este

$$x_1 = 1{,}25,$$
$$x_2 = 0{,}25,$$
$$x_3 = x_4 = x_5 = 0,$$

care corespunde plasticizării totale a stîlpilor.

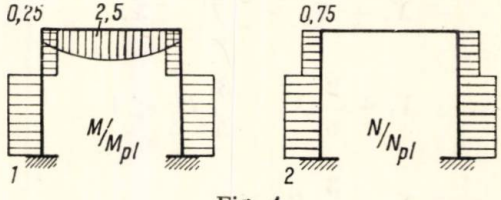


Fig. 4

Diagramele finale de moment încovoietor și de efort axial sînt reprezentate în figura 4. În calcule s-au luat momente de plasticitate M_{pl_i} $(i = 1, 2, 3)$ proporționale cu numerele întregi 4, 1, 3 și eforturile

axiale de plasticitate $N_{pli}\,(i = 1, 2, 3)$ proporționale cu unitatea. Se rezolvă în continuare pentru același cadru problema neliniară de determinare a sarcinii P:

$$P = \max$$

în condițiile

$$\left|\frac{Pm_0 + \sum_i X_i m_i}{M_{pl}}\right| + \left(\frac{Pn_0 + \sum_i X_i n_i}{N_{pl}}\right)^2 \leqslant 1.$$

Funcția Lagrange este de forma

$$F(P, X, \lambda) = P - \lambda_1\left[\frac{1}{3}\left|-P + X_1 + X_2\right| + \left(-\frac{8P}{15}\right)^2 + \varepsilon_1 - 1\right]$$

$$- \lambda_2\left[\frac{1}{3}\left|-P + X_1 + \frac{2}{5}X_2\right| + \left(-\frac{8P}{15}\right)^2 + \varepsilon_2 - 1\right] - \lambda_3\left[\left|X_1 + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{2}{5}X_2\right| + \left(-\frac{3P}{5}\right)^2 + \varepsilon_3 - 1\right] - \lambda_4\left[|X_1| + \left(-\frac{3P}{5}\right)^2 + \varepsilon_4 - \right.$$

$$\left. - 1\right] - \lambda_5\left[\frac{1}{4}|X_1| + \left(-\frac{X_2}{12}\right)^2 + \varepsilon_5 - 1\right] - \lambda_6\left[\frac{1}{4}\left|\frac{9P}{5} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + X_1\right| + \left(-\frac{X_2}{12}\right)^2 + \varepsilon_6 - 1\right],$$

cu $0 \leqslant \varepsilon_i \leqslant 1$.

Soluțiile

$$P;\ X_i\,(i = 1,\ 2,\ 3),$$

cu

$$\varepsilon_i\,(i = 1, \ldots, 6);\quad \lambda_i\,(i = 1, \ldots, 6),$$

unde 6 este numărul punctelor caracteristice considerate, trebuie să satisfacă sistemul

$$\frac{\partial F}{\partial P} = 0;\qquad \frac{\partial F}{\partial X_i} = 0.$$

Prin încercări se găsește soluția

$$X_1 = 0{,}388,$$

$$X_2 = 0,$$

$$\varepsilon_i\,(i = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5) = 0,$$

$$\varepsilon_6 = 0{,}313,$$

$$P_{max} = 1{,}31.$$

Soluția obținută corespunde de asemenea plasticizării totale a stîlpilor. Eroarea obținută prin utilizarea inegalităților liniare este de 0,42%.

Exemplul nr. 2. Se consideră cadrul din figura 5*a*, avînd secțiunea dreptunghiulară. Diagrama de moment încovoietor static admisibilă

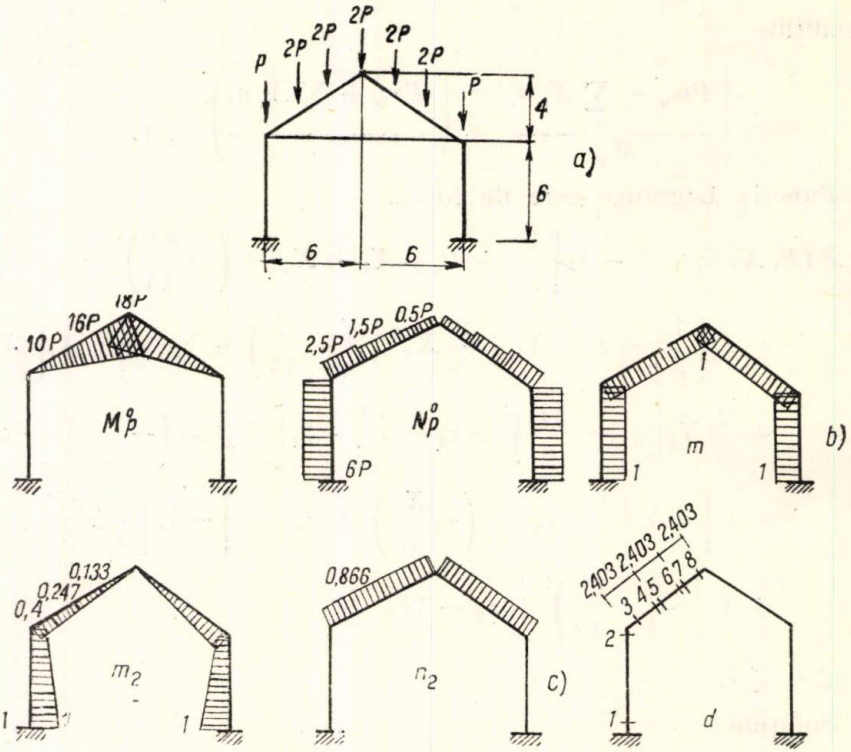


Fig. 5

M_p^0, diagrama de efort axial static admisibilă N_p^0, diagramele unitare de moment încovoietor m_1, m_2 și diagrama de efort axial unitară n_2 sînt reprezentate în figura 5*b*, *c*. Diagrama n_1 este identic nulă. În figura 5*d* sînt reprezentate punctele caracteristice. Datorită simetriei cadrului calculul se execută pentru o jumătate de structură. În calcule s-a considerat $M_{pl} = N_{pl} = 1$.

Se obține următoarea problemă de programare liniară:

$$P = \max,$$

în condițiile

$$|X_1 + X_2| + |-6P| \leqslant 1,$$
$$|X_1 + 0{,}4\,X_2| + |-6P| \leqslant 1,$$
$$|X_1 + 0{,}4\,X_2| + |-2{,}5\,P - 0{,}866\,X_2| \leqslant 1,$$
$$|10P + X_1 + 0{,}267\,X_2| + |-2{,}5P - 0{,}866\,X_2| \leqslant 1,$$

$$|10P + X_1 + 0{,}267\,X_2| + |-1{,}5\,P - 0{,}866\,X_2| \leqslant 1,$$
$$|16P + X_1 + 0{,}133\,X_2| + |-1{,}5\,P - 0{,}866\,X_2| \leqslant 1,$$
$$|16P + X_1 + 0{,}133\,X_2| + |-0{,}5\,P - 0{,}866\,X_2| \leqslant 1,$$
$$|18P + X_1| + |-0{,}5\,P - 0{,}866\,X_2| \leqslant 1,$$

Introducînd

$$P = x_1,$$

$$X_1 = x_2 - x_3,$$

$$X_2 = x_4 - x_5,$$

cu x_i $(i = 1, \ldots, 5)$ pozitive, se obţine o problemă simplex cu 32 de inegalităţi şi 5 necunoscute.

Se obţine soluţia *

$$P = 0{,}08163,$$

$$X_1 = -0{,}5102,$$

$$X_2 = 0,$$

care corespunde plastificării totale a stîlpilor. Diagramele finale de moment încovoietor şi efort axial sînt reprezentate în figura 6.

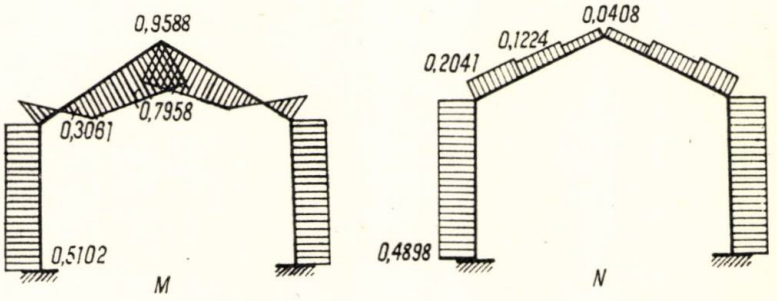


Fig. 6

Primită la redacţie la 15 noiembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. S. Răutu şi V. Chiroiu, *Quelques problemes du calcul des structures statiquement non determinees dans le domaine plastique*, Rev. Roum. Sci. Techn.-Mec. Appl., **14**, *1*, (1969).
2. Edwin C. Rossow, G. Barney, S. L. Lee, *Excentrically loaded steel columns with initial curvature*, Journal of the Struct. Div. Proceed. of the American Soc. of Civil Eng., April 1967.

* Calculele au fost executate la Calculatorul MECIPT–2 de la D.S.A.P.C. Timişoara

STUDIUL AUTOOSCILAȚIILOR CVASIARMONICE DATORITE FRECĂRII USCATE

de HORST J. KLEPP
Institutul Politehnic Timișoara

Pentru un sistem cu un grad de libertate care descrie autooscilații sub acțiunea unei forțe de frecare uscată se determină mișcările cvasiarmonice staționare și stabilitatea lor, folosind metoda lui Krîlov-Bogoliubov.

1. INTRODUCERE

Pentru studiul autovibrațiilor mecanice datorite frecării uscate a unui sistem cu un grad de libertate se consideră modelul mecanic reprezentat în figura 1. Forța de frecare dintre corpul cu masa m și bandă se determină experimental și este o funcție neliniară a vitezei relative $V - \dot{x}$. Tot experimental s-a constatat că apar de obicei două categorii de mișcări:

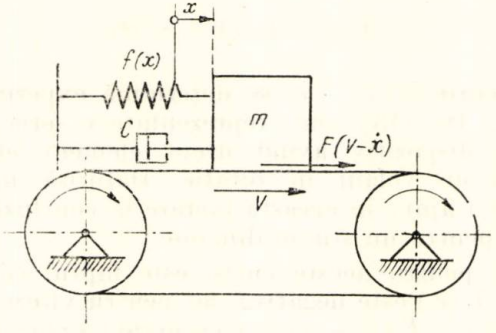


Fig. 1

a) o mișcare în care $\dot{x} \leqslant V$, de tip slip-stick, și b) o mișcare în care $\dot{x} < V$, de tip cvasiarmonică. La prelucrarea metalelor este mai obișnuită categoria a doua de mișcare [7]. Într-o serie de lucrări [2], [13] se studiază

aceste categorii de mişcări, căutîndu-se ca prin alegerea unui model teoretic potrivit să se obţină rezultate care concordă cu cele observate experimental. Pentru aceasta, deoarece ecuaţia diferenţială a mişcării este neliniară, se pot folosi diferite metode aproximative, cum sînt metoda lui Krîlov-Bogoliubov [2], [3], [8], metoda studiului pe etape, folosind o aproximare poligonală a caracteristicii de frecare [9], [10], [11], şi metodele grafice ale lui Lienard [2] şi Pell [12]. Referitor la mişcările cvasiarmonice s-au obţinut o serie de date experimentale, dintre care sînt de evidenţiat următoarele :

1) existenţa pentru anumite condiţii a unor stări staţionare de mişcări care se caracterizează printr-o anumită amplitudine şi frecvenţă;

2) variaţii mari ale amplitudinii şi variaţii mici ale frecvenţei pentru diferite valori ale lui V şi ale forţei de frecare maximă ;

3) în sisteme cu amortizare mare, poziţia statică de echilibru poate fi o stare staţionară stabilă.

În prezenta lucrare se studiază condiţiile ca să apară şi influenţa parametrilor sistemului asupra mişcărilor cvasiarmonice, precum şi stabilitatea lor, folosind metoda de aproximaţie a lui Krîlov-Bogoliubov.

2. STABILIREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII

Măsurînd deplasarea x a corpului din poziţia cu arcul nedeformat, rezultă următoarea ecuaţie diferenţială a mişcării :

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + f(x) = F(V - \dot{x}).$$

Deoarece în timpul mişcării valorile lui x pot deveni destul de mari, trebuie luată în considerare şi neliniaritatea elementului elastic. Ea se consideră de forma

$$f(x) = lx(1 + \gamma x^2).$$

Forţa de frecare $F(V - \dot{x})$ se determină experimental prin experienţe staţionare. În [13] sînt reprezentate o serie de curbe determinate printr-un dispozitiv avînd drept element elastic o bară de torsiune fixată de un volant în rotaţie. Datorită modelului mecanic prea simplificat, s-a ajuns în această lucrare la concluzia că aceste curbe nu pot fi folosite pentru un studiu dinamic.

Caracteristic pentru aceste curbe este faptul că pentru viteze v_r mici panta curbei $F(v_r)$ este negativă, iar pentru viteze mari devine pozitivă. Funcţia $F(v_r) = F(V - \dot{x})$ o considerăm exprimată cu ajutorul a cinci constante prin relaţia

$$F(v_r) = \left(\frac{a}{1 + \lambda |v_r|} + b\right) \operatorname{sgn} v_r + \alpha_1 v_r + \beta_1 v_r^3.$$

Alegînd convenabil valorile constantelor, se pot prezenta cu ajutorul acestei relaţii diferite forme ale caracteristicii de amortizare. Astfel, conside-

rînd $\alpha_1 = \beta_1 = 0$, se obține cazul studiat în [2]. Cazul $a = b = 0$ este cercetat în [3], [8]. În [9] și [10] se consideră $a = b = \beta_1 = 0$.

Pentru oscilațiile cvasiarmonice $V > \dot{x}$, deci $\operatorname{sgn} v_r = \operatorname{sgn}(V - \dot{x}) = 1$. Forța de amortizare pentru acest caz o scriem sub forma

$$F(V - \dot{x}) = \Phi(\dot{x}) = \Phi(0) + \Psi_1(\dot{x}),$$

unde

$$\Phi(0) = \frac{a}{1 + \lambda V} + b + \alpha_1 V + \beta_1 V^3 \tag{1}$$

și

$$\Psi_1(\dot{x}) = \frac{a\lambda\dot{x}}{(1 + \lambda V)(1 + \lambda V - \lambda\dot{x})} - (\alpha_1 + 3\beta_1 V^2)\dot{x} + 3\beta_1 V\dot{x}^2 - \beta_1\dot{x}^3.$$

Ecuația diferențială devine

$$m\ddot{x} + c_1\dot{x} + kx(1 + \gamma x^2) = \Phi(0) + \Psi_1(\dot{x}).$$

Facem o schimbare de funcție $x = q + x_{st}$, unde x_{st} se determină din relația

$$kx_{st}(1 + \gamma x_{st}^2) = \Phi(0). \tag{2}$$

Ecuația diferențială devine

$$m\ddot{q} + c_1\dot{q} + kq(1 + 3\gamma x_{st}^2 + 3\gamma x_{st} q + \gamma q^2) = \Psi_1(\dot{q})$$

sau

$$m\ddot{q} + kq(1 + 3\gamma x_{st}^2 + 3\gamma x_{st} q + \gamma q^2) = \Psi_1(\dot{q}) - c_1\dot{q} = \Psi(\dot{q}).$$

Facem următoarele notații:

$$\frac{\lambda}{1 + \lambda V} = \mu;\ \frac{\lambda a}{m(1 + \lambda V)^2} = \varepsilon;\ \frac{k}{m}(1 + 3\gamma x_{st}^2) = \omega_n^2;\ \frac{3\gamma x_{st}}{1 + 3\gamma x_{st}^2} = \sigma,$$

$$\frac{\gamma}{1 + 3\gamma x_{st}^2} = \delta;\ \frac{\alpha_1}{m} = \alpha;\ \frac{\beta_1}{m} = \beta;\ \frac{c_1}{m} = c;\ \dot{q} = v. \tag{3}$$

Înlocuind în ecuația diferențială a mișcării, se obține

$$\ddot{q} + \omega_n^2 q(1 + \sigma q + \delta q^2) = \frac{\varepsilon v}{1 - \mu v} - (\alpha + c + 3\beta V^2)v + 3\beta V v^2 - \beta v^3.$$

Aşa cum se observă, atît caracteristica de amortizare, cît şi caracteristica elementului elastic sînt neliniare. Cu notaţiile

$$\frac{\alpha}{\varepsilon} = \alpha_1; \quad \frac{c}{\varepsilon} = c_2; \quad \frac{\beta}{\varepsilon\mu^2} = \beta_2; \quad \mu v = \xi, \tag{4}$$

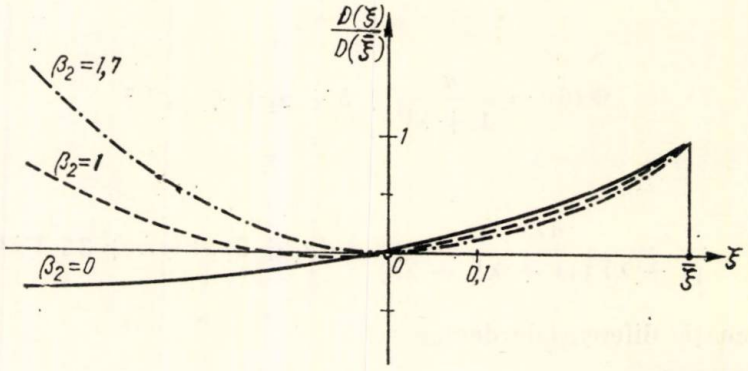


Fig. 2

caracteristica de amortizare poate fi scrisă sub forma

$$\Psi(v) = \frac{\varepsilon}{\mu} D(\xi) = \frac{\varepsilon}{\mu}\left\{\frac{\xi}{1-\xi} - (\alpha_2 + c_2 + 3\beta_2\,\mu^2V^2)\xi + 3\beta_2\mu V\xi^2 - \beta_2\xi^3\right\}.$$

Pentru diferite valori ale lui β_2 (0; 1; 1,7), în figura 2 sînt reprezentate curbele $\frac{D(\xi)}{D(\bar{\xi})}$. Pentru ceilalţi parametri s-au considerat valorile $\alpha_2 + c_2 = 0{,}4$; $\lambda V = \frac{1}{2}$; $\mu V = \frac{1}{3}$. Valoarea $\bar{\xi} = \frac{1}{3}$ corespunde pentru $v = V$.

3. DETERMINAREA SOLUŢIEI APROXIMATIVE CU METODA KRÎLOV-BOGOLIUBOV

Ecuaţia diferenţială a mişcării o aducem la forma

$$\frac{dq}{dt} = v,$$

$$\frac{dv}{dt} = -\omega_n^2 q - f(q, v),$$

unde

$$f(q, v) = \omega_n^2\sigma q^2 + \omega_n^2\delta q^3 - \frac{\varepsilon v}{1-\mu v} + (\alpha + c + 3\beta V^2)\,v - 3\beta\,Vv^2 + \beta v^3.$$

Se caută soluții de forma [1] [2]

$$q = r \cos \theta,$$

$$v = - r \omega_n \sin \theta.$$

Înlocuind în funcția de mai sus, se obține $f(r \cos\theta, - r \omega_n \sin \theta) = \varphi(r,\theta)$, adică

$$\varphi(r, \theta) = \omega_n^2 r^2 \cos^2 \theta [\sigma + \delta r \cos \theta] + r \omega_n \sin \theta \left[\frac{\varepsilon}{1 + \mu r \omega_n \sin\theta} - \right.$$

$$\left. - (\alpha + c + 3\beta V^2) - 3 \beta V r \omega_n \sin \theta - \beta r^2 \omega_n^2 \sin^2 \theta \right].$$

Se face notația $\theta = \omega_n t + \psi$. Cu ajutorul metodei Krîlov-Bogoliubov se obține următorul sistem pentru determinarea primei aproximații :

$$\frac{dr}{dt} = \frac{1}{\omega_n} a_0(r) \qquad \text{și} \qquad \frac{d\psi}{dt} = \frac{1}{r\omega_n} \alpha_0(r),$$

unde

$$a_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r, \theta) \sin \theta \, d\theta \; ; \; \alpha_0(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(r,\theta) \cos\theta \, d\theta.$$

Efectuînd integralele și notînd $\rho = \mu \omega_n r$, se obține

$$\frac{d\rho}{dt} = - \frac{\varepsilon}{\rho} \left(1 - \frac{1}{\sqrt{1 - \rho^2}}\right) - \frac{1}{2} \left(\alpha + c + 3\beta V^2\right) \rho - \frac{3}{8} \frac{\beta}{\mu^2} \rho^3, \quad (5)$$

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{3}{8} \omega_n \delta r^2. \quad (6)$$

4. STUDIUL VARIAȚIEI FUNCȚIEI $\frac{d\rho}{dt} = y(\rho)$

Revenind la notațiile inițiale, expresia lui ρ devine

$$\rho = \mu \omega_n r = \frac{\lambda \omega_n v_r}{1 + \lambda V} = \frac{\lambda v_{max}}{1 + \lambda V}.$$

Deoarece pentru cazul mișcărilor cvasiarmonice s-a presupus $\dot{x} < V$, rezultă și $\lambda v_{max} < \lambda V$ și astfel se constată că ρ are valori subunitare.

Pentru studiul variației, funcția $\frac{d\rho}{dt} = y(\rho)$ se va dezvolta în serie Mac Laurin. Din dezvoltarea în serie vom neglija termenii, începînd cu ρ^7. Se obține astfel

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\rho\left\{[\varepsilon - (\alpha + c + 3\beta V^2)] - \frac{3}{4\mu^2}(\beta - \varepsilon\mu^2)\rho^2 + \frac{5}{8}\varepsilon\rho^4\right\}$$

sau

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{5}{16}\varepsilon\rho\left\{\frac{8}{5}\left[1 - \frac{\alpha + c + 3\beta V^2}{\varepsilon}\right] - \frac{6}{5\mu^2}\left(\frac{\beta}{\varepsilon} - \mu^2\right)\rho^2 + \rho^4\right\}.$$

Cu notațiile

$$a_1 = \frac{8}{5}\left[1 - \frac{\alpha + c + 3\beta V^2}{\varepsilon}\right]$$

și

$$b_1 = \frac{3}{5\mu^2}\left(\frac{\beta}{\varepsilon} - \mu^2\right)$$

se poate scrie

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{5}{16}\varepsilon\rho\,[a_1 - 2b_1\rho^2 + \rho^4] = y(\rho).$$

Rădăcinile lui $y(\rho)$, dacă sînt reale și pozitive și mai mici decît $\frac{\lambda V}{1 + \lambda V}$, vor reprezenta stări staționare de mișcare cvasiarmonică. Stabilitatea acestor stări staționare depinde de semnul lui $\frac{d\rho}{dt}$, în jurul rădăcinii. Una dintre rădăcini este $\rho_1 = 0$. Celelalte două sînt

$$\rho_2 = \sqrt{b_1 - \sqrt{b_1^2 - a_1}} \quad ; \quad \rho_3 = \sqrt{b_1 + \sqrt{b_1^2 - a_1}}.$$

Parametrii sistemului care intervin în a_1 și b_1 vor determina dacă aceste rădăcini sînt reale și pozitive sau nu.

Se pot considera următoarele cazuri:

I. $a_1 \geqslant 0$; $b_1 < 0$ sau $a_1 > b_1^2$; $b_1 > 0$. Forma curbei $y(\rho)$ este reprezentată în figura 3. În acest caz nu sînt posibile stări staționare cvasiarmonice. Sistemul se deplasează din poziția de echilibru și tinde spre o mișcare de tip slip-stick.

II. $a_1 = b_1^2$; $b_1 > 0$. Acest caz este reprezentat în figura 4. Stările staționare cu $\rho_1 = 0$ și $\rho_2 = \rho_3 = \sqrt{b_1}$ nu sînt stabile. Sistemul tinde spre o mișcare de tip slip-stick.

III. $0 < a_1 < b_1^2$; $b_1 > 0$ (fig. 5). Rădăcinile ρ_2 și ρ_3 sînt reale și pozitive. Stările staționare caracterizate prin $\rho_1 = 0$ și ρ_3 nu sînt stabile. Pentru condiții inițiale caracterizate prin $\rho < \rho_3$, sistemul tinde spre o mișcare cvasiarmonică stabilă, determinată de ρ_2. Pentru condiții inițiale $\rho > \rho_3$, sistemul tinde spre o mișcare de gen slip-stick.

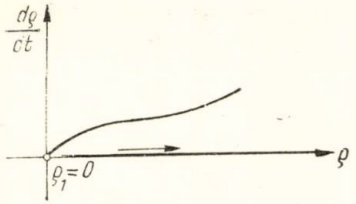


Fig. 3

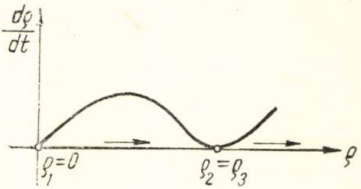


Fig. 4

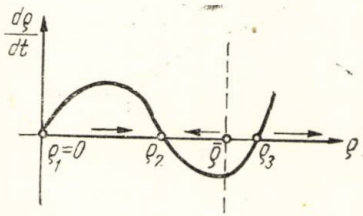


Fig. 5

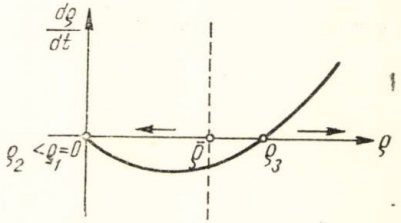


Fig. 6

IV. $a_1 \leqslant 0$ (fig. 6). Stările staționare corespunzătoare acestui caz nu sînt stabile și sistemul se apropie pentru condiții inițiale $\rho > \rho_3$ de o mișcare de tip slip-stick, iar pentru $\rho < \rho_3$ de poziția de echilibru, care este o stare staționară stabilă.

Pentru fiecare caz în parte trebuie determinată valoarea maximă a lui ρ care corespunde pentru $\dot{x} = V$, adică $\bar{\rho} = \dfrac{\lambda V}{1 + \lambda V}$. Rădăcinile ρ_2 și ρ_3 reprezintă stări staționare numai dacă sînt mai mici cel mult egale cu $\bar{\rho}$.

Din expresia lui a_1 rezultă că, dacă pentru valori mici ale lui c parametrul a_1 poate fi pozitiv (cazurile I—III), el devine negativ pentru valori mari ale lui c $a_1 < 0$ (cazul IV) și poziția de echilibru devine o stare staționară stabilă.

Cazuri particulare:

a) $\alpha = 0$ $\beta = 0$ [2]; rezultă următoarele valori particulare: $a_1 = \dfrac{8}{5}\left(1 - \dfrac{c}{\varepsilon}\right)$; $b_1 = -\dfrac{3}{5}$, deci această situație corespunde pentru valori mici ale amortizării $c < \varepsilon$ cazului I, iar pentru valori mari ale lui $c > \varepsilon$ cazului IV, în concordanță cu rezultatele găsite în [2];

b) $a = b = 0$, adică $\varepsilon = 0$. Acest caz este considerat în [3], [4], [6]. Particularizînd ecuația (5), rezultă

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{1}{2}\rho\left\{-(\alpha + c + 3\beta V^2) - \frac{3}{4}\frac{\beta}{\mu^2}\rho^2\right\}.$$

Starea staţionară cvasiarmonică este caracterizată prin

$$\rho_2^2 = -\frac{4\mu^2(\alpha + c + 3\beta V^2)}{3\beta}.$$

Pentru ca membrul drept să fie pozitiv este necesar ca $\alpha + c + 3\beta V^2 < 0$ şi $\beta > 0$. În aceste condiţii, caracteristica de amortizare are o porţiune

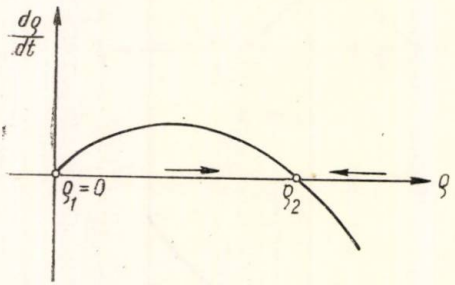


Fig. 7

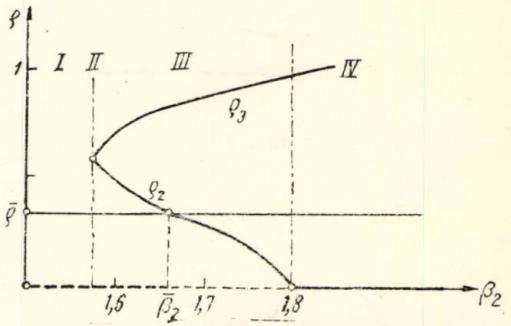


Fig. 8

cu pantă negativă. Funcţia $\frac{d\rho}{dt}$ pentru acest caz este reprezentată în figura 7. Mişcarea cvasiarmonică cu $\rho = \rho_2$ este stabilă. Dacă $\alpha + c + 3\beta V^2 > 0$ şi $\beta < 0$, atunci nu există stări cvasiarmonice şi numai poziţia de echilibru $\rho_1 = 0$ este o stare stabilă. Pentru $\alpha + c + 3\beta V^2 > 0$ şi $\beta < 0$ corespunde cazul considerat la IV. Aceste rezultate sînt în concordanţă cu cele găsite în [3], [4] şi [6].

Pentru a determina influenţa parametrului β asupra mişcărilor cvasiarmonice staţionare care pot apărea şi asupra stabilităţii acestora vom considera un caz caracterizat prin valori particulare ale parametrilor c, α, λV, μ şi vom reprezenta ρ_2 şi ρ_3 în funcţie de β. Considerăm expresia

$$\rho_{2,3} = \sqrt{\frac{3}{5\mu^2}\left(\frac{\beta}{\varepsilon} - \mu^2\right) \mp \sqrt{\frac{9}{25\mu^4}\left(\frac{\beta}{\varepsilon} - \mu^2\right)^2 - \frac{8}{5}\left(1 - \frac{\alpha + c + 3\beta V^2}{\varepsilon}\right)}},$$

care, cu ajutorul notaţiilor (4), devine

$$\rho_{2,3} = \sqrt{\frac{3}{5}\left[\beta_2 - 1 \mp \sqrt{(\beta_2 - 1)^2 + \frac{40}{3}\mu^2 V^2 \beta_2 - \frac{40}{9}(1 - \alpha_2 - c_2)}\right]}.$$

În figura 8 sînt reprezentate ρ_1, ρ_2 şi ρ_3 pentru $\alpha_2 + c_2 = 0{,}4$; $\lambda V = \frac{1}{2}$, $\mu V = \frac{1}{3}$. Valoarea maximă a lui ρ este $\bar{\rho} = \frac{1}{3}$. Se observă că pentru $0 \leqslant \beta_2 < \bar{\beta}_2$ nu sînt posibile mişcări cvasiarmonice staţio-

nare și stabile. Și poziția de echilibru este o stare nestabilă și sistemul tinde spre o mișcare de tip slip-stick. Într-o perioadă a mișcării se introduce mai multă energie în sistem decît se disipează. Pentru $\beta_2 \leqslant \beta_2 < 1{,}8$ sînt posibile mișcări cvasiarmonice staționare și stabile. Poziția de echilibru este o stare nestabilă (fig. 5, $0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho}$). Dacă $\beta_2 > 1{,}8$, energia disipată într-o perioadă este mai mare decît cea introdusă în sistem și astfel poziția $\rho = 0$ devine o poziție stabilă de echilibru (fig. 6,$0 \leqslant \rho \leqslant \bar{\rho}$).

5. STUDIUL FUNCȚIEI $\frac{d\psi}{dt}$

Pentru un regim de mișcare staționar, $\frac{d\rho}{dt} = 0$, de unde rezultă $\rho = \text{const}$ și deci $r = r_0 = \text{const}$. Înlocuind această valoare în (6), se obține pentru cazul staționar

$$\psi(t) = \psi_0 + \frac{3}{8}\omega_n \delta r_0^2 t$$

sau, revenind la notația inițială, se obține

$$\theta = \omega_n \left(1 + \frac{3}{8}\omega_n \delta r_0^2\right) t + \psi_0.$$

Frecvența mișcării cvasiarmonice va fi

$$f = \frac{\omega_n}{2\pi}\left(1 + \frac{3}{8}\omega_n \delta r_0^2\right).$$

Se observă că frecvența depinde de ω_n, δ și r_0. Deoarece în expresia lui ω_n (3) apare și x_{st}, rezultă că forma caracteristicii de amortizare și valoarea lui V influențează frecvența mișcării. Într-adevăr, x_{st} se determină din (2), unde $\Phi(0)$ depinde, așa cum arată (1), de constantele care apar în caracteristica de amortizare și de V. În cazul neliniar $\delta \neq 0$, frecvența mișcării depinde și de amplitudinea mișcării cvasiarmonice staționare.

Pentru cazul mișcărilor cvasiarmonice cu amplitudini mici se poate lua drept aproximație cazul liniar ($\delta = 0$) pentru care frecvența sistemului este independentă de caracteristica de amortizare și V, și coincide cu frecvența proprie a sistemului.

Primită la redacție la 7 ianuarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. N.N. Bogoliubov, Iu. A. Mitropolskij, *Asimtotisceskie metody v teorii nelinejnyh kolebanii*, Moskva, G.I.T.T.L. 1955.
2. Hans Kauderer *Nichtlineare Mechanik*, Berlin — Göttingen—Heidelberg, Springer-Verlag, 1958.

3. Ia. G. Panovko, *Osnovy prikladnoi teorii uprughih kolebanii*, Moskva Izd. Maşinostroenie, 1967.
4. Gheorghe Silaş, *Vibraţii mecanice*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1968.
5. J. J. Stoker, *Nonlinear Vibration in Mechanical and Electrical Systems*, Interscience Publishers, John Wiley & Sons, Inc. N. Y. — Londra-Sydney.
6. S.A. Tobias, *Machine-Tool Vibration*, Londra — Glasgow, Blackie & Son, Ltd., 1965.
7. V. A. Krivouhov, A. L. Voronov, *Vibraţiile de înaltă frecvenţă ale cuţitelor de strung* (trad. din l. rusă), Bucureşti, I.D.T., 1958.
8. Tadeusz Kolacin, *The Influence of Dry Friction Characteristic on the Stability of Self-Excited Vibration of a Certain Mechanical Systems*, Archiwum Budowy Maszyn, **XV**, *2* (1967).
9. V. F. Petrov, *O mehaniceskih avtokolebanija pri suhom trenii v sisteme s odnoi stepenju svobody*, Vestnik Moskovskogo Universiteta, *2* (1967).
10. D. Juričič, *On the stick-slip oscillations vith arbitrarely time — dependent static friction*, Proceedings of Vibration Problems, Warsaw, **1**, *8* (1967).
11. Gh. Silaş, J. Klepp Horst, *Das Studium von Reibungsschwingungen mit der polygonalen Näherungsmethode Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, **19**, *4* (1968).
12. Pell, J. Appl. Mech. **24**, *2* (1957).
13. R. Krause, *Selbsterregte Reibungsschwingungen bei Kupplungslamellen eine experimentelle Untersuchung*, Dissertation Technische Hochschule Karlsruhe, 1965.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL PROPRIETĂȚILOR DINAMICE ALE CUTIILOR DE VITEZE ALE TRACTOARELOR

de GH. NIȚESCU, P. SIMA
Institutul politehnic, Brașov

Se stabilesc ecuațiile diferențiale ale mișcării, presupunînd tractorul un sistem dinamic constituit din cutia de viteze și doi volanți, care reprezintă influența motorului, respectiv influența maselor întregului tractor, asupra cutiei de viteze.
Se trece apoi la determinarea reacțiunilor dinamice din lagărele arborilor cutiei de viteze în regim tranzitoriu.
Se prezintă de asemenea studiul vibrațiilor angrenajelor cutiei de viteze, stabilindu-se schema echivalentă și ecuațiile diferențiale ale oscilațiilor.
În fine, se descriu bancul pentru încercarea cutiilor de viteze și instalația electrică aferentă.

1. CONSIDERAȚII GENERALE ASUPRA CUTIILOR DE VITEZE ALE TRACTOARELOR

Cutiile de viteze ale tractoarelor sînt mecanisme de transmisie care permit modificarea raportului de transmitere între turația arborelui cotit al motorului și a roților motoare în timpul deplasării tractorului. Aceasta permite tractorului să învingă rezistența mărită a drumului și inerția tractorului la demararea acestuia sau în timpul accelerărilor.

Cele mai utilizate cutii de viteze în construcția de tractoare sînt cutiile de viteze în trepte, constituite din mai multe angrenaje cu roți dințate care permit realizarea unor rapoarte de transmitere diferite.

Cutiile de viteze în trepte se pot clasifica din punctul de vedere al angrenării roților dințate în cutii de viteze cu tren deplasabil (fig. 1), cutii de viteze cu angrenare permanentă și cutii de viteze planetare.

Cutiile de viteze în trepte, utilizate în construcția de tractoare, asigură un număr limitat de trepte; mărind numărul de trepte al cutiilor de viteze, se îmbunătățește folosirea puterii motorului în timpul demarajului, în schimb apar unele dificultăți legate de construcția tractorului, deoarece crește numărul de schimbări ale manetei cutiei de viteze, ceea ce conduce la creșterea timpului de demarare. Mărirea numărului de trepte duce totodată la creșterea dimensiunilor de gabarit ale cutiei de viteze, ceea ce, bineînțeles, nu este recomandabil.

Cea mai largă utilizare o au cutiile de viteze cu mai multe trepte, dintre care ultima este o treaptă acceleratoare, avînd un raport de transmitere subunitar. Prezența treptei acceleratoare atrage după sine îmbunătățirea calităților dinamice și economice ale tractoarelor, fapt deosebit de

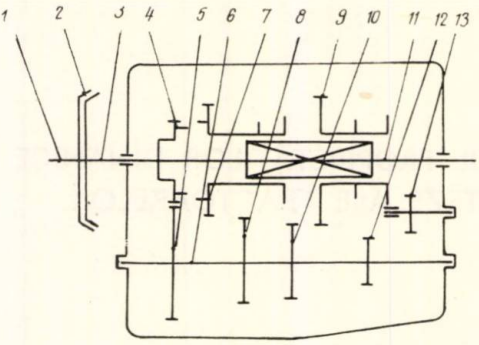


Fig.1. — Cutie de viteze cu tren deplasabil.

important mai ales în cazurile cînd greutatea totală a tractorului și, prin urmare, puterea necesară învingerii rezistențelor se schimbă în limite largi. Treapta acceleratoare asigură creșterea vitezei maxime fără a se forța motorul, la viteza maximă numărul de rotații al arborelui cotit fiind mic, ceea ce face ca și uzura acestuia să fie mică.

2. STABILIREA ECUAȚIILOR DIFERENȚIALE ALE MIȘCĂRII

În vederea stabilirii ecuațiilor diferențiale ale mișcării elementelor cutiei de viteze vom presupune că tractorul reprezintă un sistem dinamic care constă din cutia de viteze (fig. 2) și din doi arbori cu doi volanți.

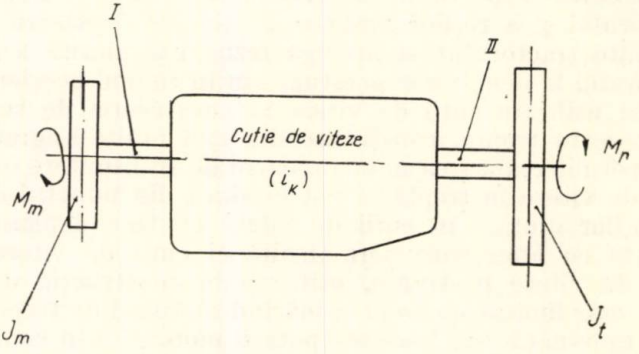


Fig. 2. — Schema convențională a sistemului dinamic al tractorului.

Momentul de inerție al primului volant J_m este egal cu momentul de inerție, redus la axa arborelui primar al cutiei de viteze, al arborelui cotit al motorului și al maselor legate de el, inclusiv momentul de inerție al ambreiajului.

Momentul de inerție al celui de-al doilea volant J_t este egal cu suma momentelor de inerție, reduse la arborele secundar al cutiei de viteze, a masei tractorului în mișcare de translație, inclusiv momentul de inerție al roților motoare.

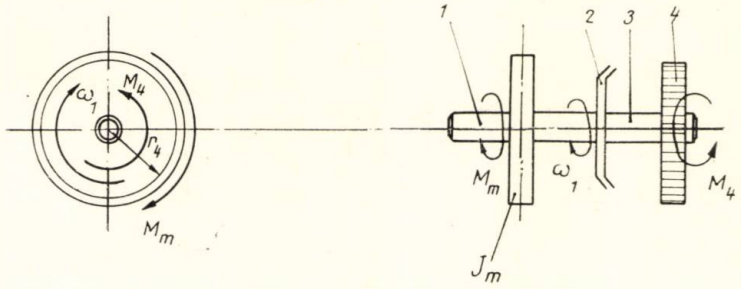


Fig. 3. — Solicitarea arborelui primar al cutiei de viteze.

Asupra primului volant acționează momentul exterior de torsiune al motorului M_m, iar asupra celui de-al doilea volant momentul exterior rezistent, redus la arborele secundar al cutiei de viteze M_r.

Presupunînd toate elementele transmisiei ca absolut rigide și considerînd în cutia de viteze un anumit raport de transmitere i_k, descompunînd sistemul și aplicînd teoremele mecanicii clasice newtoniene, vom obține ecuațiile diferențiale ale mișcării. Astfel, considerînd sistemul format din volantul J_m și arborele primar al cutiei de viteze 3, pe care se găsește montată roata dințată 4 și asupra căreia acționează momentul M_4 (fig. 3), și scriind teorema momentului cinetic în raport cu axa arborelui primar, se obține ecuația diferențială

$$(J_m + J_3)\frac{d\omega_1}{dt} = M_m - M_4. \tag{1}$$

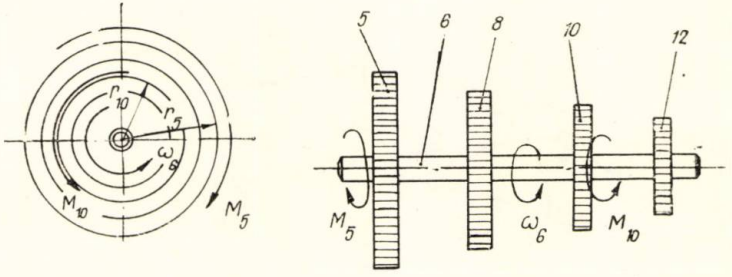


Fig. 4. — Solicitarea arborelui intermediar al cutiei de viteze.

Pentru sistemul format din arborele intermediar și roțile dințate 5, 8, 10 și 12 (fig. 4), ecuația momentului cinetic se scrie

$$J_6\frac{d\omega_6}{dt} = M_5 - M_{10}, \tag{2}$$

unde M_5 și M_{10} sînt momentele interioare care acționează asupra roților dințate 5 și 10, iar J_6 momentul de inerție al maselor în mișcare de rotație care țin de arborele intermediar în raport cu axa acestuia.

Considerăm acum sistemul constituit din arborele secundar al cutiei, pe care se găsesc montate roțile baladoare 7 și 9 și volantul J_t (fig. 5).

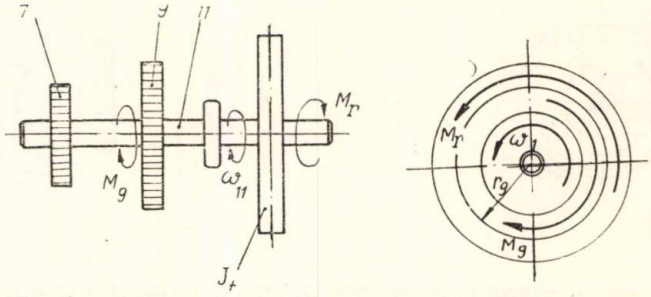


Fig. 5. — Solicitarea arborelui secundar al cutiei de viteze.

Asupra roții dințate 9 acționează momentul interior M_9, iar asupra volantului J_t momentul exterior rezistent M_r.

Ecuația momentului cinetic aplicată asupra acestui sistem dinamic se scrie

$$(J_{11} + J_t)\frac{d\omega_{11}}{dt} = M_9 - M_r. \tag{3}$$

Notînd prin $P_{45} = P_{54}$ și $P_{910} = P_{109}$ forțele tangențiale ale roților dințate 4 și 5 și 9 și 10, se observă că (fig. 6)

$$M_4 = r_4 \cdot P_{54}; \quad M_5 = r_5 \cdot P_{45},$$
$$M_9 = r_9 \cdot P_{109}; \quad M_{10} = r_{10} \cdot P_{910}.$$

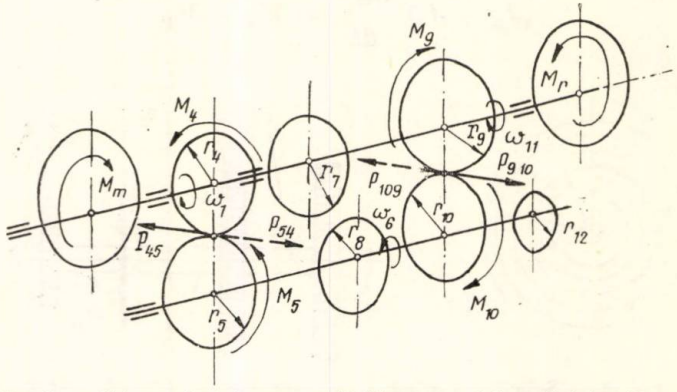


Fig. 6. — Schema forțelor care solicită angrenajele cutiei de viteze.

Rezultă, prin urmare, următoarele relații între momentele M_4 și M_5 și M_9 și M_{10}:

$$M_5 = \frac{r_5}{r_4} M_4; \quad M_{10} = \frac{r_{10}}{r_9} M_9.$$

Se obține deci următorul sistem de ecuații diferențiale:

$$\left.\begin{aligned}(J_m + J_3)\frac{d\omega_1}{dt} &= M_m - M_4,\\ J_6\frac{d\omega_6}{dt} &= \frac{r_5}{r_4}M_4 - \frac{r_{10}}{r_9}M_9,\\ (J_{11} + J_t)\frac{d\omega_{11}}{dt} &= M_9 - M_r.\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Avînd de asemenea în vedere că

$$\omega_1 = \frac{r_5 \cdot r_9}{r_4 \cdot r_{10}}\omega_{11} = i_k\omega_{11}; \quad \omega_6 = \frac{r_4}{r_5}\omega_1 = \frac{r_9}{r_{10}}\omega_{11},$$

rezultă sistemul

$$\left.\begin{aligned}i_k(J_m + J_3)\frac{d\omega_{11}}{dt} &= M_m - M_4,\\ \frac{r_9}{r_{10}}J_6\frac{d\omega_{11}}{dt} &= \frac{r_5}{r_4}M_4 - \frac{r_{10}}{r_9}M_9,\\ (J_{11} + J_t)\frac{d\omega_{11}}{dt} &= M_9 - M_r.\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

Din sistemul de ecuații (5) se obține momentele interioare M_4 și M_9, precum și accelerația unghiulară ε_{11} a arborelui secundar al cutiei de viteze:

$$M_4 = \frac{i_k(J_m + J_3)M_r + \dfrac{Z_4 \cdot Z_9}{Z_5 \cdot Z_{10}}J_6M_m + (J_{11} + J_t)M_m}{i_k^2(J_m + J_3) + \dfrac{Z_4 \cdot Z_9}{Z_5 \cdot Z_{10}}J_6 + J_{11} + J_t}, \tag{6}$$

$$M_9 = \frac{i_k^2(J_m + J_3)M_r + \dfrac{Z_4 \cdot Z_9}{Z_5 \cdot Z_{10}}J_6M_r + i_k(J_{11} + J_t)M_m}{i_k^2(J_m + J_3) + \dfrac{Z_4 \cdot Z_9}{Z_5 \cdot Z_{10}}J_6 + J_{11} + J_t}, \tag{7}$$

$$\varepsilon_{11} = \frac{d\omega_{11}}{dt} = \frac{i_kM_m - M_r}{i_k^2(J_m + J_3) + \dfrac{Z_4 \cdot Z_9}{Z_5 \cdot Z_{10}}J_6 + J_{11} + J_t}. \tag{8}$$

Din structura relației (8) se vede că accelerația unghiulară a arborelui secundar al cutiei de viteze este funcție atît de proprietățile motorului, cît și de cele ale cutiei de viteze și ale tractorului. Proprietățile motorului sînt reprezentate în ecuația (8) de către momentul motor M_m și momentul

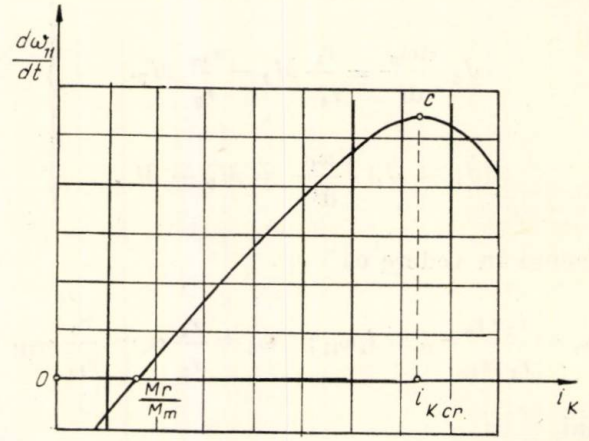


Fig. 7. — Graficul accelerației unghiulare a arborelui secundar al cutiei de viteze în funcție de raportul de transmitere i_k.

de inerție redus al maselor motorului în mișcare de rotație J_m. Proprietățile cutiei de viteze sînt reprezentate prin momentul de inerție al arborelui intermediar J_6 și prin raportul de transmitere al cutiei i_k, iar proprietățile tractorului de către momentul de inerție J_t și momentul rezistent M_r.

Neglijînd în formula (8) momentul de inerție al arborelui intermediar J_6, care este mic în comparație cu momentele de inerție a maselor motorului în mișcare de rotație sau a maselor tractorului în mișcare de translație, se obține

$$\varepsilon_{11} = \frac{d\omega_{11}}{dt} = \frac{i_k M_m - M_r}{i_k^2 (J_m + J_3) + J_{11} + J_t}. \tag{9}$$

În figura 7 se prezintă graficul accelerației unghiulare $\frac{d\omega_{11}}{dt}$ în funcție de raportul de transmitere al cutiei de viteze i_k. Se observă că accelerația unghiulară este nulă pentru

$$i_k = \frac{M_r}{M_m}. \tag{10}$$

Valorile extreme ale accelerației unghiulare a arborelui secundar se obține anulînd derivata parțială a acesteia, calculată în funcție de raportul de transmitere i_k. Rezultă

$$\frac{\partial}{\partial i_k}\left(\frac{d\omega_{11}}{dt}\right) = \frac{(J_m + J_3)(M_m i_k^2 - 2M_r i_k) - (J_{11} + J_t) M_m}{[i_k^2 (J_m + J_3) + (J_{11} + J_t)]^2} = 0. \tag{11}$$

Rădăcina pozitivă a ecuației

$$(J_m + J_3) M_m i_k^2 - 2(J_m + J_3) M_r i_k - (J_{11} + J_t) M_m = 0 \qquad (12)$$

ne determină raportul de transmitere critic. Se obține

$$i_{k\,cr.} = \frac{M_r}{M_m} + \sqrt{\frac{M_r^2}{M_m^2} + \frac{J_{11} + J_t}{J_m + J_3}}. \qquad (13)$$

Dacă se ține seamă că momentul de inerție al maselor tractorului în mișcare de translație este mult mai mare în raport cu momentul de inerție al maselor arborelui motor, adică

$$J_t + J_{11} \gg J_m + J_3,$$

și că momentul rezistent este mai mic decît momentul motor, adică

$$M_r < M_m,$$

se poate neglija raportul $\frac{M_r^2}{M_m^2}$ și se obține expresia aproximativă a raportului de transmitere critic:

$$i_{k\,cr.} \approx \frac{M_r}{M_m} + \sqrt{\frac{J_{11} + J_t}{J_m + J_3}}.$$

Neglijînd și raportul $\frac{M_r}{M_m}$, rezultă

$$i_{k\,cr.} = \sqrt{\frac{J_{11} + J_t}{J_m + J_3}}.$$

Din formula (14) a raportului de transmitere critic se vede că raportul de transmitere i_k al cutiei de viteze se determină pe baza relațiilor dintre momentele de inerție J_m și J_t ale sistemului.

Determinarea rapoartelor de transmitere ale cutiei de viteze se face presupunînd că la proiectarea tractorului se cunosc proprietățile dinamice ale motorului, adică momentul motor M_m, turația nominală n_n, precum și momentul de inerție J_m. De asemenea se presupun cunoscute proprietățile dinamice ale tractorului, adică viteza maximă a acestuia, greutatea G a tractorului, momentul de inerție J_t.

Presupunînd că după demarare viteza unghiulară a arborelui primar a crescut de la valoarea inițială ω_1 la o nouă valoare ω_1', iar viteza unghiulară a arborelui secundar a crescut de la valoarea inițială ω_{11} la o nouă valoare ω_{11}', avem următoarele relații între vitezele unghiulare de rotație ale arborilor:

$$\omega_6 = \frac{Z_9}{Z_{10}}\,\omega_{11}; \quad \omega_1 = \omega_3 = \frac{Z_5 \cdot Z_9}{Z_4 \cdot Z_{10}}\,\omega_{11} = i_k \omega_{11},$$

unde $i_k = \dfrac{Z_5 \cdot Z_9}{Z_4 \cdot Z_{10}}$ este raportul de transmitere al cutiei de viteze, Z_i fiind numărul de dinți ai roților dințate.

În vederea determinării vitezelor unghiulare a arborilor primar ω_1' și secundar ω_{11}', am utilizat ecuațiile lui Lagrange de speța a doua:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} = Q_i \,(i = 1,\ 2, \ldots, n), \tag{15}$$

în care

$$\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n \tag{16}$$

sînt vitezele generalizate,

$$E = E(\dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n,\ t) \tag{17}$$

energia cinetică a sistemului, iar

$$Q_i = Q_i(q_1,\ q_2, \ldots, q_n,\ \dot{q}_1,\ \dot{q}_2, \ldots, \dot{q}_n,\ t) \tag{18}$$

forțele generalizate.

Alegînd drept parametru variabil unghiul φ_1 de rotire a arborelui motor, se poate scrie următoarea ecuație:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = Q_1. \tag{19}$$

Energia cinetică a sistemului va fi

$$E = \frac{1}{2}(J_m + J_3)\,\omega_1^2 + \frac{1}{2} J_6 \omega_6^2 + \frac{1}{2}(J_{11} + J_t)\,\omega_{11}^2. \tag{19}$$

Ținînd seama că

$$\omega_1 = \dot{\varphi}_1; \quad \omega_6 = \frac{r_4}{r_5}\,\omega_1 = \frac{Z_4}{Z_5}\,\dot{\varphi}_1; \quad \omega_{11} = \frac{r_4 \cdot r_{10}}{r_5 \cdot Z_9}\,\dot{\varphi}_1 = \frac{1}{i_k}\,\dot{\varphi}_1,$$

rezultă

$$E = \frac{\dot{\varphi}_1^2}{2}\left[J_m + J_3 + \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J_6 + \frac{1}{i_k^2}(J_{11} + J_t)\right], \tag{20}$$

Avem de asemenea

$$\frac{\partial E}{\partial \varphi_1} = 0\,; \quad \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} = \left[J_m + J_3 + \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J_6 + \frac{1}{i_k^2}(J_{11} + J_t)\right]\dot{\varphi}_1.$$

Forța generalizată Q_1 este dată, după cum se știe, de relația

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial q_1}, \tag{21}$$

în care

$$U = U(\varphi_1)$$

este funcția de forțe.

Calculînd funcția de forțe U, se obține

$$U = M_m \varphi_1 - M_r \varphi_{11}, \tag{22}$$

φ_{11} fiind unghiul de rotire al arborelui 11. Ținînd seama că

$$\varphi_{11} = \frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\varphi_1 = \frac{1}{i_k}\varphi_1,$$

rezultă următoarea expresie pentru funcția de forțe:

$$U = \left(M_m - \frac{1}{i_k} M_r\right)\varphi_1. \tag{23}$$

Forța generalizată Q_1 va fi deci

$$Q_1 = \frac{\partial U}{\partial \varphi_1} = M_m - \frac{1}{i_k} M_r. \tag{24}$$

Ecuația (15) a lui Lagrange devine

$$\left[J_m + J_3 + \left(\frac{Z_4^2}{Z_5^2}\right) J_6 + \frac{1}{i_k^2}(J_{11} + J_t)\right]\ddot{\varphi}_1 = M_m - \frac{1}{i_k} M_r \tag{25}$$

sau

$$\frac{d\omega_1}{dt} = \frac{M_m - \frac{1}{i_k} M_r}{J_m + J_3 + \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J_6 + \frac{1}{i_k^2}(J_{11} + J_t)}. \tag{26}$$

Separînd variabilele și integrînd, rezultă

$$\omega_1' - \omega_1 = \frac{\left(M_m - \frac{1}{i_k} M_r\right) t}{J_m + J_3 + \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J_6 + \frac{1}{i_k^2}(J_{11} + J_t)}, \tag{27}$$

de unde

$$\omega_1' = \frac{i_k(i_k M_m - M_r)\, t + \left[(J_m + J_3)\, i_k^2 + \left(\frac{Z_9}{Z_{10}}\right)^2 J_6 + J_{11} + J_t\right]\omega_1}{(J_m - J_3)\, i_k^2 + \left(\frac{Z_9}{Z_{10}}\right)^2 J_6 + J_{11} + J_t}. \tag{28}$$

Rezultă de asemenea

$$\omega_{11}' = \frac{1}{i_k}\omega_1' =$$

$$= \frac{(i_k M_m - M_r)\, t + \left[(J_m + J_3)\, i_k + \frac{Z_4 \cdot Z_9}{Z_5 \cdot Z_{10}} J_6 + \frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}(J_{11} + J_t)\right]\omega_1}{(J_m + J_3)\, i_k^2 + \left(\frac{Z_9}{Z_{10}}\right)^2 J_6 + J_{11} + J_t}. \tag{29}$$

3. DETERMINAREA REACȚIUNILOR DINAMICE DIN LAGĂRELE ARBORILOR CUTIEI DE VITEZE ÎN REGIM TRANZITORIU

Considerăm mai întîi cazul general în care roțile dințate ale cutiei de viteze au dinții înclinați. În acest caz, forța normală pe dinți N se descompune într-o componentă tangențială P, într-o componentă axială Q și într-o componentă radială R (fig. 8). Notînd prin M momentul de torsiune transmis de roată și cu r raza primitivă a roții, rezultă expresiile celor trei forțe:

$$P = \frac{M}{r};\quad Q = P \cdot \operatorname{tg}\gamma = \frac{M}{r}\operatorname{tg}\gamma;\quad R = \frac{P}{\cos\gamma}\operatorname{tg}\alpha = \frac{M \cdot \operatorname{tg}\alpha}{r \cdot \cos\gamma}, \tag{30}$$

Reacțiunile dinamice în regim tranzitoriu se pot determina cu ajutorul principiului lui d'Alembert, luînd în considerație atît momentele exterioare, cît și cuplurile de inerție ale maselor în mișcare de rotație, precum și reacțiunile din legăturile mecanice ale arborilor cutiei de viteze.

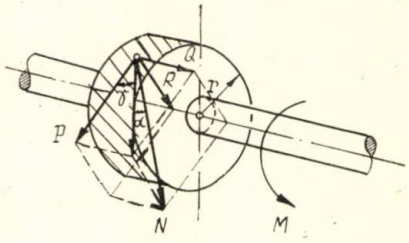


Fig. 8 — Solicitarea roții dințate a cutiei de viteze cu dinți înclinați.

Considerînd arborele primar al cutiei de viteze asupra căruia acționează forțele și momentele din figura 9, se pot scrie următoarele ecuații de echilibru dinamic :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X_i &= 0 : -X_A + X_B - X_C + P_p = 0,\\
\Sigma Y_i &= 0 : Y_A - Q_p + Y_C = 0,\\
\Sigma Z_i &= 0 : Z_A - Z_B + R_p + Z_C = 0,\\
\Sigma M_x &= 0 : -g \cdot Z_B + (g + c)\, R_p - r_4 \cdot Q_p + (g + h)\, Z_C = 0,\\
\Sigma M_y &= 0 : M_m - C_1^i - r_4 \cdot P_p = 0,\\
\Sigma M_z &= 0 : -g \cdot X_B - (g + c) \cdot P_p + (g + h)\, X_C = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (31)$$

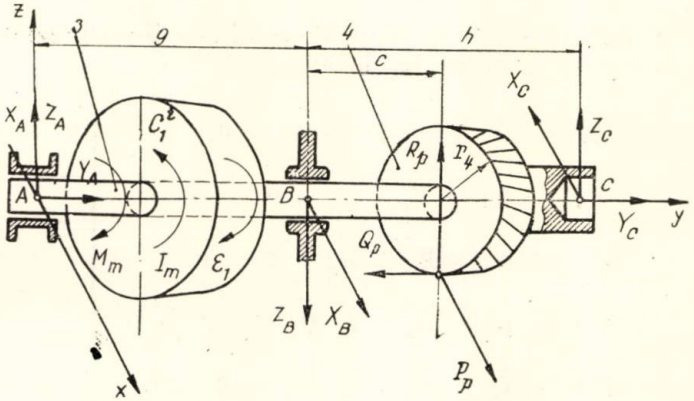


Fig. 9. — Solicitarea dinamică a arborelui primar al cutiei de viteze.

Asupra arborelui intermediar acționează forțele și momentele din figura 10, ecuațiile de echilibru dinamic ale arborelui fiind

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X_i &= 0 : X_E - P_p + P_S - X_F = 0,\\
\Sigma Y_i &= 0 : Y_E + Q_p - Q_S = 0,\\
\Sigma Z_i &= 0 : Z_E - R_p - R_S + Z_F = 0,\\
\Sigma M_x &= 0 : -c \cdot R_p - e \cdot R_S + f \cdot Z_f - r_5 \cdot Q_p + r_{10} \cdot Q_S = 0,\\
\Sigma M_y &= 0 : C_2^i - r_5 \cdot P_p + r_{10} \cdot P_s = 0,\\
\Sigma M_z &= 0 : c \cdot P_p - e \cdot P_S + f \cdot X_F = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (32)$$

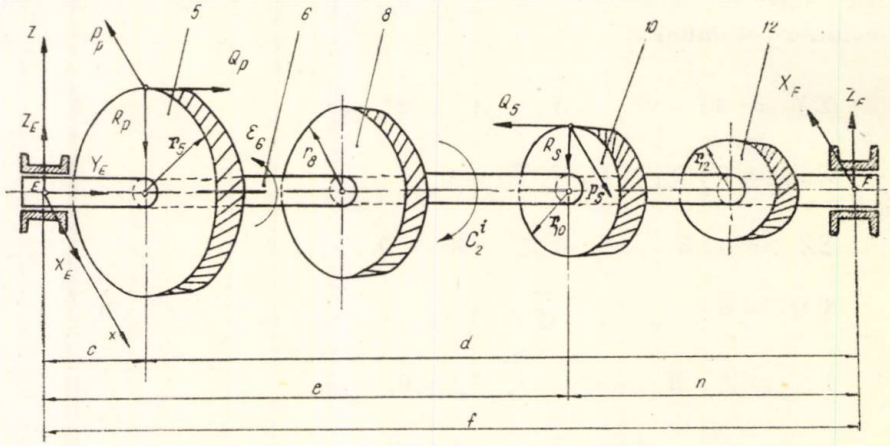


Fig. 10 — Solicitarea dinamică a arborelui intermediar al cutiei de viteze.

În mod analog se scriu ecuațiile de echilibru dinamic pentru arborele secundar, care este solicitat ca în figura 11 :

$$\left.\begin{aligned}
\Sigma X_i &= 0 : X_C - P_S + X_D = 0,\\
\Sigma Y_i &= 0 : -Y_C + Q_S = 0,\\
\Sigma Z_i &= 0 : -Z_C + R_S - Z_D = 0,\\
\Sigma M_x &= 0 : a \cdot R_S + r_9 \cdot Q_S - l \cdot Z_D = 0,\\
\Sigma M_y &= 0 : -C_3^i + r_9 \cdot P_S - M_r = 0,\\
\Sigma M_z &= 0 : a \cdot P_S - l \cdot X_D = 0.
\end{aligned}\right\} \quad (33)$$

Observînd că

$$C_1^i = (J_m + J_3)\,\varepsilon_1; \quad C_2^i = J_6\varepsilon_6 = \frac{r_4}{r_5} J_6\varepsilon_1,$$

$$C_3^i = (J_{11} + J_t)\,\varepsilon_{11} = \frac{r_4 \cdot r_{10}}{r_5 \cdot r_9}(J_{11} + J_t)\,\varepsilon_1$$

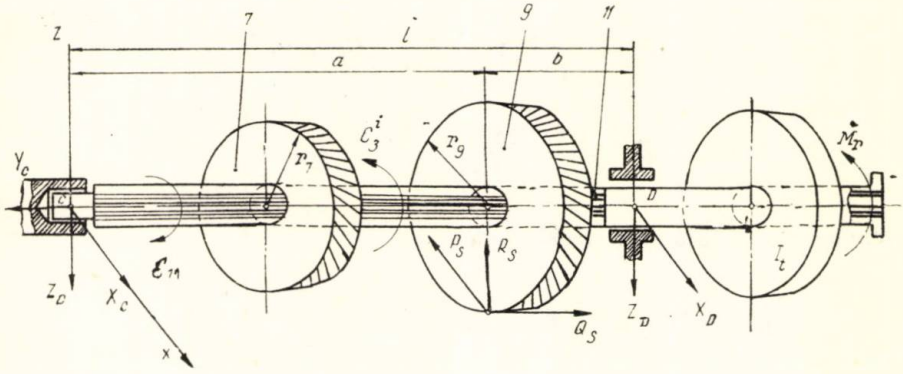


Fig. 11 — Solicitarea dinamică a arborelui secundar al cutiei de viteze.

și rezolvînd sistemul de ecuații obținut, rezultă valorile reacțiunilor dinamice din lagărele arborilor cutiei de viteze și expresia momentului motor M_m, care reprezintă condiția de echilibru dinamic al cutiei de viteze. Avem, respectiv, componentele reacțiunii din lagărul A :

$$X_A = \frac{b \cdot h}{g \cdot l} P_S - \frac{c}{g} P_p; \quad Y_A = (P_p - P_S)\,\mathrm{tg}\,\gamma,$$

$$Z_A = \frac{c \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - r_4 \cdot \sin\gamma}{a \cdot \cos\gamma} P_p + \frac{h(b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - r_9 \cdot \sin\gamma)}{g \cdot l \cdot \cos\gamma} P_S.$$

Reacțiunea totală din lagărul A va fi deci

$$R_A = \sqrt{\left(\frac{b \cdot h}{g \cdot l} P_S - \frac{c}{g} P_p\right)^2 + (P_p - P_S)^2 \mathrm{tg}^2\gamma + \left[\frac{c \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - r_4 \cdot \sin\gamma}{g \cdot \cos\gamma} P_p + \frac{h(b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - r_9 \cdot \sin\gamma)}{g \cdot l \cdot \cos\gamma} P_S\right]^2}.$$

Componentele reacțiunii din lagărul B au valorile

$$X_B = \frac{b}{l \cdot g}(g + h)\,P_s - \frac{g + c}{g} P_p,$$

$$Z_B = \frac{(g + c)\,\mathrm{tg}\,\alpha - r_4 \cdot \sin\gamma}{g \cdot \cos\gamma} P_p + \frac{(g + h)\,(b \cdot \mathrm{tg}\,\alpha - r_9 \cdot \sin\gamma)}{g \cdot l \cos\gamma} P_s.$$

Reacțiunea totală din lagărul B va avea deci expresia

$$R_B = \sqrt{\left[\frac{b}{l\cdot g}(g+h)P_s - \frac{g+c}{g}P_p\right]^2 + \left[\frac{(g+c)\operatorname{tg}\alpha - r_4\cdot\sin\gamma}{g\cdot\cos\gamma}P_p + \frac{(g+h)(b\operatorname{tg}\alpha - r_9\cdot\sin\gamma)}{gl\cos\gamma}P_s\right]^2}.$$

Componentele reacțiunii din lagărul C sînt, respectiv,

$$X_C = \frac{b}{l}P_s; \qquad Y_C = P_s\cdot\operatorname{tg}\gamma,$$

$$Z_C = \frac{b\cdot\operatorname{tg}\alpha - r_9\cdot\sin\gamma}{l\cdot\cos\gamma}P_s,$$

iar reacțiunea totală din acest lagăr

$$R_C = \frac{P_s}{l}\sqrt{b^2 + l^2\operatorname{tg}^2\gamma + \left(\frac{b\cdot\operatorname{tg}\alpha - r_9\cdot\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2}.$$

În lagărul D, componentele reacțiunii au valorile

$$X_D = \frac{a}{l}P_s,$$

$$Z_D = \frac{P_s}{l\cdot\cos\gamma}(a\cdot\operatorname{tg}\alpha + r_9\cdot\sin\gamma).$$

Prin urmare, reacțiunea totală din lagărul D are expresia

$$R_D = \frac{P_s}{l}\sqrt{a^2 + \left(\frac{a\cdot\operatorname{tg}\alpha + r_9\cdot\sin\gamma}{\cos\gamma}\right)^2}.$$

Reacțiunea din lagărul E are următoarele componente:

$$X_E = \frac{d\cdot P_p - n\cdot P_s}{f}; \qquad Y_E = (P_s - P_p)\operatorname{tg}\gamma,$$

$$Z_E = \frac{d\cdot\operatorname{tg}\alpha - r_5\cdot\sin\gamma}{f\cdot\cos\gamma}P_p + \frac{n\cdot\operatorname{tg}\alpha + r_{10}\cdot\sin\gamma}{f\cdot\cos\gamma}P_s,$$

valoarea ei totală fiind

$$R_E = \sqrt{\left(\frac{d\cdot P_p - n\cdot P_s}{f}\right)^2 + (P_s - P_p)^2\operatorname{tg}^2\gamma + \frac{[(d\cdot\operatorname{tg}\alpha - r_5\cdot\sin\gamma)P_p + (n\cdot\operatorname{tg}\alpha + r_{10}\cdot\sin\gamma)P_s]^2}{f^2\cos^2\gamma}}.$$

În fine, componentele reacțiunii din lagărul F sînt

$$X_F = \frac{e \cdot P_s - c \cdot P_p}{f},$$

$$Z_F = \frac{c \cdot \operatorname{tg}\alpha + r_5 \cdot \sin\gamma}{f \cdot \cos\gamma} P_p + \frac{(e \cdot \operatorname{tg}\alpha - r_{10} \cdot \sin\gamma) P_s}{f \cos\gamma},$$

reacțiunea totală avînd valoarea

$$R_F = \sqrt{\left(\frac{e \cdot P_s - c \cdot P_p}{f}\right)^2 + \frac{[(c \cdot \operatorname{tg}\alpha + r_5 \cdot \sin\gamma) P_p + (e \cdot \operatorname{tg}\alpha - r_{10} \sin\gamma) P_s]^2}{f^2 \cos^2\gamma}}.$$

Expresia momentului motor M_m în funcție de momentul rezistent M_r și de momentele de inerție ale maselor în mișcare de rotație este egală cu

$$M_m = \left[J_m + J_3 + \left(\frac{r_4}{r_5}\right)^2 J_6 + \left(\frac{r_4 \cdot r_{10}}{r_5 \cdot r_9}\right)^2 (J_{11} + J_t)\right] \varepsilon_1 + \frac{r_4 \cdot r_{10}}{r_5 \cdot r_9} M_r \qquad (34)$$

sau, ținînd seama că $\frac{r_4 \cdot r_{10}}{r_5 \cdot r_9} = i_k^{-1}$ și notînd

$$J_m + J_3 + \left(\frac{r_4}{r_5}\right)^2 J_6 + \frac{J_{11} + Jt}{i_k^2} = J_{\text{red.}},$$

unde $J_{\text{red.}}$ este momentul de inerție al maselor în mișcare de rotație redus la axa arborelui motor,

$$M_m = J_{\text{red.}} \varepsilon_1 + \frac{M_r}{i_K}. \qquad (35)$$

Rezultă de asemenea expresiile forțelor P_p și P_s în funcție de care s-au exprimat reacțiunile din lagăre:

$$\left.\begin{aligned} P_p &= \left(\frac{r_4}{r_5^2} J_6 + \frac{r_{10}}{r_5 \cdot r_9} \cdot \frac{J_{11} + Jt}{i_K}\right) \varepsilon_1 + \frac{r_{10}}{r_5 \cdot r_9} M_r, \\ P_s &= \frac{i_k Mr + (J_{11} + J_t)\varepsilon_1}{i_k r_9}. \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

În cazul roților dințate cu dinți drepți, forța normală P_n care acționează dealungul liniei de angrenare K_1K_2 se descompune într-o componentă tangențială (fig. 12) $P_t = P_n \cos\varphi$ și o componentă radială $P_r = P_n \sin\varphi$.

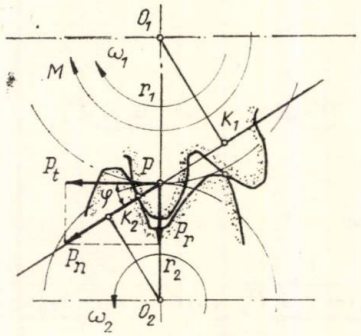


Fig. 12. — Solicitarea roții dințate a cutiei de viteze cu dinți drepți.

Ținînd seama că

$$P_t = \frac{M}{r_1},$$

rezultă

$$P_r = P_t \cdot \operatorname{tg}\varphi = \frac{M}{r_1}\operatorname{tg}\varphi.$$

Ținînd seama că $Q_p = Q_s = 0$ și că

$$R_p = P_p \operatorname{tg}\varphi; \qquad R_s = P_s \operatorname{tg}\varphi,$$

reacțiunile dinamice din lagărele arborilor cutiei de viteze devin:

— reacțiunile dinamice din lagărul A:

$$X_A = \frac{b\cdot h}{g\cdot l}P_s - \frac{c}{g}P_p; \qquad Z_A = \left(\frac{c}{g}P_p + \frac{b\cdot h}{g\cdot l}P_s\right)\operatorname{tg}\varphi,$$

$$R_A = \sqrt{\left(\frac{b\cdot h}{g\cdot l}P_s - \frac{c}{g}P_p\right)^2 + \left(\frac{b\cdot h}{g\cdot l}P_s + \frac{c}{g}P_p\right)^2 \operatorname{tg}^2\varphi};$$

— reacțiunile dinamice din lagărul B:

$$X_B = \frac{b}{l\cdot g}(g+h)\,P_s - \frac{g+c}{g}P_p; \qquad Z_B = \left[\frac{g+c}{g}P_p + \frac{(g+h)\,b}{l\cdot g}P_s\right]\operatorname{tg}\varphi,$$

$$R_B = \sqrt{\left[\frac{b}{l\cdot g}(g+h)\,P_s - \frac{g+c}{g}P_p\right]^2 + \left[\frac{g+c}{g}P_p + \frac{(g+h)\,b}{l\cdot g}P_s\right]^2 \operatorname{tg}^2\varphi};$$

— reacțiunile dinamice din lagărul C:

$$X_C = \frac{b}{l} P_s; \quad Z_C = \frac{b}{l} P_s \operatorname{tg} \varphi,$$

$$R_C = \frac{b}{l \cdot \cos \varphi} P_s;$$

— reacțiunile dinamice din lagărul D:

$$X_D = \frac{a}{l} P_s; \quad Z_D = \frac{a}{l} P_s \operatorname{tg} \varphi,$$

$$R_D = \frac{a}{l \cos \varphi} P_s;$$

— reacțiunile dinamice din lagărul E:

$$X_E = \frac{d \cdot P_p - n \cdot P_s}{f}; \quad Z_E = \frac{d \cdot P_p + n \cdot P_s}{f} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$R_E = \sqrt{\left(\frac{d \cdot P_p - n \cdot P_s}{f}\right)^2 + \left(\frac{d \cdot P_p + n \cdot P_s}{f}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi};$$

— reacțiunile dinamice din lagărul F:

$$X_F = \frac{e \cdot P_s - c \cdot P_p}{f}; \quad Z_F = \frac{c \cdot P_p + e \cdot P_s}{f} \operatorname{tg} \varphi,$$

$$R_F = \sqrt{\left(\frac{e \cdot P_s - c \cdot P_p}{f}\right)^2 + \left(\frac{c \cdot P_p + e \cdot P_s}{f}\right)^2 \operatorname{tg}^2 \varphi},$$

în care forțele P_p și P_s au aceleași valori ca și în cazul roților dințate cu dinți înclinați. De asemenea rămîne valabilă formula (34) a momentului motor.

În figura 13 se arată epura solicitărilor angrenajelor și lagărelor cutiei de viteze.

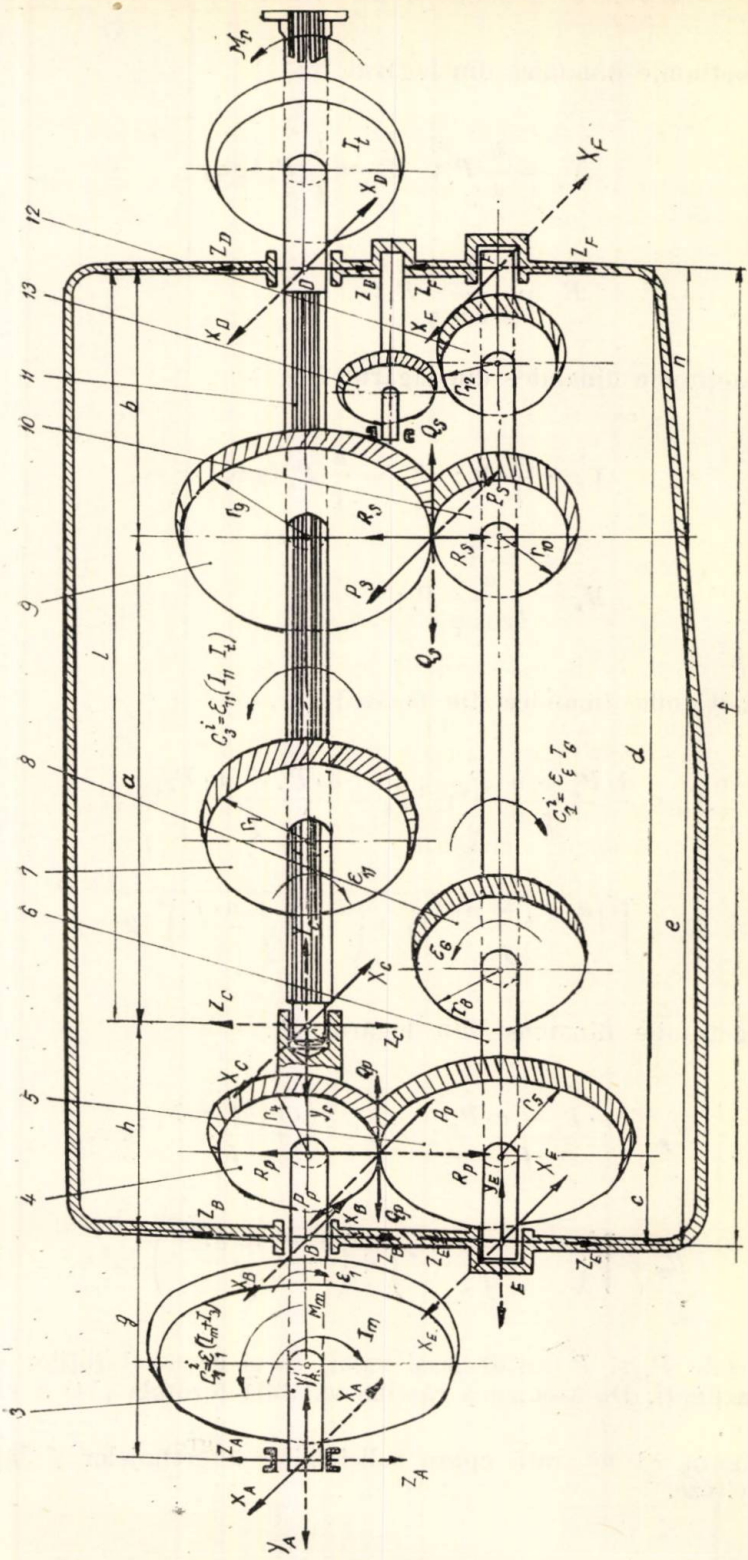


Fig. 13. — Epura solicitărilor angrenajelor și lagărelor cutiei de viteze.

4. STUDIUL VIBRAȚIILOR DE RĂSUCIRE ALE ARBORILOR CUTIEI DE VITEZE

Considerăm, în vederea studiului vibrațiilor de răsucire a arborilor cutiei de viteze, schema cinematică a acesteia dată în figura 14, căreia îi corespunde sistemul dinamic echivalent în figura 15, format dintr-un arbore drept cu patru volanți.

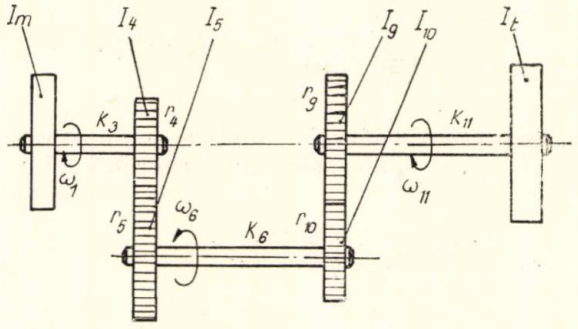


Fig. 14. — Schema cinematică a cutiei de viteze.

Momentului de inerție al motorului J_m îi corespunde momentul de inerție J_1, momentelor de inerție ale roților dințate 4 și 5 le corespunde momentul de inerție J_2, momentelor de inerție ale roților 9 și 10 momentul de inerție J_3, iar momentului de inerție J_t momentul de inerție J_4.

Pentru determinarea momentelor de inerție J_1, J_2, J_3 și J_4 ale volanților arborelui echivalent, vom egala energia cinetică a arborilor cutiei de viteze cu energia cinetică a arborelui echivalent.

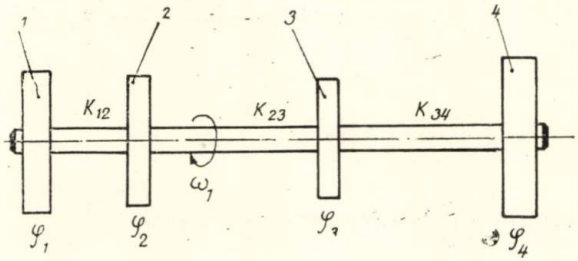


Fig. 15. — Sistemul dinamic echivalent cutiei de viteze în cazul în care se neglijează elasticitatea dinților.

Energia cinetică a ansamblului cutiei de viteze este

$$E = \frac{1}{2}\omega_1^2(J_m + J_4) + \frac{1}{2}\omega_6^2(J_5 + J_{10}) + \frac{1}{2}\omega_{11}^2(J_9 + J_t).$$

Ținînd seama că

$$\omega_6 = \frac{Z_4}{Z_5}\omega_1; \quad \omega_{11} = \frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\omega_1,$$

rezultă

$$E = \frac{1}{2}\omega_1^2\left[J_m + J_4 + (J_5 + J_{10})\left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 + (J_9 + J_t)\left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2\right]. \quad (37)$$

Energia cinetică a arborelui echivalent este

$$E = \frac{1}{2}\omega_1^2(J_1 + J_2 + J_3 + J_4). \quad (38)$$

Egalînd cele două expresii ale energiei cinetice, se obțin expresiile momentelor de inerție J_1, J_2, J_3 și J_4 ale volanților arborelui echivalent:

$$J_1 = J_m; \quad J_2 = J_4 + \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J_5,$$

$$J_3 = \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J_{10} + J_9\left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2; \quad J_4 = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 J_t.$$

Constantele elastice ale arborelui echivalent se determină egalînd energiile potențiale ale celor două sisteme. Energia potențială a arborelui echivalent în momentul în care volanții s-au rotit față de poziția de echilibru cu unghiurile φ_1, φ_2, φ_3 și φ_4 este

$$V = \frac{1}{2}K_{12}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2}K_{23}(\varphi_3 - \varphi_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}K_{34}(\varphi_4 - \varphi_3)^2 = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3} K_{i,i+1}^{(\varphi_{i+1}-\varphi_i)^2} \quad (39)$$

iar energia potențială a arborilor cutiei de viteze

$$V = \frac{1}{2}K_3(\varphi_4 - \varphi_m)^2 + \frac{1}{2}K_6(\varphi_{10} - \varphi_5)^2 + \frac{1}{2}K_{11}(\varphi_t - \varphi_9)^2. \quad (40)$$

Observînd că

$$\varphi_m = \varphi_1; \quad \varphi_4 = \varphi_2; \quad \varphi_5 = \frac{Z_4}{Z_5}\varphi_2,$$

$$\varphi_{10} = \frac{Z_4}{Z_5}\varphi_3; \quad \varphi_t = \frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\varphi_4; \quad \varphi_9 = \frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\varphi_3,$$

relația (40) devine

$$V = \frac{1}{2} K_3(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_6 \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 (\varphi_3 - \varphi_2)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K_{11} \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 (\varphi_4 - \varphi_3)^2. \qquad (41)$$

Din egalarea expresiilor (39) și (41) rezultă constantele elastice ale arborelui echivalent:

$$K_{12} = K_3; \quad k_{23} = \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 K_6; \quad K_{34} = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 K_{11},$$

unde

$$K = \frac{GI_p}{l}.$$

l fiind lungimea arborelui.

Energia cinetică a arborelui echivalent în momentul în care volanții s-au rotit față de poziția de echilibru cu unghiurile φ_1, φ_2, φ_3 și φ_4 este

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \frac{1}{2} J_3 \dot{\varphi}_3^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_4^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{4} J_i \dot{\varphi}_i^2,$$

iar energia potențială

$$V = \frac{1}{2} K_{12}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_{23}(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \frac{1}{2} K_{34}(\varphi_4 - \varphi_3)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{3} K_{i(i+1)}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2.$$

Utilizînd sistemul de ecuații Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \begin{Vmatrix} \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_1} \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_2} \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_3} \\ \frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_4} \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} \frac{\partial V}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial V}{\partial \varphi_4} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \frac{\partial E}{\partial \varphi_1} \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_2} \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_3} \\ \frac{\partial E}{\partial \varphi_4} \end{Vmatrix},$$

se obține sistemul de ecuații diferențiale

$$\left.\begin{aligned} &J_1\ddot{\varphi}_1 + K_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0,\\ &J_2\ddot{\varphi}_2 - K_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + K_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0,\\ &J_3\ddot{\varphi}_3 - K_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) + K_{34}(\varphi_3 - \varphi_4) = 0,\\ &J_4\ddot{\varphi}_4 - K_{34}(\varphi_3 - \varphi_4) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{42}$$

Pentru rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale obținut se caută soluții armonice de aceeași pulsație :

$$\varphi_i = a_i \cos pt \qquad (i = 1,\ 2,\ 3,\ 4).$$

Calculînd derivatele și făcînd înlocuirile în sistemul de ecuații diferențiale, se obține în urma grupării termenilor următorul sistem algebric în a_1, a_2, a_3 și a_4 :

$$\left.\begin{aligned} &(J_1p^2 - K_{12})\, a_1 + K_{12}a_2 = 0,\\ &K_{12}a_1 + (J_2p^2 - K_{12} - K_{23})\, a_2 + K_{23}a_3 = 0,\\ &K_{23}a_2 + (J_3p^2 - K_{23} - K_{34})\, a_3 + K_{34}a_4 = 0,\\ &K_{34}a_3 + (J_4p^2 - K_{34})\, a_4 = 0. \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Sistemul (43) admite și alte soluții în afară de soluția banală dacă determinantul matricei

$$\begin{Vmatrix} J_1p^2 - K_{12} & K_{12} & 0 & 0\\ K_{12} & J_2p^2 - K_{12} - K_{23} & K_{23} & 0\\ 0 & K_{23} & J_3p^2 - K_{23} - K_{34} & K_{34}\\ 0 & 0 & K_{34} & J_4p^2 - K_{34} \end{Vmatrix} \tag{44}$$

este nul. Anulînd determinantul matricei (44) se obține următoarea ecuație de gradul trei în p^2 :

$$p^6 - \left(\frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}K_{12} + \frac{J_2 + J_3}{J_2J_3}K_{23} + \frac{J_3 + J_4}{J_3J_4}K_{34}\right)p^4 +$$

$$+ \left(\frac{J_1 + J_2 + J_3}{J_1J_2J_3}K_{12}K_{23} + \frac{J_2 + J_3 + J_4}{J_2J_3J_4}K_{23}K_{34} +\right.$$

$$\left. + \frac{J_1 + J_2}{J_1J_2}\cdot\frac{J_3 + J_4}{J_3J_4}K_{12}K_{34}\right)p^2 - \frac{J_1 + J_2 + J_3 + J_4}{J_1J_2J_3J_4}K_{12}K_{23}K_{34} = 0, \tag{45}$$

denumită ecuația pulsațiilor, care are trei rădăcini diferite de zero. Cele trei rădăcini diferite de zero ale ecuației (45) reprezintă pulsațiile proprii ale arborelui cu patru volanți, echivalent ansamblului cutiei de viteze.

Dacă se are în vedere faptul că dinții angrenajului sînt elastici, constanta elastică a elementului elastic este

$$K = \frac{3r^2}{\frac{f^3}{EI} + \frac{f^3}{E'I'}}, \tag{46}$$

unde

f reprezintă înălțimea piciorului dintelui,
E, E' — modulele de elasticitate ale materialelor celor două roți,
I, I' — momentele de inerție la încovoiere ale dinților, calculate la rădăcina lor,
r — raza roții în raport cu care face reducerea constantei elastice a angrenajului.

Înlocuind în (46) $r = r_4$, înseamnă că reducerea se face în raport cu axul primar al cutiei de viteze și constanta elastică dată de (46) este chiar K_{45}, prin urmare

$$K_{45} = \frac{3r_4^2}{\frac{f^3}{EI} + \frac{f^3}{E'I'}}. \tag{47}$$

Dacă, dimpotrivă, în formula (46) se înlocuiește $r = r_5$, se obține K'_{45}, adică constanta elastică redusă la axul intermediar al cutiei de viteze.

Pentru sistemul roților dințate al cutiei de viteze se procedează așa cum se arată în figura 16. Se lasă masa J'_4 pe arborele primar al cutiei de viteze, se înlocuiește elasticitatea angrenajului prin arborele elastic $K_{23} = i_{45}^2 K'_{45}$, iar angrenajul rămîne cu $J = 0$ și $J'_5 \neq 0$, ca în figura 16*b*. Se reduc apoi masele și elasticitățile arborelui intermediar la axa arborelui primar, obținîndu-se schema din figura 16*c*. Se procedează analog pentru cel de-al doilea angrenaj, înlocuindu-se elasticitatea acestuia prin arborele elastic $K_{45} = i_{910}^2 K'_{910}$, angrenajul rămînînd cu $J = 0$ și $J'_9 \neq 0$, ca în figura 16*d*. Se reduc apoi masele și elasticitățile arborelui secundar la arborele primar și se obține schema din figura 16*e*, a unui arbore drept cu șase volanți. Momentele de inerție J_i ale volanților acestui arbore au, respectiv, valorile

$$J_1 = J_m; \qquad J_2 = J'_4,$$

$$J_3 = \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J'_5; \qquad J_4 = \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 J'_{10},$$

$$J_5 = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 J''_9; \qquad J_6 = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 J''_t,$$

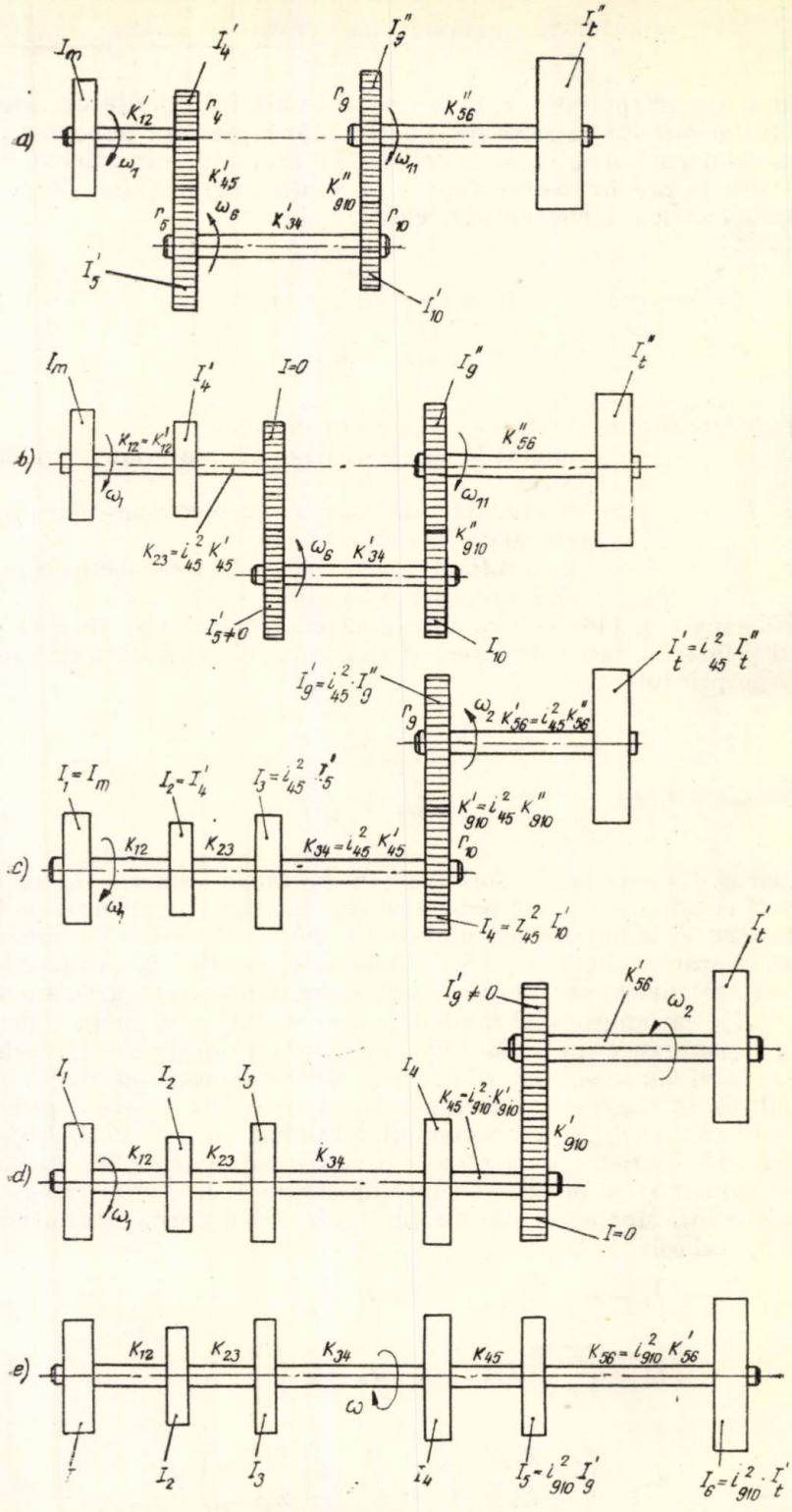


Fig. 16. — Schema reducerii angrenajelor cutiei de viteze la un arbore drept cu șase volanți.

iar constantele elastice

$$K_{12} = K'_{12}; \qquad K_{23} = \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 \frac{3r_5^2}{\frac{f^3}{EI} + \frac{f^3}{EI'}},$$

$$K_{34} = \left(\frac{Z_4}{Z_5}\right)^2 K'_{34}; \qquad K_{45} = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 \cdot \frac{3r_9^2}{\frac{f^3}{EI} + \frac{f^3}{EI'}},$$

$$K_{56} = \left(\frac{Z_4 \cdot Z_{10}}{Z_5 \cdot Z_9}\right)^2 K''_{56}.$$

Notînd prin $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_6$ rotirile volanților față de poziția lor de echilibru, energia cinetică a sistemului va fi

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2 + \ldots + \frac{1}{2} J_6 \dot{\varphi}_6^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{6} J_i \dot{\varphi}_i^2,$$

iar energia potențială

$$V = \frac{1}{2} K_{12}(\varphi_2 - \varphi_1)^2 + \frac{1}{2} K_{23}(\varphi_3 - \varphi_2)^2 + \ldots + \frac{1}{2} K_{56}(\varphi_6 - \varphi_5)^2 =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{5} K_{i(i+1)}(\varphi_{i+1} - \varphi_i)^2.$$

Sistemul de ecuații Lagrange

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial E}{\partial \dot{\varphi}_i}\right) - \frac{\partial E}{\partial \varphi_i} + \frac{\partial V}{\partial \varphi_i} = 0 \quad (i = 1, 2, \ldots, 6)$$

ne conduce la următorul sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi:

$$\left.\begin{aligned} &J_1\ddot{\varphi}_1 + K_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) = 0, \\ &J_2\ddot{\varphi}_2 - K_{12}(\varphi_1 - \varphi_2) + K_{23}(\varphi_2 - \varphi_3) = 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &J_5\ddot{\varphi}_5 - K_{45}(\varphi_4 - \varphi_5) + K_{56}(\varphi_5 - \varphi_6) = 0, \\ &J_6\ddot{\varphi}_6 - K_{56}(\varphi_5 - \varphi_6) = 0. \end{aligned}\right\} \qquad (48)$$

Căutînd soluții armonice de aceeași pulsație de forma

$$\varphi_i = a_i \cos pt \quad (i = 1, 2, \ldots, 6),$$

calculînd derivatele și făcînd înlocuirile în sistemul de ecuații diferențiale, se obține sistemul algebric

$$\left.\begin{aligned}
&(J_1p^2 - K_{12})\,a_1 + K_{12}a_2 = 0,\\
&K_{12}a_{12} + (J_2p^2 - K_{12} - K_{23})\,a_2 + K_{23}a_3 = 0,\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&K_{45}a_4 + (J_5p^2 - K_{45} - K_{56})\,a_5 + K_{56} = 0,\\
&K_{56}a_5 + (J_6p^2 - K_{56})\,a_6 = 0.
\end{aligned}\right\} \qquad (49)$$

Acest sistem, omogen în a_1, a_2, a_6,..., a , admite și alte soluții în afară de soluția banală dacă determinantul matricei

este nul. Anulînd determinantul acestei matrice, se obține în urma efectuării calculelor următoarea ecuație de gradul cinci în p^2, adică ecuația pulsațiilor :

$$p^{10} - ap^8 + bp^6 - cp^4 + dp^2 - e = 0, \qquad (51)$$

în care a, b, c, d și e sînt coeficienți pozitivi, dați în tabela 1. Ecuația (51) are cinci rădăcini diferite de zero, care reprezintă pulsațiile proprii ale arborelui cu șase volanți, echivalent angrenajelor cutie de viteze.

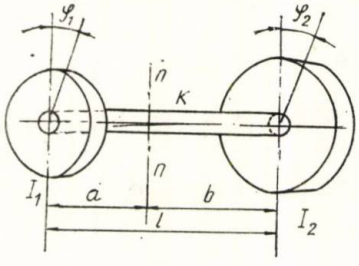


Fig. 17. — Sistemul dinamic echivalent cutiei de viteze în cazul în care se neglijează momentele de inerție ale roților dințate și elasticitatea dinților.

Neglijînd momentele de inerție ale roților dințate și elasticitatea dinților, arborele drept, echivalent din punct de vedere dinamic cu arborii cutiei de viteze, va avea doi volanți la extremități (fig. 17). În momentul

$$\begin{Vmatrix} J_1p^2-K_{12} & K_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ K_{12} & J_2p^2-K_{12}-K_{23} & K_{23} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{23} & J_3p^2-K_{23}-K_{34} & K_{34} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & K_{34} & J_4p^2-K_{34}-K_{45} & K_{45} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & K_{45} & J_5p^2-K_{45}-K_{56} & K_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & K_{56} & J_6p^2-K_{56} \end{Vmatrix} \tag{50}$$

Tabela 1

Expresiile coeficienților formulelor (51)

Coeficientul	Expresia coeficientului
a	$\frac{I_1+I_2}{I_1I_2}K_{12}+\frac{I_2+I_3}{I_2I_3}K_{23}+\frac{I_3+I_4}{I_3I_4}K_{34}+\frac{I_4+I_5}{I_4I_5}K_{45}+\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}K_{56}=\sum_{i=1}^{5}\frac{I_i+I_{i+1}}{I_i\cdot I_{i+1}}Ki(i+1)$
b	$\frac{I_1+I_2+I_3}{I_1I_2I_3}K_{12}K_{23}+\frac{I_2+I_3+I_4}{I_2I_3I_4}K_{23}K_{34}+\frac{I_3+I_4+I_5}{I_3I_4I_5}K_{34}K_{45}+\frac{I_4+I_5+I_6}{I_4I_5I_6}K_{45}K_{56}+\frac{I_1+I_2}{I_1I_2}\left(\frac{I_3+I_4}{I_3I_4}K_{34}+\right.$ $\left.+\frac{I_4+I_5}{I_4I_5}K_{45}+\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}K_{56}\right)+\frac{I_2+I_3}{I_2I_3}K_{23}\left(\frac{I_4+I_5}{I_4I_5}K_{45}+\frac{I_5I_6}{I_5I_6}K_{56}\right)+\frac{I_3+I_4}{I_3\cdot I_4}\cdot\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}K_{34}K_{56}$
c	$\frac{I_1+I_2+I_3+I_4}{I_1I_2I_3I_4}K_{12}K_{23}K_{34}+\frac{I_2+I_3+I_4+I_5}{I_2I_3I_4I_5}K_{23}K_{34}K_{45}+\frac{I_3+I_4+I_5+I_6}{I_3I_4I_5I_6}K_{34}K_{45}K_{56}+\frac{I_1+I_2}{I_1I_2}K_{12}\times$ $\times\left(\frac{(I_3+I_4+I_5}{I_3I_4I_5}K_{34}K_{45}+\frac{I_4+I_5+I_6}{I_4I_5I_6}K_{45}K_{56}\right)+\frac{I_1+I_2+I_3}{I_1I_2I_3}K_{12}K_{23}\left(\frac{I_4+I_5}{I_4I_5}K_{45}+\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}K_{56}\right)+$ $+\frac{I_2+I_3+I_4}{I_2I_3I_4}\cdot\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}\cdot K_{23}K_{34}K_{56}+\frac{I_1+I_2}{I_1I_2}\cdot\frac{I_3+I_4}{I_3I_4}\cdot\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}K_{12}K_{3i}K_{56}$
d	$\frac{I_1+I_2+I_3+I_4+I_5}{I_1I_2I_3I_4I_5}K_{12}K_{23}K_{34}K_{45}+\frac{I_2+I_3+I_4+I_5+I_6}{I_2I_3I_4I_5I_6}K_{23}K_{34}K_{45}K_{56}+\frac{I_1+I_2+I_3}{I_1I_2I_3}\cdot\frac{I_4+I_5+I_6}{I_4I_5I_6}K_{12}K_{23}K_{45}K_{56}+$ $+\frac{I_1+I_2+I_3+I_4}{I_1I_2I_3I_4}\cdot\frac{I_5+I_6}{I_5I_6}K_{12}K_{23}K_{34}K_{56}+\frac{I_1+I_2}{I_1I_2}\cdot\frac{I_3+I_4+I_5+I_6}{I_3I_4I_5I_6}K_{12}K_{23}K_{34}K_{45}K_{56}$
e	$\frac{I_1+I_2+I_3+I_4+I_5+I_6}{I_1I_2I_3I_4I_5I_6}K_{12}K_{23}K_{34}K_{45}K_{56}$

în care volanții se rotesc față de poziția de echilibru cu unghiurile φ_1 și φ_2, energia cinetică a sistemului oscilant va fi

$$E = \frac{1}{2} J_1 \dot{\varphi}_1^2 + \frac{1}{2} J_2 \dot{\varphi}_2^2,$$

iar energia potențială

$$V = \frac{1}{2} K(\varphi_2 - \varphi_1)^2.$$

Înlocuind expresiile energiei cinetice și potențiale în ecuațiile lui Lagrange, se obține sistemul de ecuații diferențiale

$$\left.\begin{aligned} J_1\ddot{\varphi}_1 + K(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0, \\ J_2\ddot{\varphi}_2 - K(\varphi_1 - \varphi_2) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{52}$$

Căutînd soluții armonice de aceeași pulsație, de forma

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1 \\ \varphi_2 \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \end{matrix} \right\| \cos\, pt,$$

calculînd derivatele și înlocuind în sistemul (52), se obține sistemul

$$\left.\begin{aligned} (J_1 p^2 - K)\, a_1 + K a_2 &= 0, \\ K a_1 + (J_2 p^2 - K)\, a_2 &= 0. \end{aligned}\right\}$$

Anulînd determinantul matricei

$$\left\| \begin{matrix} J_1 p^2 - K & K \\ K & J_2 p^2 - K \end{matrix} \right\|,$$

rezultă ecuația

$$p^4 - K \frac{J_1 + J_2}{J_1 J_2} p^2 = 0,$$

din care se determină pulsația p a vibrațiilor proprii ale arborelui cu doi volanți la extremități, echivalent din punct de vedere dinamic cu sistemul cutiei de viteze $p = \sqrt{K \dfrac{J_1 + J_2}{J_2 J_1}}$.

Vibrațiile de răsucire ale arborilor cutiilor de viteze sînt însoțite și de vibrații de încovoiere ale acestora. Experimental s-a stabilit că angrenajele cutiei de viteze trebuie studiate ca elemente elastice; în timpul solicitării acestora apar deformații unghiulare, a căror mărime este direct proporțională cu sarcinile care le acționează.

Deplasările pe care le capătă roțile dințate ale cutiei de viteze în timpul funcționării se pot împărți în deplasări relative și de transport.

Deplasările relative ale roților dințate sînt determinate de încovoierea arborilor, de deformațiile de încovoiere a dinților, de deformațiile lagărelor de sprijin și de deformațiile corpului cutiei. Deplasările de transport ale roților dințate sînt provocate de rotirile arborilor cutiei și ale celorlalte organe în mișcare de rotație a acesteia. Stabilirea ecuațiilor diferențiale ale mișcării prin înregistrarea tuturor factorilor enumerați mai sus este foarte greu de realizat, din care cauză prezentăm studiul simplificat în care pe lîngă deplasările admisibile de răsucire ale arborilor se socotesc numai deplasările liniare verticale ale roților dințate și unghiurile de rotire în jurul axelor roților. Energia cinetică a sistemului este în acest caz

$$E = \frac{1}{2} J_m \dot{\varphi}_m^2 + \frac{1}{2} J_4 \dot{\varphi}_4^2 + \frac{1}{2} J_5 \dot{\varphi}_5^2 + \frac{1}{2} J_9 \dot{\varphi}_9^2 + \frac{1}{2} J_{10} \varphi_{10}^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} J_t \dot{\varphi}_t^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{Z}_4^2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{Z}_5^2 + \frac{1}{2} m_9 \dot{Z}_9^2 + \frac{1}{2} m_9 \dot{Z}_9^2 + \frac{1}{2} m_{10} \dot{Z}_{10}^2,$$

în care φ_m și φ_t sînt rotirile volanților în jurul axelor proprii, φ_4, φ_5, φ_9 și φ_{10} rotirile roților dințate în jurul axelor proprii, m_4, m_5, m_9 și m_{10} masele roților dințate, iar Z_4, Z_5, Z_9 și Z_{10} deplasările verticale ale centrelor roților dințate.

Rotirile φ_4, φ_5, φ_9 și φ_{10} ale roților în jurul axelor proprii sînt

$$\varphi_4 = \varphi + \Delta\varphi_4; \qquad \varphi_5 = \frac{1}{i_{45}} \varphi - \Delta\varphi_5,$$

$$\varphi_9 = \theta + \Delta\theta_9; \qquad \varphi_{10} = \frac{1}{i_{910}} - \Delta\theta_{10},$$

unde φ și θ sînt unghiurile de rotație de transport ale roților dințate 4 și 9, iar $\Delta\varphi_4$, $\Delta\varphi_5$, $\Delta\varphi_9$ și $\Delta\varphi_{10}$ unghiurile de rotire suplimentare ale roților dințate 4 și 5, 9 și 10 (fig. 18).

Energia potențială a sistemului va avea expresia

$$V = \frac{1}{2} K_3(\varphi_m - \varphi_4)^2 + \frac{1}{2} K_6(\varphi_5 - \varphi_{10})^2 + \frac{1}{2} K_{11}(\varphi_9 - \varphi_t)^2 +$$

$$+ \frac{Z_4^2}{2Z_{04}} + \frac{Z_5^2}{2Z_{05}} + \frac{Z_9^2}{2Z_{09}} + \frac{Z_{20}^2}{2Z_{010}}, \qquad (53)$$

în care Z_{04}, Z_{05}, Z_{09} și Z_{010} sînt deplasările verticale ale roților dințate determinate de eforturi unitare (egale cu 1 kgf).

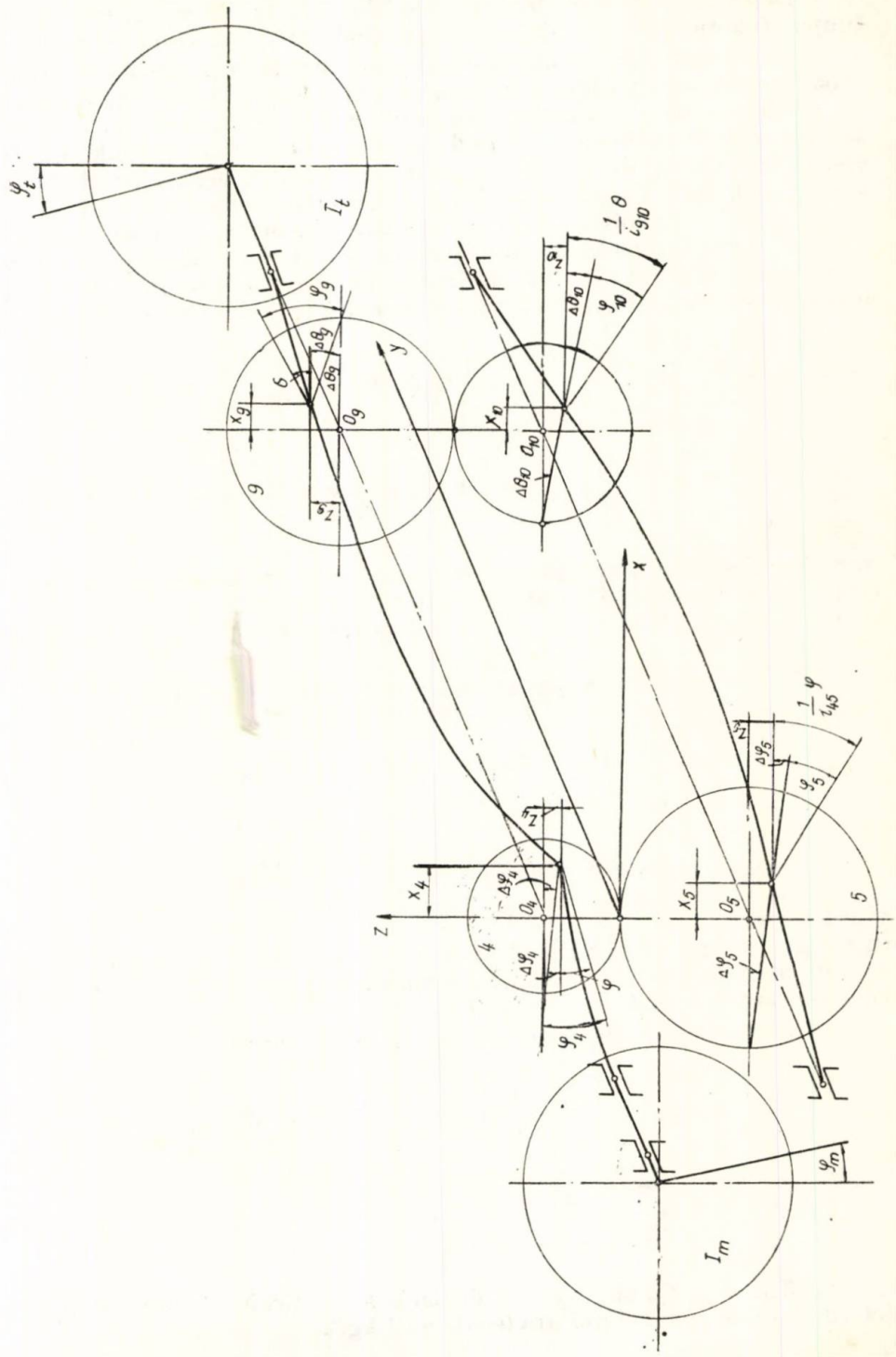


Fig. 18. — Schema deplasărilor geometrice a angrenajelor cutiei de viteze

Înlocuind în relațiile (52) și (53) valorile lui φ_4, φ_5, φ_9 și φ_{10}, se obține

$$E = \frac{1}{2} J_m \dot{\varphi}_m^2 + \frac{1}{2} J_4 \left(\dot{\varphi} + \frac{Z_4}{r_4} \right)^2 + \frac{1}{2} J_5 \left(\frac{\dot{\varphi}}{i_{45}} - \frac{\dot{Z}_5}{r_5} \right)^2 + \frac{1}{2} J_9 \left(\dot{\theta} + \frac{\dot{Z}_9}{r_9} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} J_{10} \left(\frac{\dot{\theta}}{i_{910}} - \frac{\dot{Z}_{10}}{r_{10}} \right)^2 + \frac{1}{2} J_t \dot{\varphi}_t^2 + \frac{1}{2} m_4 \dot{Z}_4^2 + \frac{1}{2} m_5 \dot{Z}_5^2 + \frac{1}{2} m_9 \dot{Z}_9^2 + \frac{1}{2} m_{10} \dot{Z}_{10}^2,$$

$$V = \frac{1}{2} K_3 \left(\varphi_m - \varphi - \frac{Z_4}{r_4} \right)^2 + \frac{1}{2} K_6 \left(\frac{\varphi}{i_{45}} - \frac{Z_5}{r_5} - \frac{\theta}{i_{910}} + \frac{Z_{10}}{r_{10}} \right)^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} K_9 \left(\theta + \frac{Z_9}{r_9} - \varphi_t \right)^2 + \frac{Z_4^2}{2Z_{04}} + \frac{Z_5^2}{2Z_{05}} + \frac{Z_{09}^2}{2Z_{09}} + \frac{Z_{10}^2}{2Z_{010}}.$$

Substituind în continuare expresiile energiei cinetice și potențiale în ecuațiile lui Lagrange:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial E}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial E}{\partial q_i} + \frac{\partial V}{\partial q_i} = Q_{q_i},$$

q_i fiind coordonatele generalizate, și ținînd seama că forțele generalizate au expresiile

$$Q_{\varphi_m} = \Delta M_m; \; Q_{\varphi_t} = \Delta M_r; \; Q_\varphi = Q_\theta = Q_{Z_4} = Q_{Z_5} = Q_{Z_9} = Q_{Z_{10}} = 0,$$

se obține sistemul de ecuații diferențiale care descrie vibrațiile libere ale angrenajelor cutiei de viteze:

$$\begin{cases} J_m \ddot{\varphi}_m + K_3 \left(\varphi_m - \varphi - \dfrac{Z_4}{r_4} \right) = \Delta M_m, \\ J_4 \left(\ddot{\varphi} + \dfrac{\ddot{Z}_4}{r_4} \right) + \dfrac{J_5}{i_{45}} \left(\dfrac{\ddot{\varphi}}{i_{45}} - \dfrac{\ddot{Z}_5}{r_5} \right) - K_3 \left(\varphi_m - \varphi - \dfrac{Z_4}{r_4} \right) + \\ \qquad + \dfrac{k_6}{i_{45}} \left(\dfrac{\varphi}{i_{45}} - \dfrac{Z_5}{r_5} - \dfrac{\theta}{i_{910}} + \dfrac{Z_{10}}{r_{10}} \right) = 0, \\ J_9 \left(\ddot{\theta} + \dfrac{\ddot{Z}_9}{r_9} \right) + \dfrac{J_{10}}{i_{910}} \left(\dfrac{\ddot{\theta}}{i_{910}} - \dfrac{\ddot{Z}_{10}}{r_{10}} \right) - \dfrac{k_6}{i_{910}} \left(\dfrac{\varphi}{i_{45}} - \dfrac{\theta}{i_{910}} - \dfrac{Z_5}{r_5} + \right. \\ \qquad \left. + \dfrac{Z_{10}}{r_{10}} \right) + K_{11} \left(\theta + \dfrac{Z_9}{r_9} - \varphi_t \right) = 0, \\ m_4 \ddot{Z}_4 + \dfrac{J_4}{r_4} \left(\ddot{\varphi} + \dfrac{\ddot{Z}_4}{r_4} \right) - \dfrac{k_3}{r_4} \left(\varphi_m - \varphi - \dfrac{Z_4}{r_4} \right) + \dfrac{Z_4}{Z_{04}} = 0, \end{cases}$$

$$
\begin{cases}
m_5\ddot{Z}_5 - \dfrac{J_5}{r_5}\left(\dfrac{\ddot{\varphi}}{i_{45}} - \dfrac{\ddot{Z}_5}{r_5}\right) - \dfrac{K_6}{r_5}\left(\dfrac{\varphi}{i_{45}} - \dfrac{Z_5}{r_5} - \dfrac{\theta}{i_{910}} + \dfrac{Z_{10}}{r_{10}}\right) + \dfrac{Z_5}{Z_{05}} = 0, \\
m_9\ddot{Z}_9 + \dfrac{J_9}{r_9}\left(\ddot{\theta} + \dfrac{\ddot{Z}_9}{r_9}\right) + \dfrac{K_{11}}{r_9}\left(\theta + \dfrac{Z_9}{r_9} - \varphi_t\right) + \dfrac{Z_0}{Z_{09}} = 0, \\
m_{10}\ddot{Z}_{10} - \dfrac{J_{10}}{r_{10}}\left(\dfrac{\ddot{\theta}}{i_{910}} - \dfrac{\ddot{Z}_{10}}{r_{10}}\right) + \dfrac{K_6}{r_{10}}\left(\dfrac{\varphi}{i_{45}} - \dfrac{Z_5}{r_5} - \dfrac{\theta}{r_{910}} - \dfrac{Z_{10}}{r_{10}}\right) + \dfrac{Z_{10}}{Z_{010}} = 0, \\
J_t\ddot{\varphi}_t - K_{11}\left(\theta + \dfrac{Z_9}{r_9} - \varphi_t\right) = \Delta M_r.
\end{cases}
\tag{54}
$$

Astfel, cercetarea procesului vibrațiilor angrenajelor cutiei de viteze conduce la integrarea complexului sistem de ecuații diferențiale (54). Utilizarea metodelor analitice în această problemă creează dificultăți de calcul extrem de mari. Rezolvarea unui astfel de sistem de ecuații diferențiale nu prezintă însă greutăți pentru o mașină electronică de calcul, larg introduse în zilele noastre în practica inginerească.

În vederea rezolvării pe mașina electronică de calcul, sistemul (54) este necesar ca în prealabil să se rezolve în raport cu derivatele de ordin superior și să se aducă la forma

$$
\begin{cases}
\ddot{\varphi}_m = A_1\varphi_m + A_2\varphi + A_3\theta + A_4Z_4 + A_5Z_5 + A_6Z_9 + A_7Z_{10} + A_8, \\
\ddot{\varphi} = B_1\varphi_m + B_2\varphi + B_3\theta + B_4Z_4 + B_5Z_5 + B_6Z_9 + B_7Z_{10} + B_8, \\
\ddot{\theta} = C_1\varphi_m + C_2\varphi + C_3\theta + C_4Z_4 + C_5Z_5 + C_6Z_9 + C_7Z_{10} + C_8, \\
\ddot{Z}_4 = D_1\varphi_m + D_2\varphi + D_3\theta + D_4Z_4 + D_5Z_5 + D_6Z_9 + D_7Z_{10} + D_8, \\
\ddot{Z}_5 = E_1\varphi_m + E_2\varphi + E_3\theta + E_4Z_4 + E_5Z_5 + E_6Z_9 + E_7Z_{10} + E_8, \\
\ddot{Z}_9 = F_1\varphi_m + F_2\varphi + F_3\theta + F_4Z_4 + F_5Z_5 + F_6Z_9 + F_7Z_{10} + F_8, \\
\ddot{Z}_{10} = G_1\varphi_m + G_2\varphi + G_3\theta + G_4Z_4 + G_5Z_5 + G_6Z_9 + G_7Z_{10} + G_8, \\
\ddot{\varphi}_t = H_1\varphi_m + H_2\varphi + H_3\theta + H_4Z_4 + H_5Z_5 + H_6Z_9 + H_7Z_{10} + H_8.
\end{cases}
\tag{55}
$$

5. ÎNCERCAREA CUTIILOR DE VITEZE

Încercările experimentale făcute asupra cutiilor de viteze ale tractoarelor prezintă o importanță deosebită pentru dezvoltarea și modernizarea construcției de tractoare.

În vederea efectuării de încercări asupra cutiilor de viteze a fost realizat un banc de încercări (fig. 19). Elementele componente bancului sînt:

① — motorul de curent continuu;
② — generatorul de curent continu;
③ — cutia de viteze care se încearcă;
④ — batiul imobil al motorului;
⑤ — batiul mobil care servește drept suport cutiei care se încearcă;
⑥ — batiul mobil al generatorului de curent continu.

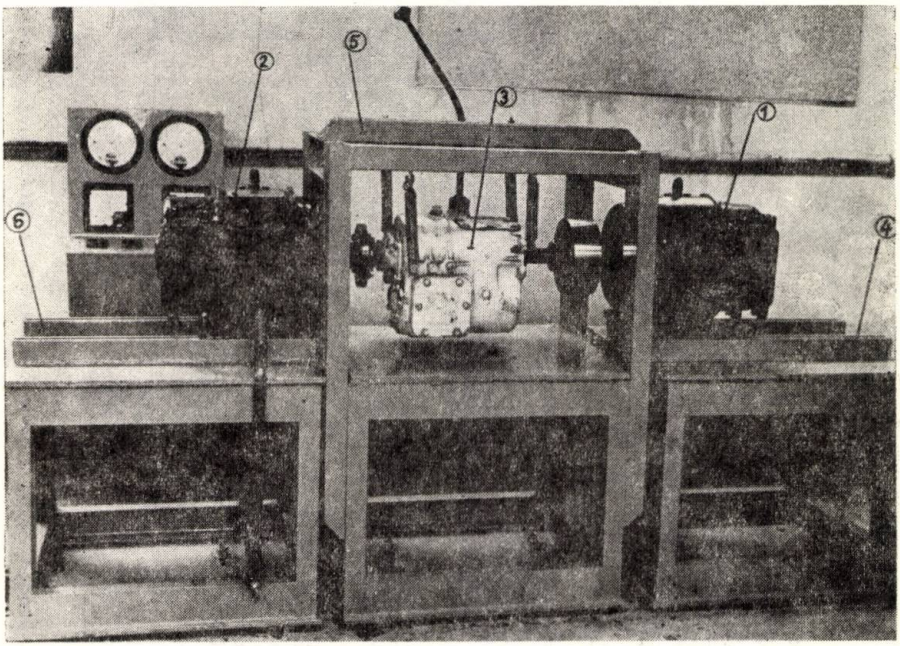


Fig. 19. — Vederea generală a bancului pentru încercarea cutiilor de viteze.

Bancul pentru încercări este deservit de o serie de instalații de alimentare, comandă și control. Instalația de alimentare constă dintr-un grup convertizor cu instalația electrică aferentă (fig. 20). Instalația de alimentare și control se găsește montată într-un pupitru așezat în apropierea bancului.

În vederea efectuării încercării cutiei de viteze, construcția bancului a fost concepută astfel. Motorul de curent continu (*1*), care antrenează arborele primar al cutiei de viteze, se află montat pe batiu imobil (*4*), arborele motorului fiind prevăzut cu un cuplaj elastic care permite o ușoară asamblare. Turația motorului poate fi variată într-un domeniu foarte larg, de la cîteva ture/min la 3 000—4 000 ture/min. Această turație variabilă se poate obține prin schimbarea valorii tensiunii de alimentare, obținută de la grupul convertizor prin variația excitației generatorului. Pentru obținerea unei anumite viteze și pentru reglarea cît mai fină a acesteia, pe lîngă autotransformatorul reglabil în circuitul de excitație al generatorului s-a prevăzut și o rezistență variabilă.

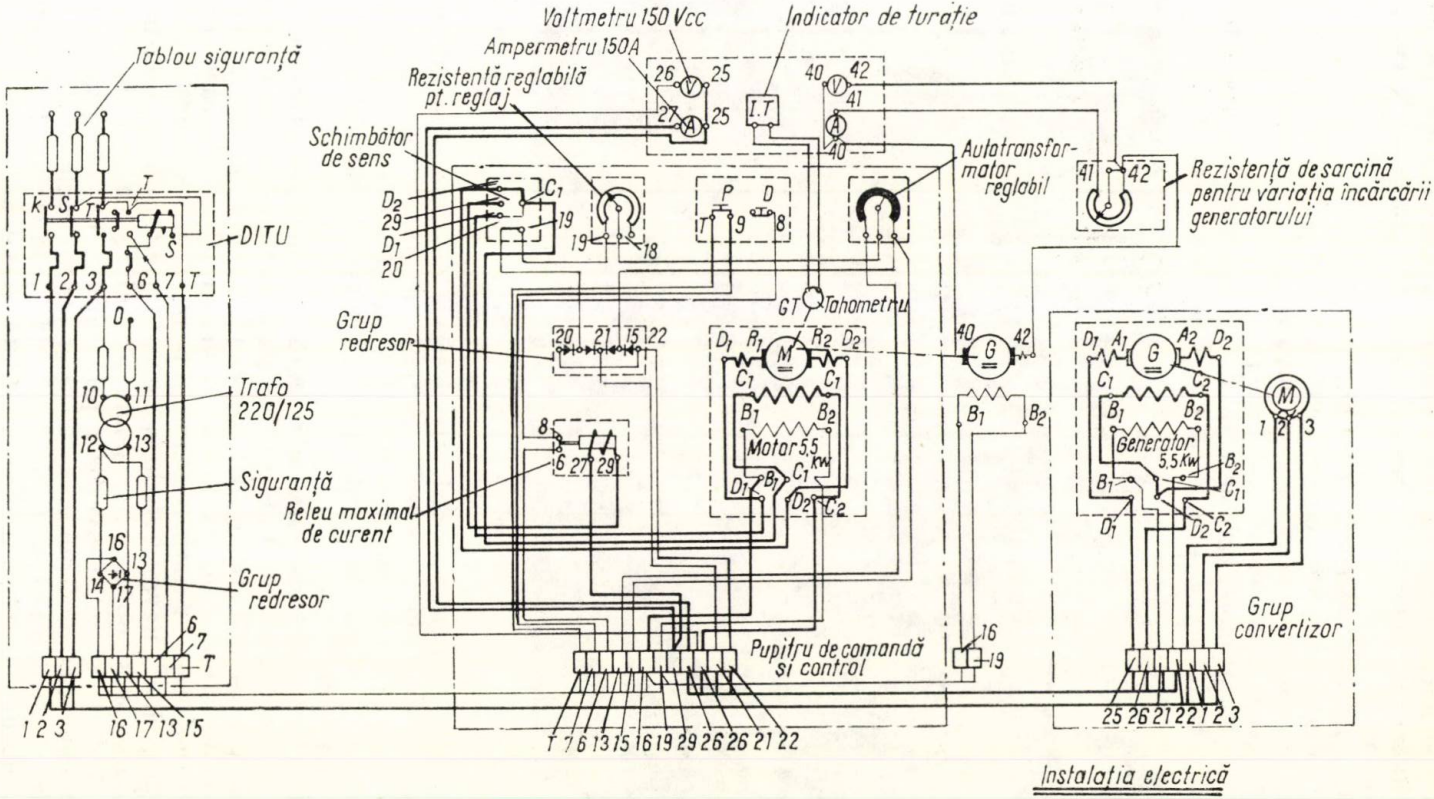


Fig. 20. — Instalația electrică a bancului pentru încercarea cutiilor de viteze.

Instalația electrică a fost în așa fel realizată încît să permită și schimbarea sensului de rotație al motorului. Regimul de funcționare al motorului, turație, tensiune, curent, este sesizat de aparate corespunzătoare, dispuse pe pupitrul de comandă și control.

Generatorul de curent continu (*2*) este și el prevăzut cu un cuplaj elastic, care permite o ușoară asamblare cu arborele intermediar al cutiei de viteze. Generatorul are rolul de a lucra ca frînă, regimul de frînare putînd fi schimbat prin variația rezistenței sale de sarcină. Parametrii de funcționare, tensiune și curent sînt sesizați prin aparate corespunzătoare, montate în pupitrul de comandă și control.

Încercarea cutiilor de viteze se face în special cu scopul de a determina randamentul acestora în timpul funcționării la diferite regimuri de funcționare, determinînd puterea primită și cea cedată de cutia de viteze.

Cutiile de viteze sînt încercate de asemenea la solicitări variabile, cu care ocazie se fac aprecieri asupra rezistenței organelor sale. După anumite intervale de timp, cutia se demontează și se verifică cu atenție piesele sale cele mai solicitate.

Uzurile care se produc în cuplele cinematice ale cutiei de viteze se pot determina pentru diferite condiții de funcționare prin stabilirea conținutului de pulbere metalică din ulei și prin folosirea în condiții speciale a izotopilor radioactivi.

Determinarea deformațiilor arborilor cutiei de viteze și a carterului acesteia se poate face de asemenea utilizînd traductori și oscilografe sau osciloscoape.

Verificarea corectitudinii angrenajelor cutiei de viteze se poate realiza prin antrenarea cutiei la turații mici fără sarcină, înregistrîndu-se cu ajutorul unui oscilograf variațiile de putere consumată de motorul (*1*). Studiul vibrațiilor, frecvența și intensității acestora, precum și a cauzelor pe care le provoacă, constituie un domeniu complex de investigație. Aceste studii trebuie făcute din necesitatea de a prelungi durata de funcționare a elementelor cutiei și pentru a feri organismul uman de influența dăunătoare a zgomotelor cu frecvențe critice pentru organism.

Primită la redacție la 29 iulie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Ananev, I. V., Timofeev, P. G., *Kolebaniia uprugih sistem v aviaționnîh konstruktiiah ih demfirovanie*, Moskova, 1965, p. 238–266.
2. Barskii, I. B., *Konstruirovanie i rascet traktorov*, Moskva, Mașghiz, 1962, p. 70–116.
3. Botez, E., *Angrenaje*, București, Edit. tehnică 1962.
4. Ciudakov, E. A., *Construcția și calculul automobilului*, București, I. D.T., 1954, p. 83–150.
5. Davîdov, B. L., Skorodumov, B. A., Bubîr, IU. V., *Reduktorî*, Moskva, Mașghiz, 1963, p. 361–389.
6. Den Hartog, J. P., *Vibrations mécaniques*, Paris, Dunod, 1960.
7. Dimenterg, F. M., Satalov, K. T., Gusarov, A. A., *Kolebaniia mașin*, Moskva, 1964, p. 154–174.
8. Hamburger, L., Buzdugan, Gh., *Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor*, București, Edit. tehnică, 1958, p. 296–312.
9. Heldt, P. M., *Torque converters or transmission*, Philadelphia, 1960.
10. Klotter, K., *Technische Schwingungslehre*, ed. 2 Berlin, 1 Springer — Verlag, 1964.

11. KOŽEŠNIK, J., *Dynamika strojů*, Praga, 1958.
12. MANEA, GH., BOSIANU, O., CHIȘU, A., SĂVEANU, L., *Organe de mașini*, vol. 2, București, Edit. tehnică 1958, p. 193—482.
13. NIȚESCU, GH., *Calculul și construcția tractoarelor și vehiculelor pe șenile*, vol. 2, Brașov, Lit. învățămîntului, 1959, p. 61—129.
14. NIȚESCU, GH., NĂSTĂSOIU, S., POPESCU, S., *Tractoare*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1968, p. 384—434.
15. SIMA, D. P., *Culegere de probleme de mecanică tehnică*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1964, p. 164—169.
16. SIMA, D. P., *Vibrațiile roților dințate*, Construcția de mașini, *8*, 461—474 (1968).
17. TIMOSHENKO, S. P., *Théorie des vibrations*, Paris, 1947.
18. TIMOSHENKO, S. P., *Vibrations problems in engineering*, Toronto—New York — Londra, 1955.
19. TONG, N., KIN, *Theory of mechanical vibration*, New York — Londra.
20. VÎLCOVICI, V., BĂLAN, ST., VOINEA, R., *Mecanica teoretică*, București, Edit. tehnică 1959.
21. WILSON, W., KER, *Vibration engineering*, Londra, 1947.
22. ZINK H., *Geräuschuntersuchungen an zahnradgetrieben*, VDI, 8, 1956.

PROGRAM LA CALCULATORUL ELECTRONIC PENTRU TABELAREA ŞI TRASAREA PARAMETRILOR CINEMATICI AI MECANISMELOR

de R. C. BOGDAN*, D. LARIONESCU **

Această lucrare vine să completeze performanţele „Instalaţiei mecanoelectrice I.M.A.", instalaţie de concepţie originală a laboratorului de teorie a mecanismelor din cadrul Centrului de mecanică a solidelor al Ministerului Învăţămîntului. Cu ajutorul acestei instalaţii se pot modela diferite tipuri de mecanisme în condiţiile lor de lucru obişnuite şi obţine parametrii cinematici ai unui anumit punct. Programul pentru calculatoarele electronice care constituie obiectul prezentei lucrări completează performanţele instalaţiei mecanoelectrice atunci cînd se cere o precizie sporită în obţinerea vitezelor şi acceleraţiilor. Programul de calcul a fost scris în limbajul automat FORTRAN şi experimentat pe un calculator electronic de tipul I.B.M.

1. DESCRIEREA INSTALAŢIEI MECANOELECTRICE TIP I.M.A.

Deoarece această instalaţie originală a mai constituit în parte şi obiectul altor lucrări [1]—[3], se va descrie pe scurt principiul său de funcţionare atît cît este necesar pentru a se înţelege restul lucrării.

În figura 1 este dată o imagine de ansamblu a instalaţiei mecanoelectrice. De fapt această instalaţie are două părţi componente principale :

— masa de modelare mecanică a mecanismelor împreună cu traductorul mecanoelectric polar ;

— aparatura electrică pentru redarea parametrilor cinematici ai mecanismului modelat.

În figura 1 se pot distinge atît masa de modelare împreună cu traductorul polar, cît şi instalaţia electrică împreună cu osciloscopul destinat vizualizării parametrilor cinematici.

O prezentare schematică a traductorului polar este dată în figura 2.

Se observă că acesta este compus în principal dintr-o bielă articulată în punctul M al unui mecanism (reprezentat punctat), modelat pe un cadru metalic al instalaţiei mecanoelectrice. Biela amintită mai sus culisează într-o piesă articulată pe suportul instalaţiei, formînd un

* Institutul de petrol, gaze şi geologie, Bucureşti.
** Centrul de mecanică a solidelor, Bucureşti.

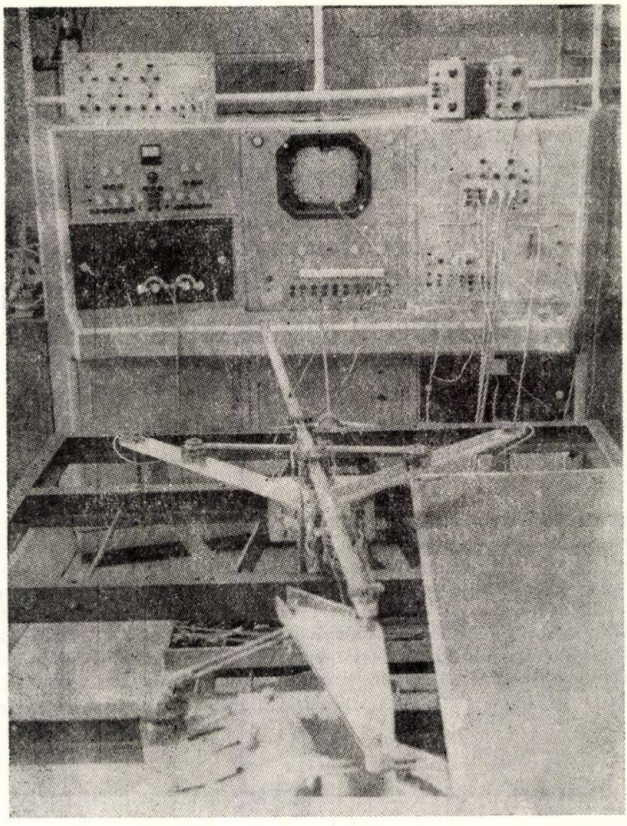


Fig. 1

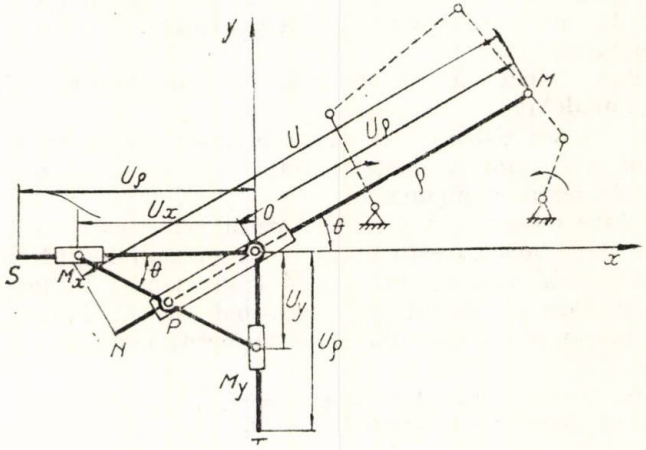


Fig. 2

mecanism cu culisă oscilantă. S-ar putea obține în acest caz direct parametrii polari ρ și θ, dar, din cauza osciloscopului catodic cu baleiaj cartezian pe care se citesc parametrii cinematici ai mecanismelor, aceste mărimi trebuie transformate în parametrii cartezieni prin relațiile cunoscute

$$x = \rho \cos\theta; \qquad y = \rho \sin\theta. \tag{1}$$

În acest fel se impune transformarea parametrului θ în $\sin\theta$ și $\cos\theta$, iar apoi realizarea înmulțirilor respective. Pentru realizarea acestor operații în instalația mecanoelectrică se folosește mecanismul elipsograf. De culisa NM este articulată o bară M_xPM_y, ale cărei capete sînt articulate, la rîndul lor, la două pietre de culisă care se pot deplasa de-a lungul a două direcții perpendiculare. Datorită dimensiunilor constructive $OP = PM_x = PM_y = r$, rezultă $OM_x = 2r \cos\theta$, $OM_y = 2r \sin\theta$. Pe biela NM se aplică o tensiune U constantă. În timpul funcționării se obține între punctele O și M tensiunea variabilă $U_\rho = \frac{\rho}{MN} U$. Această tensiune U_ρ culeasă este aplicată concomitent între punctele SO și TO. Folosind proprietățile traductorului mecanoelectric din figura 2, rezultă că în punctele M_x și M_y se culeg tensiuni de forma

$$U_x = \frac{2r\cos\theta}{SO} U_\rho; \qquad U_y = \frac{2r\sin\theta}{TO} U_\rho$$

și deci, utilizînd relațiile (1), obținem

$$U_x = \frac{2rU}{MN \cdot SO} x; \qquad U_y = \frac{2rU}{MN \cdot TO} y.$$

Se observă deci că mărimile electrice U_x și U_y sînt proporționale cu mărimile geometrice x, respectiv y. Instalația electrică (fig. 1) preia semnalele electrice U_x și U_y, le prelucrează și, folosind un osciloscop catodic, le reprezintă, formînd astfel imaginea traiectoriei punctului M. Semnalele electrice reprezentînd traiectoriile pe axe, U_x, respectiv U_y, sînt derivate succesiv în instalația electrică în scopul obținerii componentelor $\dot{U}_x$, $\dot{U}_y$, respectiv $\ddot{U}_x$, $\ddot{U}_y$, și deci prin compunerea lor viteza și accelerația punctului M de pe biela mecanismului considerat.

Pe ecranul osciloscopului catodic apar astfel, după dorință, fie proiecțiile traiectoriei vitezei și accelerației în funcție de timp, fie, respectiv, compunerea lor.

Pentru evitarea unei construcții complicate și pentru obținerea unei bune stabilități și a unei manipulări simple, s-a evitat utilizarea amplificatorilor de curent continuu. În acest sens, traductorii electrici sînt alimentați cu o tensiune alternativă de frecvență $f = 10$ kHz, aleasă în condiția $f \geqslant f_m$, unde f_m este frecvența de repetiție a traiectoriilor. Cum mecanismele sînt acționate cu un motor electric de 1 500 rot/min prin intermediul unui reductor, s-a stabilit

$$0{,}1 \text{ Hz} < f_m < 10 \text{ Hz},$$

ceea ce permite reproducerea unui număr destul de mare de armonici.

Pentru punctul B al unui mecanism pentalater de specia întîi, cu raport de transmitere $\eta = +2$ (fig. 3), s-au obținut la instalația mecanoelectrică în ordinea: hodograful traiectorie (fig. 4 *a*), proiecția traiectoriei pe axa Ox (fig. 4 *b*), proiecția traiectoriei pe axa Oy (fig. 4 *c*), proiecția vitezei pe axa Ox (fig. 4 *d*) și proiecția vitezei pe axa Oy (fig. 4 *e*).

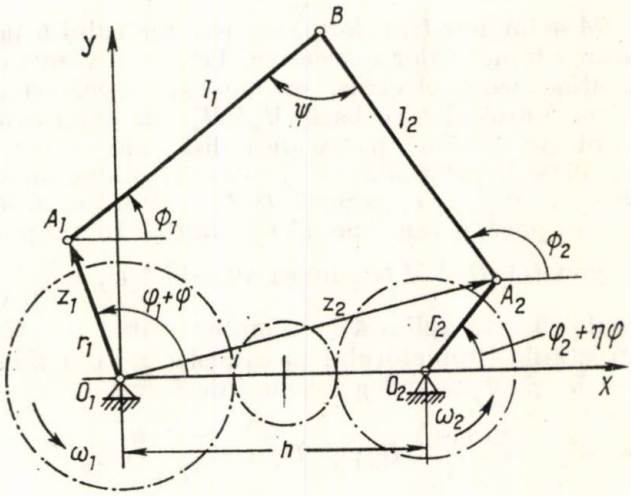


Fig. 3

Utilitatea instalației mecanoelectrice este dată de următoarele:

— instalația este un instrument de cercetare, servind totodată și ca mijloc de verificare a unor rezultate teoretice;

— variația parametrilor cinematici poate fi determinată expeditiv și continuu;

— permite cercetarea experimentală a unor efecte dinamice, ca neechilibrarea maselor, gradul de neuniformitate, influența elasticității elementelor și jocurile în cuplele cinematice;

— aproximațiile din calculele teoretice, considerate ca admisibile pot fi verificate prin măsurători;

— face posibilă efectuarea, în anumite limite, a unei sinteze experimentale a mecanismelor.

Trebuie arătat totuși că există anumite limite în efectuarea unor măsurători, impuse în special de precizia mai scăzută a montajelor de derivare succesivă, cu care este prevăzută instalația. Aceste montaje de derivare succesivă intră în acțiune atunci cînd se derivează succesiv traiectoria unui punct al mecanismului pentru determinarea vitezei, respectiv a accelerației sale. Precizia cu care funcționează amplificatoarele operaționale, echipate ca derivatoare, este afectată de următoarele:

— derivatorii au tendința de a amplifica paraziții;

— sensibilitatea mărită la înaltă frecvență, proprie derivatorilor, poate duce la oscilații de înaltă frecvență nedorite în dispozitivul de modelare dacă nu se iau măsuri speciale de precauție.

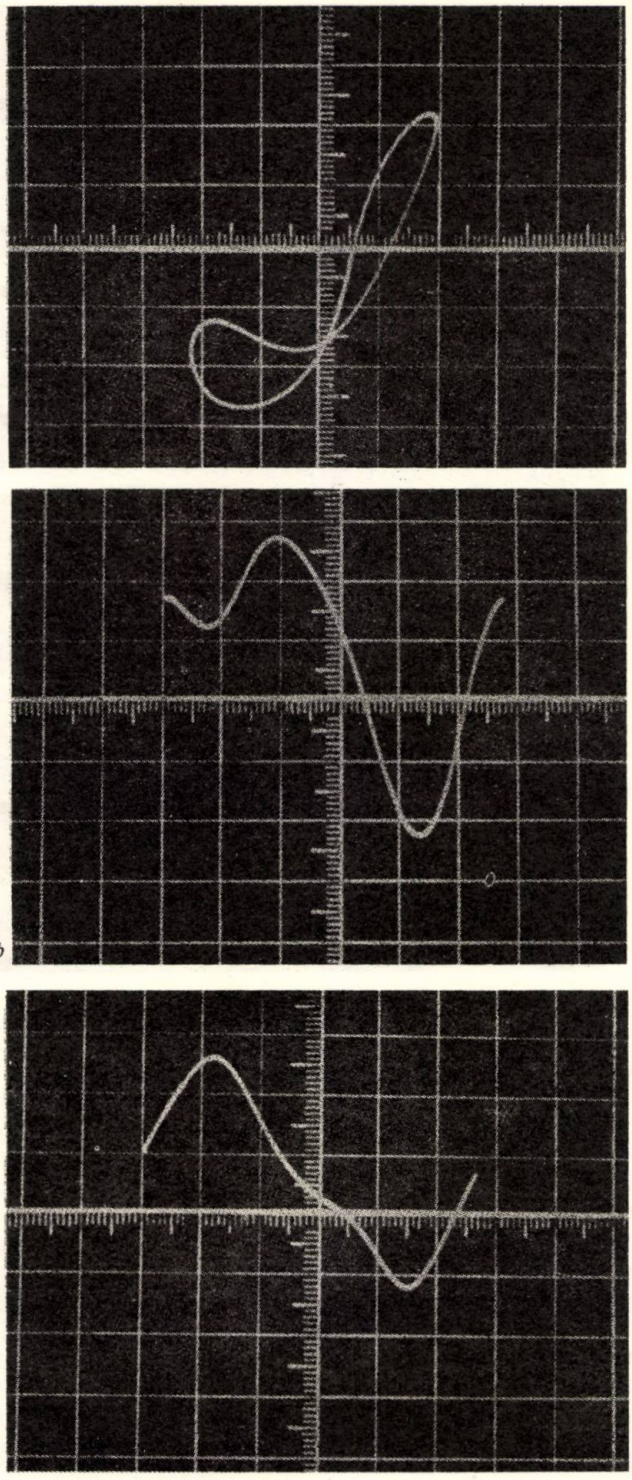


Fig. 4

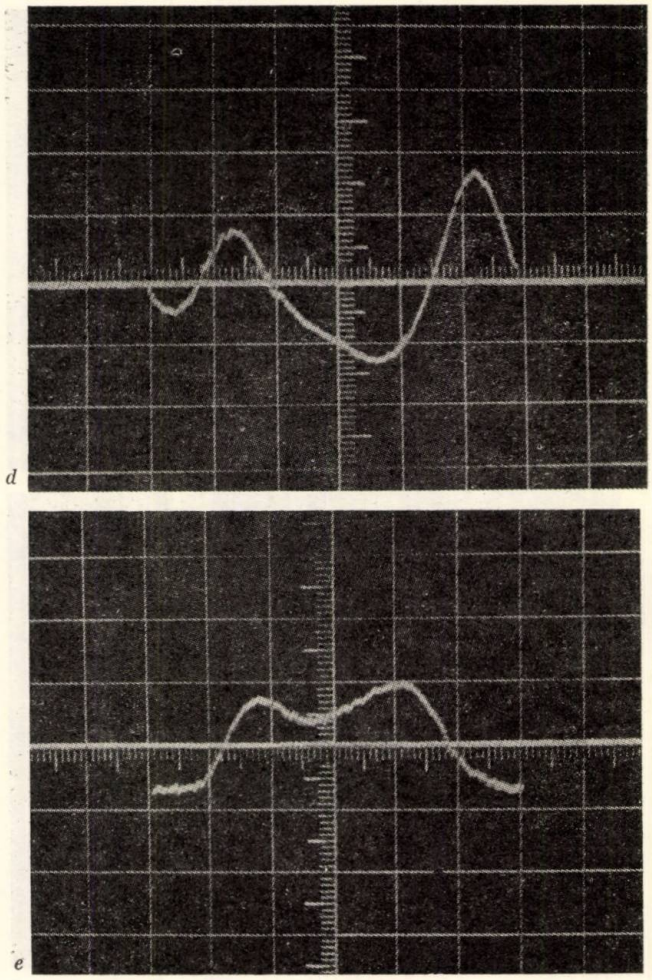


Fig. 4

Din considerațiile de mai sus, în [4] a fost propusă o metodă originală pentru derivarea succesivă a unui semnal electric, utilizînd amplificatoare operaționale din componența unui calculator analogic încadrate într-un montaj special. În lucrarea amintită mai sus s-a studiat în mod special montajul propus de autori pentru derivarea succesivă, arătîndu-se avantajele utilizării acestuia.

În lucrarea de față, aceeași problemă a obținerii derivatelor succesive se reia pe altă cale, calea analitică, utilizîndu-se în acest scop, în locul calculatoarelor electronice analogice, calculatoarele electronice numerice. Realizarea prezentei lucrări a fost ușurată de existența unui înregistrator plan cartezian tip simograf, care deservește instalația mecanoelectrică și care permite trasarea pe hîrtie milimetrică a traiectoriei descrise de un punct al unui mecanism cu precizie sporită față de reprezentarea pe ecranul unui osciloscop.

2. DESCRIEREA PROGRAMULUI DE CALCUL ŞI MODUL DE UTILIZARE

Se porneşte de la traiectoria unui mecanism modelat pe instalaţia mecanoelectrică. Această traiectorie sau proiecţia sa pe axe poate fi obţinută fie prin fotografiere pe ecranul osciloscopului (vezi fig. 4 *a*, *b*, *c*), fie trasată cu ajutorul înregistratorului plan cartezian tip simograf. Folosirea simografului permite obţinerea unei figuri de dimensiuni mari trasate pe hîrtie milimetrică, ceea ce asigură o precizie sporită în măsurătorile grafice, deci în citirea cu multă exactitate a factorilor de scară. Se trasează axele de coordonate şi se măsoară, de exemplu, 36 de ordonate, corespunzătoare celor 36 de puncte echidistante în care este împărţită perioada de timp în care se desfăşoară mişcarea. Acestea corespund poziţiilor echidistante ale manivelei mecanismului măsurînd unghiul de rotaţie al manivelei din 10 în 10 grade în intervalul $[0,2\pi]$.

Cele 36 de valori numerice care aproximează în tot atîtea puncte traiectoria mecanismului constituie date de intrare în algoritmul de calcul, care constituie subiectul prezentei lucrări. În continuare, desfăşurarea logică a programului de calcul este următoarea. Pe baza valorilor numerice care reprezintă traiectoria măsurată în 36 de puncte, se caută o expresie analitică comodă în calcule care să aproximeze cît mai bine (eroare medie pătratică minimă) funcţia reprezentînd traiectoria.

Această expresie analitică se găseşte sub forma unei dezvoltări în serie Fourier după algoritmul lui Runge-Thomson. Conform acestui algoritm, proiecţia traiectoriei pe una dintre axe, descrisă de un punct situat pe biela unui mecanism, se obţine sub forma

$$T(\varphi) = B_0 + \sum_{m=1}^{18} B_m \cos(m\varphi) + \sum_{m=1}^{18} A_m \sin(m\varphi), \tag{2}$$

unde coeficienţii Fourier B_m şi A_m sînt daţi de relaţiile

$$B_m = \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{36} Y_k \cos\left(mk\frac{\pi}{18}\right), \tag{3}$$

$$A_m = \frac{1}{18} \sum_{k=1}^{36} Y_k \sin\left(mk\frac{\pi}{18}\right),$$

pentru $m = 1, 2, \ldots, 17$.

De asemenea

$$B_0 = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{36} Y_k,$$

$$B_{18} = \frac{1}{36} \sum_{k=1}^{36} Y_k \cos(k\pi), \tag{4}$$

$$A_{18} = 0.$$

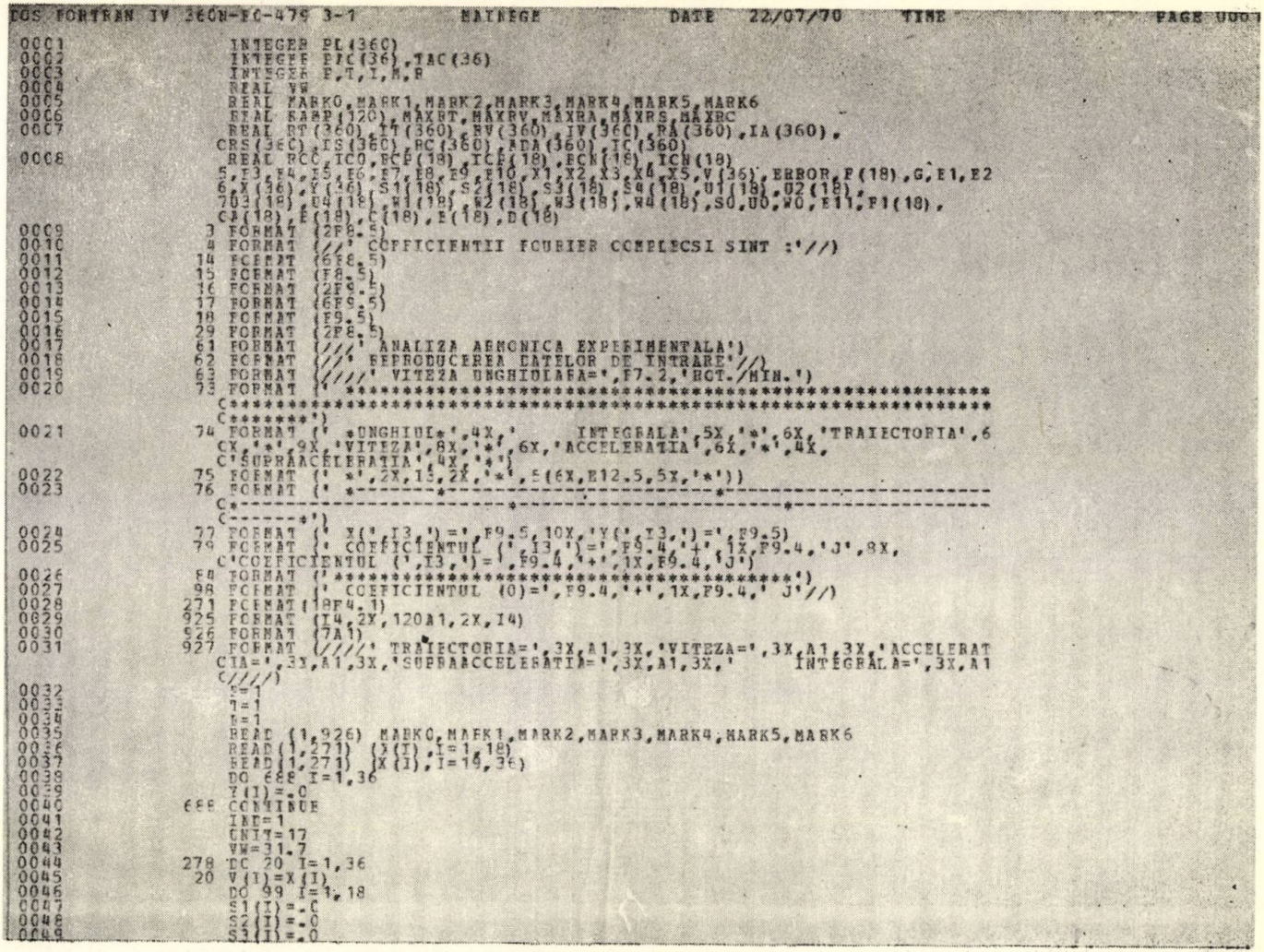
Prin Y_k se înţelege valoarea normată a ordonatei, ridicată în punctul k corespunzător împărţirii intervalului de definiţie a funcţiei

$T(\varphi)$. Se observă că, în cazul utilizării a 36 de valori a mărimii funcției de traiectorie ce trebuie să fie aproximată, se pot obține, conform algoritmului descris, armonici pînă la rangul 18, ceea ce în tehnică, în majoritatea cazurilor, se consideră suficient pentru a obține o precizie de aproximare bună.

Seria Fourier astfel obținută se derivează și se integrează ușor, ducînd la determinarea unor expresii aproximative pentru parametrii cinematici ai mecanismului: viteză, accelerație, supraaccelerație și integrala traiectoriei. Cu toate că derivarea și integrarea se fac matematic exact datorită faptului că legea de traiectorie care este supusă acestor operații este determinată doar aproximativ sub forma unei serii Fourier, eroarea comisă în aproximarea ei apare și în calculul derivatelor și al integralei, ba chiar se amplifică în procesul derivărilor succesive. Datorită faptului că eroarea comisă în aproximarea traiectoriei este foarte mică, așa cum se va vedea mai departe în testul efectuat asupra programului, și erorile cu care se obțin ceilalți parametri ai mecanismului se mențin în limite cu totul admisibile. În orice caz, acest program asigură obținerea derivatelor succesive cu o precizie mult sporită. După obținerea derivatelor și integralei traiectoriei se trece la tabelarea acestor mărimi în funcție de valoarea parametrului independent φ (vezi tabelele 1, 3 și 5). În aceste tabele, valorile parametrilor cinematici ai mecanismelor, traiectoria, viteza, accelerația, supraaccelerația și integrala traiectoriei sînt redate pentru diferite valori ale unghiului de manivelă φ sub formă exponențială. Datele din tabelă trebuie citite în felul următor: de exemplu, 0.54390 E 2 reprezintă de fapt numărul $0{,}54390 \cdot 10^{+2}$, iar numărul reprezentat prin 0.27451 E −1 se citește ca fiind $0{,}27451 \cdot 10^{-1}$. Valorile date pentru parametrii cinematici din tabelele 1, 3 și 5 se interpretează ținînd seama de factorii de scară folosiți la obținerea datelor de intrare în algoritm și de valoarea vitezei unghiulare ω. După tabelarea parametrilor cinematici ai mecanismului, programul de calcul trece la pregătirea pentru trasarea acestor parametri. În acest scop, valorile mărimilor din tabelele 1, 3 și 5 sînt rotunjite și transformate în numere întregi care variază în intervalul [1, 120]. Astfel modificate, tabelele 1, 3 și 5 capătă forma tabelelor 2, 4 și 6. Ele sînt utile, deoarece permit după trasarea parametrilor cinematici ai mecanismelor din figurile respective citirea valorilor lor cantitative. De exemplu, dacă se dorește să se afle valoarea accelerației din figura 9 pentru unghiul de manivelă $\varphi = 40°$, se găsește această valoare în tabela 6 egală cu 0.93 000 E 02 = = 93. Această valoare rotunjită corespunde valorii reale 1,9235 din tabela 5. Deoarece reprezentarea grafică a parametrilor cinematici a fost efectuată discret și lucrînd cu valori rotunjite ale mărimilor, rezultă că diagramele trasate prin acest program au doar rolul unei vizualizări comode ale fenomenelor, aceste observații fiind completate de tabele.

Programul de calcul a fost programat în limbajul automat FORTRAN-IV și executat de un calculator de tipul I.B.M.-360. Lista instrucțiunilor care îl compun este dată în figura 5 *a*, *b*, *c*, *d*.

Pentru testarea corectitudinii programului și aprecierea erorii cu care lucrează s-a executat programul în cazul a 36 de date de intrare, care măsoară în tot atîtea puncte funcția $y = \sin \varphi$ în intervalul $[0{,}2\,\pi]$ cu cinci zecimale exacte.



```
DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-1          MAINEGE          DATE   22/07/70      TIME                PAGE 0001
0001              INTEGER PL(360)
0002              INTEGER PAC(36),TAC(36)
0003              INTEGER P,T,I,M,R
0004              REAL VW
0005              REAL MARK0,MARK1,MARK2,MARK3,MARK4,MARK5,MARK6
0006              REAL KAMP(120),MAXRT,MAXRV,MAXRA,MAXRS,MAXRC
0007              REAL RT(360),IT(360),RV(360),IV(360),RA(360),IA(360),
                 CRS(360),DS(360),RC(360),ADA(360),IC(360)
0008              REAL RCC,ICO,RCP(18),ICP(18),RCN(18),ICN(18)
                 5,E3,E4,E5,E6,E7,E8,E9,E10,X1,X2,X3,X4,X5,V(36),ERROR,F(18),G,E1,E2
                 6,X(36),Y(36),S1(18),S2(18),S3(18),S4(18),U1(18),U2(18),
                 7U3(18),U4(18),W1(18),W2(18),W3(18),W4(18),S0,U0,W0,E11,F1(18),
                 CA(18),E(18),C(18),B(18),D(18)
0009            3 FORMAT (2F8.5)
0010            4 FORMAT (//' COEFFICIENTII FOURIER COMPLECSI SINT :'//)
0011           14 FORMAT (6F8.5)
0012           15 FORMAT (F8.5)
0013           16 FORMAT (2F9.5)
0014           17 FORMAT (6F9.5)
0015           18 FORMAT (F9.5)
0016           29 FORMAT (2F8.5)
0017           61 FORMAT (///' ANALIZA ARMONICA EXPERIMENTALA')
0018           62 FORMAT (//' REPRODUCEREA DATELOR DE INTRARE'//)
0019           63 FORMAT (////' VITEZA UNGHIULARA=',F7.2,'ROT./MIN.')
0020           73 FORMAT (' ***********************************************************
                 C***********************************************************************
                 C*******')
0021           74 FORMAT (' *UNGHIUL*',4X,'      INTEGRALA',5X,'*',6X,'TRAIECTORIA',6
                 CX,'*',9X,'VITEZA',8X,'*',6X,'ACCELERATIA',6X,'*',4X,
                 C'SUPRAACELERATIA',4X,'*')
0022           75 FORMAT (' *',2X,I3,2X,'*',5(6X,E12.5,5X,'*'))
0023           76 FORMAT (' *-------*-----------------------*-----------------------
                 C*-----------------------*-----------------------*-----------------
                 C------*')
0024           77 FORMAT (' X(',I3,')=',F9.5,10X,'Y(',I3,')=',F9.5)
0025           79 FORMAT (' COEFICIENTUL (',I3,')=',F9.4,'+',1X,F9.4,'J',8X,
                 C'COEFICIENTUL (',I3,')=',F9.4,'+',1X,F9.4,'J')
0026           84 FORMAT ('*****************************************')
0027           98 FORMAT (' COEFICIENTUL (0)=',F9.4,'+',1X,F9.4,' J'//)
0028          271 FORMAT(18F4.1)
0029          925 FORMAT (I4,2X,120A1,2X,I4)
0030          926 FORMAT (7A1)
0031          927 FORMAT (////' TRAIECTORIA=',3X,A1,3X,'VITEZA=',3X,A1,3X,'ACCELERAT
                 CIA=',3X,A1,3X,'SUPRAACCELERATIA=',3X,A1,3X,'      INTEGRALA=',3X,A1
                 C////)
0032              S=1
0033              T=1
0034              R=1
0035              READ (1,926) MARK0,MARK1,MARK2,MARK3,MARK4,MARK5,MARK6
0036              READ(1,271) (X(I),I=1,18)
0037              READ(1,271) (X(I),I=19,36)
0038              DO 688 I=1,36
0039              Y(I)=.0
0040          688 CONTINUE
0041              IND=1
0042              UNIT=17
0043              VW=31.7
0044          278 DO 20 I=1,36
0045           20 V(I)=X(I)
0046              DO 99 I=1,18
0047              S1(I)=.0
0048              S2(I)=.0
0049              S3(I)=.0
```

Fig. 5*a*

```
DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-1          MAINPGM          DATE   22/07/70     TIME                PAGE 0002

      99 S4(I)=.0
         S0=.0
      32 DO 60 M=1,17
         DO 60 I=1,36
         S1(M)=S1(M)+1./36.*V(I)*COS(M*I*3.14159/18.)
         S2(M)=S1(M)
         S4(M)=S4(M)+1./36.*V(I)*SIN(M*I*3.14159/18.)
         S3(M)=-S4(M)
      60 CONTINUE
         DO 213 I=1,36
         S0=S0+1./36.*V(I)
         S1(18)=S1(18)+1./72.*V(I)*COS(I*3.14159)
         S2(18)=S1(18)
     213 CONTINUE
         S3(18)=.0
         S4(18)=.0
         IF (R-2) 41,42,42
      41 DO 21 I=1,18
         U1(I)=S1(I)
         U2(I)=S2(I)
         U3(I)=S3(I)
      21 U4(I)=S4(I)
         U0=S0
         DO 22 I=1,36
      22 V(I)=Y(I)
         DO 78 I=1,18
         S1(I)=.0
         S2(I)=.0
         S3(I)=.0
      78 S4(I)=.0
         S0=.0
         R=R+1
         GO TO 32
      42 DO 23 I=1,18
         W1(I)=S1(I)
         W2(I)=S2(I)
         W3(I)=S3(I)
      23 W4(I)=S4(I)
         W0=S0
         RC0=U0
         IC0=W0
         DO 24 I=1,18
         RCP(I)=U1(I)-W3(I)
         ICP(I)=W1(I)+U3(I)
         RCN(I)=U2(I)-W4(I)
      24 ICN(I)=W2(I)+U4(I)
         WRITE (3,61)
         WRITE (3,84)
         DO 333 I=1,360
         PL(I)=I
     333 CONTINUE
         DO 477 I=1,360
         RT(I)=0.
         IT(I)=0.
         RV(I)=0.
         IV(I)=0.
         RA(I)=0.
         IA(I)=0.
         RS(I)=0.
         IS(I)=0.
         RC(I)=0.
         IC(I)=0.
     477 CONTINUE
```

Fig. 5*b*

```
0113                DO 113 M=1,360
0114                DO 947 I=1,18
0115                RT(M)=RT(M)+(RCP(I)+RCN(I))*COS(M*I*3.14159/180.)+
                   C(ICN(I)-ICP(I))*SIN(M*I*3.14159/180.)
0116                RV(M)=RV(M)+(ICN(I)-ICP(I))*(COS(M*I*3.14159/180.))*I+
                   C(-RCP(I)-RCN(I))*(SIN(M*I*3.14159/180.))*I
0117                RA(M)=RA(M)+(-RCP(I)-RCN(I))*(COS(M*I*3.14159/180.))*I**2+
                   C(ICP(I)-ICN(I))*(SIN(M*I*3.14159/180.))*I**2
0118                RS(M)=RS(M)+(ICP(I)-ICN(I))*(COS(M*I*3.14159/180.))*I**3+
                   C(RCP(I)+RCN(I))*(SIN(M*I*3.14159/180.))*I**3
0119                RC(M)=RC(M)+(ICP(I)-ICN(I))*(COS(M*I*3.14159/180.))*(1./I)+
                   C(RCP(I)+RCN(I))*(SIN(M*I*3.14159/180.))*(1./I)
0120            947 CONTINUE
0121                RT(M)=RT(M)+RCO
0122                RC(M)=RC(M)+RCO*(M*3.14159/180.)
0123            113 CONTINUE
0124                VW=VW*60.
0125                WRITE (3,73)
0126                WRITE (3,74)
0127                WRITE (3,73)
0128                WRITE (3,76)
0129                DO 4321 M=10,360,10
0130                WRITE (3,75) RL(M),RC(M),RT(M),RV(M),RA(M),RS(M)
0131                WRITE (3,76)
0132           4321 CONTINUE
0133                DO 716 I=1,360
0134                IT(I)=ABS(RT(I))
0135                IV(I)=ABS(RV(I))
0136                IA(I)=ABS(RA(I))
0137                IS(I)=ABS(RS(I))
0138                IC(I)=ABS(RC(I))
0139            716 CONTINUE
0140                MAXRT=IT(1)
0141                DO 717 I=2,360
0142                IF (MAXRT-IT(I)) 751,717,717
0143            751 MAXRT=IT(I)
0144            717 CONTINUE
0145                MAXRV=IV(1)
0146                DO 718 I=2,360
0147                IF (MAXRV-IV(I)) 752,718,718
0148            752 MAXRV=IV(I)
0149            718 CONTINUE
0150                MAXRA=IA(1)
0151                DO 719 I=2,360
0152                IF (MAXRA-IA(I)) 753,719,719
0153            753 MAXRA=IA(I)
0154            719 CONTINUE
0155                MAXRS=IS(1)
0156                DO 720 I=2,360
0157                IF (MAXRS-IS(I)) 754,720,720
0158            754 MAXRS=IS(I)
0159            720 CONTINUE
0160                MAXRC=IC(1)
0161                DO 721 I=2,360
0162                IF (MAXRC-IC(I)) 755,721,721
0163            755 MAXRC=IC(I)
0164            721 CONTINUE
0165                DO 722 I=1,360
0166            973 RT(I)=RT(I)/MAXRT*58+60.5
0167            976 RV(I)=RV(I)/MAXRV*58+60.5
0168            979 RA(I)=RA(I)/MAXRA*58+60.5
0169            982 RS(I)=RS(I)/MAXRS*58+60.5
0170            985 RC(I)=RC(I)/MAXRC*58+60.5
```

Fig. 5c

```
DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-1          MAINPGM          DATE   22/07/70     TIME                PAGE 0004

          722 CONTINUE
              DO 1234 I=1,360
              RT(I)=IFIX(RT(I))
              RV(I)=IFIX(RV(I))
              RA(I)=IFIX(RA(I))
              RS(I)=IFIX(RS(I))
              RC(I)=IFIX(RC(I))
         1234 CONTINUE
              DO 861 IK=1,120
              KAMP(IK)=MARK0
          861 CONTINUE
              WRITE (3,73)
              WRITE (3,74)
              WRITE (3,73)
              WRITE (3,76)
              DO 7977 M=10,360,10
              WRITE (3,75) PL(M),RC(M),RT(M),RV(M),RA(M),RS(M)
              WRITE (3,76)
         7977 CONTINUE
              WRITE (3,927) MARK1,MARK2,MARK3,MARK4,MARK5
              DO 862 M=1,360,3
              DO 863 I=1,120
              IF (I-RT(M)) 731,732,731
          732 KAMP(I)=MARK1
          731 IF (I-RV(M)) 733,734,733
          734 KAMP(I)=MARK2
          733 IF (I-RA(M)) 735,736,735
          736 KAMP(I)=MARK3
          735 IF (I-RS(M)) 737,738,737
          738 KAMP(I)=MARK4
          737 IF (I-RC(M)) 863,740,863
          740 KAMP(I)=MARK5
              KAMP(60)=MARK6
          863 CONTINUE
              WRITE (3,925) PL(M),(KAMP(IL),IL=1,120),PL(M)
              DO 864 KA=1,120
              KAMP(KA)=MARK0
          864 CONTINUE
          862 CONTINUE
              IND=IND+1
         7001 DO 319 I=1,36
              X(I)=SIN(I*3.14159/18.)
          319 CONTINUE
              IF(IND-3) 278,4000,4000
         4000 STOP
              END
DOS FORTRAN IV 360N-FO-479 3-1          MAINPGM          DATE   22/07/70.    TIME                PAGE 0005
```

Fig. 5*d*

Din tabela 1 care apare ca urmare a execuţiei programului se observă, în cazul traiectoriei şi a celorlalţi parametri cinematici, precizia deosebită cu care sînt obţinute aceste funcţii pentru diferite valori ale parametrului φ. Astfel, de exemplu, pentru unghiul $\varphi = 90°$ rezultatele exacte (obţinute prin derivarea succesivă şi integrarea funcţiei $y = \sin\varphi$, dînd parametrului φ valoarea, $\varphi = 90°$) sînt

$$y = 1;\ \frac{dy}{d\varphi} = 0;\ \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -1;\ \frac{d^3y}{d\varphi^3} = 0;\ \int(\sin\varphi)\,d\varphi = 0.$$

Rezultatele obţinute prin executarea programului de calcul şi care apar în tabela 1 sînt

$$y = 0{,}99999;\ \frac{dy}{d\varphi} = 0{,}000001;\ \frac{d^2y}{d\varphi^2} = -0{,}99953.$$

$$\frac{d^3y}{d\varphi^3} = 0{,}00373;\quad \int(\sin\varphi)\,d\varphi = -0{,}000005.$$

În tabela 2 apar mărimile din tabela 1 după ce acestea au fost normate şi rotunjite, pentru valori ale unghiului de manivelă φ cuprinse între 1 şi 360 de grade.

Tabela 2 permite citirea directă a valorilor numerice a mărimii parametrilor ce sînt trasate în figura 6.

Diagramele parametrilor cinematici care apar în figura 6 sînt executate folosind litere, de exemplu diagrama formată pe baza literei T reprezintă traiectoria, C reprezintă integrala traiectoriei etc. Axa $O\varphi$ este reprezentată punctat.

În stînga şi în dreapta figurii 6 sînt două coloane de cifre care reprezintă valoarea unghiului φ pentru care apar în linia orizontală respectivă, trasate prin litere, parametrii cinematici. Se observă din diagramele date în figura 6 corectitudinea programului de calcul, deoarece aceste diagrame pot fi comparate evident cu diagramele obţinute prin reprezentarea grafică a funcţiei sinus, a derivatelor sale succesive şi a integralei sale.

În figura 6, diagrama supraacceleraţiei trasate prin litera S şi diagrama integralei trasate prin litera C trebuie să se suprapună. Pentru unele valori ale unghiului φ se observă că aceste diagrame diferă puţin, datorită erorii cu care lucrează programul de calcul.

Această eroare medie este dată în tabela de mai jos :

Eroare medie, în procente	Denumirea parametrilor cinematici
0,001	traiectorie
0,005	viteză
0,06	acceleraţie
0,8	supraacceleraţie
0,001	integrala traiectoriei

Tabela 1

Unghiul	Integrala traiectoriei	Traiectoria	Viteza	Accelerația	Supraaccelerația
10	−0.98481E 00	0.17364E 00	0.98488E 00	−0.17307E 00	−0.99829E 00
20	−0.93969E 00	0.34202E 00	0.03965E 00	−0.34323E 00	−0.93382E 00
30	−0.86602E 00	0.49999E 00	0.86599E 00	−0.49879E 00	−0.86102E 00
40	−0.76604E 00	0.64278E 00	0.76610E 00	−0.64346E 00	−0.77805E 00
50	−0.64279E 00	0.76604E 00	0.64273E 00	−0.76584E 00	−0.62926E 00
60	−0.50000E 00	0.86602E 00	0.50005E 00	−0.86575E 00	−0.51058E 00
70	−0.34202E 00	0.93969E 00	0.34202E 00	−0.94010E 00	−0.33779E 00
80	−0.17365E 00	0.98480E 00	0.17362E 00	−0.98483E 00	−0.17415E 00
90	−0.53053E-05	0.99999E 00	0.17781E-05	−0.99953E 00	0.37387E-02
100	0.17364E 00	0.98481E 00	−0.17360E 00	−0.98517E 00	0.16400E 00
110	0.34201E 00	0.93969E 00	−0.34206E 00	−0.93968E 00	0.35476E 00
120	0.49999E 00	0.86603E 00	−0.49994E 00	−0.86572E 00	0.48720E 00
130	0.64278E 00	0.76605E 00	−0.64283E 00	−0.76671E 00	0.65266E 00
140	0.76604E 00	0.64279E 00	−0.76603E 00	−0.64207E 00	0.76057E 00
150	0.86602E 00	0.50000E 00	−0.86603E 00	−0.50069E 00	0.86791E 00
160	0.93969E 00	0.34202E 00	−0.93970 E00	−0.34137E 00	0.94132E 00
170	0.98480E 00	0.17365 E00	−0.98478E 00	−0.17395E 00	0.98183E 00
180	0.10000E 01	0.58960E-05	−0.10000E 01	0.47332E-04	0.99990E 00
190	0.98480E 00	−0.17364E 00	−0.98483E 00	0.17343E 00	0.98919E 00
200	0.93969E 00	−0.34202E 00	−0.93964E 00	0.34284 E00	0.93619E 00
210	0.86602E 00	−0.49998E 00	−0.86600E 00	0.49876E 00	0.86044E 00
220	0.76605E 00	−0.64278E 00	−0.76614E 00	0.64337E 00	0.77929E 00
230	0.64279E 00	−0.76604E 00	−0.64276E 00	0.76602E 00	0.63036E 00
240	0.50000E 00	−0.86602E 00	−0.50004E 00	0.86603E 00	0.51021E 00
250	0.34202E 00	−0.93969E 00	−0.34198E 00	0.93995E 00	0.33394E 00
260	0.17365E 00	−0.98480E 00	−0.17365E 00	0.98447E 00	0.17704E 00
270	0.31602E-05	−0.10000E 01	−0.24868E-04	0.99984E 00	−0.26269E-02
280	−0.17364E 00	−0.98481E 00	0.17359E 00	0.98498 E00	−0.16678E 00
290	−0.34202E 00	−0.93970E 00	0.34205E 00	0.94005E 00	−0.34884E 00
300	−0.50000E 00	−0.86603E 00	0.50000E 00	0.86566E 00	−0.49728E 00
310	−0.64279E 00	−0.76605E 00	0.64278E 00	0.76614E 00	−0.64453E 00
320	−0.76604E 00	−0.64279E 00	0.76602E 00	0.64260E 00	−0.76354E 00
330	−0.86603E 00	−0.50001E 00	0.86603E 00	0.50045E 00	−0.86515E 00
340	−0.93969E 00	−0.34202E 00	0.93975E 00	0.34206E 00	−0.94357E 00
350	−0.98481E 00	−0.17365E 00	0.98480E 00	0.17296E 00	−0.98729E 00
360	−0.10000E 01	−0.97768E-05	0.99992E 00	0.29931E-03	−0.98794E 00

Tabela 2

Unghiul	Integrala traiectoriei	Traiectoria	Viteza	Accelerația	Supraaccelerația
1	0.20000E 01	0.61000E 02	0.11800E 03	0.59000E 02	0.30000E 01
2	0.20000E 01	0.62000E 02	0.11800E 03	0.58000E 02	0.30000E 01
3	0.20000E 01	0.63000E 02	0.11800E 03	0.57000E 02	0.30000E 01
4	0.20000E 01	0.64000E 02	0.11800E 03	0.56000E 02	0.30000E 01
5	0.20000E 01	0.65000E 02	0.11800E 03	0.55000E 02	0.30000E 01
6	0.20000E 01	0.66000E 02	0.11800E 03	0.54000E 02	0.20000E 01
7	0.20000E 01	0.67000E 02	0.11800E 03	0.53000E 02	0.20000E 01
8	0.30000E 01	0.68000E 02	0.11700E 03	0.52000E 02	0.20000E 01
9	0.30000E 01	0.69000E 02	0.11700E 03	0.51000E 02	0.20000E 01
10	0.30000E 01	0.70000E 02	0.11700E 03	0.50000E 02	0.20000E 01
11	0.30000E 01	0.71000E 02	0.11700E 03	0.49000E 02	0.20000E 01
12	0.30000E 01	0.72000E 02	0.11700E 03	0.48000E 02	0.20000E 01
13	0.30000E 01	0.73000E 02	0.11700E 03	0.47000E 02	0.30000E 01
14	0.40000E 01	0.74000E 02	0.11600E 03	0.46000E 02	0.30000E 01
15	0.40000E 01	0.75000E 02	0.11600E 03	0.45000E 02	0.30000E 01
16	0.40000E 01	0.76000E 02	0.11600E 03	0.44000E 02	0.40000E 01
17	0.50000E 01	0.77000E 02	0.11500E 03	0.43000E 02	0.40000E 01
18	0.50000E 01	0.78000E 02	0.11500E 03	0.42000E 02	0.50000E 01
19	0.50000E 01	0.79000E 02	0.11500E 03	0.41000E 02	0.50000E 01
20	0.50000E 01	0.80000E 02	0.11500E 03	0.40000E 02	0.60000E 01
21	0.60000E 01	0.81000E 02	0.11400E 03	0.39000E 02	0.70000E 01
22	0.60000E 01	0.82000E 02	0.11400E 03	0.38000E 02	0.70000E 01
23	0.70000E 01	0.83000E 02	0.11300E 03	0.37000E 02	0.80000E 01
24	0.70000E 01	0.84000E 02	0.11300E 03	0.36000E 02	0.80000E 01
25	0.70000E 01	0.85000E 02	0.11300E 03	0.35000E 02	0.90000E 01
26	0.80000E 01	0.85000E 02	0.11200E 03	0.35000E 02	0.90000E 01
27	0.80000E 01	0.86000E 02	0.11200E 03	0.34000E 02	0.90000E 01
28	0.90000E 01	0.87000E 02	0.11100E 03	0.33000E 02	0.10000E 02
29	0.90000E 01	0.88000E 02	0.11100E 03	0.32000E 02	0.10000E 02
30	0.10000E 02	0.89000E 02	0.11000E 03	0.31000E 02	0.10000E 02
31	0.10000E 02	0.90000E 02	0.11000E 03	0.30000E 02	0.10000E 02
32	0.11000E 02	0.91000E 02	0.10900E 03	0.29000E 02	0.11000E 02
33	0.11000E 02	0.92000E 02	0.10900E 03	0.28000E 02	0.11000E 02
34	0.12000E 02	0.92000E 02	0.10800E 03	0.28000E 02	0.11000E 02
35	0.12000E 02	0.93000E 02	0.10800E 03	0.27000E 02	0.12000E 02
36	0.13000E 02	0.94000E 02	0.10700E 03	0.26000E 02	0.12000E 02
37	0.14000E 02	0.95000E 02	0.10600E 03	0.25000E 02	0.13000E 02
38	0.14000E 02	0.96000E 02	0.10600E 03	0.24000E 02	0.13000E 02
39	0.15000E 02	0.97000E 02	0.10500E 03	0.23000E 02	0.14000E 02
40	0.16000E 02	0.97000E 02	0.10400E 03	0.23000E 02	0.15000E 02

Se observă din această tabelă că eroarea cu care se obțin parametrii cinematici este foarte mică, incomparabil mai mică decît în cazul derivărilor succesive efectuate pe cale electronică, ceea ce justifică utilitatea prezentului program de calcul.

Cifrele care dau eroarea medie și care sînt reprezentate în tabela de mai sus se păstrează în general pentru majoritatea funcțiilor reprezentînd traiectorii de mecanisme, după cum se vede din rezultatul executării programului în cazul analizei cinematice a traiectoriei punctului B al unui mecanism pentalater de specia întîi (fig. 3), cu raport de transmitere $\eta = +2$. Datele de intrare în algoritmul de calcul sînt obținute în acest caz, pe cale analitică [2, p. 316—318], folosind o metodă teoretică de studiu cinematic al mecanismelor, și anume metoda analizei armonice complexe. Tabela 3 a valorilor exacte (din punctul de vedere al algoritmului de calcul), tabela 4 a valorilor normate și rotunjite, precum și diagrama 7, trasată ca urmare a executării programului în acest caz, sînt date mai jos.

Specificăm că aceste tabele reprezintă parametrii cinematici ai mecanismelor în funcție de valori ale unghiului din 10 în 10 grade, dar programul de calcul se poate modifica ușor pentru a reprezenta aceste mărimi și pentru un pas mai mic de variație a unghiului de manivelă φ, de exemplu din grad în grad.

Comparînd diagrama traiectoriei din figura 7 cu diagrama traiectoriei obținute la instalația mecanoelectrică (fig. 4 *b*), se observă coincidența acestora.

Se poate compara figura 7 cu figurile 10.3 și 10.4, paginile 316—317 din lucrarea [3], deoarece se tratează același caz, și anume analiza cinematică a unui mecanism pentalater de specia întîi.

Cu toate că curbele din aceste figuri au fost obținute prin metode diferite (și anume curbele din figura 7 se obțin utilizînd programul de calcul descris în prezenta lucrare, pe cînd curbele din figurile 10.3 și 10.4 au fost obținute efectuînd analiza cinematică complexă a mecanismului amintit și trasînd prin puncte rezultatele), se observă o perfectă coincidență a acestora.

În continuare prezentăm tabelele și figura rezultantă prin executarea programului de calcul în cazul aceluiași mecanism pentalater amintit mai sus, dar în cazul în care datele de intrare în algoritmul de calcul sînt obținute prin măsurători grafice asupra traiectoriei punctului B al mecanismului (fig. 3), obținută la simagraf și reprezentată în figura 8 în funcție de un sistem de referință oarecare.

Din figura 9 se observă în cazul acesta, al datelor obținute prin măsurători grafice, o precizie mai mică în obținerea parametrilor cinematici, în special a acelora care reprezintă derivate de ordin superior (accelerație, supraaccelerație). Acest fapt se datorează, evident, erorilor de măsurare grafică. Considerăm totuși că și în acest caz graficul accelerației este obținut ca o precizie suficientă pentru a putea fi luat în consi-

Tabela 3

Unghiul	Integrala traiectoriei	Traiectoria	Viteza	Accelerația	Supraaccelerația
10	−0.61796E 00	0.82208E 00	−0.29072E 00	−0.13422E 01	0.41595E 01
20	−0.47992E 00	0.75495E 00	−0.45285E 00	−0.45908E 00	0.60582E 01
30	−0.35521E 00	0.67468E 00	−0.43234E 00	0.72987E 00	0.72576E 01
40	−0.24312E 00	0.61666E 00	−0.19754E 00	0.19195E 01	0.58214E 01
50	−0.13660E 00	0.61573E 00	0.20591E 00	0.25660E 01	0.11233E 01
60	−0.23730E-01	0.69041E 00	0.64008E 00	0.22332E 01	−0.48651E 01
70	0.10827E 00	0.83074E 00	0.93175E 00	0.99654E 00	−0.87028E 01
80	0.26799E 00	0.10006E 01	0.96910E 00	−0.56039E 00	−0.84314E 01
90	0.45659E 00	0.11544E 01	0.75855E 00	−0.17442E 01	−0.47666E 01
100	0.66792E 00	0.12570E 01	0.40449E 00	−0.21841E 01	−0.37006E 00
110	0.89155E 00	0.12948E 01	0.35286E-01	−0.19621E 01	0.25040E 01
120	0.11164E 01	0.12735E 01	−0.26492E 00	−0.14723E 01	0.27401E 01
130	0.13335E 01	0.12071E 01	−0.48402E 00	−0.10626E 01	0.19102E 01
140	0.15359E 01	0.11079E 01	−0.64596E 00	−0.82746E 00	0.75135E 00
150	0.17187E 01	0.98301E 00	−0.78329E 00	−0.76285E 00	0.17623E 00
160	0.18777E 01	0.83483E 00	−0.91391E 00	−0.73517E 00	0.12281E 00
170	0.20088E 01	0.66421E 00	−0.10408E 01	−0.71924E 00	0.10808E 00
180	0.21083E 01	0.47173E 00	−0.11639E 01	−0.68704E 00	0.27257E 00
190	0.21723E 01	0.25844E 00	−0.12778E 01	−0.60428E 00	0.76599E 00
200	0.21974E 01	0.27066E-01	−0.13676E 01	−0.39981E 00	0.16106E 01
210	0.21810E 01	−0.21606E 00	−0.14076E 01	−0.26257E-01	0.26829E 01
220	0.21220E 01	−0.45956E 00	−0.13670E 01	0.50970E 00	0.33524E 10
230	0.20215E 01	−0.68732E 00	−0.12250E 01	0.11288E 01	0.37052E 01
240	0.18840E 01	−0.88065E 00	−0.97199E 00	0.17621E 01	0.34394E 01
250	0.17172E 01	−0.10205E 01	−0.61352E 00	0.23423E 01	0.33106E 01
260	0.15320E 01	−0.10890E 01	−0.15523E 00	0.28949E 01	0.28067E 01
270	0.13422E 01	−0.10698E 01	0.38615E 00	0.32669E 01	0.13641E 01
280	0.11643E 01	−0.95189E 00	0.96572E 00	0.32938E 01	−0.14177E 01
290	0.10157E 01	−0.73533E 00	0.14982E 01	0.26874E 01	−0.55361E 01
300	0.91232E 00	−0.43865E 00	0.18644E 01	0.14106E 01	−0.88684E 01
310	0.86505E 00	−0.10006E 00	0.19664E 01	−0.26889E 00	−0.97871E 01
320	0.87693E 00	0.23074E 00	0.17794E 01	−0.18008E 01	−0.73162E 01
330	0.94246E 00	0.50828E 00	0.13742E 01	−0.27167E 01	−0.30166E 01
340	0.10496E 01	0.70504E 00	0.87604E 00	−0.28779E 01	0.86252E 00
350	0.11835E 01	0.81541E 00	0.39858E 00	−0.25394E 01	0.27413E 01
360	0.13298E 01	0.84893E 00	0.17235E-02	−0.19886E 01	0.34307E 01

Tabela 4

Unghiul	Integrala traiectoriei	Traiectoria	Viteza	Accelerația	Supraaccelerația
1	0.40000E 02	0.98000E 02	0.59000E 02	0.27000E 02	0.80000E 02
2	0.41000E 02	0.98000E 02	0.58000E 02	0.28000E 02	0.81000E 02
3	0.41000E 02	0.98000E 02	0.57000E 02	0.29000E 02	0.81000E 02
4	0.41000E 02	0.98000E 02	0.56000E 02	0.30000E 02	0.81000E 02
5	0.42000E 02	0.98000E 02	0.55000E 02	0.31000E 02	0.81000E 02
6	0.42000E 02	0.98000E 02	0.54000E 02	0.32000E 02	0.82000E 02
7	0.43000E 02	0.97000E 02	0.54000E 02	0.33000E 02	0.82000E 02
8	0.43000E 02	0.97000E 02	0.53000E 02	0.34000E 02	0.83000E 02
9	0.43000E 02	0.97000E 02	0.52000E 02	0.35000E 02	0.84000E 02
10	0.44000E 02	0.97000E 02	0.51000E 02	0.37000E 02	0.84000E 02
11	0.44000E 02	0.97000E 02	0.51000E 02	0.38000E 02	0.85000E 02
12	0.44000E 02	0.96000E 02	0.50000E 02	0.39000E 02	0.86000E 02
13	0.45000E 02	0.96000E 02	0.50000E 02	0.41000E 02	0.87000E 02
14	0.45000E 02	0.96000E 02	0.49000E 02	0.42000E 02	0.88000E 02
15	0.46000E 02	0.95000E 02	0.48000E 02	0.44000E 02	0.90000E 02
16	0.46000E 02	0.95000E 02	0.48000E 02	0.45000E 02	0.91000E 02
17	0.46000E 02	0.95000E 02	0.48000E 02	0.47000E 02	0.92000E 02
18	0.47000E 02	0.95000E 02	0.47000E 02	0.48000E 02	0.93000E 02
19	0.47000E 02	0.94000E 02	0.47000E 02	0.50000E 02	0.94000E 02
20	0.47000E 02	0.94000E 02	0.47000E 02	0.52000E 02	0.96000E 02
21	0.48000E 02	0.93000E 02	0.46000E 02	0.54000E 02	0.97000E 02
22	0.48000E 02	0.93000E 02	0.46000E 02	0.56000E 02	0.98000E 02
23	0.48000E 02	0.93000E 02	0.46000E 02	0.58000E 02	0.99000E 02
24	0.49000E 02	0.92000E 02	0.46000E 02	0.60000E 02	0.10000E 03
25	0.49000E 02	0.92000E 02	0.46000E 02	0.62000E 02	0.10000E 03
26	0.49000E 02	0.92000E 02	0.46000E 02	0.64000E 02	0.10100E 03
27	0.50000E 02	0.91000E 02	0.46000E 02	0.66000E 02	0.10200E 03
28	0.50000E 02	0.91000E 02	0.47000E 02	0.68000E 02	0.10200E 03
29	0.50000E 02	0.91000E 02	0.47000E 02	0.70000E 02	0.10200E 03
30	0.51000E 02	0.90000E 02	0.47000E 02	0.73000E 02	0.10300E 03
31	0.51000E 02	0.90000E 02	0.48000E 02	0.75000E 02	0.10300E 03
32	0.51000E 02	0.90000E 02	0.48000E 02	0.77000E 02	0.10200E 03
33	0.52000E 02	0.89000E 02	0.49000E 02	0.79000E 02	0.10200E 03
34	0.52000E 02	0.89000E 02	0.49000E 02	0.81000E 02	0.10100E 03
35	0.52000E 02	0.89000E 02	0.50000E 02	0.84000E 02	0.10100E 03
36	0.52000E 02	0.88000E 02	0.51000E 02	0.86000E 02	0.10000E 03
37	0.53000E 02	0.88000E 02	0.51000E 02	0.88000E 02	0.99000E 02
38	0.53000E 02	0.88000E 02	0.52000E 02	0.90000E 02	0.97000E 02
39	0.53000E 02	0.88000E 02	0.53000E 02	0.91000E 02	0.96000E 02
40	0.54000E 02	0.88000E 02	0.54000E 02	0.93000E 02	0.94000E 02

Tabela 5

Analiza armonică experimentală

Unghiul	Integrala	Traiectoria	Viteza	Accelerația	Supraaccelerația
10	−0.61803E 00	0.82197E 00	−0.29244E 00	−0.13219E 01	0.46529E 01
20	−0.48001E 00	0.75501E 00	−0.44987E 00	−0.45839E 00	0.55602E 01
30	−0.35526E 00	0.67499E 00	−0.43277E 00	0.71957E 00	0.76351E 01
40	−0.24311E 00	0.61700E 00	−0.19625E 00	0.19235E 01	0.54243E 01
50	−0.13653E 00	0.61599E 00	0.20232E 00	0.25297E 01	0.14634E 01
60	−0.23680E-01	0.69000E 00	0.63927E 00	0.22985E 01	−0.46326E 01
70	0.10829E 00	0.83100E 00	0.93736E 00	0.97074E 00	−0.95287E 01
80	0.26810E 00	0.10010E 01	0.96459E 00	−0.60287E 00	−0.77672E 01
90	0.45669E 00	0.11540E 01	0.75697E 00	−0.16877E 01	−0.46950E 01
100	0.66797E 00	0.12570E 01	0.40857E 00	−0.21942E 01	−0.91593E 00
110	0.89164E 00	0.12950E 01	0.32448E-01	−0.20054E 01	0.28178E 01
120	0.11165E 01	0.12730E 01	−0.26704E 00	−0.14187E 01	0.30865E 01
130	0.13335E 01	0.12070E 01	−0.47946E 00	−0.10761E 01	0.11454E 01
140	0.15359E 01	0.11080E 01	−0.64829E 00	−0.84307E 00	0.14925E 01
150	0.17187E 01	0.98300E 00	−0.78090E 00	−0.73942E 00	−0.46441E 00
160	0.18777E 01	0.83500E 00	−0.91643E 00	−0.77529E 00	0.66806E 00
170	0.20088E 01	0.66400E 00	−0.10393E 01	−0.66129E 00	−0.20958E 00
180	0.21083E 01	0.47200E 00	−0.11643E 01	−0.76014E 00	0.17515E 00
190	0.21723E 01	0.25800E 00	−0.12810E 01	−0.53871E 00	0.13692E 01
200	0.21973E 01	0.27006E-01	−0.13633E 01	−0.42816E 00	0.79679E 00
210	0.21810E 01	−0.21599E 00	−0.14085E 01	−0.63080E-03	0.35238E 01
220	0.21220E 01	−0.45900E 00	−0.13623E 01	0.48068E 00	0.21915E 01
230	0.20216E 01	−0.68699E 00	−0.12324E 01	0.11008E 01	0.50322E 01
240	0.18841E 01	−0.88100E 00	−0.96868E 00	0.18427E 01	0.26366E 01
250	0.17173E 01	−0.10200E 01	−0.61230E 00	0.22666E 01	0.33348E 01
260	0.15321E 01	−0.10890E 01	−0.15867E 00	0.29241E 01	0.31115E 01
270	0.13423E 01	−0.10700E 01	0.38606E 00	0.32653E 01	0.13041E 01
280	0.11644E 01	−0.95199E 00	0.96813E 00	0.33221E 01	−0.15718E 01
290	0.10158E 01	−0.73499E 00	0.14978E 01	0.26248E 01	−0.56938E 01
300	0.91246E 00	−0.43900E 00	0.18608E 01	0.14691E 01	−0.80932E 01
310	0.86514E 00	−0.99996E-01	0.19723E 01	−0.28179E 00	−0.10926E 02
320	0.87708E 00	0.23100E 00	0.17751E 01	−0.18368E 01	−0.63640E 01
330	0.94259E 00	0.50800E 00	0.13750E 01	−0.26713E 01	−0.35391E 01
340	0.10497E 01	0.70499E 00	0.87500E 00	−0.29185E 01	0.10928E 01
350	0.11836E 01	0.81502E 00	0.39865E 00	−0.24930E 01	0.27785E 01
360	0.13298E 01	0.84896E 00	0.37182E-02	−0.20246E 01	0.31085E 01

Tabela 6

Unghiul	Integrala	Traiectoria	Viteza	Accelerația	Supraaccelerația
10	0.44000E 02	0.97000E 02	0.51000E 02	0.37000E 02	0.84000E 02
20	0.47000E 02	0.94000E 02	0.47000E 02	0.52000E 02	0.89000E 02
30	0.51000E 02	0.90000E 02	0.47000E 02	0.72000E 02	0.10000E 03
40	0.54000E 02	0.88000E 02	0.54000E 02	0.93000E 02	0.89000E 02
50	0.56000E 02	0.88000E 02	0.66000E 02	0.10400E 03	0.68000E 02
60	0.59000E 02	0.91000E 02	0.79000E 02	0.10000E 03	0.36000E 02
70	0.63000E 02	0.97000E 02	0.88000E 02	0.77000E 02	0.10000E 02
80	0.67000E 02	0.10500E 03	0.88000E 02	0.50000E 02	0.19000E 02
90	0.72000E 02	0.11200E 03	0.82000E 02	0.31000E 02	0.35000E 02
100	0.78000E 02	0.11600E 03	0.72000E 02	0.22000E 02	0.55000E 02
110	0.84000E 02	0.11800E 03	0.61000E 02	0.25000E 02	0.75000E 02
120	0.89000E 02	0.11700E 03	0.52000E 02	0.36000E 02	0.76000E 02
130	0.95000E 02	0.11400E 03	0.46000E 02	0.41000E 02	0.66000E 02
140	0.10100E 03	0.11000E 03	0.41000E 02	0.45000E 02	0.68000E 02
150	0.10500E 03	0.10400E 03	0.37000E 02	0.47000E 02	0.58000E 02
160	0.11000E 03	0.97000E 02	0.33000E 02	0.47000E 02	0.64000E 02
170	0.11300E 03	0.90000E 02	0.29000E 02	0.49000E 02	0.59000E 02
180	0.11600E 03	0.81000E 02	0.26000E 02	0.47000E 02	0.61000E 02
190	0.11700E 03	0.72000E 02	0.22000E 02	0.51000E 02	0.67000E 02
200	0.11800E 03	0.61000E 02	0.20000E 02	0.53000E 02	0.64000E 02
210	0.11800E 03	0.50000E 02	0.19000E 02	0.60000E 02	0.79000E 02
220	0.11600E 03	0.39000E 02	0.20000E 02	0.68000E 02	0.72000E 02
230	0.11300E 03	0.29000E 02	0.24000E 02	0.79000E 02	0.86000E 02
240	0.11000E 03	0.21000E 02	0.32000E 02	0.92000E 02	0.74000E 02
250	0.10500E 03	0.14000E 02	0.42000E 02	0.99000E 02	0.78000E 02
260	0.10000E 03	0.11000E 02	0.55000E 02	0.11000E 03	0.76000E 02
270	0.95000E 02	0.12000E 02	0.71000E 02	0.11600E 03	0.67000E 02
280	0.91000E 02	0.17000E 02	0.88000E 02	0.11700E 03	0.52000E 02
290	0.87000E 02	0.27000E 02	0.10400E 03	0.10500E 03	0.30000E 02
300	0.84000E 02	0.40000E 02	0.11500E 03	0.85000E 02	0.17000E 02
310	0.83000E 02	0.56000E 02	0.11800E 03	0.55000E 02	0.20000E 01
320	0.83000E 02	0.70000E 02	0.11200E 03	0.28000E 02	0.26000E 02
330	0.85000E 02	0.83000E 02	0.10000E 03	0.14000E 02	0.41000E 02
340	0.88000E 02	0.92000E 02	0.86000E 02	0.10000E 02	0.66000E 02
350	0.91000E 02	0.96000E 02	0.72000E 02	0.17000E 02	0.75000E 02
360	0.95000E 02	0.98000E 02	0.60000E 02	0.25000E 02	0.76000E 02

derație. Faptul acesta se poate observa ușor comparînd graficul accelerației din figura 9 cu graficul accelerației din figura 7, obținut în condițiile datelor de intrare calculate analitic. Coincidența pentru majoritatea parametrilor a celor două diagrame de accelerație este un indiciu asupra utilității programului de calcul.

Considerăm în final că avantajele folosirii în practică a programului de calcul pentru calculatoare electronice pentru tabelarea și trasarea parametrilor cinematici a unui mecanism dat sînt următoarele :

— economisește un mare volum de muncă necesar executării manuale prin puncte, a tabelelor și a diagramelor pentru redarea cantitativă și calitativă a parametrilor cinematici ai unui mecanism dat ;

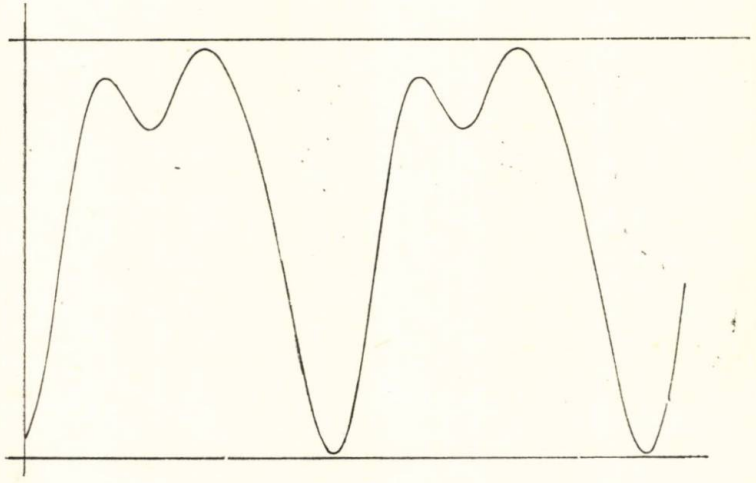


Fig. 8

— calculează și reprezintă grafic mai mulți parametri decît instalația mecanoelectrică, de exemplu ia în considerare supraaccelerația și integrala traiectoriei ;

— tipărește aceste tabele și diagrame cu o precizie foarte bună în cazul datelor de intrare precise, obținute pe cale analitică și cu o precizie în general suficientă în tehnică în cazul datelor de intrare măsurate grafic ;

— folosește în întregime rezultatele furnizate prin modelarea mecanică a unui anumit tip de mecanism, ceea ce permite să se ia în considerare în obținerea parametrilor cinematici și a neechilibrărilor masice existente, a influenței vibrațiilor etc., furnizînd rezultate mai apropiate de realitate decît cele obținute prin studii pur teoretice ;

— completează performanțele instalației mecanoelectrice tip I.M.A., și anume este indicat a fi folosit în cazul cînd se impune obținerea de rezultate nu numai calitative, dar și cantitative. Se poate folosi însă și în alte ocazii, ori de cîte ori se dă o funcție reprezentînd traiectoria unui mecanism, analitic sau grafic, și se dorește obținerea parametrilor cinematici ai mecanismului care descrie printr-un punct al său traiectoria dată.

Primită la redacție la 8 iunie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Bogdan R. C., *Cercetarea grupelor assurice în construcția mecanismelor prin serii armonice complexe și metoda mecanoelectrică*, teză de doctorat, București, 1964.
2. Bogdan R. C., Larionescu D., *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane*, București, Edit. Academiei, 1968.
3. Bogdan R. C., Larionescu D., Căruțașu I., *Complex harmonic analysis of plane mechanisms. Programming on digital computers and experimental examples*, Trans. of ASME, **12** (1968),
4. Bogdan R. C., Larionescu D., Cononovici S., *Calculatorul analogic în cercetarea mecanismelor*, St. cerc. mec. apl., **28**, 5 (1969).
5. *I. B. M. Systems Reference Library, I.B.M.System 1360, Fortran-IV Language.*

TRAIECTORIA= T VITEZA= V ACCELERATIA= A SUPRAACCELERATIA= S CRONOSECTIUNEA= C

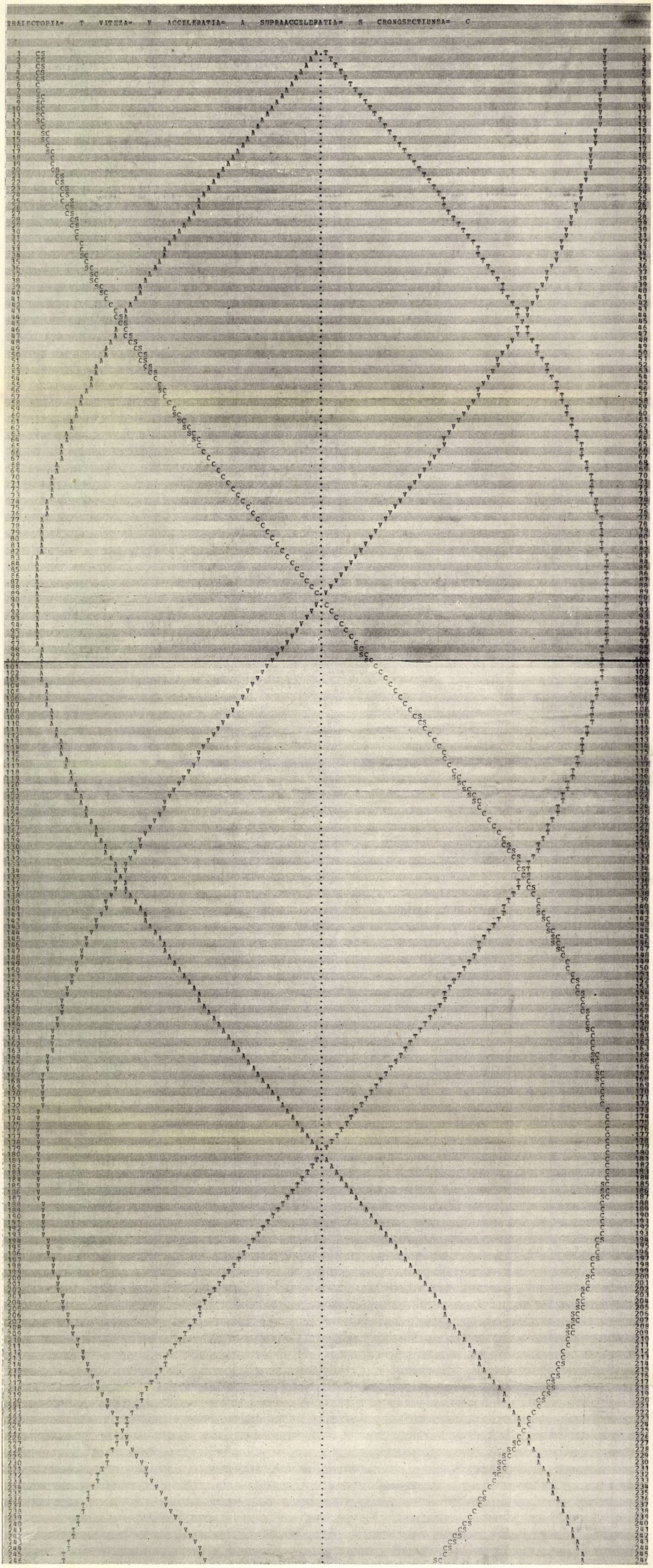


Fig. 6

MŰSZAKI EGYETEM ★ KÖNYVTÁR 1948 KÖZPONTI BUDAPEST

TRAIETTORIA= T VITEZA= V ACCELERATIA= A SUPRAACCELERATIA= S CRONOSECTIUNEA= C

Fig. 7

MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA BUDAPEST 1848

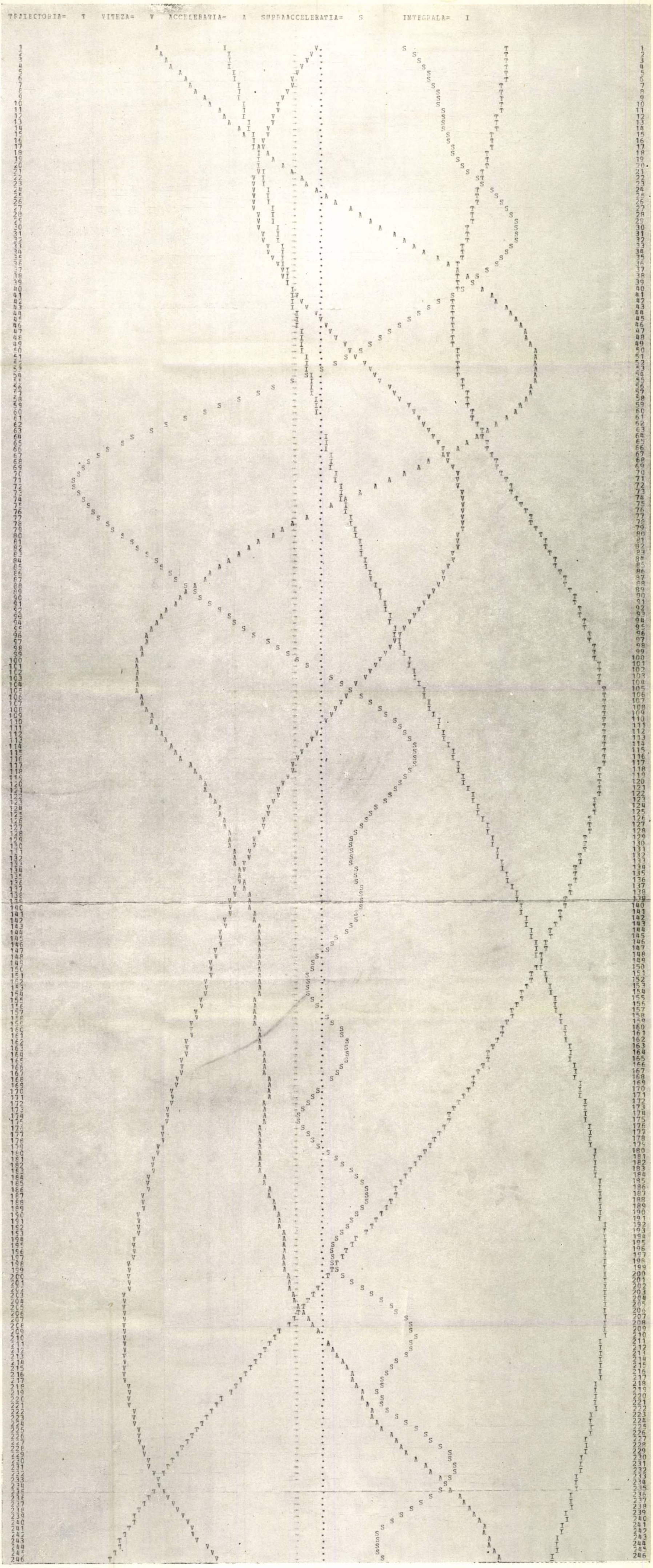

TRAIECTORIA= T VITEZA= V ACCELERATIA= A SUPERACCELERATIA= S INTEGRALA= I

Fig. 9

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

COMPORTAREA MECANISMELOR CU CAME LA VITEZE RIDICATE. J

de CHR. PELECUDI, I. SAVA, S. CONONOVICI
Centrul de mecanică a solidelor

Vitezele mari de funcționare evidențiază noi aspecte în comportarea mecanismelor cu came. Lucrarea de față reprezintă o primă parte a problemei de dinamică a mecanismelor cu came rapide. În baza unui sistem de ipoteze convenabil se alcătuește modelul dinamic și apoi modelul matematic corespunzător.
Generalitatea acestuia este marcată de faptul că în afara problemelor noi din care rezultă : influența vibrațiilor transversale ale tachetului, a vibrațiilor longitudinale și torsionale asupra parametrilor elementului executor, el mai conține prin particularizări și modele mai simple, care, parțial, au fost abordate pentru studiile de pînă în prezent în acest domeniu. Pentru aprecierea comportării mecanismelor cu came rapide se propune drept criteriu „asigurarea continuității mișcării și limitarea încărcării din cupla superioară".
Pentru exemplificare se rezolvă un caz particular, utilizînd un program pentru calculatorul numeric, de asemenea prezentat în lucrare. Concluziile obținute orientează atenția proiectantului de mecanisme cu came în privința legilor de mișcare alese, a turațiilor și a jocurilor dintre elemente.

Spre deosebire de comportarea la viteze mici, cînd parametrii funcționali realizați la ultimul element al sistemului urmăritor diferă insensibil față de cei admiși la primul element al sistemului conducător, la viteze mari diferențele dintre cele două categorii de parametri devin însemnate îngrădind mecanismului posibilitatea de a răspunde scopului urmărit.

Studiile de pînă acum referitoare la dinamica mecanismelor cu came [7], [8] s-au limitat la aprecierea comportării unui mecanism realizată pe modele matematice corespunzătoare oscilatorului mecanic neamortizat sau amortizat. S-au mai analizat influențele elasticității contactului din cupla superioară [3], elasticității tachetului și vibrațiilor torsionale [12], [13], precum și influența jocului dintre elementele lanțului cinematic și a frecării [2]. Studii privind reducerea presiunii de contact din cupla superioară și influența agregatului de acționare și momentului de inerție redus al maselor în mișcare de rotație asupra continuității mișcării fără a considera încărcările suplimentare datorate vibrațiilor și impreciziilor tehnologice au fost efectuate în lucrările [1], și respectiv, [10].

Influența discontinuității derivatelor legii de mișcare privind forțarea vibrațiilor în mecanismele cu came și determinarea mărimilor de ieșire ca

funcţii de elasticităţile şi de masele reale, împreună cu posibilităţile de eliminare a efectelor nedorite, au fost analizate în lucrările [3], [4], [7] şi [11].

Rezultatele cercetărilor amintite mai sus încă nu au pătruns în practica proiectării, deoarece impun cunoştinţe teoretice deosebite în comparaţie cu procedeele curent utilizate. Acestea din urmă se rezumă la alegerea legii de mişcare, corespunzătoare scopului urmărit, analizîndu-se teoretic pe modele simple şi comportarea dinamică pentru mecanismele supuse la condiţii severe de funcţionare [8].

Pentru mecanismele cu came la care excentricităţile au valori însemnate, unghiurile de presiune variază în limite largi, iar din motive constructive lungimea tachetului în afara ghidajelor dinspre camă capătă valori apreciabile, în prezenţa unor curse mari, reacţiunea camei impune considerarea vibraţiei transversale a tachetului, care în anumite situaţii poate influenţa sensibil parametrii de răspuns.

Forţele de frecare din cupla superioară reprezintă perturbaţii suplimentare celei provocate de profilul camei, devenind necesară considerarea lor în analiza dinamică a mecanismelor cu came.

Deseori distribuţia elementelor sistemului conducător şi a celui condus face nesatisfăcătoare reducerea ansamblului la un model dinamic monomasic. Prezenţa vibraţiilor la torsiune se asociază celor longitudinale, afectînd în mod substanţial parametrii de ieşire (în special derivatele superioare), mai ales cînd amortizările sînt mici, cum este cazul la mecanismele cu came.

Faţă de această situaţie reală se impune abordarea unor modele dinamice mai complexe pentru analiza comportării mecanismelor cu came în condiţiile vitezelor de funcţionare ridicate. În prezenta lucrare se va formula problema corespunzătoare analizei dinamice a mecanismelor cu came de configuraţie complexă şi se va rezolva pentru un caz particular, urmînd ca în cadrul unor lucrări ulterioare să se efectueze rezolvarea ei prin considerarea unor aspecte speciale, care împreună pot furniza indicaţii asupra comportării sistemului în ansamblul său.

1. MODELUL DINAMIC AL PROBLEMEI DE ANALIZĂ A MECANISMELOR CU CAME

Sistemul de ipoteze. Se va considera mecanismul distribuţiei motoarelor cu ardere internă ca avînd o configuraţie mai complexă şi funcţionînd în condiţii destul de severe. Schema sa este redată în figura 1*a*.

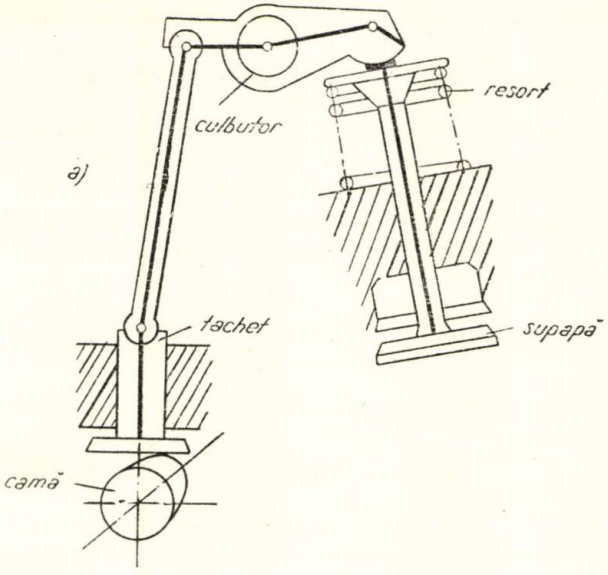
La baza alcătuirii modelului dinamic, reprezentat în figura 1*b*, se admite următorul sistem de ipoteze:

— masa tuturor elementelor s-a înlocuit prin trei mase reduse: la elementul executor, tachet şi camă;

— elementele cu deplasări rectilinii ale lanţului cinematic considerat execută mişcări după cel mult două direcţii;

— factorii de amortizare sînt proporţionali cu vitezele corespunzătoare;

— turaţia camei este admisă constantă.


a)
culbutor
resort
tachet
supapă
camă

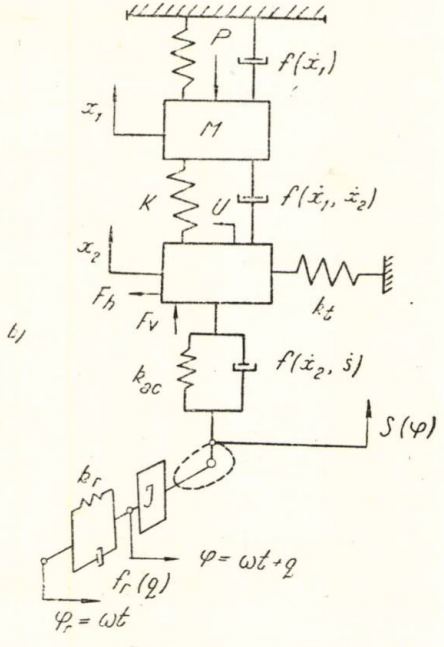

b)
P
f(ẋ1)
x1
M
K
U
f(ẋ1, ẋ2)
x2
Fh
Fv
kt
koc
f(ẋ2, ṡ)
S(φ)
kr
J
φ = ωt + q
fr(q)
φr = ωt

Fig. 1

Semnificația notațiilor este următoarea:

a) *Coordonatele considerate*

φ_r — unghiul de rotație uniformă al motorului de acționare;

φ — unghiul de rotație modificat ca urmare a vibrației la torsiune de amplitudine q;

$s(\varphi)$ — legea de deplasare impusă de camă incluzînd și vibrația la torsiune Q. Funcția $s(\varphi)$ împreună cu primele două derivate, în ipoteza continuității lor, pot fi dezvoltate în serie de puteri în raport cu parametrul q, ale cărui valori, oricît de intensiv ar fi regimul de funcționare, nu sînt mai mari de 0,05 radiani [9]:

$$s^{(n)}(\varphi) = s^{(n)}(\varphi_r) + s^{(n+1)}(\varphi_r)\, q + \frac{1}{2} s^{(n+2)}\, q^2 + \ldots, \tag{1}$$

iar derivatele sale în raport cu timpul sînt

$$s(\varphi) = s(\omega t + q); \quad \dot{s}(\varphi) = s'(\varphi)(\omega + \dot{q}); \quad \ddot{s}(\varphi) = s''(\varphi)(\omega + \dot{q})^2 + s'(\varphi)\ddot{q}; \tag{2}$$

x_1, x_2, u, q — deplasările reale posibile ale maselor M, m și respectiv amplitudinea vibrației la torsiune a maselor în mișcare de rotație. Dacă se notează prin X_1, X_2, U și X_3, deplasările și, respectiv, amplitudinea adimensionale, atunci legătura dintre variabilele reale și adimensionale pentru funcțiile primare și primele două derivate este

$$\begin{aligned}
&x_1 = s_0 X_1; \quad \dot{x}_1 = X_1' s_0/t_0; \quad \ddot{x}_1 = X_1'' s_0/t_0^2,\\
&x_2 = s_0 X_2; \quad \dot{x}_2 = X_2' s_0/t_0; \quad \ddot{x}_2 = X_2'' s_0/t_0^2,\\
&q = \varphi_0 X_3; \quad \dot{q} = X_3' \varphi_0/t_0; \quad \ddot{q} = X_2'' \varphi_0/t_0^2,\\
&u = s_0 U; \quad \dot{u} = U' s_0/t_0; \quad \ddot{u} = U'' s_0/t_0^2,\\
&\overset{(n)}{s} = k_n y^{(n)}(x) \quad \text{cu} \quad k_n = s_0/t_0^n,
\end{aligned} \tag{3}$$

cu s_0 cursa maximă a tachetului corespunzătoare lui φ_0 realizată în timpul t_0.

b) *Constantele elastice*

k_r — constanta elastică la torsiune a arborelui port-camă;

k_{ac} — constanta elastică redusă considerînd încovoierea arborelui port-camă și elasticitatea zonei de contact dintre camă și tachet, care se poate calcula cu relația

$$1/k_{ac} = 1/k_{ar} + 1/k_{e1} \tag{4}$$

$$\text{cu} \quad k_{ar} = 3EI(a+b)/a^2b^2 \tag{4'}$$

$$\text{și} \quad k_{e1} = 5\sqrt[3]{\frac{PE^2 l^{3/2}}{r^{1/2}}}. \tag{4''}$$

În relația (4'), I este momentul de inerție ecuatorial al arborelui portcamă, E modulul de elasticitate, iar a și b fixează poziția camei față de reazimele arborelui. În relația (4'') P este forța de contact dintre camă și tachet, E modulul de elasticitate redus $2/E = 1/E_c + 1/E_t$ (unde indicii c și t corespund camei și tachetului) l lungimea liniei de contact, iar r raza de curbură înlocuitoare pentru contactul liniar : $1/r = 1/r_c + 1/r_t$;

K — constanta elastică a elementelor sistemului conducător și urmăritor, redusă la elementul de reducere, care se calculează cu relația

$$K = \sum_j k_j i^2 + i^2 / \sum_l (1/k_l), \tag{5}$$

în care primul termen reprezintă elasticitatea elementelor dispuse în paralel, al doilea pentru cele dispuse în serie, iar i raportul de transmisie dintre elementul considerat și cel de reducere ;

k_t — elasticitatea transversală a tachetului, care se calculează cu relația

$$k_t = 3EI/a^2 \frac{1}{\left(1 - y\frac{s_0}{a}\right)^3}, \tag{6}$$

în care E și I reprezintă modulul de elasticitate și, respectiv, momentul de inerție al tachetului, iar a distanța dintre ghidajele tachetului și extremitatea sa inferioară care corespunde cursei nule ;

k — constanta elastică a resortului de readucere, prezent la toate mecanismele cu came la care continuitatea mișcării se realizează prin forță.

c) *Rezistențele de amortizare*

În general, la mecanismele cu came, în afara amortizărilor datorate frecărilor interne ale materialului nu se poate vorbi de o pondere asemănătoare din partea frecărilor semilichide, prezente în funcționarea acestor mecanisme puternic solicitate, cum este cazul acelora de la distribuția motoarelor cu ardere internă, la care amortizarea abia atinge 10 % din amortizarea critică [3], [6], [11]. Prin urmare, funcțiile de amortizare pot avea forme oricît de complicate, dar pentru cazul mecanismelor cu came curent utilizate (cu $v \leqslant 25$ m/s) ele se admit proporționale cu vitezele :

$$f_r(\dot{q}) = c_r\dot{q} \; ; \; f(\dot{x}_2, \dot{s}) = c(\dot{x}_2 - \dot{s}) \; ; \; f(\dot{x}_1, \dot{x}_2) = c(\dot{x}_1 - \dot{x}_2) \; ; \; f(\dot{x}_1) = c\dot{x}_1, \tag{7}$$

unde c_r și c sînt factorii de amortizare corespunzători răsucirii și, respectiv, deplasărilor longitudinale.

d) *Forțele perturbatoare*

P este suma forțelor rezistențelor tehnologice P_r și prestrîngerii resortului de readucere P_0. Forța rezistenței tehnologice P_r depinde de destinația mecanismului, putînd fi funcție fie de deplasare, fie de viteză, fie de timp, dar ea poate fi și constantă. Uneori rezistența tehnologică poate avea variații foarte complicate în raport cu deplasarea impusă de camă,

cum este cazul distribuției motoarelor cu ardere internă [5]. Obișnuit, forța P poate avea una dintre formele

$$P = \text{const.}; \quad P = P_0 + P_r^{\max} \cdot \sum_U C_u x^u; \quad P = P_0 + P_r^{\max}(1 - \sum_U C_u x^u), \quad (8)$$

unde $P_r^{\max}$ reprezintă valoarea maximă a forței de rezistență, iar suma poate fi legea polinomială de mișcare.

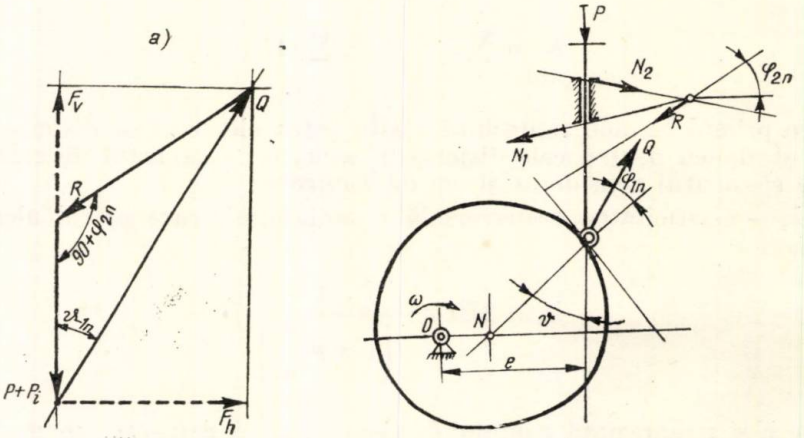


Fig. 2

E_h și F_v sînt perturbațiile datorate reacțiunii camei asupra tachetului (fig. 2). Din figura 2 rezultă expresiile pentru F_h și F_v:

$$F_h = (P + P_i)\frac{\operatorname{tg}(\vartheta + \varphi_{1n})}{1 - \operatorname{tg}(\vartheta \pm \varphi_{1n})\operatorname{tg}\varphi_{2n}}; \quad F_v = \frac{P + P_i}{1 - \operatorname{tg}(\vartheta + \varphi_{1n})\operatorname{tg}\varphi_{2n}}, \quad (9)$$

iar pentru cazul tachetului plan, cînd unghiul de presiune $\vartheta = 0$, relațiile (9) capătă forma

$$F_h \simeq (P + P_i)(1 + \operatorname{tg}\varphi_{1n}\operatorname{tg}\varphi_{2n})\operatorname{tg}\varphi_{1n}; \quad F_v \simeq (P + P_i)(1 + \operatorname{tg}\varphi_{1n}\operatorname{tg}\varphi_{2n}), \quad (10)$$

unde semnul „—" corespunde numai cazului cînd $\overline{ON} < \bar{e}$, iar P_i reprezintă forța de inerție corespunzătoare accelerației și care este caracteristică profilului camei:

$$P_i = (m + M)\, s_0 y''/t_0^2, \quad (11)$$

φ_{1n} este unghiul de frecare din cupla superioară ($\operatorname{tg}\varphi_1 = f_1 = 0{,}1$), iar φ_{2n} unghiul de frecare din ghidajele tachetului, care se calculează cu relația

$$\operatorname{tg}\varphi_{2n} = \mp f_2\left(1 + 2\frac{a}{l_h}\right) \pm 2\frac{s_0}{l_h\varphi_0}y' \pm 2\frac{f_2}{l_h}s_0 y, \quad (12)$$

unde f_2 este tangenta unghiului de frecare din ghidaje și care se admite $f_2 = 0, 1$, l_h lungimea ghidajelor tachetului, iar semnul „+" corespunde cazului cînd reacțiunea Q intersectează direcția deplasării tachetului plan în afara ghidajului său.

e) *Elementele inerțiale*

m este masa elementelor după direcția tachetului redusă la tachet;

M — masa celorlalte elemente ale lanțului cinematic, redusă în general la elementul executor. Masa M se calculează cu relația

$$M = \sum_i c_i m_i \left(\frac{v_i}{v}\right)^2 + \sum_i c_i J_i \left(\frac{\omega_i}{v}\right)^2, \tag{13}$$

unde v este viteza punctului de reducere m_i, J_i, v_i și ω_i masa, momentul de inerție în raport cu axa care trece prin centrul masei, viteza centrului masei și viteza unghiulară pentru fiecare element redus, iar c_i coeficient care ține cont că pentru elementele elastice nu toată masa intră în mișcare în același timp. Pentru arcuri și elementele care se deformează ca arcurile $c_i = 1/3$, iar pentru elemente rigide $c_i = 1$;

J — momentul de inerție al maselor în mișcare de rotație redus la camă.

2. MODELUL MATEMATIC AL PROBLEMEI DE ANALIZĂ DINAMICĂ A MECANISMELOR CU CAME

Dintre posibilitățile ce se oferă pentru stabilirea ecuațiilor diferențiale care reprezintă modelul matematic al problemei se alege posibilitatea cea mai comodă, oferită de legea a doua a mecanicii $m_i \mathrm{d}^2x_i/\mathrm{d}t^2 = \Sigma F$, aplicată maselor separate din figura 1*b*, obținîndu-se următorul sistem de ecuații diferențiale neliniare cu coeficienți variabili:

$$M\ddot{x}_1 + 2c\dot{x}_1 + (k + K)\, x_1 - c\dot{x}_2 - Kx_2 = -P(t), \tag{14}$$

$$m\ddot{x}_2 + 2c\dot{x}_2 + (K + k_{ac})\, x_2 - c\dot{x}_1 - Kx_1 = F_v + c\dot{s} + k_{ac}s, \tag{14'}$$

$$m\ddot{u} + k_t u = F_h, \tag{14''}$$

$$J\ddot{q} + c_r\dot{q} + k_r q - \eta s' k_{ac} x_2 - \eta c s' \dot{x}_2 = -\eta s'(k_{ac}s + c\dot{s}), \tag{14'''}$$

unde η este randamentul mecanismului cu camă, care, pentru tachet punctiform și tachet plan, cama avînd o mișcare de rotație, se calculează cu expresiile

$$\eta_{pt} = \frac{\operatorname{tg}\vartheta}{\operatorname{tg}(\vartheta + \varphi_{1n})}; \qquad \eta_{pl} = \frac{2 - \mu_1 + \mu_2 s_0 y'/\varphi_0 + \mu_3 s_0 y}{1 + f_1 \dfrac{R_0/s_0 + y}{y'/\varphi_0}}, \tag{15}$$

cu $\mu_1 = 1 + f_1 f_2 \left(1 + \dfrac{a}{l_h}\right)$; $\mu_2 = 2\dfrac{f_1}{l_h}$ și $\mu_3 = 2f_1\dfrac{f_2}{l_h}$.

Se poate constata că modelul matematic (14) este foarte cuprinzător, deoarece în afara problemei noi din care rezultă ; influența vibrațiilor transversale, torsionale și longitudinale ale mecanismelor cu came asupra mișcării elementului executor, mai conțin prin particularizări și modele mai simple, utilizate deja pentru studiul problemelor privind comportarea dinamică a mecanismelor cu came [1], [2].

Într-adevăr, în ipoteza unor valori mari ale elasticității variabile a tachetului (tacheți scurți, excentricități, curse și unghiuri de presiune mici), ecuația (4″) se poate elimina. În cazul că elasticitatea tachetului variază în limite foarte largi, dar de valoare mică, ecuația (14″) poate servi la evaluarea influenței vibrațiilor transversale ale tachetului asupra răspunsului sistemului. În cazul tachetului plan și al unor frecări mici, ecuația (4″) devine o ecuație de tip Hill, în sine cunoscută.

Dacă se renunță la perturbațiile generate de reacțiunea camei și masa m se integrează în masa M, atunci sistemul (14) se reduce la un altul, format din două ecuații :

$$\begin{aligned} M\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k + K)\, x_1 &= c\dot{s} + Ks - P(t), \\ J\ddot{q} + c_r\dot{q} + k_r q - \eta s' K x_1 - \eta c s' \dot{x}_1 &= -\eta s'(Ks + c\dot{s}), \end{aligned} \tag{16}$$

care permite analizarea influenței vibrațiilor torsionale și longitudinale asupra comportării mecanismelor cu came rapide.

În sfîrșit, dacă se presupune că arborele portcamă este rigid torsional, sistemul (14 ÷ 14‴) se reduce la o singură ecuație de ordinul doi cu coeficienți constanți, iar dacă rigiditatea elementelor cu deplasări rectilinii este mare, sistemul (14 ÷ 14‴) se reduce tot la o singură ecuație (14‴), dar cu coeficienți variabili [8].

Întrucît rezolvarea acestor cazuri particulare permite obținerea unor rezultate de utilitate practică mai greu de sesizat prin rezolvarea directă a sistemului (14 ÷ 14‴), în cele ce urmează se vor rezolva unele aspecte speciale care, împreună pot furniza indicații asupra comportării mecanismului în ansamblul său.

3. CRITERIUL DE ANALIZĂ A COMPORTĂRII CAMELOR RAPIDE

Sistemul de ecuații (14 ÷ 14[10]) își păstrează valabilitatea numai pe perioada continuității mișcării elementelor lanțului cinematic dintre camă și elementul de reducere, ceea ce revine la respectarea condiției de nenegativitate a încărcării p din cupla superioară (fig. 3) :

$$p = k_{ac}(s - x_2) + c(\dot{s} - \dot{x}_2) \geqslant 0, \tag{17}$$

în care x_2 și $\dot{x}_2$ se obțin corespunzător dintr-un sistem format din (14), căruia i se asociază și derivata sa. Prin urmare, încărcarea din cupla superioară depinde atît de derivatele mărimii de intrare, cît și de răspunsul sistemului. Urmărirea variației încărcării p împreună cu limitarea valori-

lor sale maxime poate da indicații asupra influenței diverșilor factori prezenți la funcționarea mecanismelor cu came rapide, propunîndu-se drept criteriu de apreciere a comportării acestora.

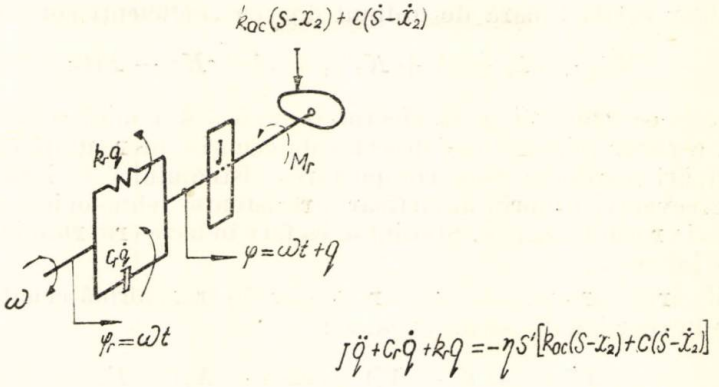


Fig. 3

4. CONDIȚIILE INIȚIALE

Lipsa unor frecări importante și prezența jocului între elementele lanțului cinematic (cazul distribuției motoarelor cu ardere internă) admite începerea mișcării din repaus și deci pentru vibrațiile torsionale condițiile inițiale sînt nule. Pentru masele m și M nu se mai poate face o asemenea ipoteză, deoarece, în afara jocului menționat și a frecărilor, asupra lor mai pot acționa și forțele rezistențelor tehnologice.

Dacă asupra maselor acționează forțe statice, transmisia dintre camă și elementul de ridicare se realizează printr-un raport de transmitere i, iar jocul dintre elemente este j, masele vor intra în mișcare numai după rotirea camei cu un unghi corespunzător unor înălțimi de ridicare s^2_{0i} și, respectiv, s^1_{0i}, calculate cu relațiile

$$s^2_{0i} = i(j + x_{2i}) \quad \text{și} \quad s^1_{0i} = i(j_{2i} + x_{1i}), \tag{18}$$

unde x_{2i} este deplasarea corespunzătoare rotirii camei pentru învingerea rezistenței tehnologice și a frecării. Pentru amplitudini mici ale vibrației torsionale, ix_{2i} coincide cu s și se obține din ecuația (14′) pentru deplasarea x_2 și primele două derivate ale sale nule; x_{1i} are aceeași semnificație și se calculează din sistemul format din primele două ecuații (14) pentru x_1 și derivatele sale nule.

Deplasările s^1_{0i} și s^2_{0i} astfel calculate, împreună cu diagrama de profilare a camei, permit stabilirea condițiilor inițiale pentru masele m și M.

5. APLICAȚIE

Desigur că, prin aplicarea metodei de rezolvare numerică pe calculatoarele numerice, sistemul (14) nu prezintă dificultăți. Însă mecanismele cu came curent întîlnite într-o majoritate de situații se reduc la modele matematice mai simple, a căror soluționare conduce la obținerea unor rezultate de utilitate practică sporită. Astfel, dacă într-o primă etapă se

admite că masa tachetului este inclusă în masa M şi se ignorează vibraţiile arborelui portcamă, iar drept forţă perturbatoare se consideră numai rezistenţa tehnologică care acţionează asupra elementului executor (ales drept element de reducere), atunci sistemul (14) se reduce la o singură ecuaţie diferenţială liniară de ordinul doi cu coeficienţi constanţi:

$$M\ddot{x}_1 + c\dot{x}_1 + (k + K)\, x_1 = c\dot{s} + Ks - P(t). \tag{19}$$

În cele ce urmează se va efectua o analiză dinamică a mecanismelor cu came, a căror mişcare este descrisă de ecuaţia diferenţială (19). Astfel se va urmări modul în care comportarea sistemului este influenţată de variaţia frecvenţei proprii, amortizării, rezistenţei tehnologice şi de forma acceleraţiei profilului camei. Studiul se va face în baza criteriului introdus în prezenta lucrare.

Utilizarea corespunzătoare a relaţiilor (3) transformă ecuaţia diferenţială (19) în coordonate adimensionale:

$$X_1'' = A_1(y' - X_1') + \omega_1^2(y - X_1) - F, \tag{20}$$

unde

$A_1 = ct_0/M$ — coeficientul de amortizare adimensional,
$\omega_1^2 = (k + K)t_0^2/M = Kt_0^2/M$ — pulsaţia proprie adimensională,
$F = P(t)t_0/Ms_0$ — forţa perturbatoare adimensională, admisă constantă.

Condiţia de continuitate (17), în coordonate adimensionale, are forma

$$P = (y - X_1) + A_1(y' - X_1')/\omega_1^2, \tag{21}$$

iar pentru profilul camelor se aleg două legi de mişcare, cea parabolică, cu discontinuităţi în curba acceleraţiei, şi cea polinomială, fără discontinuităţi în curba acceleraţiei:

parabolică

$y = 2x^2$ $(0 \leqslant x \leqslant 0{,}5)$,
$y = 1 - 2(1-x)^2$ $(0{,}5 \leqslant x \leqslant 1{,}5)$,
$y = 2(2-x)^2$ $(1{,}5 \leqslant x \leqslant 2)$,
$y = 0$ $(2 \leqslant x \leqslant 3)$;

polinomială

$y = 35x^4 - 84x^5 + 70x^6 - 20x^7$ $(0 \leqslant x \leqslant 1)$,
$y = y(2-x)$ $(1 \leqslant x \leqslant 2)$,
$y = 0$ $(2 \leqslant x \leqslant 3)$.

În ceea ce priveşte condiţiile iniţiale, relaţia (18) (pentru cazul neglijării frecării) se scrie

$$y_{0i} = i(j + X_{1i}) \quad \text{cu} \quad X_{1i} = P(t)/Ks_0. \tag{22}$$

Oricînd se poate alege o asemenea valoare a jocului încît rotirea camei să corespundă, bunăoară, abscisei $x = 0{,}2$ şi deci condiţiile iniţiale pentru $x_{1i} = 0{,}2$ se pot admite

$$X_1 = 0 \quad \text{şi} \quad X_1' = 0. \tag{23}$$

Analiza parametrilor propuşi mai sus se poate efectua urmărind variaţia pe intervalul de lucru a expresiei (21). Rezolvarea acestei expresii este precedată de soluţionarea ecuaţiei diferenţiale (20). Întrucît soluţia analitică are o formă complicată [8], expresia (21) se poate calcula cu uşurinţă prin programarea pe calculatorul numeric. Astfel, utilizînd metoda Runge-Kutta de soluţionare numerică a ecuaţiilor diferenţiale, s-a efectuat un program pentru calculatorul numeric IBM—360. Programul redat mai jos poate servi pentru analiza dinamică a oricărui mecanism cu came al cărui model matematic se reduce la o ecuaţie diferenţială de ordinul doi. Astfel, dacă ecuaţia (20) are o formă mai complexă, în program se schimbă cartela care conţine funcţia *F2*. Dacă legea de profilare este alta decît cea parabolică sau este compusă din mai multe sectoare, se scriu corespunzător instrucţiunile Y01_Y13 şi se introduce numărul necesar al comenzilor de decizie *IF* (în funcţie de numărul sectoarelor), restul programului rămînînd neschimbat.

PROGRAMUL DE REZOLVARE A ECUAŢIEI DIFERENŢIALE (20)

```
      DOUBLE PRECISION A1, OLP, F, H, K11, K21, K12, K22, K13, K23, K14,
     K24, X1, X2, 1X2D, TA, F1, F2, Y01, Y11, Y21, Y02, Y12, Y22, Y03, Y13, Y23,
     YY01, YY11, YY21, 1YY02, YY12, YY22, YY03, YY13, YY23, Z
      F1 (X2) = X2
      F2 (X1, X2, Y, Y1) = A1*(Y1-X2) + O1P*(Y-X1)-F
      Y01 (Z) = 2.*Z*Z
      Y11 (Z) = 4.*Z
      Y21 (Z) = 4.0
      Y02 (Z) = 1.-2.*(1.-Z)** 2
      Y12 (Z) = 4.*(1.-Z)
      Y22 (Z) = -4.0
      Y03 (Z) = 2.*(2.-Z)**2
      Y13 (Z) = -4.*(2. -Z)
      Y23 (Z) = 4.0
      READ (1,1001) A1, O1P, F
      READ (1, 1001) H, X10, X20
 1001 FORMAT (3D14.4)
      WRITE (3, 1013) A1, O1P, F
 1013 FORMAT (' ', 10X, 'A1 = ', D14.4, 'O1P = ', D14.4, 'F = ', D14.4)
      WRITE (3, 1011)
 1011 FORMAT (' ' , 'REZOLVAREA ECUAŢIEI DIFERENŢIALE'/'O', 'X** = A1 (Y*-
     - X1*) 1 + 01.01 (Y-X1)-F'/'0', 3X, 'T', 8X, 'Y', 12X, 'Y*', 11X, 'Y**', 11X, 'X',
     11X, 1'X1*', 11X, 'X**', 11X, 'P')
      TA = 0.2D0
      X1 = X10
      X2 = X20
      X2D = 0.D0
      GO TO 12
    8 DO 70 I = 1,80
      IF (TA-0.5) 10, 1, 1
```

```
    1 IF (TA−1.5) 20, 2, 2
    2 IF (TA−2.) 30, 80, 80
   10 YY01 = Y01 (TA)
      YY11 = Y11 (TA)
      YY02 = Y01 (TA + 0.5*H)
      YY12 = Y11 (TA + 0.5*H)
      YY03 = Y01 (TA + H)
      YY13 = Y11 (TA + H)
      YY23 = Y21 (TA + H)
      GO TO 50
   20 YY01 = Y02 (TA)
      YY11 = Y12 (TA)
      YY02 = Y02 (TA + 0.5*H)
      YY12 = Y12 (TA + 0.5*H)
      YY03 = Y02 (TA + H)
      YY13 = Y12 (TA + H)
      YY23 = Y22 (TA + H)
      GO TO 50
   30 YY01 = Y03 (TA)
      YY11 = Y13 (TA)
      YY02 = Y03 (TA + 0.5*H)
      YY12 = Y13 (TA + 0.5*H)
      YY03 = Y03 (TA + H)
      YY13 = Y13 (TA + H)
      YY23 = Y23 (TA + H)
   50 K11 = H + F1 (X2)
      K21 = H*F2 (X1, X2, YY01, YY11)
      K12 = H*F1 (X2 + 0.5*K21)
      K22 = H*F2 (X1 + 0.5*K11, X2 + 0.5*K21, YY02, YY12)
      K13 = H*F1 (X2 + 0.5*K22)
      K23 = H*F2 (X1 + 0.5 *K12, X2 + 0.5*K22, YY02, YY12)
      K14 = H*F1 (X2 + K23)
      K24 = H*F2 (X1 + K13, X2 + K23, YY03, YY13)
      X1 = X1 + (K11 + 2.*K12 + 2. + K13 * K14)/6.
      X2 = X2 + (K21 + 2.*K22 + 2. + K23 *K24)/6.
      X2D = F2 (X1, X2, YY03, YY13)
   69 TA = TA + H
   70 CONTINUE
      GO TO 71
   12 YY03 = Y01 (0.2)
      YY13 = Y11 (0.2)
      YY24 = Y21 (0.2)
   71 P = (YY03−XL) + Al*(YY13−X2)/01P
      WRITE (3, 1012) TA, YY03, YY13, YY23, X1, X2, X2D, P
 1012 FORMAT (' ', F7.4, 7E13.5)
      IF (TA-1.8) 8, 80, 80
   80 STOP
      END
```

Pentru diferitele valori ale constantelor ecuației diferențiale, variația încărcării din cupla superioară se poate urmări în figura 3 pentru profilul parabolic și figura 4 pentru profilul polinomial.

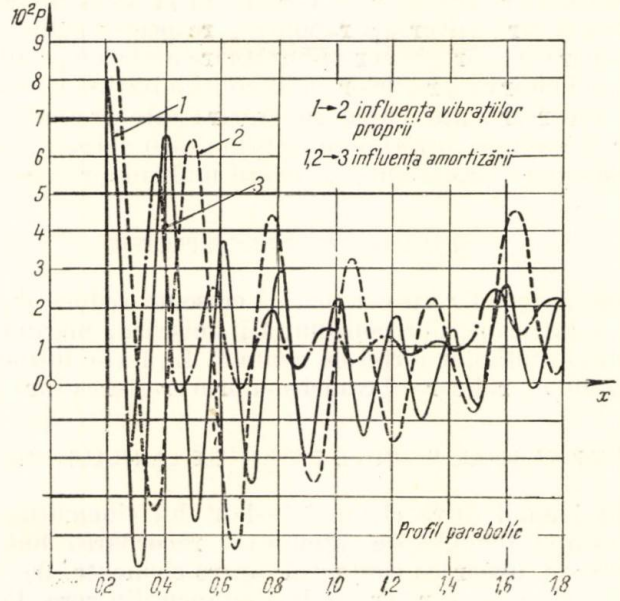


Fig. 4

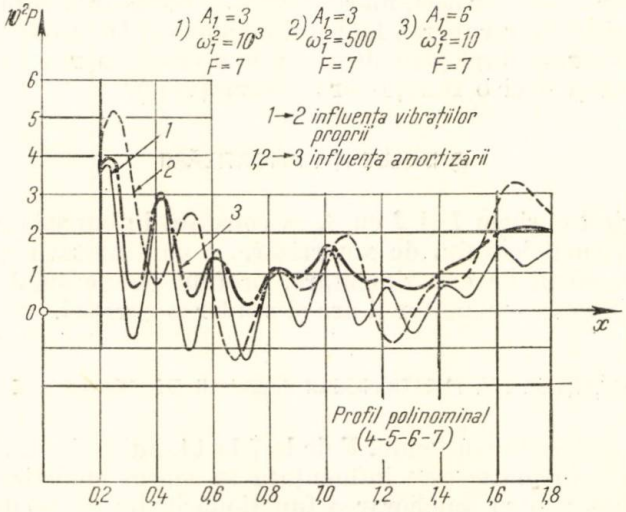


Fig. 5

Pentru toate soluțiile redate, intervalele pentru care încărcarea din cupla superioară este negativă corespund întreruperii continuității mișcării și, în consecință, ecuația (29) nu-și mai păstrează valabilitatea, mișcarea elementului de reducere fiind descrisă de o altă ecuație diferențială [9].

ANALIZA DIAGRAMELOR

a) INFLUENȚA LEGII DE PROFILARE A CAMELOR

Legile de mișcare considerate corespund la două tipuri de curbe ale accelerațiilor cu și fără salturi (parabolică și respectiv polinomială). Urmărind, prin comparație, curbele corespunzătoare ambelor profile, se constată o comportare deficitară a profilelor cu discontinuități în curba accelerației; amplitudinea încărcării din cupla superioară este crescută de la simplu la dublu, iar frecvența întreruperii continuității mișcării este mult mai mare și, în consecință probabilitatea uzurii mult mai rapidă a camei.

b) INFLUENȚA VIBRAȚIILOR PROPRII

Utilizarea sistemelor cu elasticități crescute reduce frecvența vibrațiilor și deci a întreruperilor continuității mișcării, mărind însă valorile maxime ale amplitudinilor forței de contact. La fel se întîmplă și prin reducerea unghiului de ridicare al camei sau prin creșterea turației sale.

c) INFLUENȚA JOCULUI DINTRE ELEMENTELE LANȚULUI CINEMATIC

Prezența jocului între elementele lanțului cinematic, modificat de variația rezistenței tehnologice, atenuează racordarea lină la intrare a curbei de profilare, deoarece contactul dintre elemente, dată fiind rotația camei, se face cu viteză, care crește instantaneu din zero. Perturbația datorită prezenței jocului se suprapune aceleia provocate de prezența discontinuității în curba accelerației, mărind excesiv încărcarea cuplei superioare P și forțînd astfel întreruperea lanțului cinematic. De asemenea existența unui joc mărit atrage după sine, de exemplu o viteză mare de șoc a supapei pe scaunul său și deci o funcționare nesilențioasă.

d) INFLUENȚA AMORTIZĂRII

Comparînd curbele *1* și *2* cu *3*, se constată îmbunătățirea, realizată prin dublarea coeficientului de amortizare, a continuității mișcării. Pentru aceleași condiții de experimentare, profilul polinominal se comportă mai bine. Un efect asemănător îl are și scăderea turației.

e) INFLUENȚA PRESTRÎNGERII ARCULUI DE READUCERE

Mărind forța adimensională F de la 7 la 14, adică dublînd-o, continuitatea lanțului cinematic este influențată în sensul amortizării, îmbunătățindu-se. Însă pentru ameliorarea funcționării, nu se poate conta prea mult pe seama măririi prestrîngerii, deoarece se intensifică uzura profilului.

În general, diagramele evidențiază comportarea superioară a profilelor fără salturi în curba accelerației, de asemenea efectul pozitiv al prezenței amortizării.

Primită la redacție la 6 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Broke H., *Zur Synthese dynamisch belasteter Kurvengetrieb*, Dissertation TH, Ilmenau, 1965.
2. Borodin E. B., *Modelirovanie dinamiki Culacikovth mehanizmov periodiceskovo povorota s ucetom uprugosti, zazorov i trenia*, Mehanika maşin, *1—2* (1967).
3. Hugk H., Nerge G., Stange H., *Untersuchung der Kontakt schwingungen an der Eingriffsstelle von Kurvenmechanismen*, Maschinenbautechnik, *6* (1967).
4. Johnson R. C., *Method of finite diferences of cam design*, Mach. Des., **27**, *11* (1953).
5. Korcemîi L. V., *Mehanizmt gazoraspredileonaia dvigatelia*, Moskva, 1964.
6. Rothbart H. A., *Cams design*, N. 1956.
7. Sava I., *Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came*. I., St. cerc. mec. apl., *5* (1969).
8. — *Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came*. II, St. cerc. mec. apl., *6* (1969).
9. — *Contribuţii la dinamica şi sinteza optimală a mecanismelor cu came*. teză de doctorat, C.M.S. 1969.
10. Seyfert W., *Kraftschluß* in einfachen Kurvengetrieben. Konstrucktion, *2* (1967).
11. Schirmeister K., *Schwingungsdämpfung in Kurvengetrieben durch folterndi Eingriffsglieder*, Maschinenbautechnik, *1* (1968).

CLASIFICAREA MECANISMELOR PLANE CU AJUTORUL GRAFULUI ASOCIAT

de M. ATANASIU, I. ROȘCA
Institutul politehnic, București

În lucrare se prezintă bazele clasificării mecanismelor plane ținînd seama de mărimile n (numărul de elemente mobile), C_5 (numărul cuplelor cinematice de clasa a V-a), C_4 (numărul cuplelor cinematice de clasa a IV-a), M (gradul de mobilitate al mecanismului) și ν (numărul ciclomatic al grafului asociat mecanismului). Tipurile de mecanisme rezultate ca urmare a acestei clasificări sînt prezentate într-o tabelă pentru anumite intervale de valori ale mărimilor menționate.
Utilitatea acestei clasificări va fi arătată într-o lucrare viitoare, în care se vor prezenta rezultatele calculului cinematic și cinetostatic folosind grafele asociate mecanismelor astfel clasificate.

Este cunoscut faptul că prima etapă de analiză a unui mecanism plan constă în stabilirea grupelor structurale care intră în alcătuirea sa, întrucît toate rezolvările analitice sau construcțiile grafice privind determinarea vitezelor, accelerațiilor și forțelor sînt grupate pe aceste unități fundamentale; calculul cinematic și cinetostatic al unui mecanism impune folosirea rezultatelor obținute la analiza unor grupe pentru studiul grupelor următoare.

Apare deci în mod necesar stabilirea unor criterii de analiză structurală și a unei clasificări structurale a lanțurilor cinematice care intră în alcătuirea tuturor mecanismelor plane în vederea uniformizării metodelor de calcul a acestora.

Ca principiu clasic de formare a mecanismelor se folosește principiul lui Assur, în baza căruia la mecanismul inițial se leagă una sau alta din grupele structurale în serie sau paralel (lungire sau amplificare).

O serie de lucrări recente sînt consacrate dezvoltării acestui principiu și aplicării lui la lanțurile cinematice complexe [10] — [12].

Baza acestui principiu de formare a mecanismelor o constituie analiza „numerică" a elementelor și cuplelor cinematice pentru un lanț cinematic dat; în conformitate cu soluțiile numerice s-au întocmit diferite scheme structurale ale lanțurilor cinematice [9].

Într-o serie de alte lucrări [1] — [8] s-a arătat că factorii determinanți în stabilirea structurii unui lanț cinematic sînt *configurația* axelor de rotație

relativă instantanee a elementelor care intră în alcătuirea lanțului respectiv, precum și *modul de interconectare* a acestor elemente.

În ceea ce privește configurația lanțurilor cinematice plane, axele de rotație relativă instantantanee sînt perpendiculare pe planul mișcării, alcătuind un fascicul de rang, 3, iar în cazul particular cînd ele sînt cuprinse toate în același plan perpendicular pe planul mișcării un fascicul de rang 2.

În ceea ce privește modul de interconectare a elementelor, folosirea grafului asociat mecanismului pune în evidență numărul de contururi independente (numărul ciclomatic) pe baza căruia se alcătuiesc ecuațiile de condiție pentru studiul vitezelor, accelerațiilor și forțelor.

Aceste două criterii, rangul configurației axelor instantanee de rotație relativă și numărul ciclomatic, care stau la baza întregii analize cinematice și cinetostatice a mecanismelor, pot constitui noi criterii de clasificare a lanțurilor cinematice plane și spațiale, întrucît este evident că scopul oricărei clasificări este acela de a oferi metode de calcul specifice fiecărui grup de mecanisme conținut într-o anumită clasă.

În prezentul articol ne propunem să prezentăm bazele unei asemenea clasificări pentru mecanismele plane, presupunînd că lanțurile cinematice care intră în alcătuirea sa au rangul configurației axelor instantanee de rotație relativă $r = 3$.

Dacă pentru un mecanism plan M reprezintă mobilitatea, C_5 numărul cuplelor cinematice de clasa a V-a, C_4 numărul cuplelor cinematice de clasa a IV-a și ν numărul ciclomatic, se știe că avem

$$\begin{aligned} M &= 3n - 2C_5 - C_4, \\ \nu &= C_5 + C_4 - n. \end{aligned} \tag{1}$$

În aceste două ecuații apar cinci mărimi, la care se mai adaugă faptul că cuplele de clasă a V-a pot fi de rotație sau de translație, fapt de care trebuie ținut seama în calcule.

Rezolvînd acest sistem în raport cu C_5 și C_4, obținem

$$\begin{aligned} C_5 &= 2n - (M + \nu), \\ C_4 &= 2\nu + M - n. \end{aligned} \tag{2}$$

Clasificarea mecanismelor plane se va face pentru M și ν dați, variind numărul de elemente mobile n astfel încît pentru C_5 și C_4 să rezulte valori întregi și pozitive.

a. MECANISME CU UN SINGUR GRAD DE MOBILITATE ($M = 1$)

α. Cazul $\nu = 1$

Sistemul de ecuații (2) devine

$$\begin{aligned} C_5 &= 2n - 2, \\ C_4 &= 3 - n. \end{aligned} \tag{3}$$

Din a doua ecuație a sistemului (3) rezultă că n poate lua numai valorile 1, 2 și 3 (pentru $n \geqslant 4$, $C_4 < 0$, valori pentru care din prima ecuație a aceluiași sistem rezultă $C_5 \geqslant 0$); avem:

— pentru $n = 1$: $C_5 = 0$, $C_4 = 2$. Mecanismul considerat este alcătuit dintr-un singur element și două cuple cinematice de clasa a IV-a; două variante constructive ale acestui mecanism sînt arătate în figura 1*a* și 1*b* iar graful asociat acestui mecanism în figura 1*c*;

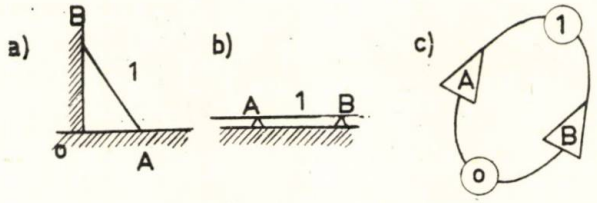
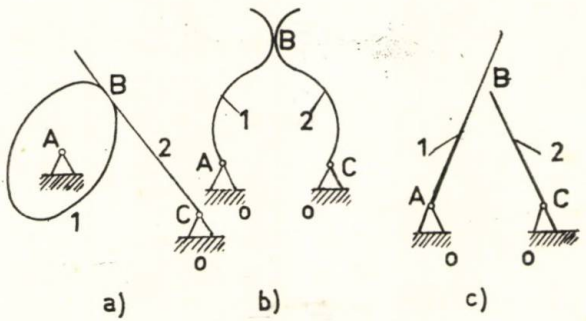


Fig. 1

— pentru $n = 2$: $C_5 = 2$, $C_4 = 1$. Mecanismul considerat este alcătuit din două elemente, două cuple de clasa a V-a și o cuplă de clasa a IV-a; trei variante constructive ale acestui mecanism sînt arătate în figura 2*a*, *b* și *c*; graful asociat acestui mecanism este arătat în figura 2*d*;



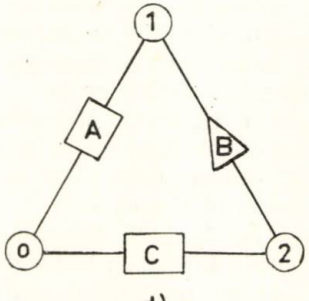
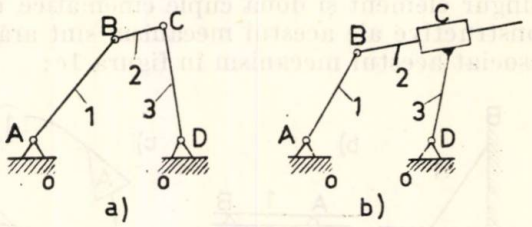


Fig. 2

— pentru $n = 3$: $C_5 = 4$, $C_4 = 0$. Acesta este mecanismul patrulater clasic arătat în două variante constructive în figura 3*a*, și *b*; graful asociat acestui mecanism este arătat în figura 3*c*.

Acestea sînt toate mecanismele cu $M = 1$ și $\nu = 1$ (cuplele cinematice de clasa a V-a au fost figurate pe graful asociat prin dreptunghiuri, iar cele de clasa a IV-a prin triunghiuri).



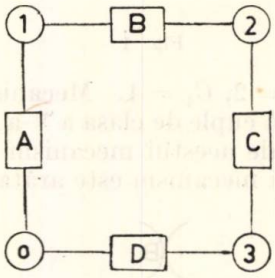


Fig. 3

β. *Cazul* $\nu = 2$

Sistemul de ecuații (2) devine

$$\begin{aligned} C_5 &= 2n - 3, \\ C_4 &= 5 - n. \end{aligned} \tag{4}$$

Din a doua ecuație a sistemului (4) rezultă că n poate lua numai valorile 1, 2, 3, 4 și 5 (pentru $n \geqslant 6$, $C_4 < 0$); prima dintre aceste valori nu convine primei ecuații a aceluiași sistem (pentru $n = 1$, $C_5 = -1 < 0$); rămîn deci pentru n valorile 2, 3, 4 și 5; avem :

— pentru $n = 2 : C_5 = 1$, $C_4 = 3$. Mecanismul considerat este alcătuit din două elemente, o cuplă de clasa a V-a și trei cuple de clasa a IV-a. O variantă constructivă a acestui mecanism este arătată în figura 4*a*, graful asociat fiind reprezentat în figura 4*b*;

— pentru $n = 3 : C_5 = 3$, $C_4 = 2$. Mecanismul considerat este alcătuit din trei elemente, trei cuple de clasa a V-a și două cuple de clasa a IV-a; o variantă constructivă a acestui mecanism este arătată în figura 5*a*, iar graful asociat acestui mecanism în figura 5*b*;

— pentru $n = 4 : C_5 = 5$, $C_4 = 1$. Mecanismul considerat este alcătuit din patru elemente, cinci cuple cinematice de clasa a V-a și o cuplă cinematică de clasa a IV-a; o variantă constructivă este arătată în figura 6*a*, graful asociat acestui mecanism fiind reprezentat în figura 6*b*;

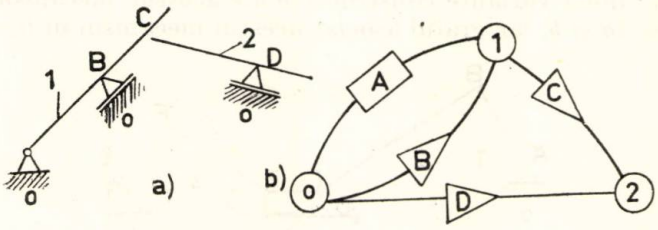


Fig. 4

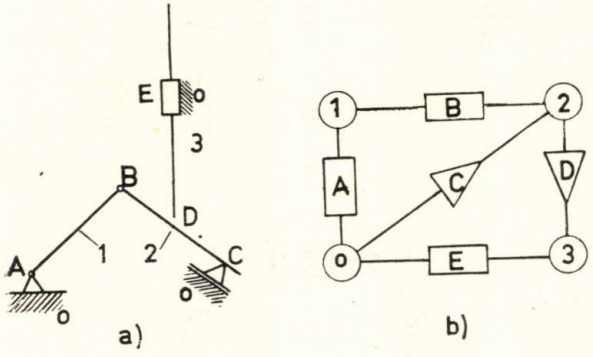


Fig. 5

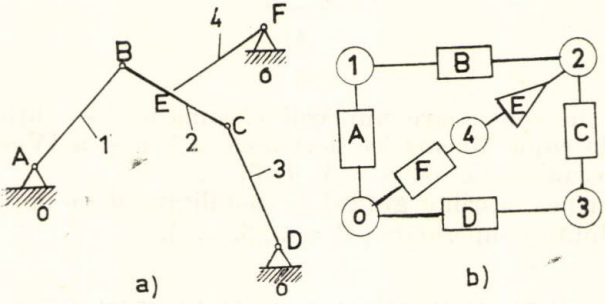


Fig. 6

— pentru $n = 5$: $C_5 = 7$, $C_4 = 0$. Mecanismul considerat este alcătuit din cinci elemente, 7 cuple de clasa a V-a şi nici o cuplă cinematică de clasa a IV-a; două variante constructive ale acestui mecanism sînt arătate în figura 7*a* şi *b*, iar graful asociat acestui mecanism în figura 7*c*.

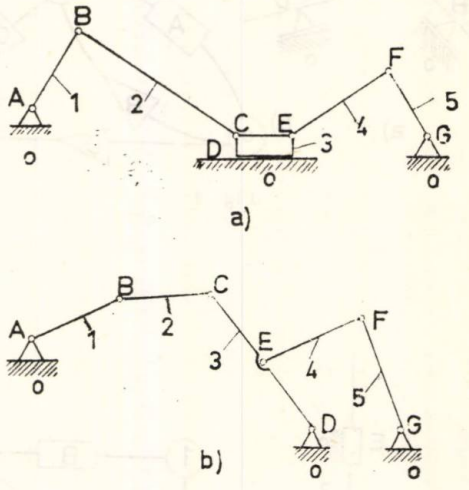


Fig. 7

Variind în continuare numărul ciclomatic, se obţin numărul de elemente şi de cuple cinematice de clasele a V-a şi a IV-a, care intră în alcătuirea mecanismelor cu $\nu = 3, 4, 5, \ldots$

De asemenea, variind gradul de mobilitate M, se obţin mecanismele plane cu mobilităţi superioare ($M = 2, 3, \ldots$).

b. ANALIZA „NUMERICĂ" A CLASELOR DE MECANISME PLANE

Mărimile care vor fi luate în consideraţie sînt M, ν, n, C_4 şi C_5 întregi şi pozitive, M şi n nenuli. Rezolvînd sistemul (1), în privinţa lui C_4 şi C_5 rezultă

$$C^5 = 2n - (M + \nu),$$
$$C_4 = 2\nu + M - n. \tag{5}$$

Pentru $C_5 \geqslant 0$ rezultă din prima relaţie (5)

$$n \geqslant \frac{M + \nu}{2},$$

iar pentru $C_4 \geqslant 0$ din a doua relaţie (5)

$$n \leqslant 2\nu + M.$$

În definitiv limitele între care poate fi cuprins n sînt

$$\frac{M + \nu}{2} \leqslant n \leqslant M + 2\nu. \tag{6}$$

Tabelă

Clasificarea mecanismelor plane după C_5, C_4, M, ν, n pentru $0 \leqslant C_5 \leqslant 10$, $0 \leqslant C_4 \leqslant 10$ şi $1 \leqslant M \leqslant 3$ (cifrele din căsuţe indică în ordine M, ν, n)

C_4 \ C_5	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0		1,0,1	2,0,2	3,0,3	1,1,3	2,1,4	3,1,5	1,2,5	2,2,6	3,2,7	1,3,7
1	2,0,1	3,0,2	1,1,2	2,1,3	3,1,4	1,2,4	2,2,5	3,2,6	1,3,6	2,3,7	3,3,8
2	1,1,1	2,1,2	3,1,3	1,2,3	2,2,4	3,2,5	1,3,5	2,3,6	3,3,7	1,4,7	2,4,8
3	3,1,2	1,2,2	2,2,3	3,2,4	1,3,4	2,3,5	3,3,6	1,4,6	2,4,7	3,4,8	1,5,8
4	2,2,2	3,2,3	1,3,3	2,3,4	3,3,5	1,4,5	2,4,6	3,4,7	1,5,7	2,5,8	3,5,9
5	1,3,2	2,3,3	3,3,4	1,4,4	2,4,5	3,4,6	1,5,6	2,5,7	3,5,8	1,6,8	2,6,9
6	3,3,3	1,4,3	2,4,4	3,4,5	1,5,5	2,5,6	3,5,7	1,6,7	2,6,8	3,6,9	1,7,9
7	2,4,3	3,4,4	1,5,4	2,5,5	3,5,6	1,6,6	2,6,7	3,6,8	1,7,8	2,7,9	3,7,10
8	1,5,3	2,5,4	3,5,5	1,6,5	2,6,6	3,6,7	1,7,7	2,7,8	3,7,9	1,8,9	2,8,10
9	3,5,4	1,6,4	2,6,5	3,6,6	1,7,6	2,7,7	3,7,8	1,8,8	2,8,9	3,8,10	1,9,10
10	2,6,4	3,6,5	1,7,5	2,7,6	3,7,7	1,8,7	2,8,8	3,8,9	1,9,9	2,9,10	3,9,11

Folosind relațiile (5) și ținînd seama de condițiile (6), s-a alcătuit tabela, în care sînt prezentate cele cinci caracteristici ale mecanismelor plane (M, ν, n, C_5, C_4) pentru $0 \leqslant C_5 \leqslant 10$ și $0 \leqslant C_4 \leqslant 10$.

Evident, tabela poate fi extinsă și la un număr de cuple cinematice superior celui considerat. Căsuțele îngroșate indică mecanismele cu un singur grad de mobilitate.

Utilitatea acestei clasificări o vom arăta într-o lucrare viitoare, în care vom prezenta rezultatele calculului cinematic și cinetostatic pentru grafele asociate mecanismelor astfel clasificate. Se va arăta cu această ocazie că pentru obținerea rezultatelor analizei cinematice și cinetostatice a unui anumit mecanism va trebui căutat doar tipul de graf care corespunde mecanismului considerat și notate elementele și cuplele acestui mecanism conform cu notația adoptată de noi.

Primită la redacție la 20 ianuarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contributions à la théorie geometrique des vis*, Buletinul I.P.B., **XXI**, *3* (1959).
2. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contributions à l'étude de la structure des chaînes cynematiques*, Buletinul I.P.B., **XXII**, *1* (1960).
3. R. Voinea, M. Atanasiu, *Théorie geometrique des vis et quelques applications dans la théorie des mécanismes*, Rev. Mec. Appl., **VII**, *4* (1962).
4. R. Voinea., M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice la un mecanism prin metoda sistemelor conjugate*, St. cerc. mec. apl. *1* (1963).
5. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea pe cale analitică a vitezelor și accelerațiilor la un mecanism plan*, St. cerc. mec. apl., *2* (1963).
6. R. Voinea, M. Atanasiu, *Contribuții la determinarea stării cinematice a unui mecanism*, Comunicările Academiei R. S. România, **XIII**, *3* (1963).
7. R. Voinea, M. Atanasiu, *Determinarea vitezelor și accelerațiilor la un mecanism prin metoda ciclurilor independente*, St. cerc. mec. apl., *1* (1964).
8. R. Voinea, M. Atanasiu, *Metode analitice noi pentru studiul cinematic și cinetostatic al mecanismelor*, București, Edit. tehnică, 1964.
9. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei 'mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.
10. N. I. Manolescu, *Asupra mecanismelor formate din lanțuri cinematice de diferite familii*, St. cerc. mec. apl., **XII**, *3* (1961).
11. N. I. Manolescu, *O metodă unitară de alcătuire a lanțurilor cinematice și a mecanismelor plane articulate de diferite grade de libertate și mobilitate*, St. cerc. mec. apl., **XVII**, *6* (1964).
12. N. I. Manolescu, *Sistematizarea și clasificarea mecanismelor-motor plane articulate cu două grade de mobilitate „total" și „parțial"*, St. cer. mec. apl., **XX**, *6* (1965).

MOMENTUL DE INERȚIE REDUS PENTRU MECANISMUL BIELĂ-MANIVELĂ GENERAL

de N. MOȘU

În lucrare se prezintă expresia exactă a momentului de inerție $J(\alpha)$ redus la axul manivelei pentru mecanismul bielă-manivelă general. Făcînd apel la o singură simplificare bine justificată, admisă și în literatură, se dă expresia aproximativă a funcției $J(\alpha)$ sub forma unei serii Fourier. În continuare se arată una dintre aplicațiile cele mai utile ale funcției $J(\alpha)$ și anume se dă expresia momentului forțelor de inerție redus la axul manivelei pentru mecanismul bielă-manivelă general. Se indică de asemenea cum se obțin expresiile acestui moment pentru cazurile particulare și se compară cu expresiile date în literatură arătîndu-se că, făcînd noi simplificări, relațiile devin identice.

În comparație cu metoda aflării seriei Fourier a accelerației pistonului, calea urmată în această lucrare pentru aflarea momentului forțelor de inerție redus este mult mai simplă și totodată mai exactă.

1. INTRODUCERE

Atunci cînd se studiază gradul de neuniformitate al mașinilor cu piston sau vibrațiile de răsucire ale arborelui cotit, intervine ca un element principal momentul de inerție redus la mecanismului bielă-manivelă, care este o funcție periodică $J(\alpha) = J(\alpha + 2\pi)$.

În literatură, expresia analitică a funcției $J(\alpha)$ pentru mecanismul bielă-manivelă simplu se determină pornind de la considerația simplificatoare că repartiția statică a masei bielei pe axele celor două articulații este echivalentă și din punct de vedere dinamic, iar cazul general nu este tratat.

În lucrarea de față se stabilește expresia analitică aproximativă (dar cu o aproximație foarte bună) a funcției $J(\alpha)$ sub forma unei serii Fourier pentru mecanismul bielă-manivelă general, din care rezultă cu ușurință cazurile particulare. Se arată apoi cum, utilizînd formulele indicate la disciplina „Teoria mecanismelor și a mașinilor", se obține expresia momentului forțelor de inerție redus la manivelă și se compară cu relațiile indicate în literatură.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 2, 1971, P. 409–420

2. REZOLVAREA PROBLEMEI ENUNȚATE

Relația care definește momentul de inerție redus al unui mecanism plan este

$$E = \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 J(\alpha), \tag{1}$$

unde

E reprezintă energia cinetică a mecanismului,
α — unghiul care precizează poziția manivelei,
$J(\alpha)$ — momentul de inerție al mecanismului redus la axul manivelei.

În figura 1 este reprezentată schema celui mai general mecanism bielă-manivelă [2]. Se consideră că sînt n biele secundare și o bielă principală. Se folosesc următoarele notații pentru biela principală și pentru una dintre bielele secundare [2]:

R — lungimea manivelei;
L, l_i — lungimea bielei principale, respectiv a bielei secundare i;
r_i — lungimea brațului bielei secundare i;
H, H_i — dezaxarea cilindrului cu bielă principală, respectiv a cilindrului cu biela secundară i;
$h = \frac{H}{R}$, $h_i = \frac{H_i}{R}$ — coeficient de dezaxare al cilindrului cu bielă principală, respectiv al cilindrului cu biela secundară i;
S, S_i — distanța de la punctul mort interior al piciorului bielei principale, respectiv al bielei secundare i, la normala dusă prin punctul O pe axa cilindrului corespunzător;
α, α_i — unghiuri descrise de manivelă, măsurate față de poziția manivelei paralelă cu axa cilindrului corespunzător;
β, β_i — înclinarea bielei principale, respectiv a celei secundare i, față de axa cilindrului corespunzător:
γ_i — unghiul dintre axa cilindrului cu bielă principală și axa cilindrului cu biela secundară i, măsurat în sensul de rotație al manivelei;
δ_i — unghiul de colaj al brațului bielei secundare i față de biela principală, măsurat în sensul de rotație al manivelei;
x_B, x_{Bi} — deplasarea pistonului acționat de biela principală, respectiv, de biela secundară i;
V_B, V_{Bi} — viteza pistonului acționat de biela principală, respectiv de biela secundară i;
$\omega = \dot{\alpha}$ — viteza unghiulară a manivelei;
ω_B, ω_{Bi} — viteza unghiulară a bielei principale, respectiv a bielei secundare i;

J_m — momentul de inerție al manivelei în raport cu axa de rotație;

M_P, M_{Pi} — masa pistonului asamblat acționat de biela principală, respectiv a acelui acționat de biela secundară i;

M_B, M_{Bi} — masa bielei principale asamblate, respectiv a bielei secundare i asamblate;

J_B, J_{Bi} — momentul de inerție al bielei principale asamblate, respectiv a bielei secundare i asamblate, în raport cu axa bolțului corespunzător;

a, a_i — distanța de la centrul de greutate al bielei principale asamblate, respectiv al bielei secundare i asamblate, la axa bolțului corespunzător.

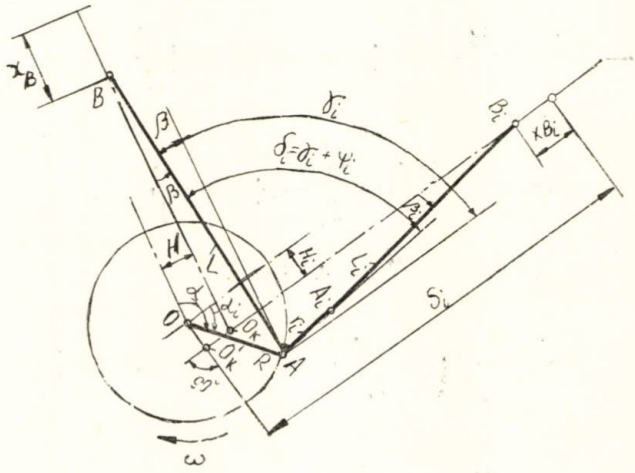


Fig. 1

Expresia energiei cinetice pentru mecanismul din figura 1 este:

$$E = \frac{1}{2}\omega^2 J_m + \frac{1}{2}(M_P + M_B)V_B^2 + \frac{1}{2}\omega_B^2 J_B - M_B V_B \omega_B a \sin\beta + \\ + \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{1}{2}(M_{Pi} + M_{Bi})V_{Bi}^2 + \frac{1}{2}\omega_{Bi}^2 J_{Bi} - M_{Bi}V_{Bi}\omega_{Bi}a_i \sin\beta_i\right]). \tag{2}$$

Cu notațiile din figura 1 rezultă pentru mărimile x_B, x_{Bi} expresiile

$$x_B = S - (R\cos\alpha + L\cos\beta), \tag{3}$$

$$x_{Bi} = S_i - [R\cos\alpha_i' + r_i\cos(\beta - \psi_i) + l_i\cos\beta_i], \tag{4}$$

unde s-a notat $\psi_i = \delta_i - \gamma_i$.

Tot din figura 1 rezultă și relațiile

$$\sin\beta = \frac{R}{L}\sin\alpha \mp \frac{H}{L} = \lambda(\sin\alpha \mp h), \tag{5}$$

$$\sin\beta_i = \frac{R}{l_i}\sin\alpha_i - \frac{r_i}{l_i}\sin(\beta - \psi_i) \mp \frac{R}{l_i}h_i. \tag{6}$$

În expresiile (5), (6), semnul minus corespunde unor dezaxări ca cele din figura 1 și, evident, semnul plus unei situații inverse. Din relațiile (5), (6) rezultă

$$\sin\beta_i = \frac{R}{l_i}\left(1 - \frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i\right)\sin\alpha_i - \frac{r_i}{L}\frac{R}{l_i}\cos\psi_i\sin\gamma_i\cos\alpha_i - \tag{7}$$

$$-\frac{r_i}{l_i}\left(\pm\frac{h_i R}{r_i} - \sin\psi_i\cos\beta \mp \lambda h\cos\psi_i\right).$$

Cu notațiile [2]

$$\lambda_i\cos\theta_i = \frac{R}{l_i}\left(1 - \frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i\right), \tag{8}$$

$$\lambda_i\sin\theta_i = \frac{r_i}{L}\frac{R}{l_i}\cos\psi_i\sin\gamma_i, \tag{9}$$

$$f_i = \frac{1}{\lambda_i}\frac{r_i}{l_i}\left(\pm\frac{h_i R}{r_i} - \sin\psi_i\cos\beta \mp \lambda h\cos\psi_i\right), \tag{10}$$

relația (7) devine

$$\sin\beta_i = \lambda_i[\sin(\alpha_i - \theta_i) - f_i]. \tag{11}$$

Mărimea f_i, definită de relația (10), se numește coeficient de dezaxare echivalent. Acest coeficient este variabil, dar pentru că unghiul β are valori mici, se poate înlocui $\cos\beta$ cu valoarea sa medie $\cos\beta \approx \mu$ și în acest caz expresia coeficientului f_i devine

$$f_i \simeq \frac{1}{\lambda_i}\frac{r_i}{l_i}\left(\pm\frac{h_i R}{r_i} - \mu\sin\psi_i \mp \lambda h\cos\psi_i\right). \tag{12}$$

Expresiile mărimilor θ_i și λ_i rezultă din relațiile (8), (9):

$$\theta_i = \text{arc.tg}\,\frac{r_i\cos\psi_i\sin\gamma_i}{L\left(1 - \frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i\right)}, \tag{13}$$

$$\lambda_i = \frac{R}{l_i}\sqrt{\left(1 - \frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i\right)^2 + \left(\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\sin\gamma_i\right)^2}. \tag{14}$$

Din relațiile (5) și (11) se obține

$$\cos\beta = \sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}, \tag{15}$$

$$\cos\beta_i \approx \sqrt{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}. \tag{16}$$

Derivînd relațiile (5) și (11) în raport cu timpul și ținînd seama de (15) și (16), rezultă

$$\omega_B = \dot{\beta} = \omega \frac{\lambda\cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}}, \tag{17}$$

$$\omega_{Bi} = \dot{\beta}_i \approx \omega \frac{\lambda_i\cos(\alpha_i-\theta_i)}{\sqrt{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}}. \tag{18}$$

Prin derivarea relațiilor (3), (4) în raport cu timpul și ținînd seama de expresiile (17), (18), se obține

$$V_B = \dot{x}_B = R\omega\left[\sin\alpha + \frac{\lambda\cos\alpha(\sin\alpha \mp h)}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}}\right] \tag{19}$$

$$V_{Bi} = \dot{x}_{Bi} \approx R\omega\left\{\sin\alpha_i - \frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos\alpha + \lambda\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\frac{\cos\alpha(\sin\alpha \mp h)}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda'\lambda_i\cos(\alpha_i-\theta_i)[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]}{\sqrt{1-\lambda_i^2(\sin\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}}\right\}, \tag{20}$$

unde $\lambda' = \frac{l_i}{R}\lambda_i$.

Din relațiile (2), (5), (6), (17), (18), (19) și (20) rezultă

$$J(\alpha) \approx J_m + (M_P + M_B)R^2\left[\sin\alpha + \frac{\lambda\cos\alpha(\sin\alpha \mp h)}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}}\right]^2 +$$

$$+ J_B\frac{\lambda^2\cos^2\alpha}{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2} - 2M_B\frac{a}{L}R^2\left[\frac{\lambda\cos\alpha\sin\alpha(\sin\alpha \mp h)}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{\lambda^2\cos^2\alpha(\sin\alpha \mp h)^2}{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}\right] + \sum_{i=1}^{n} J_{Bi}\frac{\lambda_i^2\cos^2(\alpha_i-\theta_i)}{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n}(M_{Pi} + M_{Bi})R^2\left\{\sin\alpha_i - \frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos\alpha + \right.$$

$$\left. + \lambda\frac{r_i}{L_i}\cos\psi_i\frac{\cos\alpha(\sin\alpha \mp h)}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha \mp h)^2}} + \frac{\lambda_i'\lambda_i\cos(\alpha_i-\theta_i)[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]}{\sqrt{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}}\right\}^2 -$$

$$-\sum_{i=1}^{n} 2M_{Bi}\frac{a_i}{l_i}R^2\left\{\frac{\lambda_i'\lambda_i\sin\alpha_i\cos(\alpha_i-\theta_i)\,[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]}{\sqrt{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}}-\right.$$

$$-\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\frac{\lambda_i'\lambda_i\cos\alpha\cos(\alpha_i-\theta_i)\,[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]}{\sqrt{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}}+$$

$$+\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\frac{\lambda\lambda_i'\lambda_i\cos\alpha\cos(\alpha_i-\theta_i)\,(\sin\alpha\mp h)[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]\cos\alpha}{\sqrt{1-\lambda^2(\sin\alpha\mp h)^2}\sqrt{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}}+$$

$$\left.+\frac{\lambda_i'^2\lambda_i^2\cos^2(\alpha_i-\theta_i)\,[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}{1-\lambda_i^2[\sin(\alpha_i-\theta_i)-f_i]^2}\right\}. \tag{21}$$

Dezvoltarea expresiei (21) în serie Fourier este foarte laborioasă. Pentru evitarea acestei dificultăți numitorii termenilor din relația (21), care reprezintă cosinușii unghiurilor β, β_i, se înlocuiesc cu valorile lor medii μ, μ_i, deoarece aceste unghiuri au valori mici.

Cu aceste aproximări, după transformări în care se ține seama de relația $\alpha_i = \alpha - \gamma_i$, rezultă

$$J(\alpha) \approx A_0 + \sum_{k=1}^{4}(A_k\cos k\alpha + B_k\sin k\alpha). \tag{22}$$

Expresiile coeficienților sînt următoarele:

$$A_0 = J_m+(M_P+M_B)R^2\left(\frac{1}{2}+\frac{\lambda^2}{8\mu^2}+\frac{h^2\lambda^2}{2\mu^2}\right)+J_B\frac{\lambda^2}{2\mu^2}-M_B\frac{a}{L}R^2\left(\frac{\lambda^2}{4\mu^2}+\frac{h^2\lambda^2}{\mu^2}\right)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(M_{Pi}+M_{Bi})R^2\left\{\frac{1}{2}+\frac{r_i^2}{2L^2}\sin^2\psi_i+\frac{\lambda^2}{8\mu^2}\frac{r_i^2}{L^2}\cos^2\psi_i+\frac{h^2\lambda^2}{2\mu^2}\frac{r_i^2}{L^2}\cos^2\psi_i+\right.$$

$$+\frac{\lambda_i'^2\lambda_i^2}{8\mu_i^2}+f_i^2\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}+\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin\gamma_i\pm\frac{h\lambda}{\mu}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\sin\gamma_i-f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\sin\theta_i\pm$$

$$\pm\frac{h\lambda}{2\mu}\frac{r_i^2}{L^2}\sin 2\psi_i+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos(\theta_i+\gamma_i)+$$

$$\left.+\lambda_i'\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\left[\frac{1}{4}\cos 2(\theta_i+\gamma_i)\pm hf_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\right]\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}M_{Bi}\frac{a_i}{l_i}R^2\left\{\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2}\left(\frac{1}{4}+f_i^2\right)-f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\sin\theta_i+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\times\right.$$

$$\times\sin\psi_i\cos(\theta_i+\gamma_i)+$$

$$\left.+\lambda_i'\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\left[\frac{1}{4}\cos 2(\theta_i+\gamma_i)\pm hf_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\right]\right\}+\sum_{i=1}^{n}J_{Bi}\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}, \tag{23}$$

$$A_1=\left[M_P+M_B\left(1-\frac{a}{L}\right)\right]R^2\frac{\lambda}{2\mu}+\sum_{i=1}^{n}(M_{Pi}+M_{Bi})R^2\left\{f_i\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\sin(\theta_i+\right.$$

$$+\gamma_i)+\frac{\lambda}{2\mu}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i+\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\cos(2\theta_i+\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin 2(\theta_i+$$

$$\left.+\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i[-f_i\sin(\theta_i+\gamma_i)\pm h\sin 2(\theta_i+\gamma_i)]\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}M_{Bi}\frac{a_i}{l_i}R^2\left\{\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\cos(2\theta_i+\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin 2(\theta_i+\gamma_i)+\right.$$

$$\left.+f_i\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2}\sin(\theta_i+\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i[-f_i\sin(\theta_i+\gamma_i)\mp h\sin 2(\theta_i-\gamma_i)]\right\},\tag{24}$$

$$B_1=\mp(M_P+M_B)R^2\frac{h\lambda^2}{2\mu^2}\pm M_B\frac{a}{L}R^2\frac{h\lambda^2}{\mu^2}+\sum_{i=1}^{n}(M_{Pi}+M_{Bi})R^2\times$$

$$\times\left\{\mp\frac{h\lambda}{4\mu^2}\frac{r_i^2}{L^2}\cos^2\psi_i-f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\cos(\theta_i+\gamma_i)-\frac{\lambda}{2\mu}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\sin\gamma_i+\right.$$

$$+\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\sin(2\theta_i+\gamma_i)-\frac{\lambda}{4\mu}\frac{r_i}{L^2}\sin 2\psi_i-\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos 2(\theta_i+\gamma_i)-$$

$$\left.-\lambda_i'\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i[-f_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\mp h\cos 2(\theta_i+\gamma_i)]\right\}-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}M_{Bi}\frac{a_i}{l_i}R^2\left\{\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\sin(2\theta_i+\gamma_i)-\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos 2(\theta_i+\gamma_i)-\right.$$

$$-f_i\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2}\cos(\theta_i+\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i[-f_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\mp$$

$$\left.\mp h\cos 2(\theta_i+\gamma_i)]\right\},\tag{25}$$

$$A_2=(M_P+M_B)R^2\left(-\frac{1}{2}+\frac{h^2\lambda^2}{2\mu^2}\right)+J_B\frac{\lambda^2}{2\mu^2}-M_B\frac{a}{L}R^2\frac{h^2\lambda^2}{\mu^2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}J_{Bi}\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\cos 2(\theta_i+\gamma_i)+\sum_{i=1}^{n}(M_{Pi}+M_{Bi})R^2\left[-\frac{1}{2}\cos 2\gamma_i+\right.$$

$$+\frac{r_i^2}{2L^2}\sin^2\psi_i+\frac{h^2\lambda^2}{2\mu^2}\frac{r_i^2}{L^2}\cos^2\psi_i+\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin\gamma_i+f_i^2\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\cos 2(\theta_i+\gamma_i)\pm$$

$$\pm\frac{h\lambda}{\mu}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\sin\gamma_i+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\sin(\theta_i+2\gamma_i)\pm\frac{h\lambda}{2\mu}\frac{r_i^2}{L^2}\sin 2\psi_i+$$

$$+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\pm f_ih\lambda_i'\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\Big]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}M_{Bi}\frac{a_i}{l_i}R^2\Big[\lambda_i'f_i\frac{\lambda_i}{\mu_i}\sin(\theta_i+2\gamma_i)+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos(\theta_i+\gamma_i)\pm$$

$$\pm f_ih\lambda_i'\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos(\theta_i+\gamma_i)+\lambda_i'^2f_i^2\frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2}\cos 2(\theta_i+\gamma_i)\Big], \tag{26}$$

$$B_2=\mp(M_P+M_B)R^2\frac{h\lambda}{\mu}\pm M_B\frac{a}{L}\frac{h\lambda}{\mu}+\sum_{i=1}^{n}J_{Bi}\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\sin 2(\theta_i+\gamma_i)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n}(M_{Pi}+M_{Bi})R^2\Big[-\frac{1}{2}\sin 2\gamma_i+f_i\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\sin 2(\theta_i+\gamma_i)\mp$$

$$\mp\frac{h\lambda}{\mu}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i-f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\cos(\theta_i+2\gamma_i)+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin(\theta_i+\gamma_i)\pm$$

$$\pm hf_i\lambda_i'\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\sin(\theta_i+\gamma_i)-\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\cos\gamma_i\Big]-$$

$$-\sum_{i=1}^{n}M_{Bi}\frac{a_i}{l_i}R^2\Big[-f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\cos(\theta_i+2\gamma_i)+f_i\lambda_i'\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin(\theta_i+\gamma_i)\pm$$

$$\pm hf_i\frac{\lambda}{\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\sin(\theta_i+\gamma_i)+f_i^2\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2}\sin 2(\theta_i+\gamma_i)\Big], \tag{27}$$

$$A_3=-(M_P+M_B)R^2\frac{\lambda}{2\mu}+M_B\frac{a}{L}R^2\frac{\lambda}{2\mu}+\sum_{i=1}^{n}(M_{Pi}+M_{Bi})R^2\times$$

$$\times\Big\{f_i\lambda_i'^2\frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2}\sin 3(\theta_i+\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda}{2\mu}\frac{\lambda_i}{\mu_i}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i[f_i\sin(\theta_i+\gamma_i)\pm h\sin 2(\theta_i+\gamma_i)]-$$

$$-\frac{\lambda}{2\mu}\frac{r_i}{L}\cos\psi_i\cos\gamma_i-\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\cos(2\theta_i+3\gamma_i)+\lambda_i'\frac{\lambda_i}{2\mu_i}\frac{r_i}{L}\sin\psi_i\sin 2(\theta_i+\gamma_i)\Big\}-$$

$$- \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} \frac{a_i}{l_i} R^2 \left\{ \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \frac{r_i}{L} \sin \psi_i \sin 2(\theta_i + \gamma_i) - \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \cos(2\theta_i + 3\gamma_i) + \right.$$

$$+ \lambda_i' \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{r_i}{L} \cos \psi_i [f_i \sin(\theta_i + \gamma_i) \mp h \sin 2(\theta_i + \gamma_i)] +$$

$$\left. + \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2} f_i \sin 3(\theta_i + \gamma_i) \right\}, \tag{28}$$

$$B_3 = \mp (M_P + M_B) R^2 \frac{h\lambda^2}{2\mu^2} \pm M_B \frac{a}{L} R^2 \frac{h\lambda^2}{\mu^2} + \sum_{i=1}^{n} (M_{Pi} + M_{Bi}) R^2 \times$$

$$\times \left\{ \mp \frac{h\lambda^2}{4\mu^2} \frac{r_i^2}{L^2} \cos^2 \psi_i - f_i \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{2\mu_i^2} \cos 3(\theta_i + \gamma_i) - \frac{\lambda}{2\mu} \frac{r_i}{L} \sin \gamma_i \cos \psi_i - \right.$$

$$- \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \sin(2\theta_i + 3\gamma_i) - \frac{\lambda}{4\mu} \frac{r_i^2}{L^2} \sin 2\psi_i - \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \frac{r_i}{L} \sin \psi_i \cos 2(\theta_i + \gamma_i) +$$

$$\left. + \lambda_i' \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{r_i}{L} \cos \psi_i [- f_i \cos(\theta_i + \gamma_i) \mp h \cos 2(\theta_i + \gamma_i)] \right\} -$$

$$- \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} \frac{a_i}{l_i} R^2 \left\{ - \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \sin(2\theta_i + 3\gamma_i) - \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \frac{r_i}{L} \sin \psi_i \cos 2(\theta_i + \gamma_i) + \right.$$

$$+ \lambda_i' \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{r_i}{L} \cos \psi_i [- f_i \cos(\theta_i + \gamma_i) \mp h \cos 2(\theta_i - \gamma_i)] -$$

$$\left. - \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{\mu_i^2} f_i \cos 3(\theta_i + \gamma_i) \right\}, \tag{29}$$

$$A_4 = - (M_P + M_B) R^2 \frac{\lambda^2}{8\mu^2} + M_B \frac{a}{L} R^2 \frac{\lambda^2}{8\mu^2} + \sum_{i=1}^{n} (M_{Pi} + M_{Bi}) R^2 \left[- \right.$$

$$- \frac{\lambda^2}{8\mu^2} \frac{r_i^2}{L^2} \cos^2 \psi_i - \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{8\mu_i^2} \cos 4(\theta_i + \gamma_i) - \lambda_i' \frac{\lambda}{4\mu} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{r_i}{L} \cos \psi_i \cos 2(\theta_i +$$

$$\left. + \gamma_i) \right] - \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} \frac{a_i}{l_i} R^2 \left[- \lambda_i' \frac{\lambda}{4\mu} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{r_i}{L} \cos \psi_i \cos 2(\theta_i + \gamma_i) - \right.$$

$$\left. - \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{8\mu_i^2} \cos 4(\theta_i + \gamma_i) \right], \tag{30}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$B_4 = \sum_{i=1}^{n} (M_{Pi} + M_{Bi}) R^2 \Big[- \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{8\mu_i^2} \sin 4(\theta_i + \gamma_i) - \lambda_i' \frac{\lambda_i}{2\mu_i} \sin (2\theta_i + 3\gamma_i) \Big] - \sum_{i=1}^{n} M_{Bi} \frac{a_i}{l_i} R^2 \Big[- \lambda_i' \frac{\lambda}{4\mu} \frac{\lambda_i}{\mu_i} \frac{r_i}{L} \cos \psi_i \sin 2(\theta_i + \gamma_i) - \lambda_i'^2 \frac{\lambda_i^2}{4\mu_i^2} \sin 4(\theta_i + \gamma_i) \Big]. \tag{31}$$

3. CAZURI PARTICULARE

Expresiile coeficienților A_k, B_k pentru cazurile particulare se obțin cu ușurință prin introducerea condițiilor corespunzătoare în relațiile (23) — (31). În continuare se precizează aceste condiții [2].

a) *Mecanismul cu biele secundare dezaxat cu axele cilindrilor paralele.* Axele cilindrilor fiind paralele, rezultă $\gamma_i = 0$ sau $\gamma_i = \pi$, iar din relația (13) se deduce $\theta_i = 0$.

b) *Mecanismul cu biele secundare axat cu* $\psi_i \neq 0$. În cazul acesta, $h = 0$, $h_i = 0$, iar din relația (1) rezultă

$$f_i = - \frac{1}{\lambda_i} \frac{r_i}{l_i} \mu \sin \psi_i .$$

c) *Mecanismul cu biele secundare axat cu* $\psi_i = 0$. Condițiile acestui mecanism sînt

$$h = 0, \; h_i = 0, \quad \psi_i = 0,$$

iar din formula (1) rezultă și $f_i = 0$.

d) *Mecanismul motoarelor în V cu bielele decalate.* La acest mecanism, condițiile sînt

$$i = 1, \; r_1 = 0, \; l_1 = L, \; M_{P1} = M_P, \; B_{B1} = M_B, \; J_{L1} = J_B,$$

iar din formulele (12), (13), (14) rezultă

$$f_1 = \pm h_1, \quad \theta_1 = 0, \quad \lambda_1 = \lambda, \quad \lambda_1' = 1.$$

Dacă mecanismul este și axat, rezultă și

$$h = 0, \; h_1 = 0.$$

e). *Mecanismul bielă-manivelă simplu dezaxat.* În acest caz, evident, rezultă

$$M_{Pi} = 0, \quad M_{Bi} = 0, \quad J_{Bi} = 0.$$

b) *Mecanismul bielă-manivelă simplu axat.* Față de cel precedent, la acest mecanism avem și $h = 0$.

4. DETERMINAREA MOMENTULUI FORȚELOR DE INERȚIE REDUS LA AXUL MANIVELEI

Așa cum se arată în cursul „Teoria mecanismelor și a mașinilor" [1], [4], expresia momentului forțelor de inerție redus la manivelă pentru un mecanism este

$$M^* = -\frac{dE}{d\alpha} = -\frac{d}{d\alpha}\left[\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 J(\alpha)\right] = -\ddot{\alpha} J(\alpha) - \frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 J'(\alpha). \quad (32)$$

Pentru mecanismul bielă-manivelă general, în baza relațiilor (22) și (32) rezultă expresia

$$M^* = -\ddot{\alpha}\left[A_0 + \sum_{k=1}^{4}(A_k \cos K\alpha + B_k \sin K\alpha)\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\dot{\alpha}^2 \sum_{k=1}^{4}(kB_k \cos k\alpha - kA_k \sin k\alpha). \quad (33)$$

În cazul mișcării de regim, $\ddot{\alpha} \approx 0$ și evident, relația (33) se simplifică.

Pentru mecanismul bielă-manivelă simplu axat în mișcare de regim, expresia (33) are următorul conținut:

$$M^* = \left[M_P + M_B\left(1 - \frac{a}{L}\right)\right] R^2 \omega^2 \frac{\lambda}{4\mu}(\sin\alpha - 3\sin 3\alpha) +$$

$$+\left[\frac{J_B}{L^2}\frac{1}{\mu^2} - (M_P + M_B)\right]\frac{R^2\omega^2}{2}\sin 2\alpha - \left[M_P + M_B\left(1 -\right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{2a}{L}\right)\right]\frac{\lambda^2 R^2 \omega^2}{4\mu^2}\sin 4\alpha. \quad (34)$$

Dacă din această expresie se neglijează termenii care conțin pe λ^2, se ia $\mu = 1$ și se admite că repartiția statică a masei bielei în cele două articulații este echivalentă, și din punct de vedere dinamic rezultă

$$J_B = M_B \frac{a}{L} L^2, \quad (35)$$

iar relația (34) devine identică cu cea dată în [3]. Evident, relația (35) nu este adevărată și deci relația (34) este cea corectă.

5. CONCLUZII

Relațiile (23) — (31) permit, cu o aproximație foarte bună, stabilirea seriei Fourier a momentului de inerție redus pentru orice tip de mecanism bielă-manivelă. Calea urmată este simplă, nu face nici o aproximare la considerarea distribuției masei bielei și face apel la o singură simplificare bine justificată [2], și anume $\cos\beta \approx \mu$, $\cos\beta_i \approx \mu_i$. Din relațiile (23)—(31) pot fi neglijați o serie de termeni, deoarece mărimile λ, λ_i, h, $f_i, r_i/L$ au valori subunitare, ca și funcțiile trigonometrice care intră în aceste expresii. Relația (22) permite aflarea imediată a momentului forțelor de inerție redus la manivelă și expresiile obținute sînt mai exacte decît cele date în literatură.

Primită la redacție la 31 martie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. I. I. Artobolevski, *Teoria mecanismelor și a mașinilor*, (trad. din l. rusă), București, Edit. tehnică, 1955.
2. George Bărănescu, *O generalizare a formulelor de analiză armonică a momentului motor produs de forțele de inerție și de greutățile pieselor mecanismelor bielă-manivelă la motoarele cu ardere internă*, St. cerc. mec. aplic., **XIII**, 5, 1193—1219 (1962).
3. J. P. Den Hartog, *Vibrations mecaniques*, ed. 2, Paris, Dunod, 1960.
4. N. I. Manolescu, D. Maros, *Teoria mecanismelor și a mașinilor. Cinetostatica și dinamica*, București, Edit. tehnică, 1958.

STUDIUL LOCAL AL SCURGERILOR ÎNSOȚITE DE UNDE DE ȘOC ȘI DE COMBUSTIE CU AJUTORUL UNUI NOU TIP DE POLARĂ

de D. PANTAZOPOL, F. MUNTEANU
I.M.F.C.A.

Lucrarea prezintă metoda de construcție a unei polare șoc-combustie pentru studiul curgerii bidimensionale a unui amestec combustibil în prezența unei unde de șoc și a unei unde de combustie ce se propagă în gazul comprimat prin șoc, ambele unde fiind presupuse plane. Polara propusă reprezintă legătura dintre deviația finală a curentului și saltul de presiune la trecerea prin cele două unde.

1. INTRODUCERE

În studiul scurgerilor supersonice plane în care apar unde de șoc oblice sau, în cazul amestecurilor gazoase combustibile, unde de detonație oblice, un mijloc de investigare destul de des folosit îl constituie polarele de șoc, respectiv de detonație, care reprezintă în planul hodografic legătura dintre parametrii curentului de după unda oblică în condiții date înainte de undă [1]. Cel mai adesea aceste polare se trasează în coordonatele δ, P_1/P_∞, unde δ reprezintă unghiul de deviație a curentului la trecerea prin undă, iar P_1, P_∞ presiunile după și respectiv înaintea undei. Sub această formă, polarele de șoc au fost utilizate [2], [3] pentru studiul interacțiunilor, reflexiei și refracției undelor de șoc, în special în cazul configurațiilor cu intersecții triple de unde (reflexie neregulată, reflexie Mach).

Polarele de detonație și-au găsit aplicarea în studiul undelor de detonație [4], în structura cărora punctele triple de intersecții de unde joacă, după ultimele ipoteze, un rol esențial.

În lucrarea de față se prezintă metoda de construcție a unui nou tip de polare, destinate să descrie scurgerea bidimensională staționară a unui amestec gazos combustibil printr-un complex format dintr-o undă de șoc oblică și o undă de combustie, ambele fiind considerate plane și așezate la unghiuri diferite față de direcția curentului în amonte.

Polara șoc combustie propusă reprezintă legătura dintre deviația totală δ^* a curentului după trecerea prin cele două unde și variația presiunii

P_2/P_∞ (fig.1). Menționăm că în lucrarea de față se urmărește doar principiul de construcție și utilizare a polarelor șoc-combustie pentru configurația de unde schematizată în figura 1, în care scop se vor adopta o serie de ipoteze de idealizare a fenomenului ce vor fi discutate pe parcursul lucrării.

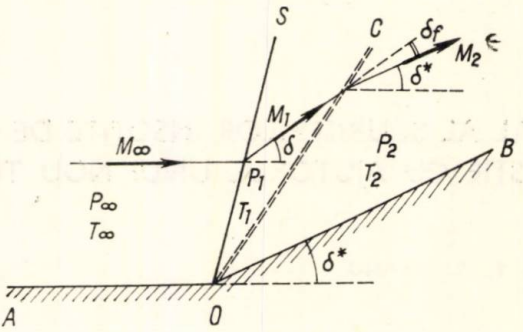


Fig. 1

2. PRINCIPIUL DE CONSTRUCȚIE AL POLAREI ȘOC-COMBUSTIE

Configurația curgerii este reprezentată schematic în figura 1. Curentul supersonic de gaze preamestecate are inițial direcția peretelui AO și presiunea P_∞, temperatura T_∞, numărul Mach M_∞.

În punctul O, peretele solid își schimbă direcția cu unghiul δ^* și tot aici, printr-un procedeu adecvat, se realizează aprinderea continuă a amestecului combustibil. Pentru o anumită poziție a peretelui solid OB, considerînd viteza de propagare a frontului de flacără ca o funcție de parametrii gazului dinaintea sa și presupunînd totdeauna această viteză mai mică decît viteza curentului după unda de șoc, va rezulta poziția frontului de flacără OC în intercorelație cu poziția undei de șoc OS.

Unda de șoc oblică OS deviază curentul cu unghiul δ, care este legat de intensitatea undei $\xi = P_1/P_\infty$, prin ecuația polarei de șoc [2]:

$$\operatorname{tg}.\delta = \frac{\xi - 1}{1 + \gamma M_\infty^2 - \xi} \sqrt{\frac{\frac{2\gamma}{\gamma+1} M_\infty^2 - \frac{\gamma-1}{\gamma+1} - \xi}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \xi}} \tag{1}$$

(γ fiind exponentul adiabatic al gazului).

Temperatura T_1 și numărul Mach M_1 după unda de șoc sînt date de relațiile cunoscute [1]:

$$\frac{T_1}{T_\infty} = \frac{\frac{\gamma-1}{\gamma+1}\xi + 1}{\frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \xi} \cdot \xi, \tag{2}$$

$$M_1^2 = \frac{[(\gamma+1)\xi + (\gamma-1)]\, M_\infty^2 - 2(\xi^2-1)}{\xi[(\gamma-1)\xi + (\gamma+1)]}. \tag{3}$$

Frontul de flacără poate fi asimilat cu o suprafață de discontinuitate prin salt a parametrilor gazului în ipoteza unei viteze de reacție chimică

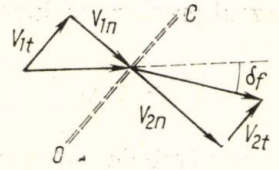


Fig. 2

infinit de mare (practic această ipoteză va fi cu atît mai aproape de realitate, cu cît temperatura amestecului de gaze și deci viteza de reacție vor fi mai mari). În acest caz, pe baza ecuațiilor de conservare a masei, impulsului și energiei la trecerea prin unda de combustie se deduc următoarele relații : [5]

$$\frac{\rho_1}{\rho_2} = \lambda = \frac{V_{2n}}{V_{1n}}, \tag{4}$$

unde ρ_1 și ρ_2 sînt densitățile amestecului nears și respectiv a produselor de ardere, iar V_{1n}, V_{2n} componentele vitezelor de curgere normale la frontul de combustie (fig.2).

$$\frac{P_2}{P_1} = \eta = 1 - \gamma\,(\lambda - 1)\, m^2, \tag{5}$$

unde cu $m = V_{1n}/a_1$ s-a notat numărul Mach al flacării și cu a_1 viteza sunetului în gazul nears, V_{1n} fiind egal cu viteza de propagare a flacării în ipoteza mișcării staționare. S-a presupus că γ, exponentul adiabatic al amestecului, este același atît înainte, cît și după ardere, ceea ce este adevărat în cazul amestecurilor foarte sărace ;

$$(\gamma+1)\,(\lambda-1) = \left(\frac{1}{m^2} - 1\right) \pm \sqrt{\left(\frac{1}{m^2} - 1\right)^2 - \frac{2Q(\gamma^2-1)}{a_1^2 m^2}}, \tag{6}$$

unde cu Q s-a notat cantitatea de căldură degajată prin ardere de unitatea de masă de amestec gazos. În relația de mai sus, semnul „—" este singurul care are sens, semnul „+" corespunzînd unor regimuri de ardere („deflagrații puternice") nerealizabile din punct de vedere gazodinamic.

Din aceleași legi de conservare se deduce mărimea deviației curentului la trecerea prin unda de combustie :

$$\operatorname{tg}\delta_f = \frac{m(\lambda-1)\sqrt{M_1^2 - m^2}}{M_1^2 + (\lambda-1)\, m^2}. \tag{7}$$

Observînd că deviația δ_f este opusă deviației δ prin unda de șoc, se poate scrie deviația totală a curentului la trecerea prin complexul undă de șoc-undă de combustie :

$$\delta^* = \delta - \delta_f . \tag{8}$$

Notînd cu $\xi^* = P_2/P_\infty$ raportul presiunilor după și înaintea aceluiași complex de unde, vom mai avea

$$\xi^* = \xi \cdot \eta . \tag{9}$$

La ecuațiile scrise mai sus trebuie adăugată pentru fiecare caz concret legea corespunzătoare de variație a vitezei de propagare a flăcării cu temperatura și presiunea amestecului :

$$m = m(T_1, P_1). \tag{10}$$

Lăsînd la o parte relația (4), sistemul format din cele nouă ecuații de mai sus permite găsirea tuturor parametrilor scurgerii și, în particular, trasarea polarei șoc-combustie $\xi^* = \xi^*(\delta^*)$ pentru M_∞, T_∞, P_∞ și Q dați. Se poate da o interpretare și o metodă de construcție grafică a polarei șoc-combustie. Făcînd notația

$$q_1 = \frac{2Q(\gamma^2 - 1)}{a_1^2}$$

și eliminînd parametrul λ dintre relațiile (5) și (6), se găsește expresia raportului presiunilor după și înainte de unda de combustie [6] :

$$\eta = \frac{P_2}{P_1} = \frac{1}{\gamma + 1}\left[1 + \gamma m^2 + \gamma\sqrt{(1 - m^2)^2 - q_1 m^2}\right]. \tag{11}$$

Eliminînd acum succesiv parametrii λ și m dintre relațiile (5), (7), și (11), se obține o relație între δ_f și η care reprezintă ecuația polarei de deflagrație [6] :

$$\operatorname{tg}\delta_f = \frac{1 - \eta}{\gamma M_1^2 + 1 - \eta}\sqrt{\frac{M_1^2\left[1 + \dfrac{\gamma q_1}{2(\gamma + 1)(1 - \eta)}\right]}{1 - \dfrac{\gamma + 1}{2\gamma}(1 - \eta)} - 1}. \tag{12}$$

Pentru un amestec combustibil cunoscut (se dau γ și Q) și pentru un număr Mach de curgere M_∞ dat vom avea (fig. 3) o polară de șoc (1) și, în fiecare punct al acesteia, o polară de deflagrație (12) corespunzătoare valorilor M_1, T_1, P_1 după unda de șoc.

Cunoscînd legea de variație a numărului Mach al flăcării cu temperatura și cu presiunea, deci forma concretă a relației (10), cu ajutorul relației

(11) se poate determina punctul de pe polara de deflagrație corespunzător valorilor finale ξ^*, δ^*. Avînd o familie de polare de deflagrație corespunzătoare diferitelor puncte pe polara de șoc, se poate construi polara șoc-combustie căutată.

În ce privește dependența vitezei de propagare a flăcării cu temperatura și cu presiunea pentru diferite amestecuri combustibile, în special în

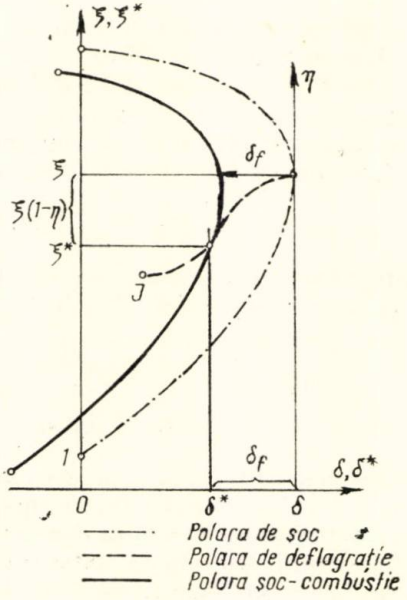


Fig. 3

cazul vitezelor mari, supersonice, ale curentului, nu există pînă în prezent date pentru formularea unor legi generale și în același timp suficient de exacte pentru descrierea fenomenului în intervale largi de variație a parametrilor. Fenomenul de propagare a flăcării cuprinde atît aspecte cinetico-chimice, legate de dezvoltarea reacțiilor, care pot fi simple sau în lanț, autocatalitice, cît și aspecte legate de difuzia componenților, a produșilor intermediari activi între zona de ardere și amestecul proaspăt, de încălzirea amestecului datorită căldurii de reacție, de turbulența curgerii etc.

Întrucît aceste aspecte au ponderi diferite în diferitele cazuri concrete funcție de compoziția amestecului, de viteza de curgere, presiune, temperatură etc., diferitele teorii existente (prezentate, de exemplu în [7]) pun accent doar pe unele sau pe altele din aceste laturi și din această cauză au o aplicabilitate limitată.

Deși rezultatele obținute în diverse lucrări diferă întrucîtva unele de altele cantitativ și chiar calitativ, ele conduc totuși la aceleași concluzii generale, care în linii mari sînt următoarele :

1) viteza de propagare crește sensibil cu temperatura inițială a amestecului ;

2) viteza de propagare crește cu numărul Reynolds al scurgerii ;

3) presiunea influențează viteza de propagare, dar această influență este mai puțin importantă decît cea datorată temperaturii, și anume influența este cu atît mai mică cu cît ordinul reacțiilor este mai mic.

Ținînd cont de aceste concluzii, s-a adoptat pentru a da un exemplu de construcție a polarei șoc-combustie formula clasică a lui Passauer [7]:

$$V_{1n} = AT^2, \tag{13}$$

unde coeficientul A s-a determinat astfel încît să includă și efectul vitezei de curgere, respectiv al numărului Reynolds, pe baza unor date experimentale din lucrările lui Zuev și Scubacevski și Rubins și Rhodes [9], considerînd ca valabilă formula stabilită experimental [8], [10], care leagă viteza de propagare de numărul Reynolds al curgerii în fața frontului de flacără și de viteza de propagare laminară a flăcării:

$$V_{1n} = 0{,}07\ (\mathrm{Re})^{0{,}4}.\ V\ \mathrm{lam}. \tag{14}$$

Calculele s-au făcut pentru un amestec sărac de hidrogen în aer.

Valoarea găsită pentru coeficientul A a fost

$$A = 1{,}115 \cdot 10^{-6}\ \frac{[\mathrm{kcal}]^{\frac{1}{2}}}{[\mathrm{kg}]^{\frac{1}{2}}\ [\mathrm{grad}]^2}.$$

Menționăm că formulele (13) și (14) și estimarea coeficientului A sînt doar o evaluare cu totul aproximativă a comportării vitezei de propagare a flăcării în regim supersonic, făcută în lipsa unor date certe experimentale asupra acestei chestiuni. Metoda de construcție a polarei șoc-combustie rămîne valabilă pentru orice lege privind viteza de propagare a flăcării.

Numărul Mach al flacării definit anterior capătă prin folosirea relației (13) expresia

$$m = \frac{V_{1n}}{a_1} = \frac{A}{\sqrt{\gamma R}}\, T_1^{\frac{3}{2}}, \tag{15}$$

unde R = constanta amestecului gazos respectiv (considerată aceeași înainte și după ardere).

Relația (11) devine

$$\lambda = \frac{1}{\gamma+1}\left[\gamma + \frac{\gamma R}{A^2}\, T_1^{-3} - \sqrt{\left(\frac{\gamma R_i}{A^2}\, T_1^{-3} - 1\right)^2 - \frac{2(\gamma^2-1)Q}{A^2 T_1^4}}\right]. \tag{16}$$

Polarele trasate pentru $M_\infty = 2{,}0$; $\gamma = 1{,}4$ sînt prezentate în figura 4.

Pentru un anumit amestec combustibil caracterizat prin căldura de reacție pe unitate de masă Q, aflat la temperatura normală $T_0 = 300°\mathrm{K}$, s-a notat

$$q_0 = \frac{2Q(\gamma^2-1}{RT_0},$$

iar pentru același amestec preîncălzit la o temperatură T_∞ s-a ținut cont de relațiile

$$q_\infty = q_0 \frac{T_0}{T_\infty} \quad ; \quad q_1 = q_\infty \frac{T_\infty}{T_1}.$$

3. CONCLUZII ȘI OBSERVAȚII

Din examinarea curbelor trasate pentru exemplificare (fig. 4) se pot trage unele concluzii. Astfel scăderea relativă de presiune $(1 - \eta)$ datorită combustiei este foarte mică, lucru binecunoscut din teorie și din experiențe. Deviația δ_f prin unda de combustie crește o dată cu intensi-

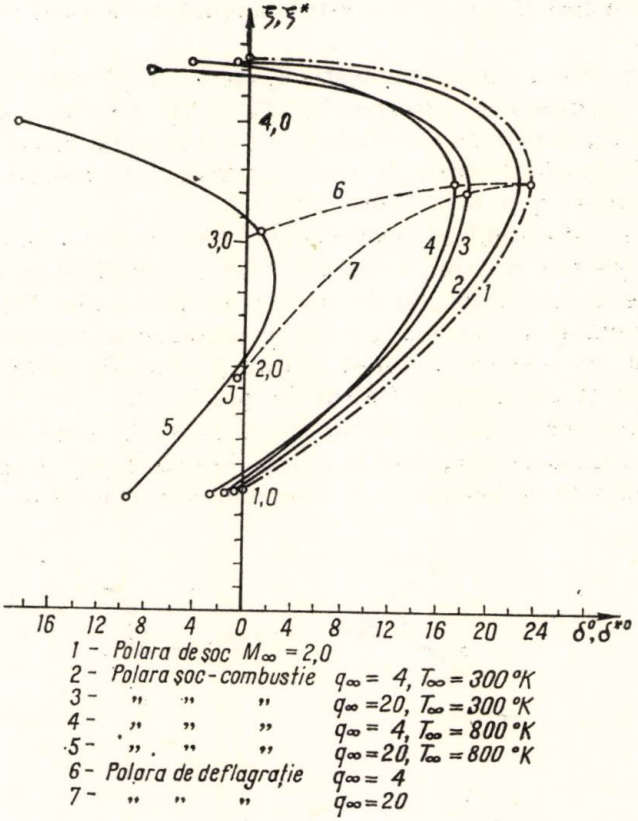


Fig. 4

tatea undei de șoc, ceea ce se explică prin creșterea temperaturii T_1 și deci a parametrului m. Trebuie arătat însă că creșterea numărului Mach al frontului de combustie este limitată de o valoare critică, dată de relația [5]

$$m^2_{c(-)} = 1 + \frac{q_1}{2} - \sqrt{\left(1 + \frac{q_1}{2}\right)^2 - 1}, \qquad (17)$$

corespunzătoare deflagrației cu viteză maximă („deflagrație Jouguet"). Înlocuind această valoare în (11) și (12), se obține un punct pe polara de deflagrație (punctul J din fig. 4), care separă domeniul regimurilor posibile (deflagrații slabe) de deflagrațiile puternice imposibile din punct de vedere gazodinamic. Putem fi limitați astfel la o singură porțiune, corespunzătoare undelor de șoc de intensitate slabă pe polara șoc-combustie. Se mai poate observa că sistemul format din ecuațiile (1) — (3), (5) — (10) admite soluții parametrice reale (corespunzătoare polarei șoc-combustie) și pentru m mai mare decît valoarea critică $m_{c(+)}$, care se obține luînd semnul „+" în fața radicalului în relația (17), dar, întrucît în acest caz $m > m_{c(+)} > 1$, unda de combustie OC (fig.1) ar trebui să se transforme în unda de detonație și se poate demonstra că nu poate exista o asemenea configurație. Singurul regim posibil în acest caz este o singură undă de detonație supracomprimată.

Deviația prin unda de combustie δ_f crește, după cum se vede și din figura 4, cu preîncălzirea amestecului T_∞ și cu mărimea q_0. Pentru o temperatură T_∞ dată e de presupus ca deviația să fie maximă în jurul concentrației stoechiometrice, în care caz însă ar trebui ținut seama de variația mărimilor γ și R în urma arderii.

O configurație similară celei studiate mai sus apare în cazul așa-numitei detonații-spin, a cărei structură a fost înregistrată prin metode foarte precise de fotografiere și de măsurare a presiunilor [11] (fig.5). Referindu-ne numai la aspectul care ne interesează, se poate constata că unda curbă AB își schimbă pe lungimea sa direcția față de curentul dinaintea sa, ca urmare și intensitatea (saltul de presiune).

În timp ce pe porțiunea BC de intensitate mai mare arderea are loc imediat după unda de șoc, deci în regim de detonație, pe porțiunea CA unda de combustie se îndepărtează din ce în ce mai mult de unda de șoc,

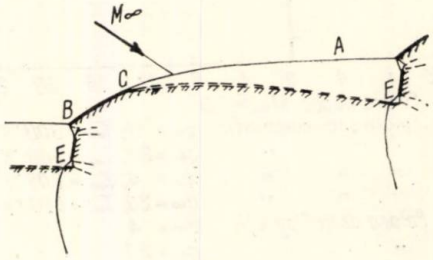


Fig. 5

arderea propagîndu-se în amestecul comprimat în urma undei de șoc, dar nemaifiind cauzată direct de aceasta prin autoaprindere. În mod aproximativ (fenomenul fiind de fapt tridimensional), curgerea astfel desfășurată poate fi reprezentată pe un arc al polarei șoc-combustie.

Primită la redacție la 5 august 1970

BIBLIOGRAFIE

1. E. Carafoli, *Aerodinamica vitezelor mari* (*Fluide compresibile*), Edit. Academiei, 1957.
2. L. E. Henderson, The Aeronautical Quarterly, mai 1964.
3. L. E. Henderson, J. Fluid Mechanics, *26* (1966).
4. A. K. Macpherson, Astronautica Acta, **14** (1969).
5. J. F. Clarke, *Some remarks on the treatment of fully-supersonic oblique flames as gas-dynamical discontinuities*, Co. A. Report Aero, *179* (1965).
6. K. I. Sceolkin, I. K. Troșin, *Gazodinamika goreniia*, Moskva, Izd. AN. SSSR, 1963.
7. E. S. Scetinkov, *Fizika goreniia gazov*, Moskva, ,,Nauka'', 1965.
8. V. Pimsner, C. A. Vasilescu, G. A. Rădulescu, *Energetica turbomotoarelor cu ardere internă*, Edit. Academiei 1964.
9. P. M. Rubins, R. P. Rhodes, A.I.A.A. — A.S.M.E. *Hypersonic* Ramjet Conference N.O.L. White Oak MD AIAA, Preprint 63—117, 1963.
10. — Osnovî goreniia uglevodorodnîh topliv, Izd. I. L. Moskva, 1960 (trad. după N.A. C.A. Report. Nr. 1300, 1957).
11. B.V. Voițehovski, V. V. Mitrofanov, M. E. Topciian, *Struktura fronta detonații v gazah* izd. Sib. Otd. AN.SSSR, 1963.

STUDIUL SCURGERII SUPERSONICE ÎN JURUL ARIPILOR DELTA CU ANTISIMETRIE FORȚATĂ ȚINÎND SEAMA DE DESPRINDEREA CURENTULUI LA BORDURILE DE ATAC

ȘT. STAICU
Institutul politehnic, București

Lucrarea studiază scurgerea supersonică în jurul aripilor delta subțiri avînd distribuția de incidențe antisimetrică forțată și luînd în considerație separația curentului la bordurile de atac. Considerînd o aripă fictivă subțire, echivalentă cu cea reală din punct de vedere aerodinamic, se determină distribuția de presiuni și caracteristicile aerodinamice ale aripii.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În cele ce urmează vom face un studiu al scurgerii supersonice în jurul aripilor delta subțiri avînd distribuția de incidențe antisimetrică forțată și luînd în considerație desprinderile curentului la bordurile de atac subsonice ale acesteia. Distribuția antisimetrică a incidențelor sau a vitezelor verticale corespunde unei aripi delta arcuită antisimetric forțat după o funcție liniară sau uneia bracată antisimetric.

Cît timp incidențele sînt foarte mici, presiunile pe aripă urmăresc aproximativ legile stabilite în ipoteza perturbațiilor mici, în afară de regiunea din imediata apropiere a bordurilor de atac, unde vitezele și presiunile corespunzătoare sînt finite, deși ar rezulta din teoria liniarizată valori infinite. Se poate spune deci că, în afară de această regiune limitată de-a lungul bordului de atac, această teorie este valabilă pe întreaga aripă, astfel încît desprinderea curentului se face abia simțită și influența acesteia este mică pe întreg cuprinsul aripii.

Pe măsură ce valorile incidențelor locale devin mai mari, curentul se separă la bordurile de atac, ca și la aripa delta plană cu incidența constantă, creînd cîte un strat de vîrtejuri care se așază deasupra și dedesubtul aripii, producînd o mișcare antisimetrică. Stratul de vîrtejuri, avînd grosimea suficient de mică, poate fi considerat ca o pînză de vîrtejuri care se înfășoară sub forma unui cornet, compus dintr-un nucleu concentrat și o pînză de vîrtejuri marginală, pornind de la bordul de atac.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 2, 1971, P. 431–452

Incidența fiind variabilă pe suprafața aripii, axa pe care se înfășoară cornetul va fi o curbă, iar intensitatea turbionară a nucleului este variabilă în lungul axei proporțional cu pătratul deschiderii aripii. Pentru simplificare, în cele ce urmează, axa pe care se situează nucleele de vîrtejuri se consideră a fi o linie dreaptă. Astfel sistemul celor două vîrtejuri concentrate, de aceeași intensitate și de același semn, situate antisimetric în raport cu axa de simetrie Ox_1 (fig.1) la abscisa c și ordonata t, va aduce modificări esențiale asupra cîmpului scurgerii în jurul aripii.

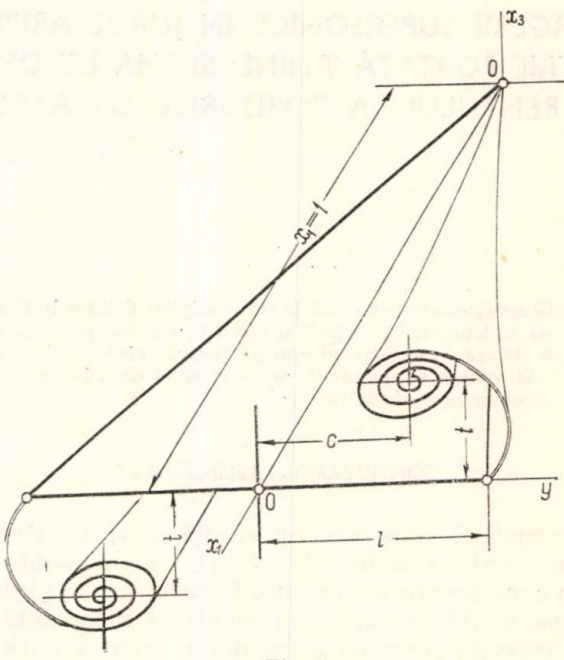


Fig. 1

Scurgerea rezultantă, care va deveni mai complicată, o vom studia pe baza *teoriei mișcărilor conice* de ordinul doi [1].

Pentru aceasta vom urmări calea utilizată în lucrările anterioare [2] — [4], unde s-au dat soluțiile pentru aripa delta subțire cu incidența constantă și, respectiv, antisimetrică (antisimetrie forțată) în raport cu axa Ox_1, care au condus către mișcări conice de ordinul unu (conice propriu-zise).

Vom admite că efectul desprinderii curentului la bordurile aripii și formarea celor două nuclee antisimetrice constau în modificarea cîmpului vitezelor verticale și longitudinale, avînd ca urmare evitarea vitezelor infinite la bordurile de atac, așa cum rezultă din teoria liniară clasică. Dar se poate admite că efectul vitezelor longitudinale de perturbație va putea fi înlocuit prin acela al unei distribuții corespunzătoare a vitezelor verticale. De aceea vom considera o distribuție de incidențe sau de viteze verticale, antisimetric forțată, așa ca să corespundă cazului real al unei aripi delta subțiri fictive cu incidență variabilă, diferită pe cele două fețe ale sale, avînd în același timp vitezele finite la bordurile de atac.

Se va admite că aripa reală subțire, care are în mod cert vitezele finite la borduri prin efectul separării curentului, este echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu o aripă subțire fictivă, avînd aceeași variație de incidențe pe care am definit-o mai înainte.

Pentru a studia mai ușor scurgerea prin metoda mișcărilor conice, vom descompune aripa fictivă corespunzătoare distribuției de viteze verticale de mai sus în trei aripi componente, în același mod ca în [2] — [4]:

1) aripa subțire, avînd o variație de incidență antisimetrică forțată convenabil aleasă pentru a urmări într-o oarecare măsură fenomenul modificării presiunilor și al vitezelor verticale de perturbație pe suprafața aripii în apropierea bordului de atac. Se obține astfel o aripă subțire fictivă cu vitezele finite la bordurile de atac, dar egale și de sens contrar pe cele două fețe, superioară și inferioară;

2) aripa de grosime „simetrică", avînd panta variabilă în același mod ca și incidența primei aripi. Această aripă, combinată cu prima, va forma o aripă cu presiunile diferite pe cele două fețe, cum se constată și în realitate;

3) aripa a treia va avea „grosimea" simetrică, cu panta variabilă și antisimetrică forțată, însă în așa fel ca, combinată cu aripa din 2), să se obțină o grosime medie nulă, caracteristică unei aripi reale subțiri. Suprapunînd scurgerile din jurul celor trei aripi componente, vom obține aripa rezultantă fictivă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa delta cu separația curentului la borduri.

2. DETERMINAREA VITEZELOR AXIALE DE PERTURBAȚIE

În continuare vom urmări modul de determinare a vitezelor axiale de perturbație pentru cele trei aripi componente cu antisimetrie forțată, fiindu-ne necesare pentru determinarea distribuției de presiuni și a caracteristicilor aerodinamice ale aripii fictive rezultante, care sînt presupuse a fi aceleași cu cele ale aripii delta subțiri reale, avînd incidența definită de relația

$$w = \pm w_{10}\, x_1 = \mp x_1\, \alpha_{10} U_\infty. \tag{1}$$

Vom nota mai departe

$$w_u' = -\alpha_u' U_\infty, \quad w_l' = -\alpha_l' U_\infty, \tag{2}$$

vitezele verticale și incidențele w_u', α_u' pe fața superioară respectiv w_l', α_l' pe cea inferioară a aripii fictive subțiri.

Mișcarea în jurul aripii fiind conică de ordinul doi, vom utiliza aceleași metode obișnuite, considerînd în acest sens planul fizic Oyz (fig. 1) normal pe axa Ox_1 și avînd coordonatele

$$y = \frac{x_2}{x_1}, \quad z = \frac{x_3}{x_1}, \tag{3}$$

axele Oy şi Oz fiind paralele, respectiv cu Ox_2 şi Ox_3. Mai departe vom face transformarea analogă cu cea dată de Busemann (fig. 2):

$$\eta = \frac{y}{1 - B^2 z^2}, \quad \zeta = \frac{z\sqrt{1 - B^2(y^2 + z^2)}}{1 - B^2 z^2} \quad (x = \eta + i\zeta), \tag{4}$$

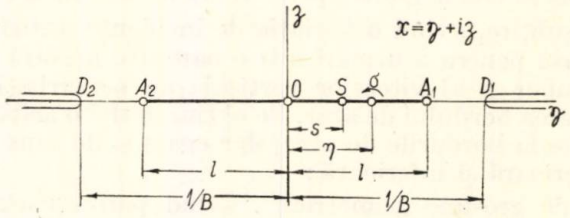


Fig. 2

obţinînd un plan care are proprietatea de a păstra urma aripii ($\eta = y$, $z = \zeta = 0$) în adevărata mărime. În acest plan, primele derivate ale vitezelor de perturbaţie u, v şi w sînt funcţii armonice şi li se pot asocia funcţiile conjugate corespunzătoare, astfel încît să se obţină funcţii analitice de variabilă complexă:

$$x = \eta + i\zeta. \tag{5}$$

Să studiem pe rînd fiecare aripă definită mai sus.

2.1. *Aripa subţire antisimetrică.* Ca urmare a efectului celor două nuclee de vîrtejuri, se modifică viteza verticală atît pe aripa reală, cît şi pe prima aripă componentă, definită mai sus.

Astfel, pentru punctele cuprinse între $[-s < y < s]$ de pe urma aripii cuprinse în planul $x = \eta + i\zeta$ (5), viteza verticală va fi considerată constantă pentru $x_1 = \text{const}$

$$w' = \pm x_1 w_{10}^{(0)} = \mp x_1 \alpha_{10}^{(0)} U_\infty, \tag{6}$$

unde parametrul $w_{10}^{(0)}$ corespunde abscisei $y = s$, iar pentru domeniul $y \in [-l, -s] \cup [s, l]$ vom scrie

$$w' = \pm x_1 w'_{10}(y) = \mp x_1 \alpha'_{10}(y) U_\infty, \tag{7}$$

astfel ca la bordurile de atac ($y = \pm l$) să se obţină

$$w^{(1)} = \pm x_1 w_{10}^{(1)} = \mp x_1 \alpha_{10}^{(1)} U_\infty. \tag{8}$$

Această variaţie continuă a vitezelor verticale (sau, mai precis, a parametrului $w'_{10}(y)$) corespunde unei distribuţii continue de muchii elementare, situate pe aripă în interiorul intervalului considerat, care dau în fiecare punct $y = \eta$ saltul elementar.

Dar, ținînd seama de lucrările anterioare [1], [2], contribuția unei muchii elementare situate în punctul $y = \eta$ în expresia vitezei axiale de perturbație în punctul x, aplicînd metoda analogiei hidrodinamice, va fi

$$\mathrm{d}\mathcal{U} = q'_{20} \cosh^{-1} \sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}}\, \mathrm{d}\eta. \tag{9}$$

Aceste *contribuții ale muchiilor* în expresiile vitezelor axiale și verticale de perturbație pe aripă se realizează plasînd pe urma aripii din planul $x = y + iz$ (5) niște singularități (surse) de ordinul doi.

În acest mod putem să prindem în calcul efectul celor două nuclee de vîrtejuri concentrate printr-o distribuție continuă de surse. Această repartiție va trebui să satisfacă condițiile impuse de problemă de a obține concomitent vitezele axiale și verticale de perturbație precizate mai sus pe baza observațiilor și rezultatelor experimentale. De aceea vom alege o variație liniară a intensității surselor:

$$q'(y) = q^* \left(1 - \frac{|\eta|}{l}\right) \qquad (s < \eta < l), \tag{10}$$

care, în cazul mișcării omogene de ordinul doi ($n = 2$), se scriu

$$q'_{20} = \pm q^*_{20}\left(1 - \frac{|\eta|}{l}\right), \quad q'_{21} = \pm q^*_{21}\left(1 - \frac{|\eta|}{l}\right). \tag{11}$$

Viteza axială de perturbație pentru aripa componentă subțire va fi obținută prin însumarea contribuțiilor tuturor muchiilor elementare distribuite și ale bordurilor subsonice [1] sub forma

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_l = \mathcal{U}_{1l} = {} & \frac{A_{21}\, x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q^*_{21}\, x \cosh^{-1}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}} + \\ & + \frac{2}{\pi}\int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)(q^*_{20} + x q^*_{21}) \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l-x)}{2l(\eta - x)}}\, \mathrm{d}\eta - \\ & - \frac{2}{\pi}\int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)(q^*_{20} - x q^*_{21}) \cosh^{-1}\sqrt{\frac{(l+\eta)(l+x)}{2l(\eta + x)}}\, \mathrm{d}\eta,\end{aligned} \tag{12}$$

care, după efectuarea calculelor, devine

$$\begin{aligned}\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_l = {} & \frac{A_{21}\, x}{\sqrt{l^2 - x^2}} + \frac{2}{\pi} Q^*_{21}\, x \cosh^{-1}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}} - \\ & - \frac{1}{\pi}\left[(q^*_{20} + q^*_{21} x)(s - x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} - \right. \\ & - (q^*_{20} - q^*_{21} x)(s + x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right)\cosh^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} + \\ & \left. + x\left((q^*_{20} - 2q^*_{21} l)\cos^{-1}\frac{s}{l} + q^*_{21} l\sqrt{1 - \frac{s^2}{l^2}}\right)\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\right],\end{aligned} \tag{13}$$

în care A_{21}, Q_{21}^*, q_{20}^*, q_{21}^* sînt nişte constante ce se vor determina mai jos, $\frac{2}{\pi} Q_{21}^*$ fiind intensitatea unei surse aşezate în origine ($x = 0$), datorită muchiei centrale care apare la aripa cu antisimetrie forţată.

2.2. *Aripa de grosime simetrică avînd panta egală cu incidenţa primei aripi subţiri.* Prin introducerea acestei aripi de grosime simetrică se înlătură vîrfurile accentuate de presiuni pe intradosul aripii, unde distribuţia de presiuni obţinută prin suprapunerea cu prima aripă componentă va fi diferită de cea de pe extrados. Urmînd metoda generală a mişcărilor conice [1], pentru o aripă de grosime simetrică cu variaţia de pantă dată de aceeaşi distribuţie de surse (11) vom scrie pentru viteza axială de perturbaţie următoarea expresie :

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_t = \mathcal{U}_{1t} = \frac{2}{\pi}\int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)(q_{20}^* + x q_{21}^*) \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 - Bx)}{2B(\eta - x)}}\, d\eta -$$

$$- \frac{2}{\pi}\int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right)(q_{20}^* - x q_{21}^*) \cos h^{-1} \sqrt{\frac{(1 + B\eta)(1 + Bx)}{2B(\eta + x)}}\, d\eta +$$

$$+ \frac{2}{\pi} Q_{21}^{**}\, x \cos h^{-1} \sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} \pm L. \tag{14}$$

Efectuînd integralele de mai sus, vom găsi

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_t = \frac{1}{\pi}\left\{(q_{20}^* + q_{21}^* x)\left[(l - x)\left(1 - \frac{l + x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 l x}{B(l - x)} - \right.\right.$$

$$- (s - x)\left(1 - \frac{s + x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 s x}{B(s - x)}\Big] -$$

$$- (q_{20}^* - q_{21}^* x)\left[(l + x)\left(1 - \frac{l - x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 + B^2 l x}{B(l + x)} - \right.$$

$$- (s + x)\left(1 - \frac{s - x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 + B^2 s x}{B(s + x)}\Big] -$$

$$- \frac{x\sqrt{1 - B^2 x^2}}{Bl}\Big[(\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs)(q_{20}^* - 2q_{21}^* l) -$$

$$\left.\left. - \frac{q_{21}^*}{B}(\sqrt{1 - B^2 l^2} - \sqrt{1 - B^2 s^2})\Big]\right\} + \frac{2}{\pi} Q_{21}^{**} x \cos h^{-1}\sqrt{\frac{1}{B^2 x^2}} \pm L, \tag{15}$$

unde L reprezintă contribuția bordului subsonic avînd panta egală cu $\alpha_{10}^{(1)}x_1$, iar termenul care prezintă coeficientul $\frac{2}{\pi}Q_{21}^{**}$ apare numai în cazul antisimetriei forțate.

2.3. *Aripa de grosime simetrică compensatoare de pantă.* Introducerea efectului aripii de la punctul 2.2 face ca aripa rezultantă să aibă o „grosime simetrică". Pentru a compensa acest lucru, vom introduce o nouă distribuție de surse de o formă oarecare, care va readuce aripa la o grosime medie nulă. Variația vitezelor verticale w'' date de aceste surse va corespunde unei „aripi compensatoare de pantă", avînd însă o grosime simetrică în raport cu axa Ox_3, dar antisimetrică față de Ox_2. Această aripă, avînd la bordul aripii viteza $-w_{10}^{(1)}x_1$, va anula panta medie și efectul L al pantei bordului aripii 2.2. Distribuția surselor de intensitate q'' va trebui să creeze pe intradosul aripii o distribuție de presiuni fără vîrfuri accentuate, aproximativ liniară, cu excepția punctelor din apropierea bordurilor de atac.

Vom lua pentru simplificare următoarea expresie a distribuției intensităților surselor :

$$q_{20}'' = q_{20}^{**}\frac{\eta}{l}, \quad q_{21}'' = q_{21}^{**}\frac{\eta}{l}, \quad (-l \leqslant \eta \leqslant l). \tag{16}$$

Am obținut astfel ca cele două „aripi groase" să formeze una singură, avînd panta variabilă în așa fel ca cea medie să fie nulă.

Viteza axială de perturbație $\mathcal{U}_{1c}$ pentru a treia aripă va fi următoarea :

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_c = \mathcal{U}_{1c} = \frac{2}{\pi}q_{20}^{**}\int_0^l \frac{\eta}{l}\left(\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta-x)}} - \right.$$

$$\left. - \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta+x)}}\right)\mathrm{d}\eta + x\frac{2}{\pi}q_{21}^{**}\int_0^l \frac{\eta}{l}\left(\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1-Bx)}{2B(\eta-x)}} + \right.$$

$$\left. + \cos h^{-1}\sqrt{\frac{(1+B\eta)(1+Bx)}{2B(\eta+x)}}\right)\mathrm{d}\eta + \frac{2}{\pi}Q_{21}^{***}x\cos h^{-1}\sqrt{\frac{1}{B^2x^2}} \mp L. \tag{17}$$

În urma calculelor sîntem conduși la expresia

$$\frac{1}{x_1}\mathcal{U}_c = \frac{1}{2\pi B^2 l}\left\{B^2(l^2-x^2)\left[(q_{20}^{**}+q_{21}^{**}x)\cosh^{-1}\frac{1-B^2lx}{B(l-x)} - \right.\right.$$

$$\left. - (q_{20}^{**}-q_{21}^{**}x)\cosh^{-1}\frac{1+B^2lx}{B(l+x)}\right] +$$

$$+2Bx\left[\left(q_{20}^{**}\sin^{-1}Bl + \frac{q_{21}^{**}}{B}(1-\sqrt{1-B^2l^2})\right)\sqrt{1-B^2x^2} + \right.$$

$$\left.\left. + q_{21}^{**}Bx^2\cos h^{-1}\sqrt{\frac{1}{B^2x^2}}\right]\right\} + \frac{2}{\pi}Q_{21}^{***}x\cos h^{-1}\sqrt{\frac{1}{B^2x^2}} \mp L, \tag{18}$$

unde termenul $\frac{2}{\pi}Q_{21}^{***}$ corespunde numai antisimetriei forțate.

Suprapunînd cele trei aripi componente, se obţine aripa fictivă rezultantă, echivalentă din punct de vedere aerodinamic cu aripa reală, pentru care viteza axială de perturbaţie are expresia

$$\mathcal{U}_1 = \mathcal{U}_{1l} + \mathcal{U}_{1s} + \mathcal{U}_{1c}, \tag{19}$$

care va fi antisimetrică faţă de axa de simetrie Ox_1 şi continuă în originea O. Vom observa că viteza $\mathcal{U}_{1l}$ pe faţa superioară este egală şi de semn contrar cu cea de pe faţa inferioară, deoarece corespunde aripii subţiri.

3. DETERMINAREA CONSTANTELOR

Pentru determinarea constantelor q^*_{20} şi q^*_{21} care apar în expresia (13) a lui $\mathcal{U}_{1l}$, vom porni de la următoarele condiţii:

$$\operatorname{Im} \int_\sigma \sqrt{1 - B^2x^2}\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{1l}}{\mathrm{d}\eta}\right) \mathrm{d}x = \frac{\mathrm{d}w'_{10}}{\mathrm{d}\eta}, \tag{20}$$

$$-\operatorname{Im} \int_\sigma \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\, \frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}\left(\frac{\mathrm{d}\mathcal{U}_{1l}}{\mathrm{d}\eta}\right) \mathrm{d}x = 0, \tag{20'}$$

deduse din teoria mişcărilor conice [1], integrarea fiind făcută pe un semicerc σ de rază foarte mică în jurul unui punct oarecare $y = \eta$ de pe aripă, cuprins în intervalul $[y = s,\ y = l]$ (fig. 2).

Vom obţine astfel relaţiile

$$q'_{20} = \frac{\mathrm{d}w'_{10}}{\mathrm{d}\eta}\, \frac{\eta\,(2 - B^2\eta^2)}{(1 - B^2\eta^2)^{3/2}},\quad q'_{21} = -\frac{\mathrm{d}w'_{10}}{\mathrm{d}\eta}\, \frac{1}{(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}, \tag{21}$$

care stabilesc dependenţa dintre intensitatea surselor şi variaţia vitezelor verticale pe aripa fictivă subţire.

Pornind de la aceste relaţii şi ţinînd seama de (11), vom pune condiţiile la limită în punctele $\eta = s$ şi $\eta = l$ pentru parametrul w'_{10} al vitezei verticale:

$$w^{(1)}_{10} - w^{(0)}_{10} = \frac{q^*_{20}}{l} \int_s^l \frac{(l - \eta)\,(1 - B^2\eta^2)^{3/2}}{\eta\,(2 - B^2\eta^2)}\, \mathrm{d}\eta, \tag{22}$$

$$w^{(1)}_{10} - w^{(0)}_{10} = -\frac{q^*_{21}}{l} \int_s^l (l - \eta)\,(1 - B^2\eta^2)^{3/2}\, \mathrm{d}\eta, \tag{22'}$$

de unde găsim primele relații între constantele q^*_{20}, q^*_{21}, $w^{(0)}_{10}$ și $w^{(1)}_{10}$:

$$\frac{1}{2}\,q^*_{20}\Bigg[\sqrt{1-B^2l^2}-\sqrt{1-B^2s^2}-\cos h^{-1}\frac{1}{Bl}+\cos h^{-1}\frac{1}{Bs}-$$

$$-\left(1-\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-B^2s^2}+\frac{1}{Bl}\left(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs\right)-$$

$$-\frac{1}{2}\left(\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}+\sin^{-1}\frac{1+Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bl}-\sin^{-1}\frac{1-Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bs}-\right.$$

$$\left.-\sin^{-1}\frac{1+Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bs}\right)+\frac{1}{\sqrt{2}\,Bl}\left(\sin^{-1}\frac{1-Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bl}-\right.$$

$$\left.-\sin^{-1}\frac{1+Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bl}-\sin^{-1}\frac{1-Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}-Bs}+\sin^{-1}\frac{1+Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2}+Bs}\right)\Bigg]=$$

$$=w^{(1)}_{10}-w^{(0)}_{10}, \tag{23}$$

$$\frac{q^*_{21}}{8B}\Bigg[3\left(\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}\right)+$$

$$+2\left(Bl\,(1-B^2l^2)^{3/2}-Bs\,(1-B^2s^2)^{3/2}\right)+\frac{8}{5Bl}\Big((1-B^2l^2)^{5/2}-$$

$$-(1-B^2s^2)^{5/2}\Big)\Bigg]=w^{(0)}_{10}-w^{(1)}_{10}. \tag{23'}$$

Dar, pe de altă parte, viteza verticală medie $w_{10}x_1$ sau incidența medie $\alpha_{10}x_1$ a aripii reale, egală cu cea a primei aripi componente sau a aripii rezultante fictive, se obține ținînd seama că cele două aripi groase 2) și 3) se compensează reciproc creînd o pantă medie nulă și vom putea scrie relația

$$\frac{1}{l}\int_0^{l} w'_{10}(\eta)\,\mathrm{d}\eta=w_{10}, \tag{24}$$

numai pentru aripa subţire 1.1 Efectuînd integrala, se obţine

$$w_{10} - w_{10}^{(1)} = \frac{q_{21}^*}{48\,B^3 l^2}\left\{\frac{8}{5}\left[B\,(6l-5s)\,(1-B^2s^2)^{5/2} - \right.\right.$$

$$\left. - Bl\,(1-B^2l^2)^{5/2}\right] - 2\left[Bl\,(1-B^2l^2)^{3/2} - Bs\,(1-B^2s^2)^{3/2}\right] -$$

$$\left. - 3\left(Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs\right)\right\}. \tag{25}$$

Pentru determinarea constantelor A_{21} şi Q_{21}^* care apar în expresia (13) a vitezei axiale, se va lua în consideraţie variaţia vitezei verticale $w'_{10}x_1$ de la un punct de pe aripă pînă la unul de viteză verticală nulă (de exemplu de pe cercul Mach). Ca şi în lucrările anterioare [2]—[4], pentru a evita calculele laborioase care apar, vom considera că sursele distribuite liniar în intervalul (s, l) sînt concentrate în $y = s'$, de intensităţi Q_{20} şi Q_{21}, astfel încît vom avea

$$s' = s + \frac{l-s}{3},\quad Q_{20} = \frac{1}{2}\,q_{21}^*\,l\left(1-\frac{s}{l}\right)^2,\quad Q_{21} = \frac{1}{2}\,q_{21}^*\,l\left(1-\frac{s}{l}\right)^2, \tag{26}$$

Procedînd în felul acesta, vom scrie relaţiile

$$-Im\int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \frac{\sqrt{1-B^2x^2}}{x}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}'_{1l}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = 0, \tag{27}$$

$$\mathrm{Im}\int_{\text{aripă}}^{\text{cercul Mach}} \sqrt{1-B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}'_{1l}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x = w_{10}^{(1)}, \tag{27'}$$

unde $\mathcal{U}'_{1l}$ este viteza axială de perturbaţie pentru cazul simplificat al sursei concentrate în $y = s'$, dată de expresia

$$\mathcal{U}'_{1l} = \frac{1}{x_1}\,\mathcal{U}'_l = \frac{A_{21}x}{\sqrt{l^2-x^2}} + \frac{2}{\pi}\,(Q_{20}+Q_{21}x)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(l+s')\,(l-x)}{2l\,(s'-x)}} -$$

$$- \frac{2}{\pi}\,(Q_{20}-Q_{21}x)\cos h^{-1}\sqrt{\frac{(l+s')\,(l+x)}{2l\,(s'+x)}} + \frac{2}{\pi}\,Q_{21}^*\,x\cos h^{-1}\sqrt{\frac{l^2}{x^2}}. \tag{28}$$

Prin efectuarea integralelor care apar mai sus pe axa ordonatelor ($\eta = 0$, $x = i\zeta$) între limitele 0 și ∞ pentru (27) și pe axa absciselor ($\zeta = 0$) între limitele l și $1/B$ pentru (27'), rezultă

$$A_{21}\frac{(2-B^2l^2)E(k)-B^2l^2K(k)}{l^2(1-B^2l^2)}+\frac{9}{4\pi}q^*_{20}\left(1-\frac{s'}{l}\right)^2\frac{\sqrt{l^2-s'^2}}{s'l(1-B^2s'^2)}\Big[(1-$$

$$-B^2s'^2)E(k)-B^2l^2(K(k)-\Pi(q,k))\Big]+\frac{9}{4\pi}lq^*_{21}\left(1-\frac{s'}{l}\right)^2\times$$

$$\times\frac{B^2\sqrt{l^2-s'^2}}{1-B^2s'^2}\Big[(2-B^2s'^2)\Pi(\rho,k)-K(k)\Big]+\frac{2}{\pi}Q^*_{21}\frac{1}{l}\times$$

$$\times\Big[B^2l^2K(k)-2E(k)\Big]=0, \tag{29}$$

$$Q^*_{21}+\frac{1}{2\sqrt{9-B^2(l+2s)^2}}\Big[B^2l^2\left(1+2\frac{s}{l}\right)\left(1-\frac{s}{l}\right)^2q^*_{20}+3l\Big(1-$$

$$-\frac{s}{l}\Big)^2q^*_{21}\Big]=-w^{(1)}_{10}, \tag{29'}$$

în care $K(k)$, $E(k)$, $\Pi(\rho,k)$ reprezintă integralele eliptice complete de prima, a doua și, respectiv, a treia speță, având modulul k și parametrul ρ dați de relațiile

$$\Pi(\rho,k)=K(k)+\frac{\sqrt{1-B^2s'^2}}{B^2s'\sqrt{l^2-s'^2}}\Big[\frac{\pi}{2}-K(k)E(\varphi_0,k')+(K(k)-$$

$$-E(k))F(\varphi_0,k')\Big], \tag{30}$$

$$k=\sqrt{1-B^2l^2},\quad \rho=B^2s'^2-1,\quad k'=Bl,\quad \varphi_0=\sin^{-1}\frac{s'}{l}\cdot \tag{30'}$$

Datorită separației curentului la bordurile aripii și ca urmare a prezenței vîrtejurilor pe extrados, se realizează viteze finite în acele puncte. Impunînd această condiție, vom putea scrie relația

$$A_{21}=0. \tag{31}$$

Eliminînd pe $w_{10}^{(0)}$, $w_{10}^{(1)}$ şi Q_{21}^{*} între ecuaţiile (23), (23′), (25), (29), (29′) şi ţinînd seama de (31), obţinem constantele q_{20}^{*} şi q_{21}^{*} :

$$q_{20}^{*} = -\frac{I_{21}}{I_{20}J_{21} - I_{21}J_{20}} w_{10}; \quad q_{21}^{*} = \frac{I_{20}}{I_{20}J_{21} - I_{21}J_{20}} w_{10}, \tag{32}$$

unde am făcut notaţiile următoare :

$$I_{20} = 2B\left\{2\left[\sqrt{1-B^2l^2} - \left(2 - \frac{s}{l}\right)\sqrt{1-B^2s^2} - \cos h^{-1}\frac{1}{Bl} + \right.\right.$$

$$+ \cos h^{-1}\frac{1}{Bs}\Big] + \frac{1}{Bl}\Big[2\,(\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs) - (Bl - \sqrt{2}) \times$$

$$\times\left(\sin^{-1}\frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} - \sin^{-1}\frac{1 - Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bs}\right) -$$

$$\left.\left. - (Bl + \sqrt{2})\left(\sin^{-1}\frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl} - \sin^{-1}\frac{1 + Bs\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bs}\right)\Big]\right\}, \tag{33}$$

$$I_{21} = 3\left(\sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs + Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2}\right) +$$

$$+ 2\,[Bl\,(1 - B^2l^2)^{3/2} - Bs\,(1 - B^2s^2)^{3/2}] + \frac{8}{5Bl}\Big[(1 -$$

$$- B^2l^2)^{5/2} - (1 - B^2s^2)^{5/2}\Big], \tag{33′}$$

$$J_{20} = \frac{9}{8}\,\frac{\dfrac{l}{s'}\left(1 - \dfrac{s'}{l}\right)^2}{(B^2l^2K(k) - 2E(k))\sqrt{1 - B^2s'^2}}\left\{\sqrt{\frac{1 - \dfrac{s'^2}{l^2}}{1 - B^2s'^2}}\Big[(1 -\right.$$

$$\left. - B^2s'^2)\,E(k) - B^2l^2\,(K(k) - \Pi(\rho, k))\Big] - B^2s'^2\,(B^2l^2K(k) - 2E(k))\right\}, \tag{33″}$$

$$J_{21} = \frac{9}{8} \frac{l\left(1 - \frac{s'}{l}\right)^2}{(B^2 l^2 K(k) - 2E(k)) \sqrt{1 - B^2 s'^2}} \left\{ B^2 l^2 \sqrt{\frac{1 - \frac{s'^2}{l^2}}{1 - B^2 s'^2}} [(2 - \right.$$

$$\left. - B^2 s'^2) \Pi(\rho, k) - K(k)] + 2E(k) - B^2 l^2 K(k) \right\} +$$

$$+ \frac{1}{48 B^3 l^2} \left\{ \frac{8}{5} [B(6l - 5s)(1 - B^2 s^2)^{5/2} - Bl(1 - B^2 l^2)^{5/2}] - \right.$$

$$- 2[Bl(1 - B^2 l^2)^{3/2} - Bs(1 - B^2 s^2)^{3/2}] -$$

$$\left. - 3(Bl \sqrt{1 - B^2 l^2} - Bs \sqrt{1 - B^2 s^2} + \sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs) \right\}. \quad (33''')$$

Constantele q_{22}^{**} și q_{21}^{**} care apar în expresia $\mathcal{U}_{1c}$, dată de (18), se determină luînd în considerație rolul celei de-a treia aripi componente, care va avea panta medie : $- w_{10} x_1$. Asemănător cu (24), vom scrie

$$\frac{1}{l} \int_0^l w_{10}''(\eta) \, d\eta = - w_{10}, \quad (34)$$

de unde, ținînd seama de (16), deducem

$$w_{10} - w_{10}^{(1)} = \frac{q_{20}^{**}}{B^2 l^2} \left\{ \frac{1}{3} [B^2 l^2 \sqrt{1 - B^2 l^2} - 2(1 - \sqrt{1 - B^2 l^2})] + \frac{\pi}{4} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{2} \left(\sin^{-1} \frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} + \sin^{-1} \frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl} \right) \right\}, \quad (35)$$

$$w_{10} - w_{10}^{(1)} = \frac{q_{21}^{**}}{2B^2 l} \left[\frac{1}{3} (1 - B^2 l^2)^{5/2} - \frac{1}{12} (1 - B^2 l^2)^{3/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{8} \left(\sqrt{1 - B^2 l^2} + \frac{\sin^{-1} Bl}{Bl} \right) \right]. \quad (35')$$

Ţinînd seama de relaţia (25), vom obţine din (35) şi (35′) constantele q_{20}^{**} şi q_{21}^{**} :

$$q_{20}^{**} = \frac{q_{21}^{*}}{2B}\left\{\frac{Bl}{15}\left[\left(6 - 5\frac{s}{l}\right)(1 - B^2s^2)^{5/2} - (1 - B^2l^2)^{5/2}\right] - \right.$$

$$- \frac{1}{12}[Bl(1 - B^2l^2)^{3/2} - Bs(1 - B^2s^2)^{3/2}] -$$

$$\left. - \frac{1}{8}(Bl\sqrt{1-B^2l^2} - Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs)\right\} \times$$

$$\times \left\{\frac{1}{3}[B^2l^2\sqrt{1-B^2l^2} - 2(1 - \sqrt{1-B^2l^2})] + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2} - \sin^{-1}\frac{1 - Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} - Bl} - \sin^{-1}\frac{1 + Bl\sqrt{2}}{\sqrt{2} + Bl}\right)\right\}^{-1}, \tag{36}$$

$$q_{21}^{**} = \frac{q_{21}^{*}}{Bl}\left\{\frac{Bl}{15}\left[\left(6 - 5\frac{s}{l}\right)(1 - B^2s^2)^{5/2} - (1 - B^2l^2)^{5/2}\right] - \right.$$

$$- \frac{1}{12}[Bl(1 - B^2l^2)^{3/2} - Bs(1 - B^2s^2)^{3/2}] - \frac{1}{8}(Bl\sqrt{1-B^2l^2} -$$

$$\left. - Bs\sqrt{1-B^2s^2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs)\right\}\left[\frac{1}{3}(1 - B^2l^2)^{5/2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{12}(1 - B^2l^2)^{3/2} - \frac{1}{8}\left(\sqrt{1 - B^2l^2} + \frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right)\right]^{-1}. \tag{36′}$$

Constanta Q_{21}^{*} se deduce imediat din (29), făcînd $A_{21} = 0$:

$$Q_{21}^{*} = - w_{10}^{(0)}. \tag{37}$$

Pentru determinarea constantelor Q_{21}^{**} şi Q_{21}^{***} vom scrie, analog cu (27′), relaţiile următoare :

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\gamma}\sqrt{1 - B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_{1\epsilon}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\right) = w_{10}^{(0)}, \tag{38}$$

$$\mathrm{Im}\left(\int_{\gamma}\sqrt{1 - B^2x^2}\,\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{U}_{1\epsilon}}{\mathrm{d}x^2}\,\mathrm{d}x\right) = w_{10}^{\prime\prime(0)}, \tag{38′}$$

ce se vor integra pe un sfert de cerc γ de rază foarte mică în jurul originii. Procedînd astfel, obținem

$$Q_{21}^{**} = -w_{10}^{(0)}, \tag{39}$$

$$Q_{21}^{***} = -w_{10}''^{(0)}, \tag{39'}$$

în care $w_{10}''^{(0)}$ este viteza verticală la mijlocul aripii compensatoare de pantă care se obține pornind de la relațiile (16) și (21):

$$w_{10}''^{(0)} = -\frac{q_{21}^{**}}{2B^2 l}\left[\frac{1}{15}(1-B^2l^2)^{5/2} + \frac{1}{12}(1-B^2l^2)^{3/2} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{8}\left(\sqrt{1-B^2l^2} + \frac{\sin^{-1}Bl}{Bl}\right) - \frac{2}{5}\right] - w_{10}. \tag{40}$$

4. DISTRIBUȚIA DE PRESIUNI ȘI CARACTERISTICILE AERODINAMICE

Am arătat mai sus că viteza axială de perturbație pe aripa reală rezultă prin superpoziția celor trei aripi fictive componente, obținîndu-se formula (19). Pentru calculul distribuției de presiuni se va considera viteza axială totală dată de (19) (fig. 3):

$$C_p = -2\frac{u_1}{U_\infty} = -2\mathrm{Re}\frac{\mathcal{U}_1}{U_\infty}.$$

Trecînd mai departe la calculul coeficientului de portanță al aripii, vom face observația că aripile de grosime simetrică nu dau portanță, încît se va lua în considerație numai coeficientul de portanță dat de „aripa portantă":

$$C_z = \frac{8}{3lU_\infty}\int_0^l u_{1l}\,dy. \tag{41}$$

Ținînd seama de (13), vom obține următoarea expresie a coeficientului de portanță al aripii:

$$C_z = \frac{8l}{3\pi U_\infty}\left\{Q_{21}^* + q_{20}^*\left[\left(1-\frac{1}{3}\frac{s}{l}\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}} - \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l} - \right.\right.$$
$$- \frac{s^2}{l^2}\left(1-\frac{2}{3}\frac{s}{l}\right)\cos h^{-1}\frac{l}{s}\Big] + q_{21}^* l\left[\frac{2}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}} - \right.$$
$$\left.\left. - \frac{s}{l}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\frac{s}{l}\right)\left(\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}} + \frac{s^2}{l^2}\cos h^{-1}\frac{l}{s}\right)\right]\right\}. \tag{42}$$

Coeficientul momentului de ruliu este

$$HC_m = \frac{2}{l U_\infty}\int_0^l u_{11}\, y\, \mathrm{d}y = \frac{l^2}{8U_\infty}\left\{\frac{8}{3}Q_{21}^* + q_{20}^*\left[\left(\frac{8}{3}\left(1-\frac{s^2}{l^2}\right)-\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.-\frac{s}{l}\left(1-2\frac{s^2}{l^2}\right)\right)\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}-\cos^{-1}\frac{s}{l}\right] + q_{21}^* l\left[2\cos^{-1}\frac{s}{l}-\right.\right. \tag{43}$$

$$\left.\left.-\sqrt{1-\frac{s^2}{l^2}}\left(\frac{8}{5}+\frac{1}{3}\frac{s}{l}\left(1+2\frac{s^2}{l^2}\right)\left(2-\frac{8}{5}\frac{s}{l}\right)\right)\right]\right\},$$

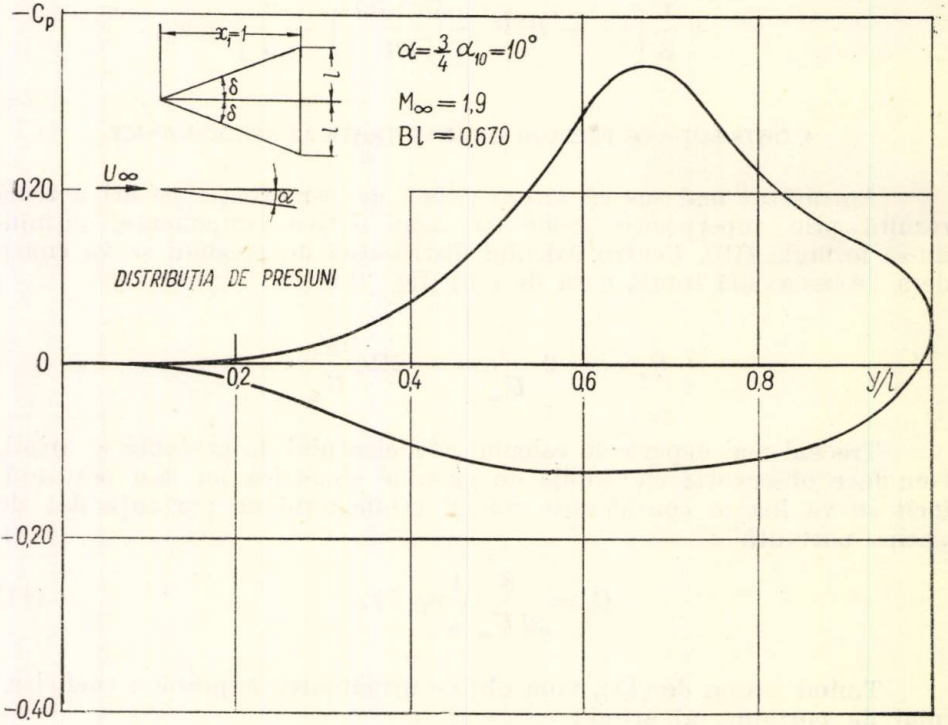


Fig. 3

unde H este o lungime de referinţă, care poate fi luată egală chiar cu unitatea.

În ceea ce priveşte parametrul $\frac{s}{l}$ care intră în expresiile de mai sus şi care determină limitele distribuţiei de surse, vom observa că el depinde de poziţia centrului $\frac{c}{l}$ al nucleului de vîrtej. În lucrările anterioare [2], [3] am analizat în detaliu problema poziţiei nucleului de vîrtej.

Astfel, ținînd seama și de rezultatele experimentale obținute de diverși autori pe aripa delta plană cu incidența constantă, vom admite pentru poziția nucleului de vîrtej următoarea formulă aproximativă de variație cu incidența :

$$\frac{c}{l} \simeq \frac{1}{1 + 1{,}1\,(\alpha)^{1/2}}, \tag{44}$$

în care α reprezintă incidența aripii în punctul care ar reprezenta centrul de greutate al efectelor aerodinamice :

$$x_1 = \frac{3}{4}. \tag{45}$$

Așa cum s-a procedat și în lucrările anterioare, vom considera următoarea relație între c și s :

$$c = s + \frac{1}{6}(l - s)\,; \quad \left(\frac{s}{l} = 1{,}2\,\frac{c}{l} - 0{,}2\right). \tag{46}$$

5. ARIPA DELTA PLANĂ CU ANTISIMETRIE FORȚATĂ

În acest caz vom analiza pe scurt scurgerea în jurul aripii delta subțiri cu incidența α egală și de semn contrar pe cele două jumătăți ale sale, ținînd seama de separația curentului la borduri.

Formarea vîrtejurilor are drept efect producerea unui cîmp complex de viteze verticale, care vor modifica scurgerea în așa fel, încît presiunile vor fi finite la borduri.

Procedînd ca mai sus, vom alege pentru distribuțiile de surse următoarele funcții liniare :

$$q'(\eta)\begin{cases} p_0\,\dfrac{\eta}{l} & (-s < \eta < s), \\ \pm\, q_0\left(1 - \dfrac{|\eta|}{l}\right), & \eta \in [-l, -s] \cup [s, l], \end{cases} \tag{47}$$

în cazul primelor două aripi componente fictive, și

$$q''(\eta) = k_0\,\frac{\eta}{l} \quad (-l < \eta < l), \tag{48}$$

pentru aripa de grosime simetrică compensatoare de pantă.

Aplicînd formulele stabilite în tema mişcărilor conice [1], vitezele axiale de perturbaţie pe cele trei aripi fictive vor fi următoarele :

$$\mathcal{U}_l = \frac{A_{11}\,x}{\sqrt{l^2 - x^2}} - \frac{q_0}{\pi}\left[(s-x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{l^2 - s\,x}{l(s-x)} - \right.$$

$$- (s+x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)} + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\,\cos^{-1}\frac{s}{l}\Bigg] +$$

$$+ \frac{p_0}{\pi}\left[\frac{s^2 - x^2}{2l}\left(\cos h^{-1}\frac{l^2 - sx}{l(s-x)} - \cos h^{-1}\frac{l^2 + sx}{l(s+x)}\right) + \right.$$

$$\left. + x\sqrt{1 - \frac{x^2}{l^2}}\,\sin^{-1}\frac{s}{l}\right], \tag{49}$$

pentru aripa subţire, şi

$$\mathcal{U}_t = \frac{q_0}{\pi}\left[(l-x)\left(1 - \frac{l+x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 lx}{B(l-x)} - \right.$$

$$- (l+x)\left(1 - \frac{l-x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 + B^2 lx}{B(l+x)} -$$

$$- (s-x)\left(1 - \frac{s+x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 sx}{B(s-x)} +$$

$$+ (s+x)\left(1 - \frac{s-x}{2l}\right)\cos h^{-1}\frac{1 + B^2 sx}{B(s+x)} -$$

$$\left. - \frac{1}{Bl}(\sin^{-1} Bl - \sin^{-1} Bs)\,x\sqrt{1 - B^2x^2}\right] + \tag{50}$$

$$+ \frac{p_0}{\pi}\left[\frac{s^2 - x^2}{2l}\left(\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 sx}{B(s-x)} - \cos h^{-1}\frac{1 + B^2 sx}{B(s+x)}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{x}{Bl}\sqrt{1 - B^2x^2}\,\sin^{-1} Bs\right] \pm L,$$

în cazul aripii de grosime simetrică. Pentru cea de-a treia aripă componentă, „compensatoare de pantă", vom avea viteza

$$\mathcal{U}_c = \frac{k_0}{2\pi B^2 l}\left[B^2(l^2 - x^2)\left(\cos h^{-1}\frac{1 - B^2 lx}{B(l-x)} - \cos h^{-1}\frac{1 + B^2 lx}{B(l+x)}\right) + \right.$$

$$\left. + 2B\,x\sqrt{1 - B^2x^2}\,\sin^{-1} Bl\right]. \tag{51}$$

Constantele q_0, p_0, k_0 le vom determina în mod asemănător cum s-a procedat și în lucrările anterioare [2]—[4]. Ținînd seama de relația

$$q' = \frac{\eta}{\sqrt{1 - B^2\eta^2}} \frac{\mathrm{d}w'}{\mathrm{d}\eta}, \tag{52}$$

cunoscută din teoria mișcărilor conice, și de relațiile (47), (48), vom pune condițiile la limită pentru viteza verticală a primei aripi componente:

$$w_0 - w = \frac{p_0}{l} \int_0^s \sqrt{1 - B^2\eta^2}\, \mathrm{d}\eta, \tag{53}$$

$$w_1 - w_0 = q_0 \int_s^l \left(1 - \frac{\eta}{l}\right) \frac{\sqrt{1 - B^2\eta^2}}{\eta}\, \mathrm{d}\eta, \tag{53'}$$

unde w_0 și w_1 reprezintă vitezele verticale la mijlocul, respectiv bordul aripii.

Definind o viteză verticală medie egală cu cea corespunzătoare incidenței aripii reale, vom scrie pentru aripa subțire relația

$$w = \frac{1}{l}\left(w'\eta\Big|_0^s + w'\eta\Big|_s^l - \int_0^s \eta\, \mathrm{d}w' - \int_s^l \eta\, \mathrm{d}w'\right). \tag{54}$$

Constanta A_{11}, pe care o determinăm luînd în considerație variația vitezei verticale de la un punct de pe aripă pînă la unul de viteză verticală nulă (cercul Mach), ca și în lucrările anterioare [2], [3], o vom anula, impunînd astfel condiția de viteză nulă la borduri. Rămîne de efectuat integrala

$$\mathrm{Im} \int_{\text{aripă } (0,\, l)}^{\text{cercul Mach } (1/B,\infty)} \frac{\sqrt{1 - B^2x^2}}{x}\, \mathrm{d}\mathcal{U}_i' = w_1, \tag{55}$$

unde $\mathcal{U}_i'$ este viteza axială de perturbație în cazul simplificat al unei surse concentrate în $y = s'$ pe aripa subțire.

Prin efectuarea integralei (55) pe axa absciselor între limitele l și $1/B$ rezultă

$$A_{11} = \frac{2l}{\pi}\left[w_1 + \frac{Q_0}{s'}\left(\sqrt{1 - B^2s'^2} - \sqrt{1 - \frac{s'^2}{l^2}}\right)\right], \tag{56}$$

în care s' şi Q_0 sînt daţi de relaţiile

$$\frac{s'}{l} = \frac{1}{3} \frac{q_0\left(1-\frac{s}{l}\right)^2\left(1+2\frac{s}{l}\right)+p_0\frac{s^3}{l^3}}{q_0\left(1-\frac{s}{l}\right)^2+p_0\frac{s^2}{l^2}}, \tag{57}$$

$$Q_0 = \frac{1}{2l}\left[q_0(l-s)^2 + p_0 s^2\right]. \tag{57'}$$

Analog cu (54), vom avea în cazul aripii compensatoare de pantă

$$w = -\frac{1}{l}\left(w''\,\eta\Big|_0^l - \int_0^l \eta\,dw''\right). \tag{58}$$

Integrînd ecuaţiile (53), (53'), (54) şi (58), vom obţine un sistem algebric de ecuaţii din care vor rezulta constantele q_0, p_0, k_0:

$$\frac{q_0}{\alpha U_\infty} = \left\{\frac{3}{2}\left(\sqrt{1-B^2s'^2}-\sqrt{1-\frac{s'^2}{l^2}}\right)\frac{\left[\left(1-\frac{s}{l}\right)^2+\frac{p_0}{q_0}\frac{s^2}{l^2}\right]^2}{\left(1-\frac{s}{l}\right)^2\left(1+2\frac{s}{l}\right)+\frac{p_0}{q_0}\frac{s^3}{l^3}} - \right. \tag{59}$$

$$-\frac{1}{2Bl}\left[Bl\sqrt{1-B^2l^2}-Bs\sqrt{1-B^2s^2}+\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+\right.$$

$$\left.\left.+\frac{2}{3Bl}((1-B^2l^2)^{3/2}-(1-B^2s^2)^{3/2})+\frac{2}{3Bl}\frac{p_0}{q_0}(1-(1-B^2s^2)^{3/2})\right]\right\}^{-1},$$

$$\frac{p_0}{q_0} = 2\left[B(l-s)\sqrt{1-B^2s^2}+\sin^{-1}Bl-\sin^{-1}Bs+\frac{1}{3Bl}((1-B^2l^2)^{3/2}-\right. \tag{59'}$$

$$-(1-B^2s^2)^{3/2})+Bl\left(\cos h^{-1}\frac{1}{Bl}-\cos h^{-1}\frac{1}{Bs}\right)\Big]\Big[Bs\sqrt{1-B^2s^2}+$$

$$\left.+\sin^{-1}Bs-\frac{2}{3Bl}(1-(1-B^2s^2)^{3/2})\right]^{-1},$$

$$k_0 = -q_0\Big\{(1-B^2l^2)^{3/2} - (1-B^2s^2)^{3/2} + \frac{3}{2}Bl\,[Bl\,(1-B^2l^2)^{1/2} -$$

$$- Bs\,(1-B^2s^2)^{1/2} + \sin^{-1}Bl - \sin^{-1}Bs\,] + \tag{59''}$$

$$+ \frac{p_0}{q_0}\,[1-(1-B^2s^2)^{3/2}]\Big\}\,[1-(1-B^2l^2)^{3/2}]^{-1}\,.$$

Coeficientul de portanță e dat doar de prima aripă componentă:

$$C_z = \frac{4}{lU_\infty}\int_0^l u_l\,\mathrm{d}y = \frac{4l}{\pi U_\infty}\Big\{\frac{p_0}{3}\Big[\sin^{-1}\frac{s}{l} + \frac{s}{l}\Big(2\frac{s^2}{l^2}\cos h^{-1}\frac{l}{s} -$$

$$-\Big(1-\frac{s^2}{l^2}\Big)^{1/2}\Big)\Big] + q_0\Big[\Big(1-\frac{1}{3}\frac{s}{l}\Big)\Big(1-\frac{s^2}{l^2}\Big)^{1/2} - \frac{1}{3}\cos^{-1}\frac{s}{l} -$$

$$-\frac{s_2}{l^2}\Big(1-\frac{2}{3}\frac{s}{l}\Big)\cos h^{-1}\frac{l}{s}\Big]\Big\}, \tag{60}$$

iar coeficientul momentului de ruliu va fi

$$HC_m = \frac{8}{3lU_\infty}\int_0^l u_l\,y\,\mathrm{d}y =$$

$$= \frac{l^2}{6U_\infty}\Big\{q_0\Big[\Big(\frac{8}{3}\Big(1-\frac{s^2}{l^2}\Big) - \frac{s}{l}\Big(1-2\frac{s^2}{l^2}\Big)\Big)\Big(1-\frac{s^2}{l^2}\Big)^{1/2} - \cos^{-1}\frac{s}{l}\Big] -$$

$$-p_0\Big[\frac{s}{l}\Big(1-2\frac{s^2}{l^2}\Big)\Big(1-\frac{s^2}{l^2}\Big)^{1/2} - \sin^{-1}\frac{s}{l}\Big]\Big\}. \tag{61}$$

În ceea ce privește poziția nucleului de vîrtej în cazul aripii delta plane cu antisimetrie forțată, se ia aceeași formulă ca în lucrările anterioare:

$$\frac{c}{l} \simeq \frac{1}{1+1{,}7\,(\alpha)^{1/2}}\,, \tag{62}$$

$$\frac{s}{l} = 1{,}2\,\frac{c}{l} - 0{,}2\,. \tag{62'}$$

Primită la redacție la 12 septembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. E. CARAFOLI, *High-Speed Aerodynamics*, Bucureşti, Editura tehnică, 1956.
2. E. CARAFOLI, *Wing Theory in Supersonic Flow*, Londra, Pergamonn Press, 1969.
3. E. CARAFOLI, ŞT. STAICU, *Sur un modéle théorique concernant l'aile delta mince avec décollement aux bords d'attaque*. Journal de Mécanique, **6**, *2* (1967).
4. E. CARAFOLI, ŞT. STAICU, *On the delta wing with forced antisymmetry in supersonic flow, considering the leading edge separation*, Rev. Roum. Sc. Techn. Méc. Appl. **XIII**, *2* (1968).
5. M. ROY, *Sur la théorie de l'aile delta. Tourbillons d'apex et nappes en cornets*, C.R. Ac. Sc., R.A., **56** (1957).
6. L. C. SQUIRE, *The estimation of the non-linear lift of delta wings at the supersonique speeds*, J.R.A.S., aug. 1963.
7. H. WERLÉ, *Visualisation hydrodynamique de l'écoulement à basse vitesse autour d'une maquette d'avion du type „Concorde"*, ONERA, La Recherche Aérospatiale, *102* (1964).
8. E. CARAFOLI, ŞT. STAICU, *On the flow separation from the edges of the antisymmetrical delta wing in supersonic regime*, în volumul dedicat prof. L. I. Sedov, *Problems of hyrodynamics and continuum mechanics*, Moscova, „Nauka", 1969, p. 257—272.
9. E. CARAFOLI, ŞT. STAICU, *L'écoulement supersonique antour de l'aile delta arquée et gauchie symétriquement, compte tenu de la séparation du courant aux bords d'attaque*, Rom. Journal of Techn. Sc.-Applied Mechanics, **XIV**, *3* (1969).
10. R. LEGENDRE, *Vortex Sheets Rolling-up along Leading Edges of Delta Wings*, Progr. Aeronaut. Sci., **7**, 7—33 (1966).
11. K. W. MANGLER, J. H. SMITH, *A theory of the flow past a slender delta wing with leading edge separation*, Proc. Roy. Soc., May 1959.
12. ŞT. STAICU, *Contribuţii la teoria aripilor în regim supersonic cu separaţia curentului la bordurile de atac*, Teză de doctorat, Bucureşti, 1969.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE ASUPRA SCURGERII DE INTRARE CU JETURI ÎNSOȚITOARE

de V. TOMA, H. DUMITRESCU, ȘT. N. SĂVULESCU

Autorii prezintă rezultatele experimentale referitoare la scurgerea de intrare incompresibilă într-un canal cu și fără jeturi însoțitoare, dirijate simetric în lungul pereților. Sînt determinate profilele de viteză în diverse secțiuni atît în scurgere laminară, cît și în scurgere turbulentă. Parametrul experiențelor a fost raportul dintre debitul jeturilor însoțitoare (ψ_{δ_0}) și cel al curentului din canal (Q). Obiectul experiențelor l-a constituit determinarea lungimii de umplere pentru a verifica teoria elaborată de autori [1].

1. SCOPUL LUCRĂRII

Rezultatele experimentale prezentate în această lucrare au ca scop principal verificarea teoriei publicate anterior de autori [1]. Într-adevăr, faptul că lungimea de umplere se micșorează în prezența jeturilor însoțitoare este oarecum surprinzător și numai experiența poate decide justețea calculelor efectuate.

Pe lîngă realizarea regimului laminar, regim corespunzător ipotezelor teoretice, s-a urmărit în plus și obținerea de informații asupra regimului de scurgere turbulent, obiect al unor studii în continuare de evidentă utilitate practică pentru combustie. În cadrul acelorași experiențe s-au urmărit și posibilitățile laboratorului de a realiza și măsura scurgeri laminare cu viteze foarte mici.

2. PROBLEME DE ADAPTARE A INSTALAȚIEI EXPERIMENTALE EXISTENTE LA STUDIUL SCURGERILOR DE INTRARE LAMINARE

Dispunîndu-se de o suflerie plată cu o cameră de experiențe 500 × × 80 × 2400 mm, problema centrală a constat în alegerea soluției pentru realizarea unei scurgeri de intrare laminare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 2, 1971, P. 453–467

Soluția aleasă reprezintă un compromis între necesitățile aerodinamice și cele practice de experimentare. În esență, s-a racordat colectorul sufleriei la un canal de înălțime $2b = 30$ mm, a cărui lărgime de 80 mm a fost încadrată în camera de experiență a sufleriei. În exteriorul canalului au fost montate rezervoarele pentru producerea jeturilor longitudinale și de asemenea s-a utilizat dispozitivul de traversare a sondei existent. Condiția de bidimensionalitate, aparent serios prejudiciată de lărgimea mică a canalului (80 mm), a fost în realitate asigurată pe centru, deoarece straturile-limită marginale de pe pereții sufleriei nu s-au extins pînă în centru, rămînînd limitați la o grosime aproximativ constantă de $Z = 15$ mm, astfel că pînă la $z = 40$ mm, practic, scurgerea a fost bidimensională. Cu această concesie acordată bidimensionalității s-a beneficiat în schimb de caracteristicile funcționale și de montajul de măsură, instalat și verificat în camera de experiență existentă a sufleriei.

O problemă importantă în asigurarea condițiilor de verificare a teoriei a constituit-o realizarea regimului de scurgere laminar în canalul adaptat camerei de experiențe și prevăzut cu jeturi marginale. Într-adevăr, pentru viteza medie de 1 m/s se obține un număr Reynolds $\mathrm{Re} = U_m h/\nu = 2000$, foarte aproape de Re_{critic}, astfel că s-au luat precauții speciale (eliminarea oricăror surse de perturbații) pentru ca scurgerea să se efectueze într-un regim supercritic. În plus, prezența jeturilor marginale constituie perturbații inerente ale acestui dispozitiv, astfel că și din acest punct de vedere a trebui ca scurgerea în interiorul rezervoarelor pentru crearea jeturilor să fie cît mai liniștită. Aspectele tehnice ale acestei probleme au fost rezolvate prin realizarea unui compromis între vitezele mici ale scurgerii principale laminare și vitezele relativ mai mari ale jeturilor, întreaga scurgere păstrînd caracterul laminar pe o distanță de experimentat suficientă pentru scopul urmărit. În acest fel s-a lucrat cu viteze de la 1—4 m/s în scurgerea principală și cu viteze de 2—6 m/s ale jetului. Valorile mari ale vitezelor corespund unui regim de scurgere aproximativ turbulent.

3. MONTAJUL ȘI METODICA EXPERIMENTALĂ

Montajul experimental cuprinde camera de experiență modificată prin prezența canalului central de scurgere, împreună cu instrumentația de măsură referitoare la controlul debitului jetului, controlul scurgerii principale, precum și etalonarea și măsurarea distribuțiilor de viteză în canal. În figura 1 (schemă și fotografie) sînt prezentate detaliile montajului.

În privința caracteristicilor funcționale ale montajului, prima problemă importantă a fost realizarea uniformității vitezei de ieșire din jet și a simetriei jeturilor. Pentru acestea au fost adoptate unele soluții, ca :

— realizarea unei geometrii a gurii de ieșire a jeturilor cît mai exactă ;

— alimentarea separată a celor două rezervoare de jet prin intermediul unui sistem de debitmetre reglabile.

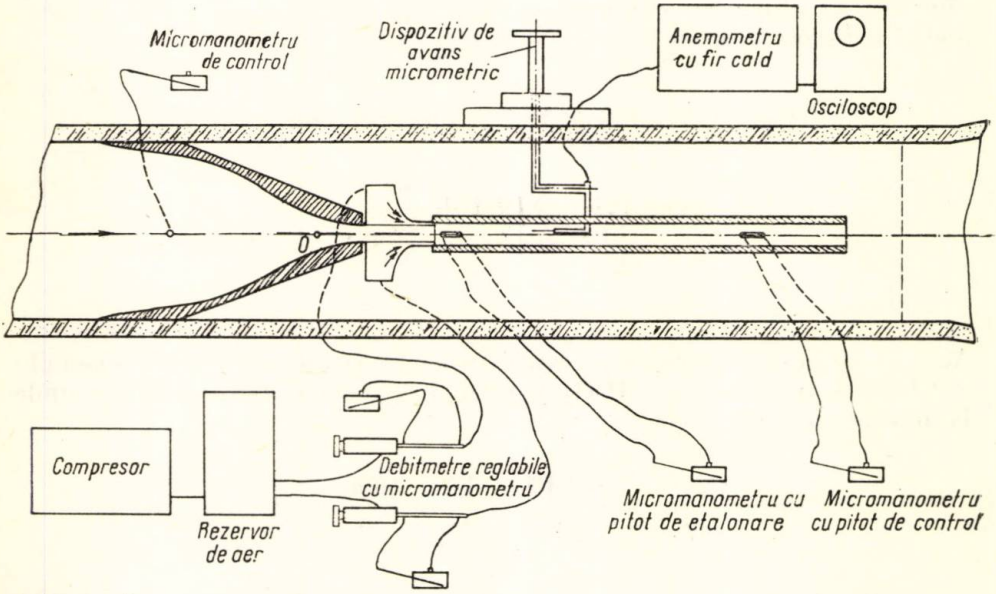

Micromanometru de control
Dispozitiv de avans micrometric
Anemometru cu fir cald
Osciloscop
Compresor
Rezervor de aer
Debitmetre reglabile cu micromanometru
Micromanometru cu pitot de etalonare
Micromanometru cu pitot de control

Fig. 1

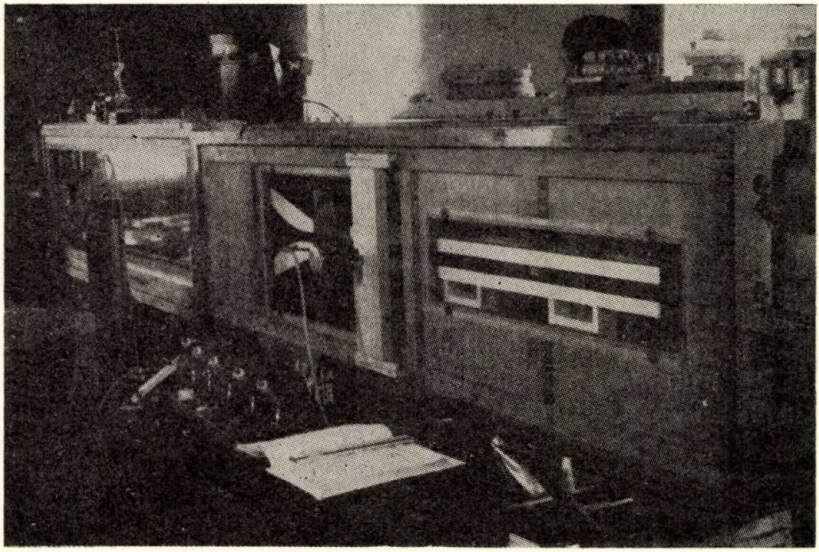


Fig. 1*a*

S-a constatat că în cazul vitezelor mici o corecție realizată prin aceste debitmetre se datorește greutății aerului, deoarece gurile de ieșire ale jeturilor sînt situate într-un plan vertical, cu o diferență de nivel între punctele de alimentare comună exterioare de circa 50 mm. Conform schemei din figura 2 avem

$$V_{j\,\mathrm{sus}} = 4\sqrt{\Delta p_{\mathrm{sus}} + \gamma h}\,; \quad V_{j\,\mathrm{jos}} = 4\sqrt{\Delta p_{\mathrm{jos}} - \gamma h},$$

$$\frac{V_{j\,\mathrm{sus}}}{V_{j\,\mathrm{jos}}} = \sqrt{\frac{1 + \dfrac{\gamma h}{\Delta p_{\mathrm{sus}}}}{1 - \dfrac{\gamma h}{\Delta p_{\mathrm{jos}}}}}.$$

Această corecție devine importantă în cazul vitezelor mici (de exemplu $\rho/2\ V^2 = 1/16$ (mm col $\cdot H_2O$) pentru $V = 1$ m/s, ceea ce corespunde la o diferență de nivel

$$h = \frac{\rho/2\ V^2}{\gamma} = \frac{\rho/2\ V^2}{\rho g} = \frac{V^2}{2g} \simeq \frac{1000}{20} = 50 \text{ mm}.$$

Din această cauză și, de asemenea, pentru a controla mai precis cele două jeturi s-a utilizat alimentarea separată prin debitmetre. Punerea la punct a montajului pentru realizarea unor jeturi uniforme a necesitat o activitate de laborator susținută și migăloasă, încheiată în final prin rezultatele de mai jos, prezentate comparativ cu situația inițială în figura 2.

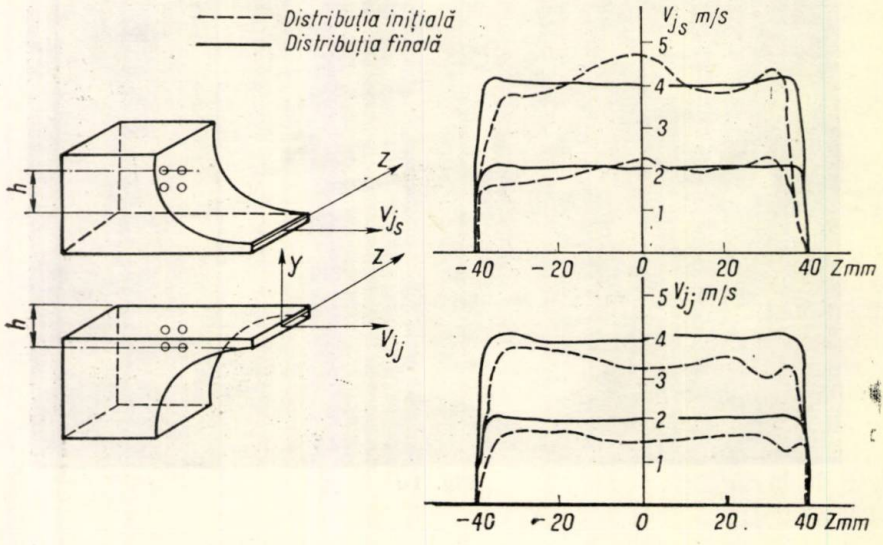


Fig. 2

O altă problemă a montajului a constituit-o etanșarea canalului, deoarece depresiunea creată în interior era sursa unor scurgeri parazite, atît la contactul cu pereții camerei de experiență, cît și la orificiile sondelor de măsură.

Montajul configurației scurgerii, arătat anterior, se completează cu montajul și cu adaptarea instrumentelor de măsură, a prizelor de presiune și a orificiilor pentru introducerea sondelor de măsură, precum și prin realizarea legăturilor de la sonde la aparatele de măsură. Astfel, în afara montajelor micromanometrelor și debitmetrelor clasice, o problemă deosebită a constituit-o introducerea sondei cu fir cald prin peretele superior al canalului, în care scop acesta a fost prevăzut cu o fantă longitudinală, destinată să realizeze următoarele:

— deplasarea sondei în sens longitudinal și în sens transversal (lățime suficientă a fantei);

— etanșarea circuitului interior al canalului, asigurată pentru fiecare poziție a sondei prin căpăcele de etanșare adaptate fantei pe porțiuni variabile.

Elemente ale acestui montaj și ale instrumentului de măsură sînt arătate în figura 1.

Metodica experimentală a inclus următoarele etape:

a) stabilirea regimului de scurgere în canal, astfel încît să fie asigurată scurgerea fundamentală laminară. Pentru aceasta s-a măsurat permanent viteza de intrare printr-un tub Pitot instalat în axa canalului la 10 mm de secțiunea gurilor de ieșire ale jeturilor. Pe figura 1 este arătat Pitot-ul regimului de scurgere, servind de asemenea drept instrument de etalonare pentru indicația firului cald;

b) stabilirea regimului de scurgere a jeturilor în condițiile arătate anterior (îndeosebi uniformitatea distribuției la ieșire), măsurat permanent prin indicația debitmetrelor individuale ale jeturilor, ca și prin indicația presiunii de alimentare din rezervorul tampon al compresorului dată de un manometru în formă de U. Menționăm că prin stabilirea unui regim de scurgere se înțelege atingerea unei stări de echilibru termodinamic (parametrii fluidului: ρ, $t°C$, p, ating valori stabil constante. În cazul nostru, intervalul de timp de la punerea în funcțiune a instalației și atingerea regimului de lucru a fost de ordinul a două ore;

c) etalonarea sondei cu fir cald (fir Wollaston de 7,6 μ Ø, decapat pe o lungime de 0,8—1 mm și montat pe un suport de plexiglas de 6 mm Ø, format din trei corpuri) prin compararea indicațiilor date de anemometru cu intensitate constantă și tubul Pitot de etalonare, menționat mai sus. În figura 3 (foto) se arată poziția sondei pentru etalonarea firului, iar în figura 4 sînt reprezentate cîteva curbe de etalonare. Și în acest caz problema dificilă a constat în atingerea regimului de echilibru termodinamic, termochimic, termoelastic și termometalografic al firului, astfel ca această curbă de etalonare să nu se modifice pe parcursul efectuării măsurătorilor. Este de la sine înțeles că fiecare măsurătoare a fost precedată și urmată de etalonarea și de reetalonarea aceluiași fir;

d) determinarea profilului de viteze cu și fără jet însoțitor în secțiunile alese, prin deplasarea sondei în poziția dorită, etanșarea canalului

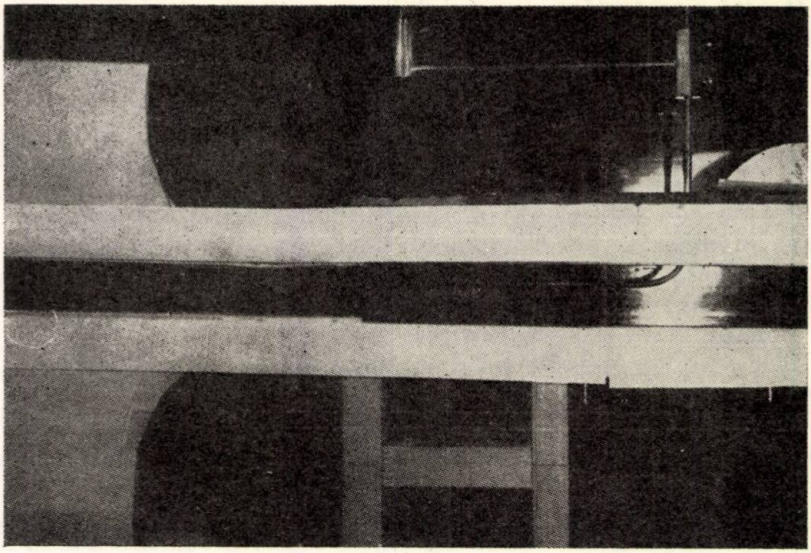


Fig. 3

şi traversarea micrometrică de la peretele de jos (fără fantă) pînă dincolo de axa canalului. Precauţiile indicate anterior au fost necesare pentru o corectă determinare a profilelor de viteză, următoarele dificultăţi ivindu-se pe parcurs şi trebuind să fie soluţionate :

— modificarea curbei de etalonare a firului sau arderea lui ;

— modificarea răspunsului în apropierea peretelui datorită cîmpului de temperatură creat de peretele solid în imediata lui vecinătate, unde vitezele mici fac să crească enorm importanţa convecţiei libere ;

— modificarea regimului de scurgere, introducerea unor fluctuaţii parazite datorite erorilor de etanşare sau schimbării parametrilor termodinamici ai fluidului din diverse cauze externe.

În figura 5 se dau drept exemple determinări de profile de viteze în cîteva secţiuni, unde se observă influenţa peretelui.

Metodica experimentală a mai inclus o permanentă evaluare a nivelului fluctuaţiilor prin urmărirea la osciloscop a semnalului dat de firul cald, apreciindu-se astfel calitativ, dar suficient de exact pentru scopurile practice caracterul laminar, tranziţional sau turbulent al scurgerii. Cu această ocazie s-au obţinut şi unele oscilograme cu ajutorul fotoregistratorului din faţa ecranului osciloscopului.

4. REZULTATE EXPERIMENTALE

După cum s-a arătat la început, un prim obiectiv al rezultatelor experimentale l-a constituit verificarea teoriei elaborate de autori [1] cu privire la influenţa jeturilor longitudinale însoţitoare asupra evoluţiei caracteristicilor scurgerii de intrare, laminare, incompresibile.

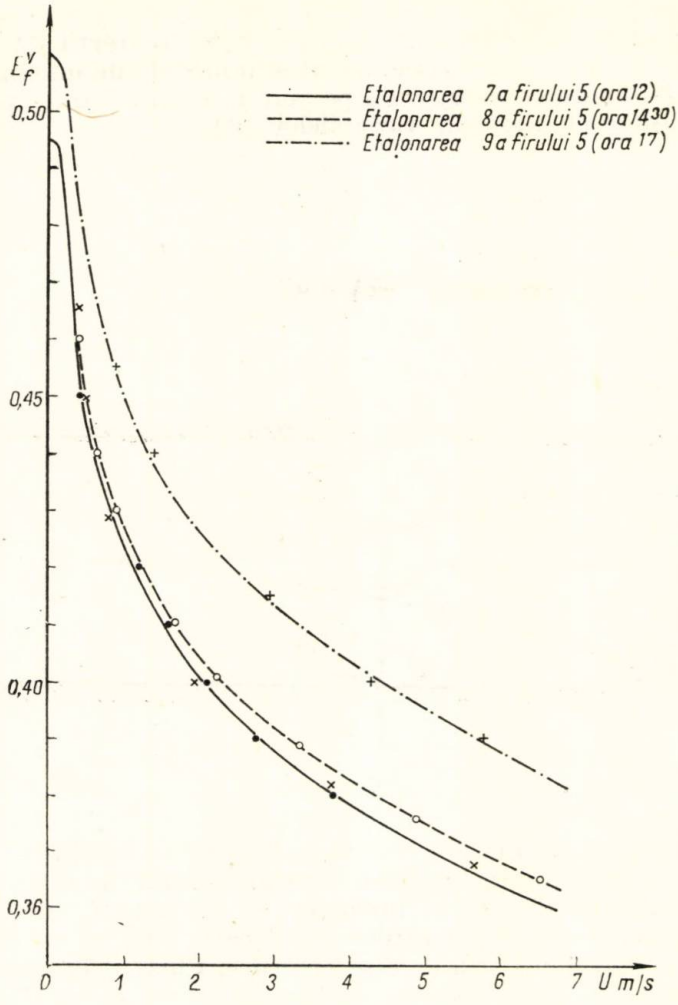

L_f^V
0,50
0,45
0,40
0,36
Etalonarea 7a firului 5 (ora 12)
Etalonarea 8a firului 5 (ora 14^{30})
Etalonarea 9a firului 5 (ora 17)
0
1
2
3
4
5
6
7
U m/s

Fig. 4

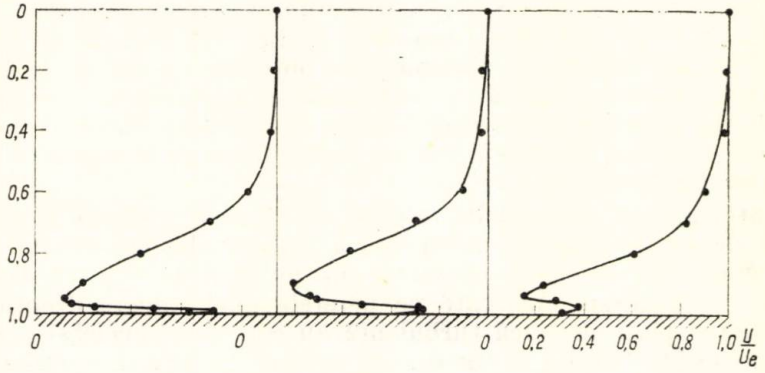

0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
0
0
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
$\frac{U}{U_e}$

Fig. 5

În figura 6 este reprezentată configuraţia scurgerii de studiat cu notaţiile geometrice şi cinematice, utilizînd o metodă de integrare a ecuaţiilor stratului-limită ce se dezvoltă pe pereţi, metodă bazată pe transformarea ecuaţiilor cu ajutorul variabilelor [6].

$$\xi = x; \quad \eta = \frac{\int_0^y u\,dy}{\int_0^\delta u\,dy} = \frac{\psi}{\psi_\delta(x)}.$$

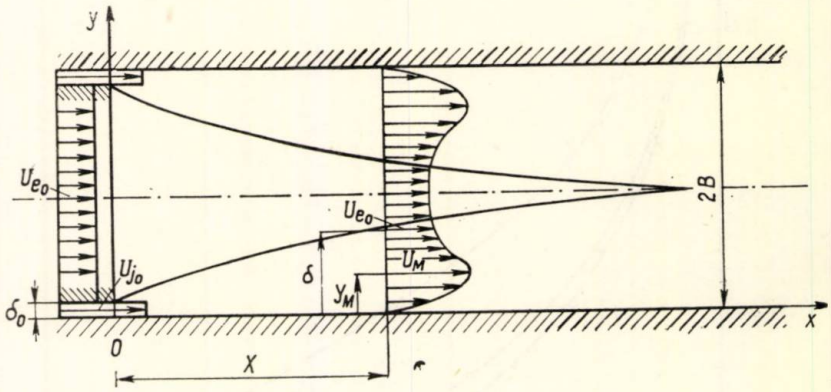


Fig. 6

S-au determinat următoarele caracteristici: evoluţia profilului de viteză $u/U_e(y/\delta)$, evoluţia grosimii stratului-limită δ, evoluţia vitezei din exteriorul stratului U_e şi lungimea de umplere L. Metoda a fost verificată în cazul absenţei jeturilor însoţitoare, cînd se cunosc rezultatele clasice [2] obţinute prin diverse procedee. Chiar şi în acest caz, mai simplu după cunoştinţele noastre nu există publicate rezultate experimentale referitoare la scurgerea laminară de intrare. În acest sens prezentăm în diagramele următoare cîteva profile de viteză (fig. 7), evoluţia grosimii stratului, δ/b (fig. 8), evoluţia vitezei din exteriorul stratului, U_e/U_{e_0} (fig. 9), şi lungimea de umplere, L (fig. 10), funcţie de numărul Reynolds Re, ca rezultate experimentale obţinute de noi în comparaţie cu cele teoretice. Se constată că rezultatele experimentale se încadrează în prevederile teoretice suficient de bine ca să admitem că instalaţia experimentală prezentată anterior a realizat configuraţia de scurgere de intrare în mişcarea laminară.

Menţionăm că punctul de origine $x = 0$ în experienţe a fost luat la ieşirea din porţiunea de convergent a colectorului circuitului aerodinamic utilizat drept canal, respectiv în punctul O (fig. 1). De altfel măsurători preliminare efectuate pe peretele unei camere dreptunghiulare a sufleriei plate de mică turbulenţă au confirmat aceleaşi prevederi teoretice, considerîndu-se scurgerea de intrare ca avînd originea puţin înainte de racordarea colectorului la camera de experienţă dreptunghiulară.

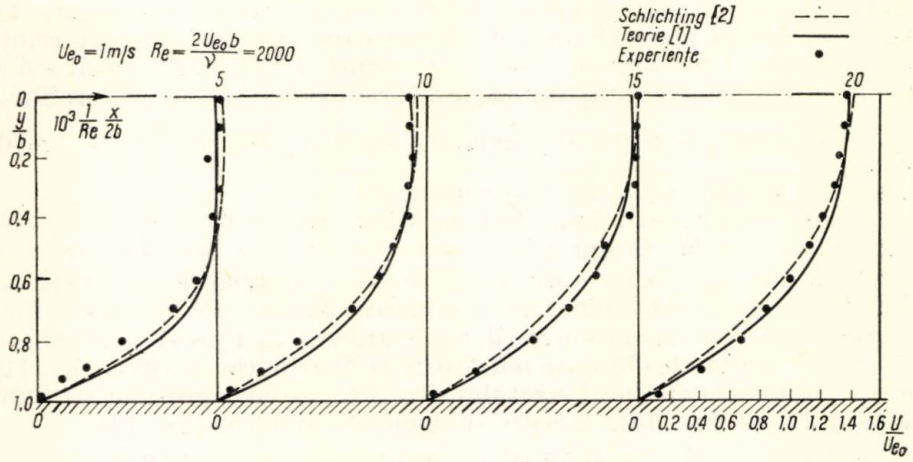


Fig. 7

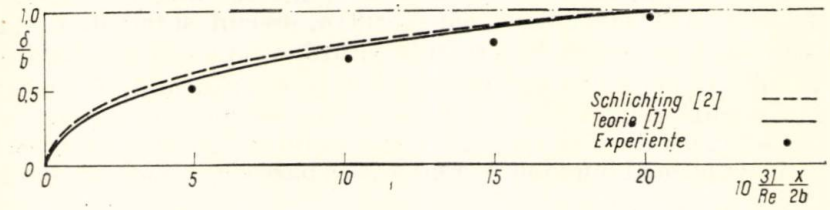


Fig. 8

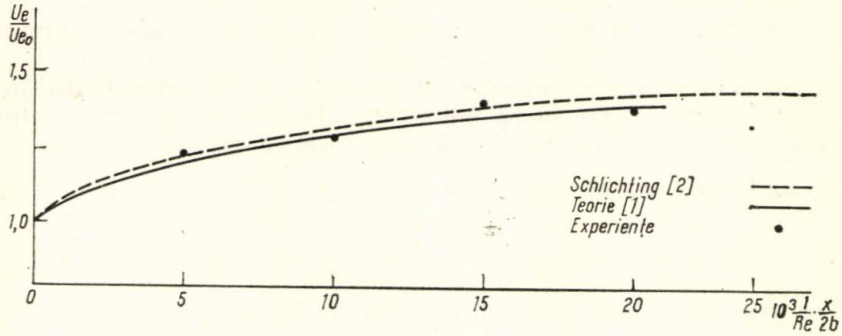


Fig. 9

Prin introducerea jeturilor însoţitoare, în condiţiile şi cu precauţiile expuse în paragrafele anterioare, s-a urmărit verificarea experimentală a teoriei prezentate în lucrarea [1] şi pentru care nu cunoaştem din literatură nici un rezultat publicat. După cum se observă din figura 11, profilele de viteză prezintă nişte umflături caracteristice, care reprezintă efectul jeturilor longitudinale. Aceste umflături sînt în mod normal sediul unor instabilităţi datorită caracterului inflexional local al profilului $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} < 0\right)$, astfel că realizarea experimentală a unor asemenea profile laminare constituie ca atare o performanţă.

În mod firesc s-a lucrat deci cu viteze foarte mici şi s-a utilizat în măsurători tehnica firului cald. Pentru compararea teoriei cu rezultatele experienţei s-au determinat cu exactitate distribuţiile de viteză în mai multe secţiuni, controlîndu-se cu ajutorul firului cald în mod permanent caracterul laminar al scurgerii. În figurile de mai jos sînt prezentate comparativ rezultatele obţinute referitoare la distribuţia de viteze (fig. 11), variaţia vitezei în exteriorul stratului (fig. 12), variaţia grosimii stratului care se dezvoltă (fig. 13), variaţia lungimii de umplere (fig. 14).

Ca parametrul experimental s-a putut varia raportul dintre viteza jetului şi viteza curentului principal, U_{j_0}/U_{e_0}, între limitele 1—6.

Se constată că, în ciuda enormelor dificultăţi ridicate de realizarea unei scurgeri laminare la viteze mici, teoria elaborată este confirmată satisfăcător experimental. În special se remarcă tendinţa umflăturii profilului de a se deplasa în aval către centru, precum şi tendinţa lungimii de umplere de a se micşora în prezenţa jeturilor longitudinale însoţitoare.

Atît din punct de vedere teoretic, cît şi experimental, determinarea lungimii de umplere necesită o mică discuţie, deoarece caracterul asimptotic al scurgerii duce la evaluări cantitative neriguroase. Într-adevăr, criteriul de definire al lungimii de umplere se bazează pe dezvoltarea profilului de viteză pînă cînd tangenta $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ a vitezei maxime se atinge chiar pe axa canalului. Cu alte cuvinte, viteza pe axa canalului creşte pînă la atingerea unei valori maxime asimptotice. După cum se constată însă atît din soluţiile obţinute din ecuaţiile diferenţiale ale vitezei [1] pe axa canalului, cît şi din determinările experimentale ale profilului de viteză, acest proces de creştere progresivă a vitezei este lent. În această privinţă, se poate face o analogie cu tendinţa vitezei din stratul-limită de a atinge valoarea exterioară potenţială. În ambele cazuri, gradul de monotonie al funcţiei de distribuţie a vitezei şi incertitudinea datelor experimentale pentru mici variaţii de viteză $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right.$, respectiv $\left.\frac{\mathrm{d}U_e}{\mathrm{d}x}\right.$ foarte mici$\left.\right)$ fac ca evaluările cantitative să fie date într-o gamă largă de valori. Astfel se ştie că pentru grosimea stratului limită Blasius se pot lua valori $\delta = 4{,}8 \ldots 5{,}64 \sqrt{\frac{\nu x}{U_e}}$, deci cu variaţii de 20%. Nu este deci de mirare că lungimea de umplere poate varia ca evaluare cantitativă aproape de la simplu la dublu, după cum se vede în diagrama 10. Experimental,

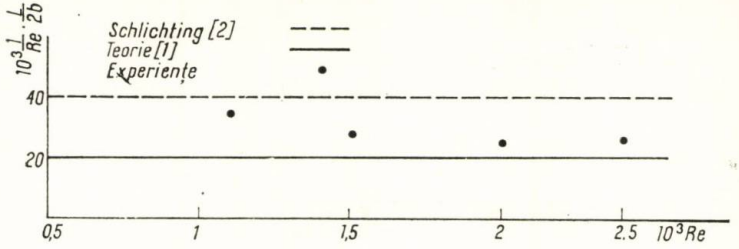


Fig. 10

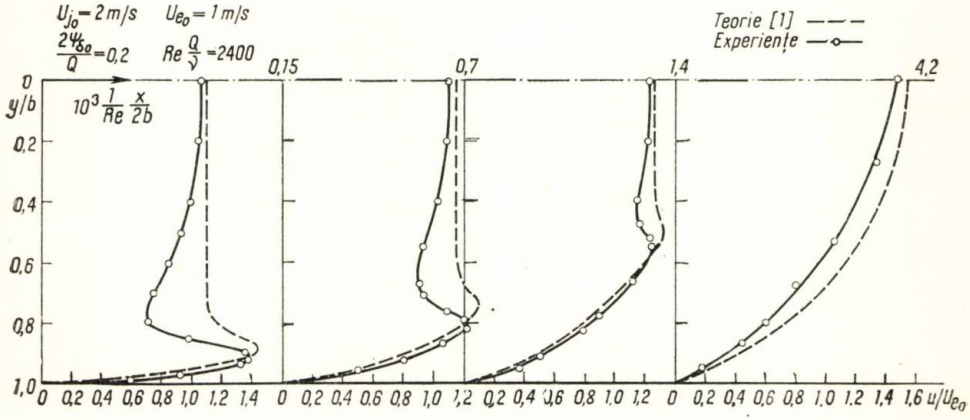


Fig. 11

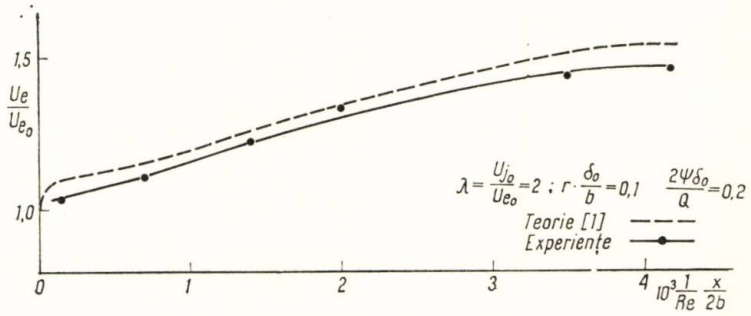


Fig. 12

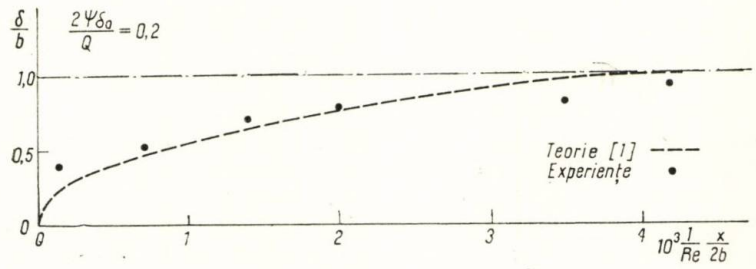


Fig. 13

profilele de viteză din zona care corespunde umplerii sînt insensibil de apropiate şi practic nu diferă mult de limita erorilor experimentale.

Am extins cercetările din scurgerea de intrare şi asupra scurgerii fluctuante, mai precis în cazul alterării evidente a caracterului ei laminar.

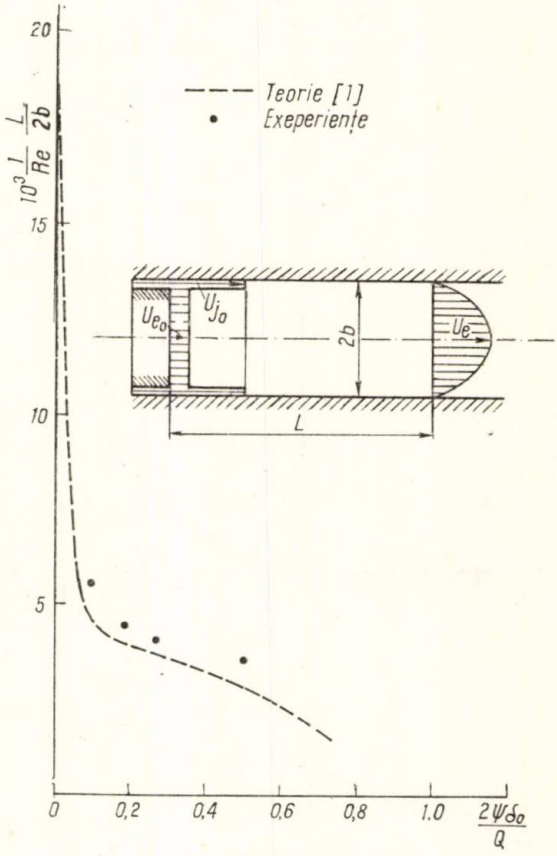


Fig. 14

Fără a intra în detaliile unei analize complete a acestui caz (o teorie corespunzătoare este în curs de elaborare), prezentăm în cele ce urmează cîteva rezultate experimentale obţinute cu aceeaşi instalaţie. Astfel, în figura 15 sînt prezentate cîteva profile de viteză obţinute în scurgerea de intrare puternic fluctuantă la $\mathrm{Re} = \frac{b\, U_{e_0}}{\nu} = 4\,500$, în diferite secţiuni, în lungul scurgerii. Se remarcă caracterul turbulent al profilelor de viteză, datorită faptului că valorile corelaţiei $\overline{u'v'}$ au atins nivelul cerut de soluţia de tip turbulent a ecuaţiei mişcării medii [7]. De asemenea în figura 16 este arătată lungimea de umplere pentru scurgerea de intrare turbulentă fără jeturi însoţitoare, determinată conform teoriilor clasice cunoscute [3], [4] şi unei teorii elaborate de autori [5] (pe baza unei noi expresii pentru frecarea turbulentă [7]) în comparaţie cu datele obţinute în cursul experienţelor prezentate în lucrarea de faţă. În sfîrşit, în figura 17 sînt redate

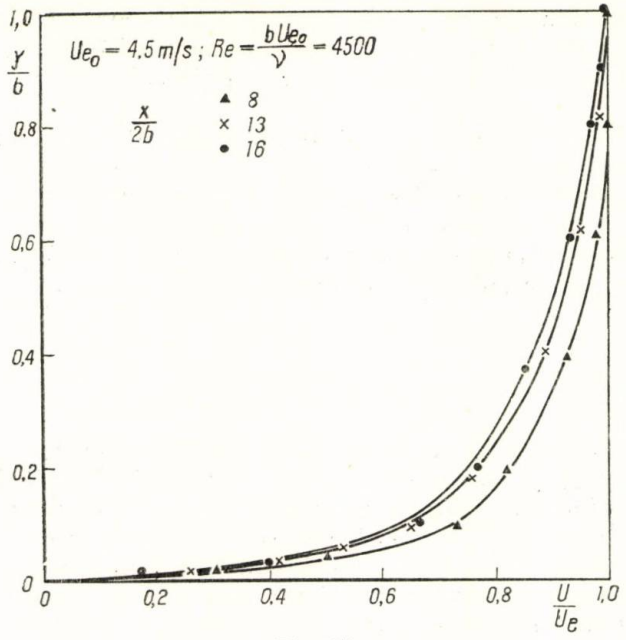


Fig. 15

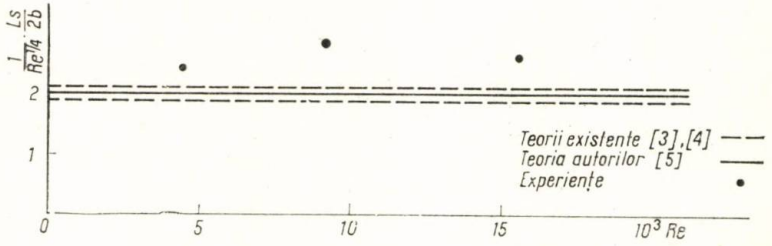


Fig. 16

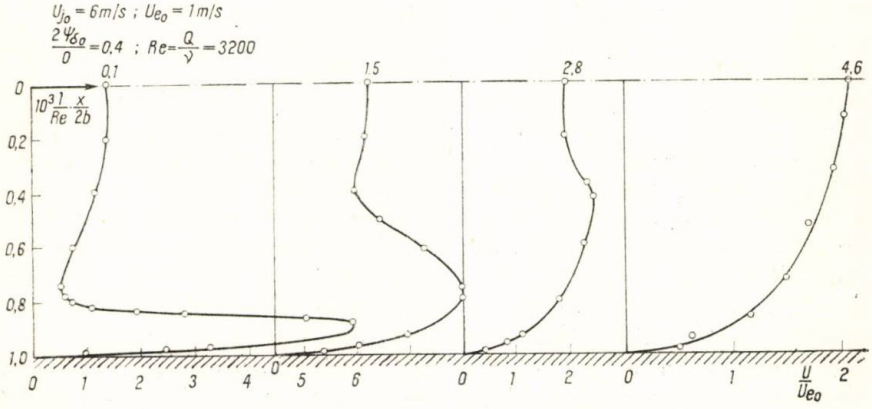


Fig. 17

unele rezultate experimentale din scurgerea turbulentă ce intrare în prezenţa jeturilor însoţitoare. Se observă aceleaşi umflături ale profilelor de viteză întîlnite în cazul laminar, însă forma şi evoluţia lor prezintă deosebiri evidente.

Aceste ultime rezultate au fost obţinute într-o scurgere caracterizată de noi ca fiind turbulent nedezvoltată pe baza oscilogramelor furnizate continuu de firul cald. Extinderea experienţelor la numere Reynolds mai mari în urma cercetărilor noastre preliminare nu modifică substanţial caracteristicile medii ale scurgerii date prin mărimi adimensionalizate corespunzător (îndeosebi expresia lungimii de umplere).

5. CONCLUZII

Principala concluzie care se desprinde din lucrarea prezentată se referă la faptul că jeturile însoţitoare, cel puţin cînd debitul lor este mic în raport cu cel al curentului principal, micşorează lungimea de umplere. S-a urmărit în special acest aspect, deoarece intuitiv s-ar părea că un profil iniţial care se deosebeşte de cel al unei repartiţii uniforme de viteză întîrzie dezvoltarea stratului-limită, a cărui grosime devine egală cu semiînălţimea canalului mult mai departe, aşa cum rezultă, de exemplu, din lucrarea [8]. Teoria elaborată şi prezentată de autori [1] arată, dimpotrivă, o micşorare a lungimii de umplere în cazul în care profilul iniţial de viteze prezintă o porţiune centrală, uniformă, cu două vîrfuri la perete (jeturile însoţitoare de grosime neglijabilă). Rezultatele experimentale arătate anterior confirmă pentru scurgerea laminară previziunile teoretice. Astfel din profilele de viteză ale figurii 11, determinate cu acurateţea maximă posibilă în laboratorul nostru, rezultă că lungimea de umplere este de cîteva ori mai mică faţă de cazul în care lipsesc jeturile însoţitoare. O explicaţie descriptivă a acestui fenomen n-ar adăuga lucruri esenţiale desfăşurării lui, pentru că motivări ca acelea privind efectul jeturilor însoţitoare într-o mai rapidă distribuire a impulsului în stratul-limită sînt foarte vagi. O precizare mai plauzibilă în acest sens o poate furniza tratarea teoretică în care ecuaţia diferenţială a lui ψ_δ duce la o soluţie modificată în cazul prezenţei jeturilor însoţitoare [1].

O altă concluzie a lucrării se referă la posibilităţile de extindere a rezultatelor în cazul scurgerilor tranziţionale şi turbulente. Deşi teoria n-a fost încă elaborată, rezultatele preliminare pe care le-am prezentat mai sus se încadrează în ceea ce am formula ca o lege generală : jeturile însoţitoare în scurgerea de intrare, cu un debit mic în comparaţie cu scurgerea principală, au tendinţa de a micşora lungimea de umplere, indiferent de natura scurgerii : laminară, tranziţională sau turbulentă. Este evident că un rezultat cantitativ exprimat sub forma unor legi parametrice (numărul Reynolds, raportul dintre lungimea de umplere şi înălţimea canalului, raportul dintre debitul jeturilor şi debitul total) se poate obţine în urma unei serii sistematice de încercări.

În sfîrşit, ca o aplicaţie practică, jeturile însoţitoare pot asigura o eficacitate sporită a proceselor de ardere atunci cînd configuraţia scurgerii se poate asimila unei scurgeri de intrare. În această privinţă, o primă

extindere necesară ar putea include scurgerile de intrare cu geometrie modificată a peretelui.

De asemenea menționăm cu titlul informativ că pe baza considerentelor de mai sus se poate elabora o metodă de calcul pentru diferitele tipuri de ejectoare (ca, de exemplu, ejectorul Coandă).

Primită la redacție la 20 august 1970

BIBLIOGRAFIE

1. H. Dumitrescu, Șt. N. Săvulescu, *L'écoulement laminaire d'éntrée dans un canal en présence des jets longitudinaux près des parois*, Rev. Roum. Sci. Techn. Méc. Appl., **6**, 14 (1969).
2. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, Mc. GrawHill Book Comp., Inc., New York, 1960.
3. Geneviève, Comte — Bellot, *Ecoulement turbulent entre deux parois parallèles*, P.S.T. du Min. de l'air, *419* (1965).
4. S. Hîncu, *Determinarea lungimii de stabilizare a mișcării turbulente a fluidelor în canale largi și conducte circulare sub presiune*, St. cerc. mec. apl., **IX**, *4*, 973 (1958).
5. H. Dumitrescu, *Contribuții la studiul teoretic și experimental al unor scurgeri cu aplicație în combustie*, teză de doctorat, București, 1970.
6. Șt. N. Săvulescu, *Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, București, Edit. Academiei, 1968.
7. Șt. N. Săvulescu, H. Dumitrescu, *Theoretical considerations on shear flow turbulence*, Rev. Roum. Sci. Tech. Méc. Appl. **5**, *15*, (1970).
8. Williamson W. John, *Decay of Symetrical Laminar Distoreted Profiles between Flat Parallel Plates*, J. Basic. Engineering, sept. 1969.

MODEL MATEMATIC PENTRU CALCULUL OSCILAȚIILOR MAXIME DIN CASTELE ȘI DIN SISTEME DE CASTELE DE ECHILIBRU

de M. POPESCU, P. NOVOTNY, C. STERE
Institutul de studii și cercetări pentru
îmbunătățiri funciare și gospodărirea apelor

Se prezintă o metodă generală de calcul numeric automat al oscilațiilor maxime din castele și din sisteme de castele de echilibru de secțiune variabilă, plasate pe galeria de aducție a unei uzine hidroelectrice, pentru diverse manevre de debit la centrală.
Manevrele de debit considerate au fost alese astfel încît să reproducă în general manevrele concrete ce se întîlnesc sau sînt posibile în exploatarea uzinelor hidroelectrice.
Exemplele de calcul prezentate pun în evidență posibilitatea pe care o oferă metoda de calcul propusă pentru cunoașterea fenomenului oscilatoriu din sistem. Metoda permite dimensionarea optimă a unui castel sau sistem de castele de echilibru, prin studiul unui număr mare de variante (în timp util), pentru diferite tipuri de castele și avînd în vedere o gamă largă de parametri care caracterizează instalația.

Pentru dimensionarea hidraulică la oscilații maxime a castelelor de echilibru, în mod obișnuit se consideră următoarele manevre de debit la centrală : închiderea totală instantanee a debitului maxim și deschiderea instantanee a $n\%$ din debitul maxim. După caz, n variază de la 0 la 80.

Vom trata pe rînd cazul unui castel și al unui sistem de două castele de echilibru plasate pe galeria de aducție. Castelele de echilibru care se întîlnesc în general în schemele uzinelor hidroelectrice sînt de secțiune constantă, cu sau fără lărgire de secțiune la partea superioară sau la bază. De asemenea unele sînt prevăzute cu diafragmă la bază sau cu un deversor la partea superioară.

Pentru cazul unui castel de echilibru, integrarea directă a ecuațiilor diferențiale ale mișcării se poate face numai în condițiile următoarelor ipoteze :

— secțiune constantă a castelului ;

— pierderi de sarcină exprimate analitic ;

— reducerea instantanee a debitului de la o valoare de regim la zero sau modificarea debitului de la o valoare constantă la alta, însoțită

de menţinerea constantă a nivelului piezometric din galerie în dreptul castelului [4], [14].

Chiar şi în aceste cazuri în care se poate face integrarea directă a ecuaţiilor, pentru anumite manevre este necesară completarea calculelor printr-o integrare grafică sau numerică în condiţiile manevrelor care se întîlnesc efectiv în exploatarea uzinelor hidroelectrice. În mod practic, studiul oscilaţiilor nivelului apei dintr-un castel de echilibru se face prin integrarea ecuaţiilor mişcării în diferenţe finite (grafic şi analitic) [2], [4]. Metodele grafice dezvoltate, pentru a depăşi dificultăţile calculului numeric, au fost multă vreme aproape exclusiv folosite şi sînt încă destul de larg utilizate în proiectare.

Utilizarea calculatoarelor electronice oferă o posibilitate nouă de abordare a metodelor de calcul numeric într-un mod mult mai eficient şi mai exact.

Din lucrările apărute în ultimul timp în literatura de specialitate se remarcă o metodă de calcul numeric automat al oscilaţiilor nivelului apei pentru cazul castelului de echilibru de secţiune constantă [5], precum şi o altă metodă pentru cazul unei manevre de debit corespunzătoare trecerii de la o putere constantă la alta a centralei [1].

În general, adaptarea soluţiei cu sistem de două castele de echilibru plasate pe galeria de aducţie a unei uzine hidroelectrice se impune fie din considerente tehnice-economice, fie în cazurile de extindere a unor uzine hidroelectrice, cînd castelul de echilibru existent nu ar mai funcţiona satisfăcător în noua situaţie.

Sînt cunoscute mai multe metode de calcul al oscilaţiilor în masă într-un asemenea sistem de castele.

Metodele grafice de calcul [4], [12] sînt în general asemănătoare celor întîlnite în cazul uzinei hidroelectrice prevăzute cu un singur castel de echilibru, cu avantajele şi dezavantajele respective.

Menţionăm o metodă de rezolvare în diferenţe finite a sistemului de ecuaţii diferenţiale ale oscilaţiilor în masă din acest sistem, datorită lui L. Escande [2], cu observaţia că pentru mărimile Z şi W s-au luat valorile lor de la timpul anterior, ceea ce conferă metodei un anumit grad de aproximaţie pus în evidenţă de unele studii comparative ale metodelor de calcul în diferenţe finite [6].

Folosind un calculator analogic, s-a încercat studiul oscilaţiilor în masă din sistem prin înlocuirea celor două castele printr-un castel fictiv, care să urmărească în general comportarea sistemului real format din cele două castele [3]; valorile oscilaţiilor maxime astfel calculate au un grad de aproximaţie apreciat la circa 10%.

Dintre metodele de calcul numeric automat cunoscute menţionăm următoarele:

— o metodă de calcul iterativ direct [11], care se referă însă la o schemă a uzinei puţin diferită, în sensul că cele două castele de echilibru sînt plasate respectiv pe cîte o ramificaţie a galeriei de aducţie ce deserveşte fiecare cîte o centrală;

— o metodă de calcul pentru n castele amplasate în serie pe galeria de aducţie, datorită lui P. Torell [13], pe care autorul nu o precizează decît prin menţiunea generală că „utilizează metoda diferenţelor finite

prin calcule iterative", în schimb prezintă rezultatele unor exemple de calcul.

Ambele metode de calcul menționate se pretează doar la pași de calcul Δt foarte mici : $\Delta t = 1 \ldots 2$ s.

În privința studiului oscilațiilor în masă prin modelare hidraulică, cazul nu comportă particularități față de metodologia generală [8]. În această comunicare se prezintă o metodă generală de calcul numeric automat al oscilațiilor maxime dintr-un castel și sistem de două castele de echilibru, considerate de secțiuni variabile, pentru diverse manevre de debit la centrală [7], [9], [10]. Manevrele de debit considerate au fost alese astfel încît să reproducă în general manevrele concrete ce se întîlnesc sau sînt posibile în exploatarea uzinelor hidroelectrice (fig. 3).

1. ALGORITMUL DE CALCUL

1.1. Ecuațiile diferențiale ale mișcării oscilatorii dintr-un castel de echilibru (fig. 1) sînt următoarele :

$$\begin{cases} \dfrac{L}{g}\dfrac{dW}{dt} + Z + P + R = 0, \\ Wf = F\dfrac{dZ}{dt} + Q_T, \\ Q_T = \Phi(t), \end{cases} \tag{1}$$

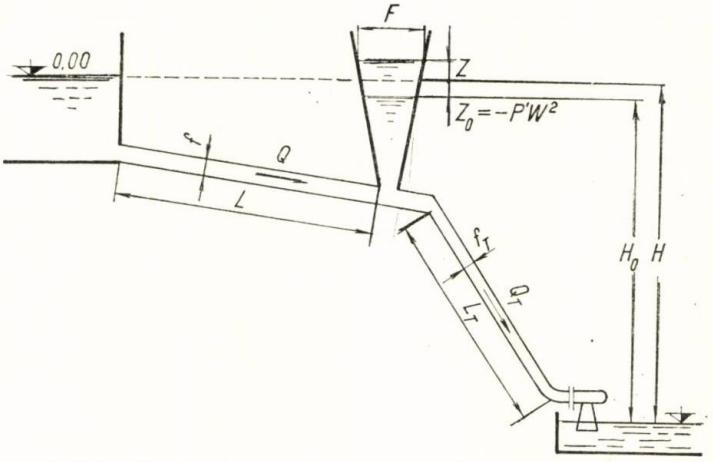


Fig. 1. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu castel de echilibru de secțiune variabilă.

iar pierderile de sarcină din galeria de aducție și diafragma castelului pot fi exprimate analitic prin relațiile

$$\begin{aligned} P &= P'W|W|, \\ R &= R'V_s|V_s|. \end{aligned} \tag{2}$$

Vom face o integrare numerică a sistemului (1). Utilizarea valorilor medii ale variabilelor pe intervalul de timp Δt în procesul de integrare asigură o foarte bună precizie a calculului, după cum se constată prin compararea rezultatelor cu măsurători efectuate la uzine hidroelectrice în funcţie [6].

Se va adopta deci următorul sistem de diferenţe finite şi valori medii :

$$\Delta t = t_{i+1} - t_i\,; \quad t_m = t_i + \frac{\Delta t}{2}\,; \quad Z_m = Z_i + \frac{\Delta Z}{2}\,,$$

$$W_m = W_i + \frac{\Delta W}{2}\,; \quad F_m = \left|\frac{Vol_{i+1} - Vol_i}{\Delta Z}\right|\,; \quad Q_{Tm} = \frac{Q_{Ti} + Q_{Ti+1}}{2}, \tag{3}$$

$$V_{sm} = \frac{F_m}{F_s}\frac{\Delta Z}{\Delta t}\,; \quad f_m = \frac{L}{\sum \frac{L_j}{f_j}}$$

(unde f_m apare în cazul în care galeria de aducţie este formată din mai multe tronsoane de secţiuni f_j şi lungimi L_j).

Astfel sistemul de ecuaţii (1), scris în diferenţe finite, devine

$$\begin{cases} \dfrac{L}{g}\dfrac{\Delta W}{\Delta t} + Z_m + P' W_m \,|W_m| + R' V_{sm}\,|V_{sm}| = 0, \\ W_m f_m = F_m \dfrac{\Delta Z}{\Delta t} + Q_{Tm}, \\ Q_{Tm} = \Phi(t_m) \end{cases} \tag{4}$$

sau, sub altă formă,

$$\begin{cases} \Delta W = 2\left(\dfrac{F_m}{f_m}\dfrac{\Delta Z}{\Delta t} - W_i + \dfrac{Q_{Tm}}{f_m}\right), \\ \Delta Z = -2\left[Z_i + \dfrac{L}{g}\dfrac{\Delta W}{\Delta t} + P'\left|W_i + \dfrac{\Delta W}{2}\right|\left(W_i + \dfrac{\Delta W}{2}\right) + R'\,|V_{sm}|\,V_{sm}\right], \\ Q_{Tm} = \Phi(t_m). \end{cases} \tag{5}$$

De asemenea se va folosi forma de scriere simplificată

$$\begin{cases} \Delta W = \varphi_1(\Delta Z), \\ \Delta Z = \varphi_2(\Delta W), \\ Q_{Tm} = \Phi(t_m). \end{cases} \tag{6}$$

Se propune următorul algoritm de calcul pe etape:

Etapa I

$$\Delta Z_p = \Delta_1,$$
$$\Delta W = \varphi_1(\Delta_1) = \delta_1,$$
$$\Delta Z_c = \varphi_2(\delta_1),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_1| < \varepsilon.$$

Etapa a II-a

$$\Delta Z_p = 2\Delta_1 = \Delta_2,$$
$$\Delta W = \varphi_1(\Delta_2) = \delta_2,$$
$$\Delta Z_c = \varphi_2(\delta_2),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_2| < \varepsilon.$$

Etapa a III-a

$$\Delta Z_p = \Delta_1 + \left(\frac{\Delta_2 - \Delta_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}\right)\varepsilon_1 = \Delta_3,$$
$$\Delta W = \varphi_1(\Delta_3) = \delta_3,$$
$$\Delta Z_c = \varphi_2(\delta_3),$$
$$|\Delta Z_p - \Delta Z_c| = |\varepsilon_3| < \varepsilon.$$

Pentru prima propunere a lui ΔZ se ia valoarea sa de la timpul de calcul anterior (la primul pas de timp Δt se poate lua o valoare acceptabilă oarecare, de exemplu $\Delta Z_p = 30$ cm).

1.2. Ecuațiile diferențiale ale mișcării oscilatorii dintr-un sistem de două castele de echilibru plasate pe galeria de aducție a unei uzine hidroelectrice (fig. 2) sînt următoarele:

$$\begin{cases} \dfrac{L_1}{g}\dfrac{dW_1}{dt} + Z_1 + P_1 + R_1 = 0, \\ \dfrac{L_2}{g}\dfrac{dW_2}{dt} + Z_2 - Z_1 + P_2 + R_2 = 0, \\ W_1 f_1 = F_1\dfrac{dZ_1}{dt} + W_2 f_2, \\ W_2 f_2 = F_2\dfrac{dZ_2}{dt} + Q_T, \\ Q_T = \Phi(t), \end{cases} \tag{7}$$

iar pierderile de sarcină din galeria de aducţie şi diafragmele castelelor pot fi exprimate analitic prin relaţiile

$$P_1 = P_1' W_1 | W_1 |, \quad R_1 = R_1' V_{s1} | V_{s1} |,$$
$$P_2 = P_2' W_2 | W_2 |, \quad R_2 = R_2' V_{s2} | V_{s2} |. \tag{8}$$

Folosind un model de calcul similar celui prezentat anterior, vom face o integrare numerică a sistemului (7). Se menţin aceleaşi precizări asupra utilizării diferenţelor finite.

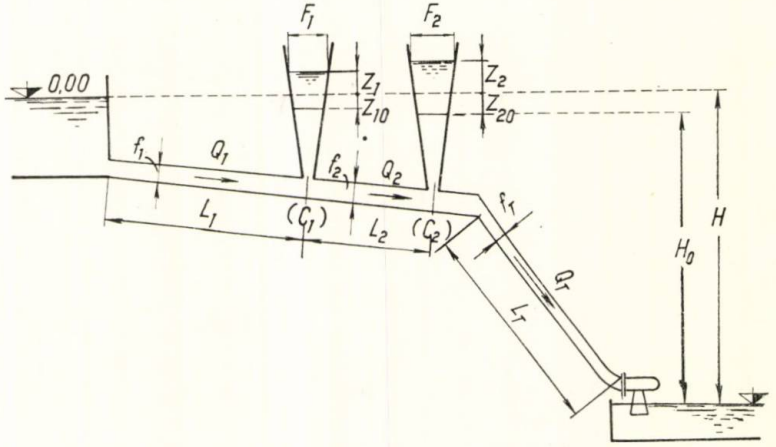


Fig. 2. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu un sistem de două castele de echilibru de secţiune variabilă plasate pe galeria de aducţie.

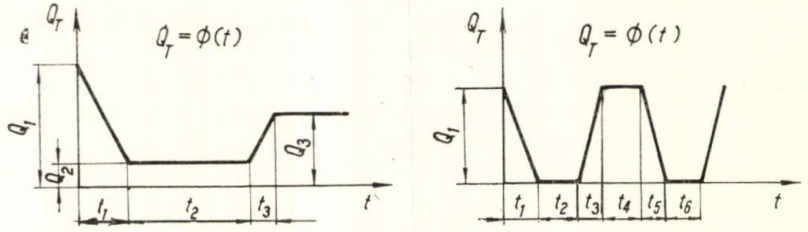


Fig. 3. — Diagrama de variaţie a debitului turbinelor $Q_T = \Phi(t)$ pentru diverse manevre la centrală.

Sistemul de ecuaţii (7), scris în diferenţe finite, devine

$$\begin{cases} \text{(a)} \quad \dfrac{L_1}{g}\dfrac{\Delta W_1}{\Delta t} + Z_{1m} + P_1' W_{1m} | W_{1m} | + R_1' V_{s1} | V_{s1} | = 0, \\ \text{(b)} \quad \dfrac{L_2}{g}\dfrac{\Delta W_2}{\Delta t} + Z_{2m} - Z_{1m} + P_2' W_{2m} | W_{2m} | + R_2' V_{s2} | V_{s2} | = 0, \end{cases} \tag{9}$$

$$\begin{cases} \text{(c)}\ W_{1m}f_1 = F_{1m}\dfrac{\Delta Z_1}{\Delta t} + W_{2m}f_2, \\ \text{(d)}\ W_2 f_2 = F_2\dfrac{\Delta Z_2}{\Delta t} + Q_{Tm}, \\ \text{(e)}\ Q_{Tm} = \Phi(t_m). \end{cases} \tag{9}$$

Folosind o formă de scriere simbolică, sistemul (9) se poate scrie astfel:

$$\begin{cases} \text{(a)}\ \varphi_1(\Delta Z_1, \Delta W_1) = 0, \\ \text{(b)}\ \varphi_2(\Delta Z_1, \Delta Z_2, \Delta W_2) = 0, \\ \text{(c)}\ \varphi_3(\Delta Z_1, \Delta W_1, \Delta W_2) = 0, \\ \text{(d)}\ \varphi_4(\Delta Z_2, \Delta W_2) = 0, \\ \text{(e)}\ Q_{Tm} = \Phi(t_m). \end{cases} \tag{10}$$

Rezolvînd sistemul de ecuații (10 c, d) în raport cu ΔW_1 și ΔW_2, precum și separat ecuațiile (a) și (b) din (10) în raport cu ΔZ_1 și, respectiv, ΔZ_2, se obțin următoarele relații:

$$\begin{cases} \Delta W_1 = \psi_1(\Delta Z_1, \Delta Z_2), \\ \Delta W_2 = \psi_2(\Delta Z_2), \\ \Delta Z_1 = \psi_3(\Delta W_1), \\ \Delta Z_2 = \psi_4(\Delta W_2, \Delta Z_1), \\ Q_{Tm} = \Phi(t_m), \end{cases} \tag{11}$$

cu mențiunea că funcțiile ψ_1, ψ_2, ψ_3, ψ_4 vor fi precizate ulterior. Se propune următorul algoritm de calcul pe etape:

Etapa I

$$\Delta Z_1^p = \Delta_1'; \quad \Delta Z_2^p = \Delta_1'',$$

$$\Delta W_1 = \psi_1(\Delta_1', \Delta_1'') = \delta_1'; \quad \Delta W_2 = \psi_2(\Delta_1'') = \delta_1'',$$

$$\Delta Z_1^c = \psi_3(\delta_1'); \quad \Delta Z_2^c = \psi_4(\delta_1'', \Delta_1'),$$

$$|\Delta Z_1^p - \Delta Z_1^c| = |\varepsilon_1'| < \varepsilon,$$

$$|\Delta Z_2^p - \Delta Z_2^c| = |\varepsilon_1''| < \varepsilon.$$

Etapa a II-a

$$\Delta Z_1^p = 2\Delta_1' = \Delta_2'; \quad \Delta Z_2^p = 2\Delta_1'' = \Delta_2'',$$

$$\Delta W_1 = \psi_1(\Delta_2', \Delta_2'') = \delta_2'; \quad \Delta W_2 = \psi_2(\Delta_2'') = \delta_2'',$$

$$\Delta Z_1^c = \psi_3(\delta_2'); \quad \Delta Z_2^c = \psi_4(\delta_2'', \Delta_2').$$

$$|\Delta Z_1^p - \Delta Z_1^c| = |\varepsilon_2'| < \varepsilon,$$

$$|\Delta Z_2^p - \Delta Z_2^c| = |\varepsilon_2''| < \varepsilon.$$

Etapa a III-a

$$\Delta Z_1^p = \Delta_1' + \left(\frac{\Delta_2' - \Delta_1'}{\varepsilon_1' - \varepsilon_2'}\right)\varepsilon_1' = \Delta_3',$$

$$\Delta Z_2^p = \Delta_1'' + \left(\frac{\Delta_2'' - \Delta_1''}{\varepsilon_1'' - \varepsilon_2''}\right)\varepsilon_1'' = \Delta_3'',$$

$$\Delta W_1 = \psi_1(\Delta_3', \Delta_3'') = \delta_3'; \quad \Delta W_2 = \psi_2(\Delta_3'') = \delta_3'',$$

$$\Delta Z_1^c = \psi_3(\delta_3'); \quad \Delta Z_2^c = \psi_4(\delta_3'', \Delta_3'),$$

$$|\Delta Z_1^p - \Delta Z_1^c| = |\varepsilon_3'| < \varepsilon,$$

$$|\Delta Z_2^p - \Delta Z_2^c| = |\varepsilon_3''| < \varepsilon.$$

Revenim cu explicitarea schemei de calcul prezentată mai sus. Ecuațiile (c) și (d) din sistemul (9) se pot scrie astfel:

$$\left(W_{1i} + \frac{\Delta W_1}{2}\right) f_1 = F_{1m}\frac{\Delta Z_1}{\Delta t} + F_{2m}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t} + Q_{Tm},$$

$$\left(W_{2i} + \frac{\Delta W_2}{2}\right) f_2 = F_{2m}\frac{\Delta Z_2}{\Delta t} + Q_{Tm} \tag{12}$$

sau

$$f_1\Delta W_1 - b\Delta Z_1 - c\Delta Z_2 + a - d = 0,$$

$$f_2\Delta W_2 - c\Delta Z_2 + e - d = 0, \tag{13}$$

unde s-au făcut notațiile

$$a = 2f_1W_{1i}; \; b = 2\frac{F_{1m}}{\Delta t}; \; c = 2\frac{F_{2m}}{\Delta t},$$

$$d = 2Q_{Tm}; \; e = 2f_2W_{2i}. \tag{14}$$

Prin rezolvarea sistemului (13) rezultă

$$\begin{cases} \Delta W_1 = \dfrac{b\Delta Z_1 + c\Delta Z_2 + d - a}{f_1}, \\ \Delta W_2 = \dfrac{c\Delta Z_2 + d - e}{f_2}. \end{cases} \tag{15}$$

De asemenea, dezvoltînd ecuațiile (a) și (b) din sistemul (9), putem scrie

$$\begin{cases} \dfrac{L_1}{g}\dfrac{\Delta W_1}{\Delta t} + Z_{1i} + \dfrac{\Delta Z_1}{2} + P_1' \left| W_{1i} + \dfrac{\Delta W_1}{2} \right| \left(W_{1i} + \right. \\ \left. + \dfrac{\Delta W_1}{2} \right) + R_1' \left| \dfrac{F_{1m}}{F_{s1}} \dfrac{\Delta Z_1}{\Delta t} \right| \cdot \left(\dfrac{F_{1m}}{F_{s1}} \dfrac{\Delta Z_1}{\Delta t} \right) = 0, \\ \dfrac{L_2}{g}\dfrac{\Delta W_2}{\Delta t} + Z_{2i} - Z_{1i} + \dfrac{\Delta Z_2}{2} - \dfrac{\Delta Z_1}{2} + P_2' \left| W_{2i} + \right. \\ + \dfrac{\Delta W_2}{2} \left| \left(W_{2i} + \dfrac{\Delta W_2}{2} \right) + R_2' \left| \dfrac{F_{2m}}{F_{s2}} \dfrac{\Delta Z_2}{\Delta t} \right| \left(\dfrac{F_{2m}}{F_{s2}} \dfrac{\Delta Z_2}{\Delta t} \right) = 0 \right. \end{cases} \tag{16}$$

sau

$$\begin{cases} A_1 \Delta W_1 + 2Z_{1i} + \Delta Z_1 + C_1 | 2W_{1i} + \Delta W_1 | (2W_{1i} + \\ + \Delta W_1) + B_1 | \Delta Z_1 | \Delta Z_1 = 0, \\ A_2 \Delta W_2 + D + \Delta Z_2 - \Delta Z_1 + C_2 | 2W_{2i} + \Delta W_2 | (2W_{2i} + \\ + \Delta W_2) + B_2 | \Delta Z_2 | \Delta Z_2 = 0 \end{cases} \tag{17}$$

unde s-au făcut notațiile

$$A_1 = \frac{2L_1}{g\Delta t};\ A_2 = \frac{2L_2}{g\Delta t},$$

$$B_1 = 2\left(\frac{F_{1m}}{F_{s1}}\right)^2 \cdot \frac{R_1'}{(\Delta t)^2};\ B_2 = 2\left(\frac{F_{2m}}{F_{s2}}\right)^2 \cdot \frac{R_2'}{(\Delta t)^2}, \tag{18}$$

$$C_1 = \frac{P_1'}{2};\ C_2 = \frac{P_2'}{2};\ D = 2(Z_{2i} - Z_{1i}).$$

Rezolvînd separat ecuaţiile din sistemul (17) şi ţinînd seama de relaţiile (15), rezultă

$$\Delta Z_1 = -\frac{A_1\Delta W_1 + 2Z_{1i} + C_1|2W_{1i} + \Delta W_1|(2W_{1i} + \Delta W_1)}{1 + B_1\left|\dfrac{a - e + f_1\Delta W_1 - f_2\Delta W_2}{b}\right|},$$

$$\Delta Z_2 = \frac{\Delta Z_1 - A_2\Delta W_2 - D - C_2|2W_{2i} + \Delta W_2|(2W_{2i} + \Delta W_2)}{1 + B_2\left|\dfrac{e - d + f_2\Delta W_2}{c}\right|}. \tag{19}$$

Pentru primele propuneri ale lui ΔZ_1, ΔZ_2 se iau valorile lor de la timpul de calcul anterior (la primul pas de timp Δt se poate lua un set de valori acceptabile oarecare, de exemplu $\Delta Z_1^p = \Delta Z_2^p = 30$cm). Referindu-ne la ambele cazuri studiate, precizăm că, dacă condiţia

$$|\Delta Z_j^p - \Delta Z_j^c| < \varepsilon \quad (j = 1 \text{ sau } j = 1\,;\, 2) \tag{20}$$

este satisfăcută, calculul se consideră încheiat pentru pasul de calcul respectiv şi se trece la pasul de timp următor.

În caz contrar, calculul se reia de la etapa a III-a, considerînd ca etape I şi a II-a etapele parcurse a II-a şi a III-a. Soluţia problemei s-a dovedit a fi stabilă şi rapid convergentă. Din acest punct de vedere ea a fost verificată pentru diverse manevre bruşte de debit la centrală şi pentru diferite forme de castele întîlnite în practica inginerească, cu discontinuităţi de valori extreme ale secţiunii castelului.

De remarcat că pentru aproximarea curentă a soluţiei ΔZ s-a folosit metoda „poziţiei false" ($j = 1$), precum şi o extindere pentru două variabile a acestei metode ($j = 1\,;\, 2$).

2. PROGRAMAREA PE UN CALCULATOR ELECTRONIC

Programele au fost scrise şi testate pe calculatorul electronic CET—501 din Bucureşti.

În memoria calculatorului s-au introdus ca date de bază caracteristicile geometrice şi hidraulice ale sistemului galerie-castel, iar sub formă tabelară diagrama $Q_T = \Phi(t)$, curbele de volum ale castelui $Vol = Vol\,(Z)$, respectiv sistemului de castele $Vol_1 = Vol_1(Z_1)$; $Vol_2 = Vol_2(Z_2)$, precum şi curbele pierderilor de sarcină din diafragma castelului $R = R(V_s)$, respectiv sistemului de castele $R_1 = R_1(V_{s1})$; $R_2 = R_2(V_{s2})$.

S-a preferat exprimarea tabelară a funcţiei $R = R(V_s)$ unei relaţii analitice, deoarece această funcţie poate fi dată de încercări experimentale care redau mai exact fenomenul real decît o relaţie teoretică bazată pe anumite ipoteze.

În acest caz, expresiile lui ΔZ_1 şi ΔZ_2 din ecuaţiile (19) se simplifică, întrucît termenii R_1 şi R_2 rezultă direct din tabele funcţie de ΔZ_1^p şi ΔZ_2^p.

Nu s-a făcut studiu special pentru alegerea pasului de calcul Δt, întrucît viteza de calcul mare a calculatorului electronic permite alegerea unor pași de timp suficient de mici, asigurîndu-se totodată o stabilitate și convergență bună a soluției.

Astfel, pe timpul manevrelor bruște de debit s-au luat pași de timp $\Delta t = t_s/10$, iar pentru restul timpului fracțiuni din perioada ideală a oscilațiilor din castel, respectiv sistem de castele, $\Delta t = T_*/n$, n variind, după caz, de la 50 la 150.

S-au obținut în acest fel pași de calcul $\Delta t = 1 \ldots 3$s pe perioada manevrelor bruște de debit și $\Delta t = 3 \ldots 10$s pentru restul desfășurării fenomenului. Utilizarea unor pași Δt mai mici decît cei menționați mai sus a condus practic la aceleași rezultate.

Rezultatele calculelor se extrag din calculator pe bandă și se tipăresc tabelar sub forma t, Z, V, W respectiv t, Z_1, V_1, W_1, Z_2, V_2, W_2 pentru fiecare interval de calcul Δt sau mai rar (la cîteva intervale), după cum este necesar.

3. EXEMPLE DE CALCUL

Pentru exemplificarea metodei de calcul propuse se prezintă cîteva exemple de calcul pentru ambele cazuri studiate.

3.1. CAZUL UNUI CASTEL DE ECHILIBRU

În schema unei uzine hidroelectrice s-au plasat pe rînd două castele de echilibru cu camere (fig.4). Rezultatele calculelor sînt expuse grafic în figura 5. Oscilațiile A, B, C se referă la schema din figura 4.1, iar oscilația D la schema din figura 4.2, (coeficientul de pierdere de sarcină longitudinală pe galeria de aducție s-a luat $\lambda = 0{,}011$).

Se dau cîteva date în legătură cu cazurile analizate. Pentru cazul A s-a considerat o manevră bruscă de debit de la $Q_1 = 178$ m³/s la $Q_2 = 0$, cu un timp de închidere a turbinelor $t_s = 60$ s.

S-a neglijat rezistența diafragmei ($R = 0$). În cazul B s-a făcut aceeași manevră de debit, în plus considerînd o pierdere de sarcină în diafragmă exprimată prin relația $R = 0{,}0375 \ V_s | V_s | \ (F_s = 14m^2)$.

Pentru cazul C s-a considerat o manevră defavorabilă de debit, caracterizată de $Q_1 = 178$ m³/s, $Q_2 = 0$, $Q_3 = 100$ m³/s, deschiderea turbinelor făcîndu-se în momentul primei denivelări maxime. Timpii de manevră au fost $t_s = 10$ s ; s-a neglijat rezistența diafragmei.

Cazul D se referă la manevra de debit considerată și în cazurile A și B, timpul de închidere a turbinelor fiind însă $t_s = 10$ s.

Și în acest caz s-a luat $R = 0$. Timpul de calcul pentru o oscilație completă a fost de 30 min, lucrîndu-se cu o precizie de închidere pentru cote $\varepsilon = 0{,}01$ m.

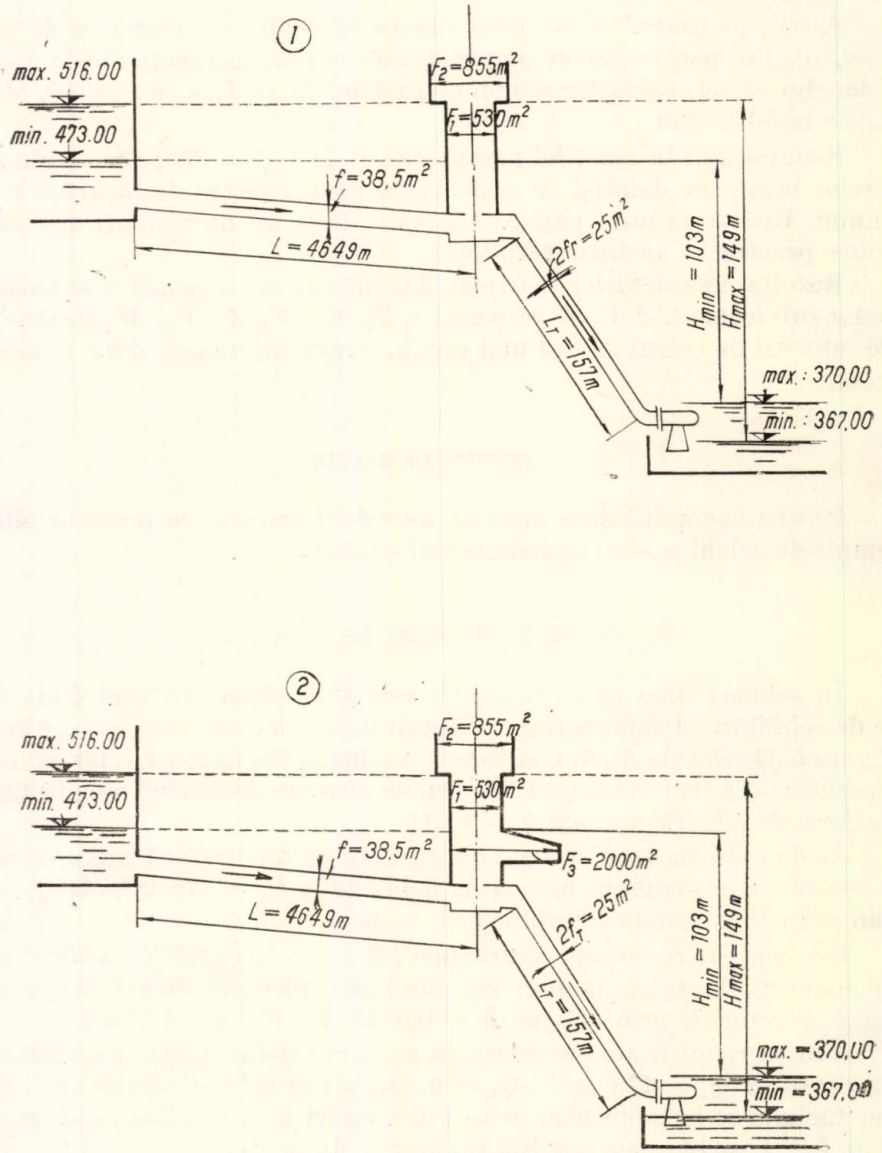


Fig. 4. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu castel cu cameră superioară (*1*) sau cu castel cu cameră superioară şi cameră inferioară (*2*).

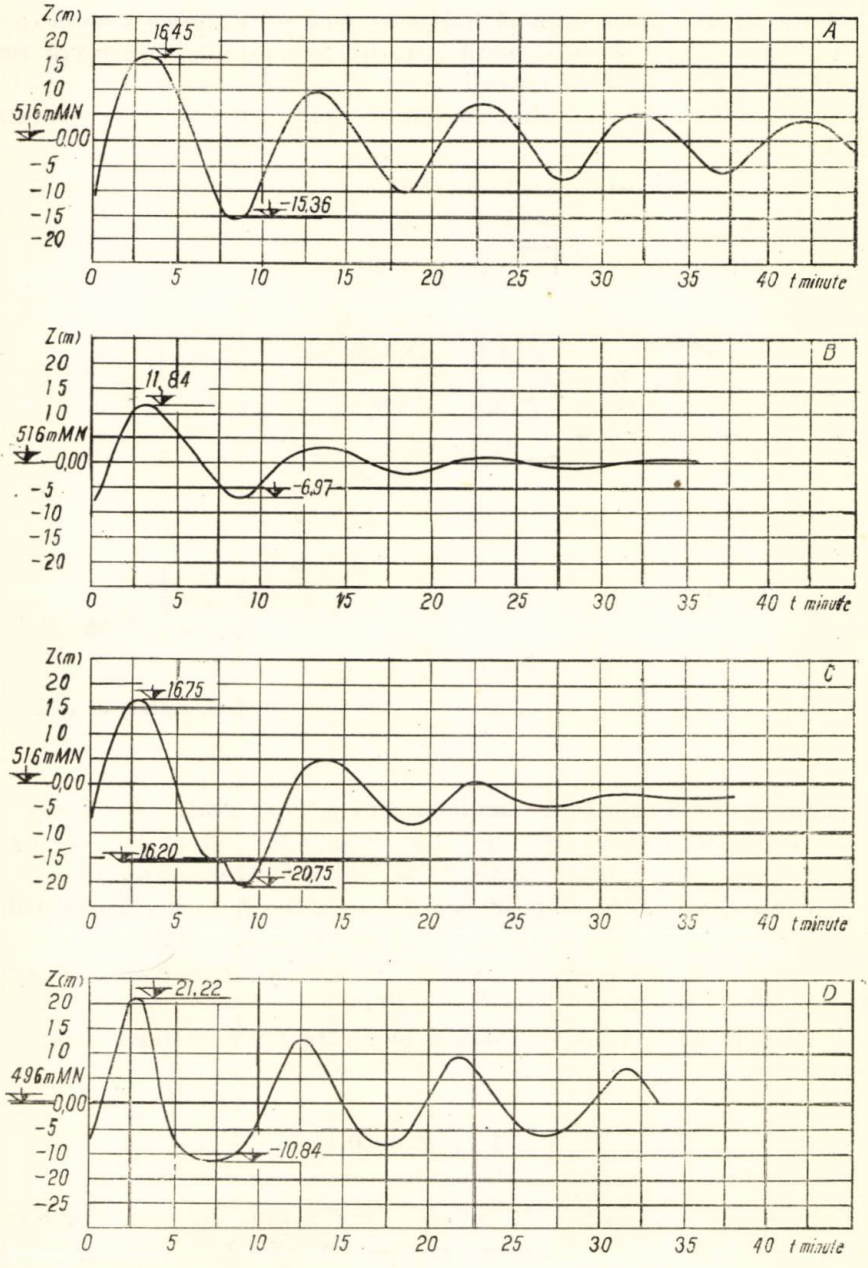


Fig. 5. — Oscilații calculate ale nivelului apei din castel pentru diverse manevre de debit la centrală.

3.2. CAZUL UNUI SISTEM DE DOUĂ CASTELE DE ECHILIBRU

S-a avut în vedere o uzină hidroelectrică prevăzută cu două castele de echilibru cu cameră superioară (fig. 6), precum și o manevră totală de închidere a debitului la centrală de la $Q_1 = 150$ m³/s la $Q_2 = 0$. ($t_s = 60$ s). S-au studiat cazurile unor castele de echilibru cu sau fără diafragmă la bază.

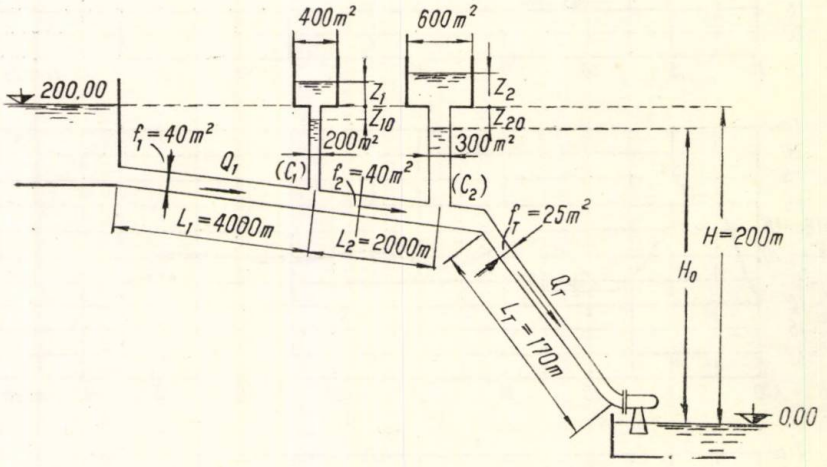


Fig. 6. — Schema unei uzine hidroelectrice prevăzute cu două castele de echilibru cu cameră superioară.

O parte din rezultatele calculelor sînt expuse grafic în figurile 7 și 8. În afară de datele prezentate în figura 6 precizăm în plus unele caracteristici geometrice și hidraulice ale uzinei hidroelectrice studiate :

— coeficienții pierderilor de sarcină longitudinală pentru cele două tronsoane ale galeriei de aducție au fost luați $\lambda_1 = \lambda_2 = 0{,}012$;

— ariile secțiunilor strangulate de la baza castelelor au fost considerate de asemenea egale : $F_{s1} = F_{s2} = 20$ m² ;

— curbele pierderilor de sarcină în diafragmele castelelor s-au luat de forma

$$R_1 = 0{,}1 \mid V_{s1} \mid V_{s1} ; \; R_2 = 0{,}1 \mid V_{s2} \mid V_{s2}.$$

Pentru un caz, timpul de calcul al oscilațiilor din sistem a fost de două ore, lucrîndu-se cu aceeași precizie pentru cote $\Sigma = 0{,}01$ m.

Semnalăm faptul că metoda de calcul expusă se poate generaliza pentru cazul unui număr oarecare de castele de echilibru plasate în serie pe galeria de aducție.

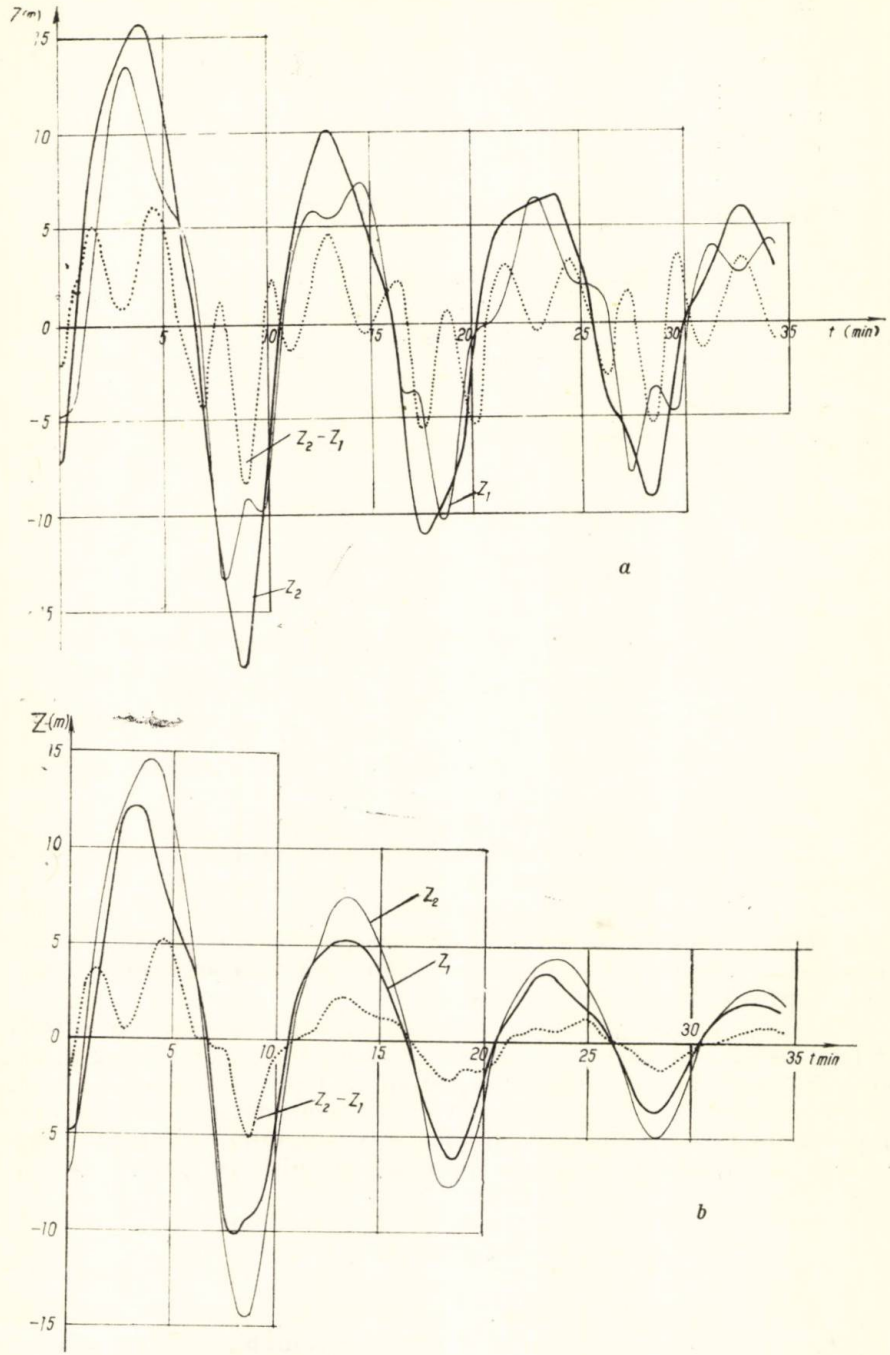


Fig. 7. — Oscilații calculate ale nivelului apei din sistemul de două castele de echilibru considerat :

cazul $R = 0$ (a) ; cazul $R \neq 0$ (b).

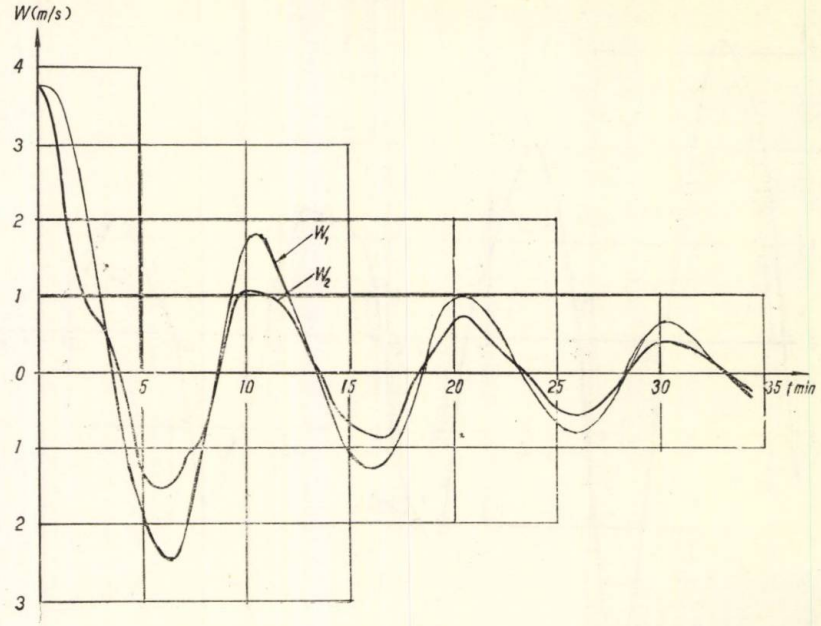


Fig. 8. — Diagrama de viteze calculate în galeria de aducţie (cazul $R \neq 0$).

4. CONCLUZII

În proiectarea uzinelor hidroelectrice, pentru realizarea unor parametri tehnici-economici optimi, studiul oscilaţiilor maxime din castele şi din sisteme de castele de echilibru este de primă importanţă.

Faţă de metodele de calcul cunoscute din literatura de specialitate pentru studiul oscilaţiilor maxime din castelele şi din sisteme de castele de echilibru, metoda de calcul prezentată se remarcă prin rapiditatea calculelor şi prin exactitatea rezultatelor.

Ea oferă posibilitatea proiectării uzinelor hidroelectrice prevăzute cu castele şi sisteme de castele de echilibru în condiţiile cunoaşterii mai complete a fenomenului oscilatoriu din sistem, atît prin studierea unui număr mare de variante (în timp util), cît şi prin considerarea condiţiilor efective de exploatare a uzinelor hidroelectrice, eliminînd totodată o serie de ipoteze simplificatoare utilizate în mod obişnuit în astfel de studii.

NOTAŢII

H — căderea brută;

H_0 — căderea utilă, referitoare la nivelul apei din castel în regim de funcţionare permanent;

Z — cota nivelului apei din castel raportată la nivelul de reţenţie din lac şi socotită pozitivă în sus;

Z_0 — cota nivelului apei din castel în regim permanent;
Z_{max} — cota nivelului maxim din castelul de echilibru;
Z_{min} — cota nivelului minim din castelul de echilibru;
Z_* — denivelarea maximă a apei din castel la închiderea bruscă a turbinelor în cazul neglijării pierderilor de sarcină;
S, X — cota nivelului apei din castel față de nivelul dinamic de regim;
Q — debitul galeriei de aducție;
Q_T — debitul instantaneu al turbinelor;
Q_0 — debitul turbinelor în regim permanent;
Q_c — debitul instantaneu de intrare sau de ieșire din castel;
W — viteza apei din galeria de aducție, considerată pozitivă în scurgerea de la rezervor spre castelul de echilibru;
U — viteza apei în conducta forțată;
V — viteza verticală a apei în castel, considerată pozitivă cînd nivelul crește;
V_s — viteza apei în strangularea castelului, avînd același semn ca V;
P — pierderea de sarcină în galeria de aducție; semnul + corespunde la $W>0$;
R — pierderea de sarcină în strangularea castelului (diferența dintre nivelul piezometric în galeria de aducție la piciorul castelului și nivelul liber din el, socotită pozitivă cînd nivelul apei în castel crește);
t — timpul;
T_* — perioada oscilațiilor nivelului apei din castel în cazul neglijării pierderilor de sarcină în galeria de aducție;
t_s — timpul de închidere sau deschidere a turbinelor;
L — lungimea galeriei de aducție;
L_T — lungimea conductei forțate;
d — diametrul secțiunii galeriei de aducție;
d_T — diametrul secțiunii conductei forțate;
D — diametrul secțiunii castelului de echilibru;
f — aria secțiunii galeriei de aducție;
f_s — aria secțiunii galeriei de aducție la piciorul castelului de echilibru;
f_T — aria secțiunii conductei forțate;
F — aria secțiunii orizontale a castelului de echilibru;
F_s — aria secțiunii strangulării castelului la piciorul lui;
Vol — volumul castelului de echilibru între secțiunea de la bază și nivelul instantaneu al apei din el;
g — accelerația gravitației;
λ — coeficientul pierderii de sarcină longitudinală;
ζ — coeficientul pierderii de sarcină locală;
ΔZ_p sau ΔZ^p — valoarea propusă pentru ΔZ;
ΔZ_c sau ΔZ^c — valoarea calculată pentru ΔZ;
Δ_i, δ_i — notații prescurtate pentru ΔZ_p, ΔW.

BIBLIOGRAFIE

1. Cioc D., Popescu M., Stematiu D., *Calculul automat al saltului în castelul de echilibru de secțiune variabilă*, „St. hidr. **XVII** (1968)
2. Escande L., *Méthodes nouvelles pour le calcul des cheminées d'équilibre*, Paris, Dunod, 1950.
3. Geza Bata, Petar Madich, *Solution for multiple surge-tank systems worked out on repetitive differential analyser*, I.A.H.R. Congress, 1961.
4. Jaeger Ch. *Hydraulique technique*, Paris, 1954.
5. Kosinski V., Piraprez E., *Etude des chambres d'équilibre à section constante à l'aide d'un ordinateur électronique*, Mémoires (nouvelle série), Université de Liège, Belgique, 1967.
6. Naber G., *Mass Oscillations in Surge Tanks*, Water Power, *6* (1964).
7. Popescu M., *Contribuții la calculul hidraulic al castelelor de echilibru*, teză de doctorat, Institutul de construcții, București, 1970.
8. Popescu M., *Probleme actuale în domeniul hidraulicii castelelor de echilibru*, St. hidr., **XXI**, (1969).
9. Popescu M., Stere C., *Calculul numeric automat al oscilațiilor dintr-un sistem de două castele de echilibru plasate pe galerie de aducțiune a unei uzine hidroelectrice*, Hidrotehnica, *9* (1970).
10. Popescu M., Novotny P., *Calculul numeric automat al oscilațiilor din castelul de echilibru de secțiune variabilă*, Hidrotehnica, *7* (1969).
11. Sabljak R., Doran W., *Hydraulic analysis of a double surge shaft system by digital computer*, I.A.H.R. Congress, 1961.
12. Stuky A., *Chambres d'équilibre*, Lausanne, 1958.
13. Torell P., *Surges in Multiple Tanks*, Water Power, *12* (1966).
14. Zicman B., *Méthodes nouvelles pour le calcul des cheminées d'équilibre*, La Houille Blanche, *5* (1953).

RECENZII

Mechanical Behavior of Materials under Dynamic Loads (Comportarea mecanică a materialelor sub sarcini dinamice), edited by Ulric S. Lindholm, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1968, VIII + 419 p., 196 fig.

Acest volum, rezultat de pe urma Simpozionului ținut în septembrie 1967 la San Antonio (Texas), cuprinde o introducere, 19 comunicări prezentate de diverși specialiști și un apendice cu concluziile celor ce au condus ședințele. Problemele tratate în aceste lucrări sînt în general deosebit de interesante și de bine studiate sub aspect teoretic sau experimental, respectiv din ambele puncte de vedere.

Cele mai multe comunicări au ca obiect curgerea plastică a metalelor, celelalte materiale tratate incluzînd pe acelea care au o comportare viscoelastică, rocile și o „spumă" de compoziție specifică.

În definirea sarcinilor dinamice s-a avut în vedere includerea unor viteze de deformație care depășesc pe acelea realizate cu ajutorul mașinilor uzuale de laborator (statice sau cvasistatice). Nu au fost incluse fenomenele de fluaj și de relaxație a tensiunilor, care sînt într-un anumit sens dinamice, deoarece în cursul încercărilor lente apar și efecte depinzînd de timp. Accentul a fost pus în schimb pe încărcările întîlnite în probleme de impact, în care pot juca un rol predominant atît forțele de inerție, cît și acelea vîscoase. Au fost prezentate lucrări în care se interpretează rezultatele obținute la mașinile de încercări foarte rapide, la impact sau la sarcini impulsive pe bare, plăci, cilindri și sfere, precum și la propagarea fisurilor. Toate aceste cercetări experimentale au urmărit definirea proprietăților mecanice intrinseci ale materialelor studiate. În ceea ce privește lucrările teoretice, acestea au avut în general ca obiect problemele fundamentale ale dezvoltării unei teorii constitutive a solidelor. Punctele de vedere adoptate de diverși autori au fost destul de variate, unii plecînd de la mecanica mediilor continue clasică, alții de la legile fundamentale ale termodinamicii și, în sfîrșit, de la punctul de vedere microscopic, prin considerarea mecanismului de dislocație a solidelor cristalizate.

Lucrările prezentate la simpozion au fost:

M. Reiner, *Rezistența dinamică a unui solid ideal cu ecuație constitutivă definită*;

J. F. Bell, *Un studiu experimental al fenomenelor de instabilitate în inițierea undelor plastice în bare lungi*;

O. W. Dillon, Jr., *Unde de deformație plastică și căldura generată în apropierea punctului de curgere al aluminiului călit*;

P. Perzyna, *Asupra bazelor termodinamice ale viscoplasticității*;

U. S. Lindholm, *Unele experiențe în plasticitatea dinamică sub tensiuni combinate*;

G. T. Hahn, M. F. Kanninen, A. K. Mukherjee, A. R. Rosenfeld, *Viteza de propagare a fisurilor ductile și dinamica scurgerii în metale*;

J. M. Krafft, *Comportarea mecanică dinamică a unui metal la extremitatea unei fisuri în stare de deformație plană*;

J. J. Gilman, *Comportarea dinamică a dislocațiilor*;

S. R. Bodner, *Ecuații constitutive pentru comportarea dinamică a materialelor*;

J. W. Edington, *Efectul vitezei de deformație asupra substructurii de dislocație în monocristalele deformate de niobiu*;

W. J. Gillich, *Relații constitutive deduse din studii asupra impactului*;

C. J. Maiden, A. H. Jones, S. J. Green, H. Chin, *Prezicerea profilelor de unde elasto-plastice în aluminiu 1060—0 sub o încărcare de deformație uniaxială*;

C. H. Karnes, *Configurația de impact pe o placă în determinarea proprietăților materialelor la viteze de deformație mari*;

E. A. Ripperger, H. Watson, Jr., *Relația dintre ecuațiile constitutive și propagarea undelor unidimensionale*;

I. M. Fyfe, *Propagarea unei unde plastice în starea de deformație plană într-un cilindru gol încărcat dinamic*;

N. Cristescu, *Plasticitatea dinamică sub tensiuni combinate*;

K. C. Valanis, *O teorie unificată a comportării termomecanice a materialelor viscoelastice*;

W. E. Jahsman, *Comportarea statică și dinamică a unei spume sintactice*;

J. B. Cheatham, Jr., *Efectul presiunii, temperaturii și vitezei de încărcare asupra proprietăților mecanice ale rocilor.*

Cuvîntul introductiv a fost rostit de Sudhir Kumar, iar concluziile ședințelor le-au expus W. Prager, D. C. Drucker, J. D. Campbell, C.D. Lundergan și D. M. Forney, Jr.

Simpla enumerare a titlurilor comunicărilor arată că problemele dezbătute în cadrul simpozionului sînt de mare actualitate. Se mai evidențiază și utilitatea organizării unor astfel de manifestări științifice cu tematică specializată, mult mai eficace decît marile congrese în domenii largi. Menționăm în mod special faptul că lucrările se disting în cea mai mare parte printr-o amănunțită explorare a aspectelor experimentale, multe concluzii teoretice fiind direct deduse din acestea sau justificate prin ele. Comunicările pur teoretice sînt, la rîndul lor, interesante prin încercările de generalizare și de sistematizare pe care le conțin.

Volumul care cuprinde lucrările acestui simpozion prezintă un interes de netăgăduit pentru cercetătorii din mecanica mediilor continue în general și pentru specialiștii în domeniul mai restrîns reprezentat la simpozion în special.

T. Oroveanu

HEINRICH HERTEL, *Ermüdungsfestigkeit der Konstruktionen* (Rezistența la oboseală a construcțiilor), Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg—New York, 1969, XVI + 659 p., 612 fig. + 1 tabelă anexată

Problema rezistenței la oboseală a construcțiilor, de o deosebită importanță în numeroase domenii ale tehnicii, își găsește o tratare amplă și bine sistematizată în această lucrare, elaborată de un cunoscut specialist.

În cele 25 de capitole se pornește de la noțiunile generale și se ajunge pînă la cele mai felurite aplicații; este de menționat însă faptul că autorul, care s-a ocupat în activitatea sa îndeosebi de construcțiile aeronautice, se preocupă și aici în mod special de acestea. Justificarea se găsește în bună măsură în faptul că la construcțiile aeronautice stăpînirea fenomenului de oboseală și prevenirea consecințelor lui prezintă o deosebită importanță.

Primul capitol are un caracter introductiv, cuprinzînd precizări de ordin general asupra problemei. În special în construcțiile ușoare, unde apare necesitatea unei optimizări în sensul

unei dimensionări foarte precise pentru a se ajunge la o greutate cît mai redusă, solicitările prin oboseală cîştigă mult în importanţă. Pornind de la ideea că problema este foarte complexă şi că rezultatele obţinute pînă în prezent nu pot fi privite din multe privinţe ca fiind definitive, autorul îşi propune un triplu scop, pe care îl urmăreşte de altfel în mod exemplar în desfăşurarea lucrării. Este vorba astfel, în primul rînd, de o valorificare a bogatului material experimental existent în literatură, apoi de prezentarea celor mai importante rezultate şi a stadiului actual al cunoştinţelor într-o formă care să permită fructificarea lor şi, în fine, completarea cu material experimental propriu acolo unde au fost constatate lacune importante.

Rezultă de aici şi se confirmă prin lectură că lucrarea are un accentuat caracter aplicativ, rezultatele teoretice fiind prezentate condensat, în special sub formă de concluzii, iar rezultatele experimentale fiind expuse amănunţit, bineînţeles pînă la concluzii finale. Acest punct de vedere conduce la un număr restrîns de formule şi la un foarte bogat material grafic, îndeosebi sub formă de diagrame, care îmbrăţişează un număr important de cazuri şi situaţii practice, constituind astfel un excelent ghid în activitatea de proiectare a structurilor supuse la oboseală. De altfel atît intenţiile autorului, clar expuse, cît şi posibilităţile de atacare a problemei conduc în mod firesc la o asemenea tratare.

Dată fiind ponderea rezultatelor experimentale, apare normal ca în capitolul al doilea să fie prezentată tehnica încercărilor de oboseală, îndeosebi în modul în care acestea se execută în Institutul de construcţia aeronavelor al Universităţii tehnice din Berlin. În afară de aceasta, capitolul mai conţine metodica de prezentare a rezultatelor şi expunerea modului de prelucrare statistică a acestora.

Capitolul următor se ocupă de problema apariţiei deteriorării materialelor în urma oboselii, reţinîndu-se în mod special concepţiile teoretice ale lui Orowan.

Capitolul al patrulea are un caracter pregătitor, deoarece se ocupă de efectele statice ale crestăturilor, care, după cum se ştie, conduc la aglomerări de tensiuni.

Efectul stării de tensiune şi al variaţiei locale a tensiunilor în zonele de aglomerări este examinat în capitolul următor în amănunt, în special pe baza unui mare număr de rezultate experimentale.

Cu aceasta se încheie o primă parte a lucrării, capitolele următoare atacînd o altă categorie de probleme. Astfel un capitol dă o scurtă privire introductivă asupra încercărilor de oboseală în domeniul unui număr mic de schimbări de sarcină ca urmare a unor solicitări ridicate, cazuri tipice fiind rezervoarele de presiune sau trenurile de aterizare ale avioanelor. O atenţie mai mare este dată în capitolul următor influenţei modului de încărcare asupra rezistenţei la oboseală, iar capitolul al optulea se ocupă de cercetările asupra rezistenţei la oboseală a materialelor. Patru capitole consecutive au ca obiect studiul influenţei pe care o exercită asupra rezistenţei la oboseală tensiunile reziduale, pretensionările, coroziunea datorită frecării, starea suprafeţei şi a stratului superficial. Aici se încheie o altă parte a lucrării, în care problemele amintite au fost examinate pe baza unui material deosebit de bogat.

Urmează un alt grup de capitole în care sînt tratate probleme referitoare la efectele oboselii asupra diverselor structuri constructive. Una dintre acestea, deosebit de importantă, este propagarea fisurilor în construcţiile uşoare, prezentată în mod amănunţit în capitolul al treisprezecelea. În cele nouă capitole ce urmează se prezintă în special efectele oboselii asupra unor construcţii metalice sau îmbinări tipice (bare sau plăci nituite, cu şuruburi, lipite sau sudate).

Ultimele capitole, mici ca întindere, au ca obiect probleme de reparaţii în urma deteriorărilor dinamice, rezistenţa la oboseală a materialelor nemetalice şi consideraţii istorice în legătură cu cercetările asupra oboselii, cu privire specială asupra încercărilor la oboseală efectuate asupra avioanelor.

Bibliografia, împărţită pe capitole, este foarte bogată şi cuprinde cele mai importante lucrări publicate în acest domeniu pînă la data elaborării tratatului.

Ilustrația este bogată, de foarte bună calitate și deosebit de sugestivă.

Datorită amplorii materialului teoretic și îndeosebi experimental, tratatul este destul de voluminos, însă buna organizare a prezentării, care este deosebit de sistematică și clară, permite o lectură fără dificultăți. Cercurile interesate sînt formate în special din ingineri proiectanți și din constructori de structuri supuse la oboseală, pentru care lucrarea, dominată de o evidentă tendință aplicativă, poate constitui un ghid foarte prețios. În același timp însă, cei care studiază problemele de oboseală pot găsi în lucrare toate cunoștințele fundamentale sau, pe o altă treaptă, numeroase sugestii pentru dezvoltarea cercetărilor.

T. Oroveanu

Fluide și cîmp gravitațional în relativitate generală (*Fluides et champ gravitationnel en relativité générale*), Colloque International du Centre National de la Recherche Scientifique N° 170, Paris, Collège de France, 19—23 Juin, 1967, Paris, Editions du C.N.R.S., 1969, 326 p.

Actele Colocviului internațional „Fluide și cîmp gravitațional în relativitate generală", organizat la Paris, la Collège de France, între 19 și 23 iunie 1967, în cadrul colocviilor internaționale de sub egida Centrului național al cercetării științifice (C.N.R.S.) de unii dintre iluștrii reprezentanți ai științei franceze la recenta conferință a matematicienilor de expresie latină din București, și anume acad. A. Lichnerowicz și prof. M. A. Tonnelat, cuprind următoarele lucrări:

Introducere, de M. A. Tonnelat; *Cîmpul gravitațional în reprezentarea lui Heisenberg*, de P. A. M. Dirac; *Unde de șoc și unde în magnetohidrodinamică relativistă*, de A. Lichnerowicz; *Rezultatul lui Ott este opus acelui lui Planck*, de C. Moller; *Stabilitate a mișcărilor fluidului și principii variaționale*, de A. H. Taub; *Radiație gravitațională și mișcare a surselor*, de M. A. Tonnelat; *Teoreme de existență pentru ecuațiile fluidelor relativiste încărcate*, de Y. Choquet-Bruhat; *Fluide încărcate de conductivitate finită*, de Pham Mau Quan; *Unde caracteristice gravitaționale în fluid relativist echilibrat*, de N. Coburn; *Fluide în relativitate generală. Probleme fizice. Ecuații de stare*, de S. Mavrides; *Fluide relativiste în cosmologie*, de C. W. Misner; *Observații asupra simetriei sferice și ecuațiilor lui Einstein*, de G. C. McWittie; *Problema condițiilor inițiale*, de A. Vaillant; *Condițiile de racordare în teoria einsteiniană a gravitației*, de L. Bel; *Descompunere covariantă a tensorilor simetrici și soluția ecuațiilor gravitaționale de constrîngere*, de S. Deser; *O metodă de aproximație bazată pe unde de șoc*, de Ham-Jungen Treder; *Transfer de energie în relativitate generală*, de H. Bondi; *Soluțiile spațiului vid cu raze geodezice de distorsiune*, de R. Debever; *Radiație și ecuații ale mișcării*, de A. Papapetrou; *Principiul echivalenței în teoria cîmpului de gravitație cuantificat*, de Cécile De Witt; *Gravitația în teoria spinorială neliniară a particulelor elementare*, de J. Geheniau; *Asupra conexiunilor posibile între cosmologie și particule elementare*, de D. Ivanenko; *Teoria fuziunii în relativitate generală*, de L. Mariot; *Contribuții la discuții la masă rotundă asupra cuantificării*, de S. Deser; *Comentarii asupra teoriei scalare-tensoriale*, de Peter G. Bergmann; *Probleme de interpretare în relativitate generală*, de C. Cattaneo; *Cele două principii de relativitate și teoria lui Einstein*, de V. Fock; *Probleme de interpretare fizică în relativitate generală*, de S. Kichenassamy; *Rotația și pulsația modelelor stelare generale relativiste*, de Kip S. Thorne; *Superspațiu și natura geometrodinamicii cuantice*, de J. A. Wheeler.

În imposibilitate de a ne opri aici asupra detaliilor cît de cît consistente privitoare la conținutul deosebit de interesant al lucrărilor expuse la acest colocviu, precum și la discuții

uneori aprinse la care au participat, în afara de autorii citaţi mai sus, şi cunoscuţii specialişti A. Avez, O. Costa de Beauregard, L. Bouche, J. Colleau, C. Dewitt, F. Hennequin, L. Infeld, M. Lenoir, A. Mercier, C. W. Misner, N. Guyen Phong Chau, A. Petrov, G. Pichon, F. A. E. Pirani, A. Surin, J. L. Synge. Ref. subliniază anvergura şi importanţa bilanţului trasat de lucrările colocviului în cele mai importante două domenii ale relativităţii generale: primul se referă la fluide relativiste. Aici se reflectă cercetările din ultimii ani în domeniul magnetohidrodinamicii şi, mai general, în acela al unei fizici a mediilor continue. Ele reflectă studiul problemelor de racordare, de stabilitate a condiţiilor iniţiale şi îndeosebi dezvoltarea sistematică a unei termodinamici adaptate la relativitatea restrînsă şi la relativitatea generală, indispensabilă pentru a se putea aborda o gamă vastă de noi probleme care au luat naştere ca urmare a noianului de date de observaţie cu totul recente obţinute în domeniul astrofizicii şi în cel privitor la colapsul gravitaţional.

Pe de altă parte, cu toată distanţa care separă astăzi domeniul experimental de studiile în care s-au luat în consideraţie unele prezumţii îndrăzneţe, ca, de exemplu, existenţa unei radiaţii gravitaţionale, colocviul cuprinde o serie de lucrări consacrate punerii în evidenţă teoretică a proprietăţilor unei atare radiaţii, a legăturilor sale cu mişcarea surselor ş.a.

Ref. felicită şi pe această cale Consiliul naţional al Cercetării ştiinţifice pentru neobosita şi rodnica activitate din domeniul organizării colocviilor internaţionale, menite să arunce cu un ceas mai devreme lumină asupra problemelor ştiinţifice de actualitate stringentă şi să dea un puternic imbold pentru smulgeri mereu noi de secrete ale naturii.

D. Mangeron

KARL SCHRÖDER, *Centrale mari de forţă cu aburi. Proiectare, execuţie, construcţie*, vol. III, *Echiparea centralelor de forţă*, secţiunea B, Berlin—Heidelberg—New York, „Springer", 1968, XX + 773 p., 4^0 (27 × 19 cm) şi 766 fig.

Volumul III/B este ultimul din lucrarea apărută sub îngrijirea dr. ing. Karl Schröder (director al centralei de forţă a uzinelor „Simens—Schukert" A. G. din Erlangen R.F.G.), care tratează despre proiectarea, exploatarea şi construcţia marilor centrale de forţă cu aburi.

Volumul I, denumit *Atlasul centralelor de forţă*, a prezentat date tehnice pentru 200 de centrale, s-a ocupat de descrierea a 98 de centrale cu instalaţiile respective şi a dat şase exemple de calcul (XVI + 1 073 p. şi 978 fig.).

Volumul II a fost intitulat *Studiul construcţiei centralelor de forţă* (XVI + 740 p. şi 528 fig.).

Volumul III, *Echiparea centralelor de forţă*, din cauza materialului foarte vast a trebuit să fie divizat în două secţiuni: A. (cap. 1—4), combustibili, apă producţia de aburi, conducte (ţevărie), electrotehnică, XX + 744 p. şi 711 fig.; B. (cap. 5—11), turbine cu aburi şi gaze, generatoare, tehnica dirijării (automatizare, comandă, reglaj, control), instalaţii secundare, amenajări auxiliare, întreţinere. Mai cuprinde şi o anexă cu exemple asupra unora dintre cele mai noi centrale de forţă.

Cuprinsul volumului III B (cap. V—XI):

Capitolul V, „Instalaţii, turbine cu aburi": a) turbine cu aburi (teorie, calcul, părţile principale, reglaj, conducerea exploatării, ungerea); b) condensatoare (noţiuni de bază, calcule, exploatare, instalaţii auxiliare).

Capitolul VI, „Turbine de gaze".

Capitolul VII, „Generatoare (trifazice şi monofazice").

Capitolul VIII, „Tehnica dirijării" : a) automatizare și comanda centralelor de forță, cu o introducere despre teoria informațională și aplicația ei la cazul centralelor, programarea, prelucrarea datelor, stabilirea datelor economice ; b) reglare și control, aparate de măsură pentru presiuni, temperaturi, măsurători electrochimice etc.

Capitolul IX, „Instalații secundare" : a) probleme de combustie ; b) instalații pentru evacuarea cenușii produse prin arderea combustibililor solizi ; c) mașini de ridicat folosite în sala de mașini ; d) instalații pentru apa de răcire ; e) instalații pentru epurarea apei.

Capitolul X, „Instalații auxiliare" : a) instalații pentru controlul exploatării din punct de vedere chimic, analize de laborator. Amenajarea laboratoarelor ; b) instalații de stins incendiile ; c) instalații de aer comprimat ; d) ateliere auxiliare și depozite.

Capitolul XI, Întreținerea instalațiilor : a) protecția suprafețelor materialelor contra ruginii ; b) ungerea ; c) piese de schimb.

Anexă, „Descrierea mai multor centrale de forță existente" (din R.F.G.) ; Tendințe de dezvoltare în viitor.

★

Diferitele capitole au fost prelucrate de specialiști în problemele respective ; Karl Schröder a coordonat întreaga lucrare.

Lucrarea arătată se adresează în special tehnicienilor și inginerilor din exploatare, precum și tuturor celor interesați să cunoască problemele actuale ale marilor centrale de forță.

În prefață se arată de altfel că „meritul principal al lucrării este că a fost scrisă nemijlocit de practicieni pentru practicieni".

Volumul care face obiectul prezentei recenzii apare în condiții tehnice excepționale, cu scheme, fotografii și diagrame foarte clare, la nivelul înțelegerii unei mase largi de ingineri și tehnicieni.

Adrian Drob

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt :

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitatea, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri, stabilitate, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 30 nr. 3 1971

SUMAR

STUDII

Pag.

IOAN ANTON, Influenţa parametrilor geometrici şi cinematici asupra caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale turbinelor axiale. I 495
T. OROVEANU, Asupra injecţiei fluidelor calde în zăcămintele de petrol. I 521
VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Mişcarea bifazică necapilară în medii poroase neomogene 535
VALERIU PANAITESCU, Asupra stabilităţii liniare a unei curgeri laminare plane . . . 549
OLGA BIŢĂ, Cercetări experimentale privind comportarea politetrafluoretilenei în condiţiile frecării cu alunecare uscată 559
N. I. MANOLESCU, P. ALEXANDRU, Contribuţii la analiza cinematică a mecanismelor de direcţie ale autovehiculelor rutiere 581
GHR. PELECUDI, I. SAVA, S. CONONOVICI, Comportarea mecanismelor cu came la viteze ridicate. II Asupra vibraţiilor longitudinale şi torsionale din mecanismele cu came 611
N. N. ANTONESCU, TH. HUIDU, Stabilirea eforturilor unitare din eclisele lanţurilor cu role şi zale scurte prin metoda fotoelasticităţii 627
VALERIU PETCU, Compatibilitatea rotirilor articulaţiilor plastice în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat 645
GHEORGHE NIŢESCU, VIRGIL OLARIU, Asupra vibraţiilor de torsiune ale arborelui cotit 673
N. ŢOPA, Studiul vibraţiilor barajelor în arc cu aplicaţie la calculul solicitărilor seismice, folosindu-se determinări experimentale pe model 693
P. DODOC, Contribuţii la studiul mecanismului apariţiei erorilor de prelucrare la frezarea şi rectificarea de înaltă precizie a suprafeţelor plane cu scule cilindrice (disc) . 721

REFERATE ŞTIINŢIFICE ŞI TEHNICE

P. V. MARINESCU, Elemente de amplificare cu fluid 733

RECENZII 751

INFLUENȚA PARAMETRILOR GEOMETRICI ȘI CINEMATICI ASUPRA CARACTERISTICILOR ENERGETICE ȘI CAVITAȚIONALE ALE TURBINELOR AXIALE. I

de IOAN ANTON
Institutul politehnic Timișoara

Se prezintă relații unitare pentru studiul mașinilor axiale. Aceste relații sînt exprimate în funcție de parametrii principali, selectați din multitudinea de coeficienți, și de parametrii utilizați la studiul turbinelor Kaplan. Se analizează variația diferitelor elemente unghiulare și cinematice, precum și caracteristicilor rețelelor de la butuc și periferie, cu turația specifică cu diametrul butucului și cu torsiunea curentului de la ieșirea din rotor.

1. INTRODUCERE

În studiul mașinilor axiale, deși s-au atins randamente relativ ridicate, nu se dispune de o metodologie care să arate influența diferiților parametri asupra caracteristicilor acestora. Explicația rezidă în multitudinea parametrilor care guvernează funcționarea acestor mașini, în dificultățile mari legate de cercetările experimentale și în timpul îndelungat necesar pentru efectuarea unor cercetări sistematice. În această lucrare se prezintă relații unitare pentru determinarea dimensiunilor principale, a elementelor unghiulare și cinematice, precum și a caracteristicilor rețelelor de profile. Se discută variația acestora cu turația specifică.

2. COEFICIENȚI ȘI PARAMETRI UTILIZAȚI LA STUDIUL MAȘINILOR AXIALE

În vederea eliminării unor tatonări neinspirate din studiul mașinilor axiale, se propune utilizarea unor parametri și coeficienți de bază. Cu ajutorul acestor parametri se vor exprima elementele geometrice (fig. 1), unghiulare și cinematice (fig. 2), precum și caracteristicile rețelelor.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 3, 1971, P. 495–520.

Aceşti coeficienţi principali sînt:

— coeficientul vitezei tangenţiale $k_{u_R} = \frac{u_R}{\sqrt{2gH}}$;

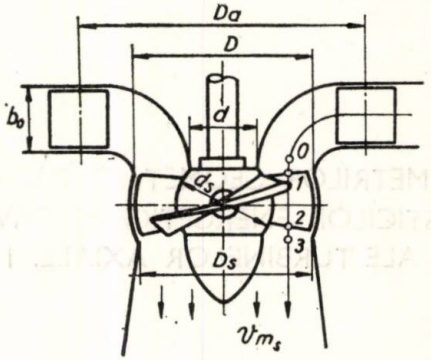


Fig. 1

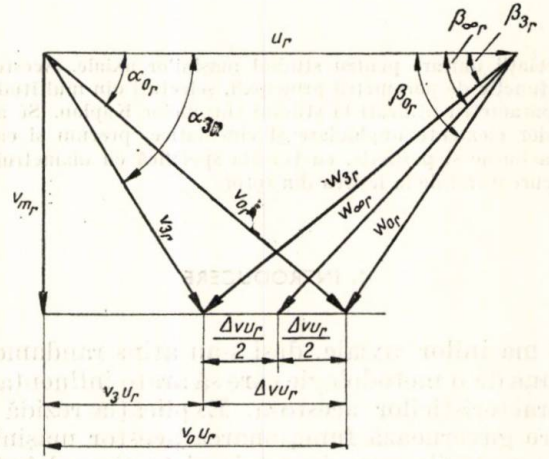


Fig. 2

— coeficientul de deviaţie al curentului ce trece prin reţeaua de profile, situată la raza r:

$$\delta_{u_r} = \frac{\Delta v_{u_r}}{v_m} = \frac{\Delta w_u}{v_m}. \tag{1}$$

În afară de aceştia se vor utiliza şi unii coeficienţi sau parametri derivaţi, ca:

— coeficientul vitezei meridionale la rază r: $k_{v_{m_r}} = \frac{v_{m_r}}{\sqrt{2gH}}$ şi la ieşirea din rotor (fig. 1) $k_{v_{m_s}} = \frac{v_{m_s}}{\sqrt{2gH}}$;

— coeficientul de debit : $\varphi_r = \frac{v_{m_r}}{u_R}$;

— coeficientul de variație cu raza al vitezei meridionale :

$$n_r = \frac{v_{m_r}}{v_m}, \quad \text{unde } v_m = \frac{Q}{\frac{\pi D^2}{4}\left[1 - \left(\frac{d}{D}\right)^2\right]};$$

— coeficientul de torsionare al curentului la ieșirea din rotor $k_r = \frac{v_{3u_r}}{\Delta v_u}$.

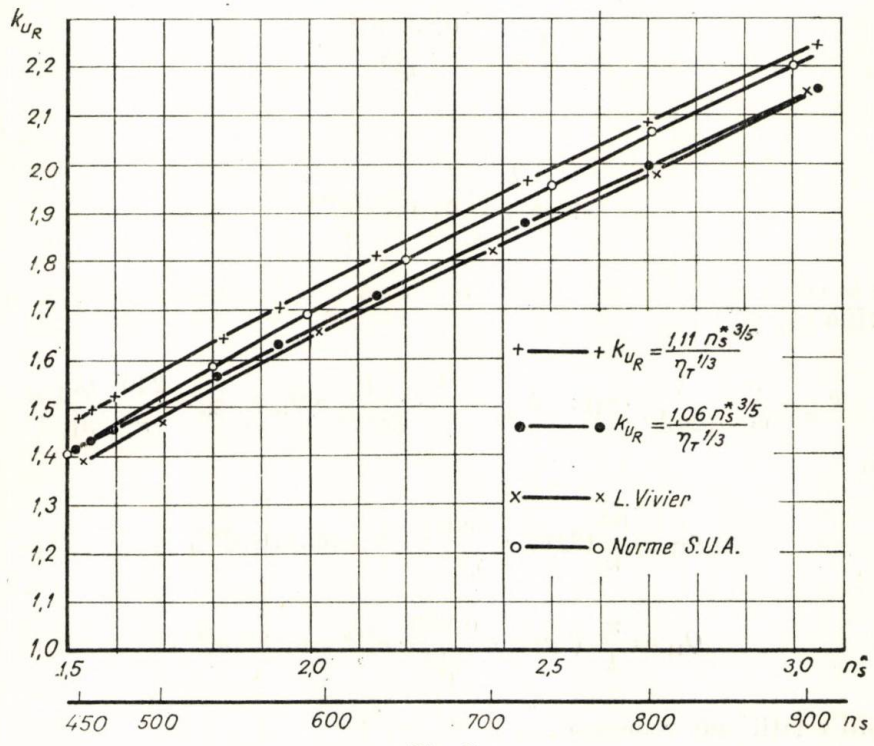


Fig. 3

Din analiza unor turbine moderne [1], a normelor americane pentru turbine [2], a relației propuse de G. F. Proskura [3], [4] pentru k_{u_R} recomandăm (fig. 3)

$$k_{u_R} = \frac{1,06\, n_s^{*3/5}}{\eta_T^{1/3}}, \tag{2}$$

unde $n_s^* = \frac{n_s}{(2g)^{3/4} \cdot \gamma^{1/2}}$ este turația specifică adimensională și η_T randamentul turbinei.

Din expresia turației specifice scrisă sub forma dată de Proskura [3], [4]:

$$n_s = 1{,}954\,(2g)^{3/4}\cdot\gamma^{1/2}\cdot\eta_T^{1/2}\cdot k_{u_R}\cdot k_{v_{m_s}}^{1/2} \tag{3}$$

și

$$n_s^* = 1{,}954\cdot\eta_T^{1/2}\cdot k_{u_R}\cdot k_{v_{m_s}}^{1/2}, \tag{4}$$

rezultă

$$k_{v_{m_s}} = \frac{0{,}233\,n_s^{*4/5}}{\eta_T^{1/3}}, \tag{5}$$

iar

$$\varphi_s = \frac{k_{v_{m_s}}}{k_{u_R}} \cong 0{,}22\,n_s^{*1/5}. \tag{6}$$

În caz că se exprimă coeficienții de viteză și debit în funcție de debitul specific Q_{11} și turația specifică n_{11} se obține

$$k_{u_R} = \frac{\pi}{60}\cdot\frac{1}{(2g)^{1/2}}\cdot n_{11}\,;\quad k_{v_{m_s}} = \frac{4}{\pi}\cdot\frac{1}{(2g)^{1/2}}\cdot Q_{11}\,;\quad \varphi_s = \frac{240}{\pi^2}\cdot\frac{Q_{11}}{n_{11}},$$

unde

$$n_{11} = \frac{60}{\pi}(2g)^{1/2}\cdot\frac{1{,}06}{\eta_T^{1/3}}\cdot n_s^{*3/5} = 92{,}876\,n_s^{*3/5}, \tag{7}$$

$$Q_{11} = \frac{\pi}{4}\cdot(2g)^{1/2}\cdot\frac{0{,}233}{\eta_T^{1/3}}\cdot n_s^{*4/5} = 0{,}839\,n_s^{*4/5}. \tag{8}$$

Aceste relații sînt reprezentate în figura 4.

Din studiul rețelelor de profile [5] — [7] și al turbinelor rezultă că în ultima vreme se utilizează cu mult succes coeficientul de deviație al curentului $\delta_{u_r} = \dfrac{\Delta v_{u_r}}{v_{m_r}}$. Acest coeficient se poate exprima [5], [7] din triunghiul vitezelor în funcție de elementele unghiulare ale curentului:

$$\frac{\delta_{u_r}}{2} = \operatorname{ctg}\beta_{\infty r} - \operatorname{ctg}\beta_{0r}\,;\quad \frac{\delta_{u_r}}{2} = \operatorname{ctg}\beta_{3r} - \operatorname{ctg}\beta_{\infty r},$$

$$\delta_{u_r} = \operatorname{ctg}\beta_{3r} - \operatorname{ctg}\beta_{0r}. \tag{9}$$

Din relațiile (8) și din ecuația lui Euler scrisă pentru turbine la raza $r\left(\delta_r = \frac{r}{R}\right)$ $\eta_{hr} gH = u_r \Delta v_{u_r}$ în ipoteza egalității căderii H pentru toate tuburile de curent, se obține

$$\delta_{u_r} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1 - \nu^2}{n_r \varphi_s} \cdot \frac{1}{\delta_r} \cdot \tag{10}$$

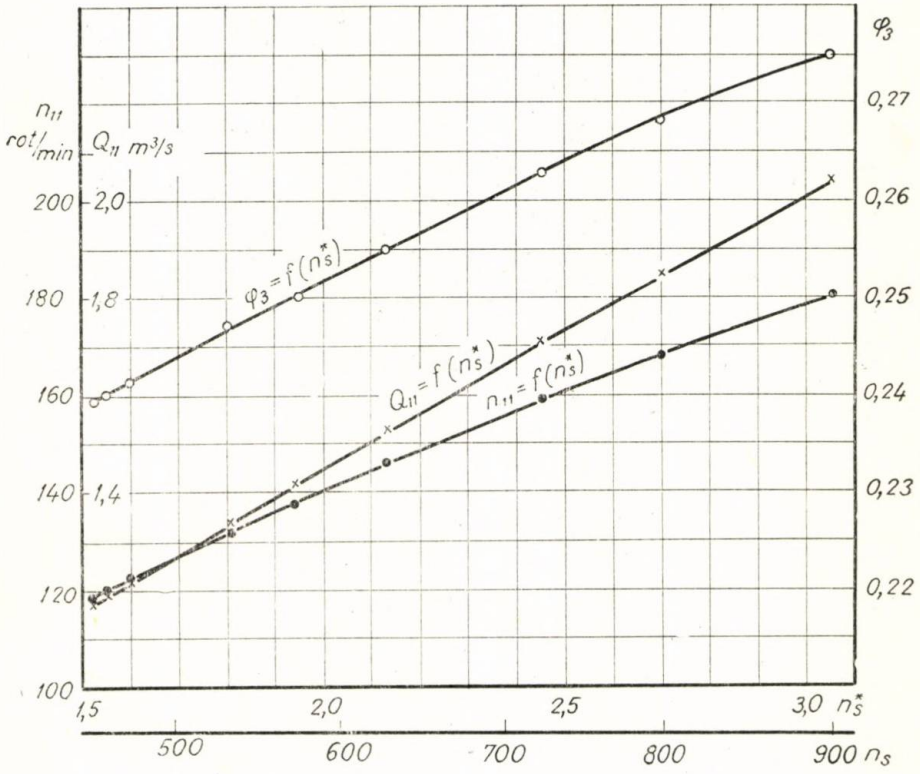


Fig. 4

Această relație exprimă la raza r coeficientul de deviație a curentului la trecerea prin turbina axială de dimensiuni D, $\nu = \frac{d}{D}$ și turație specifică n_s.

Pentru a stabili valorile optime ale coeficientului de deviație a curentului la funcționarea turbinelor axiale, se vor utiliza rezultatele lui W. Albring [5] și O. E. Baljé [7], prezentate sub forma diagramei Euler (fig. 5).

O. E. Baljé [7], prelucrînd datele experimentale obținute de N. Speidel și N. Scholtz [6], W. Bolte [8], G. Cordes [9], W. Traupel [10], H. Hausenblas [11], H. Schlichting și A. Das [12], prezintă pentru rețele de turbină (accelerate) în planul δ_u, ctg β_∞ curbele ce caracterizează pierderile hidraulice totale în rețea $\zeta_p = \text{const}$ (fig. 6). În diagramă sînt trecute și valorile

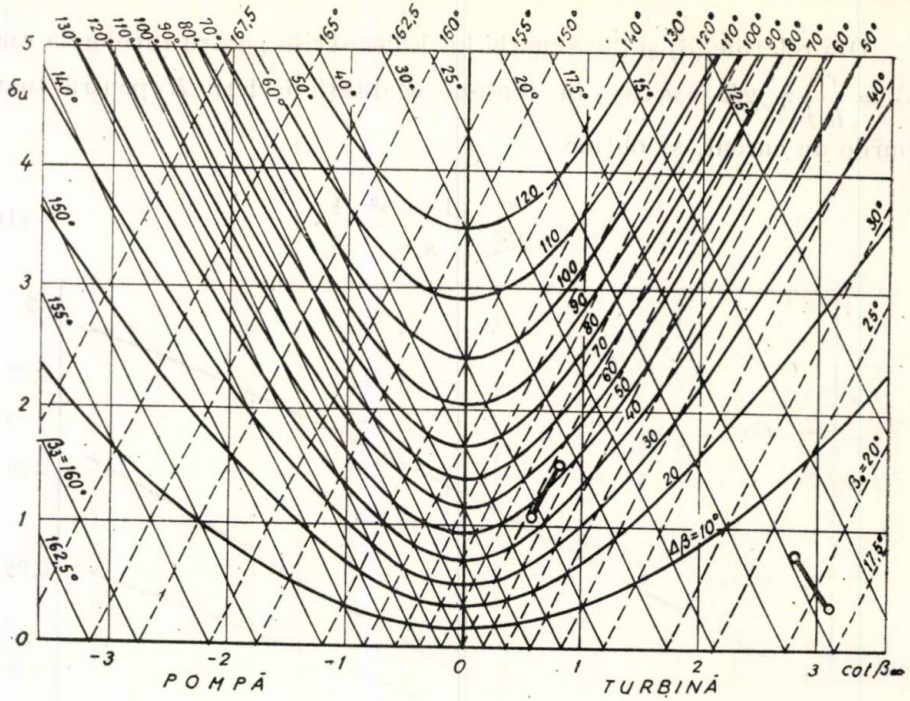

δu
POMPĂ
TURBINĂ
cotβ∞
β3=160°
162,5°
Δβ=10°
β2=20°
17,5°

Fig. 5

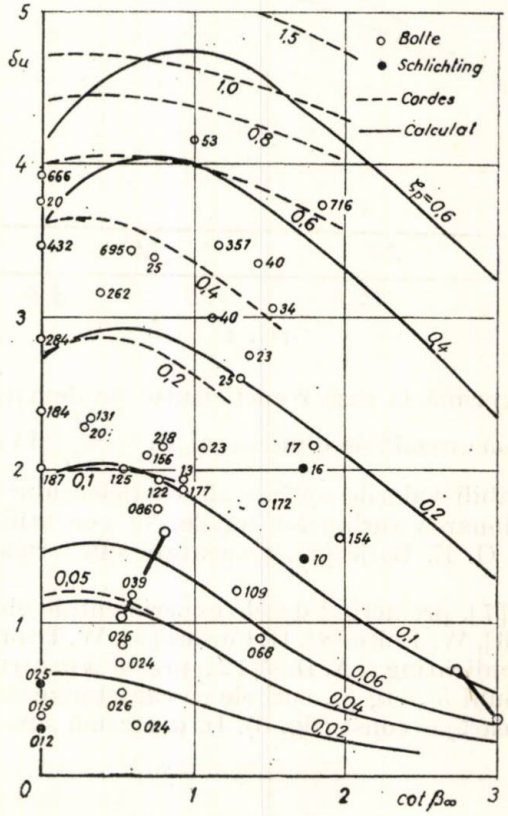

Bolte
Schlichting
Cordes
Calculat
δu
cotβ∞
ξp=0,6

Fig. 6

obținute experimental de diferiți cercetători. Rezultă de aici că valorile mici ale acestui coeficient de deviație δ_u impun unghiuri β_∞ scăzute și conduc la pierderi hidraulice scăzute.

La aceleași concluzii ajunge și W. Albring [13] prin prelucrarea rezultatelor lui R. Döge și R. Herman [14], [15], care ne oferă curbele universale de funcționare ale unor rețele cu indicarea zonei optime de funcționare. Deoarece lipsesc astfel de diagrame pentru mai multe familii de rețele de profile sau relații care să permită calculul coeficientului de deviație δ_u în funcție de geometria rețelei și de parametrii hidrodinamici, vom admite pentru acest coeficient, lîngă butucul turbinei, o relație de forma

$$\delta_{u_i} = An_s^* + B. \tag{11}$$

Constantele A și B se vor determina în două variante (V_I cu diametrii de butuc mai subțiri și V_{II} cu diametri de butuc mai groși):

V_I $n_s^* = 3{,}05$ $(n_s = 900)$, $d/D = \nu = \hat{u}{,}3$,

$n_s^* = 1{,}52$ $(n_s = 450)$, $\nu = 0{,}5$,

V_{II} $n_s^* = 3{,}05$, $\nu = 0{,}36$,

$n_s^* = 1{,}52$, $\nu = 0{,}55$.

Dacă se admite $\eta_h = 0{,}95$ și independent de rază, chiar la periferie unde apare o oarecare scădere a randamentului hidraulic [17], [29], din relațiile (10), (2), (5), (11) se obține pentru V_I și V_{II}

$$\delta_{u_{iI}} = -0{,}314\, n_s^* + 1{,}9735, \tag{12}$$

$$\delta_{u_{iII}} = -0{,}23225\, n_s^* + 1{,}61818. \tag{12'}$$

Dar, cum $\delta_{u_e} = \nu\delta_{u_i}$, s-a calculat variația coeficientului de deviație al curentului la periferie (exterior). Valorile obținute pentru acești coeficienți, cerute de funcționarea turbinelor axiale la diferite turații specifice, sînt redate în figurile 7 și 8.

În diagramele date de O. E. Blajé (fig. 5) s-au reprezentat valorile lui $\delta_{u_{iI}}$ și $\delta_{u_{eI}}$ (linii groase). După cum se remarcă, aceste valori se plasează în domeniul valorilor scăzute ale pierderilor hidraulice. Rezultă de aici

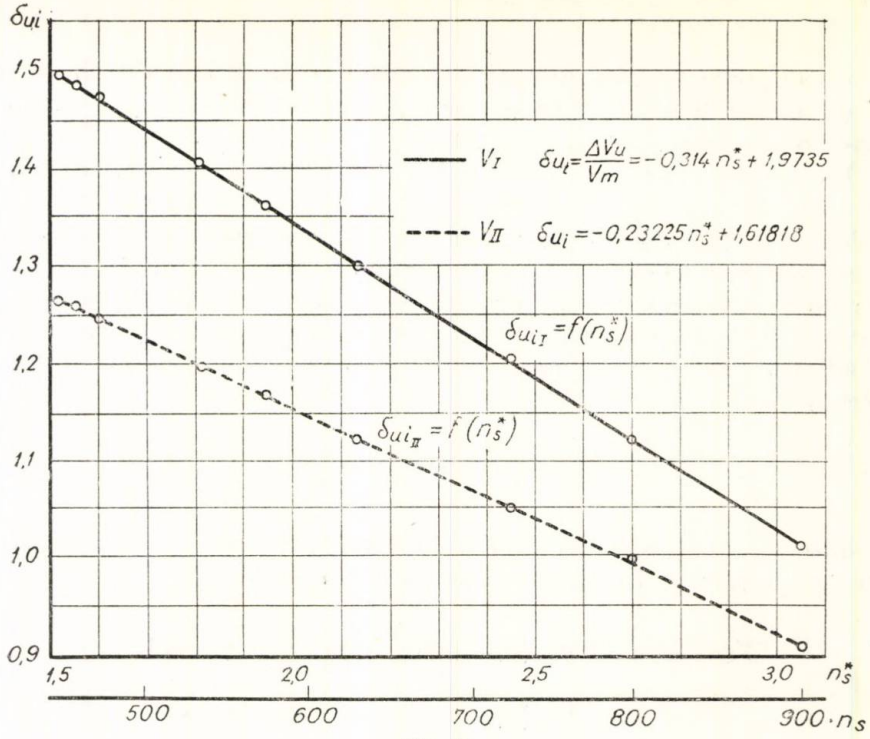

δui
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
VI δui=ΔVu/Vm = −0,314 n*s + 1,9735
VII δui = −0,23225 n*s + 1,61818
δui I = f(n*s)
δui II = f(n*s)
1,5
2,0
2,5
3,0
n*s
500
600
700
800
900 ns

Fig. 7

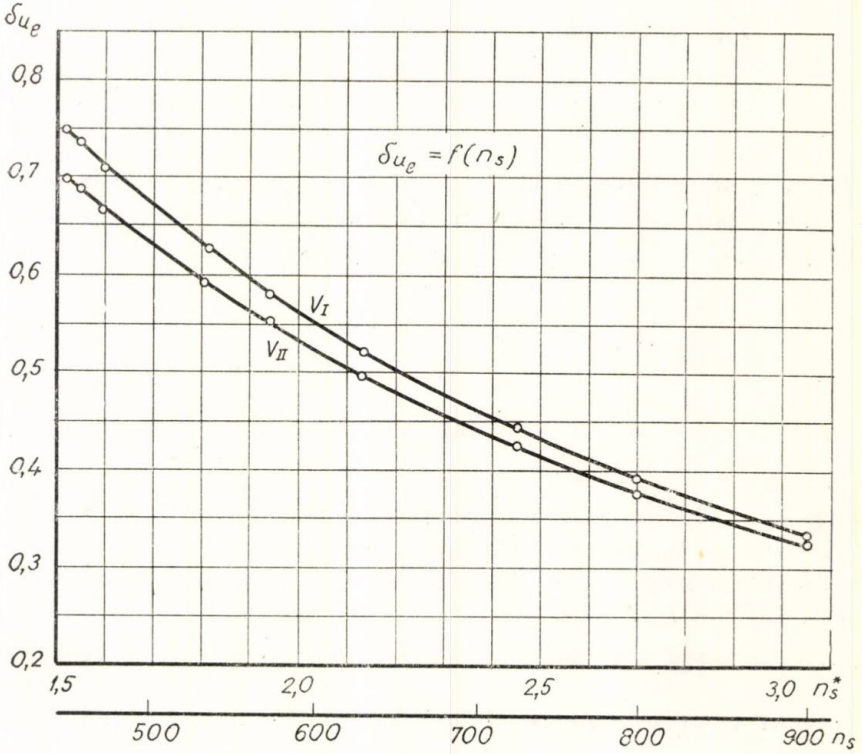

δue
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
δue = f(ns)
VI
VII
1,5
2,0
2,5
3,0
n*s
500
600
700
800
900 ns

Fig. 8

că acest coeficient este cunoscut în prealabil și deci poate sta la baza calculului diferitelor elemente ale turbinelor axiale.

Menționăm că pentru coeficientul de variație al vitezei meridionale cu raza s-a admis $n_r = 1$, deși experiențele au arătat că $n_r \neq n_i \neq n_e \neq 1$ [4], [16]—[18]. Influența acestuia asupra elementelor în studiu este neesențială, ceea ce a fost arătat și de G. A. Svinareev [4].

Experiențele din laborator privitor la determinarea vitezelor curentului de la ieșirea din turbină au arătat că apare, chiar la regimul optim de funcționare, o torsionare negativă a curentului [17], [19]. În baza rezultatelor obținute de V. S. Kviatkovski [17], G. A. Svinareev [4], I. E. Etinberg [16], A. E. Susko [20] recomandă la butuc $k_i = -0{,}2$ și la periferie $k_e = +0{,}2$. Analizînd mai îndeaproape rezultatele lui V. S. Kviatkovski și ale lui R. Jahn [19] (fig. 9), recomandăm pentru $k_i = -0{,}032$ și $k_e = +0{,}2 - 0{,}6$.

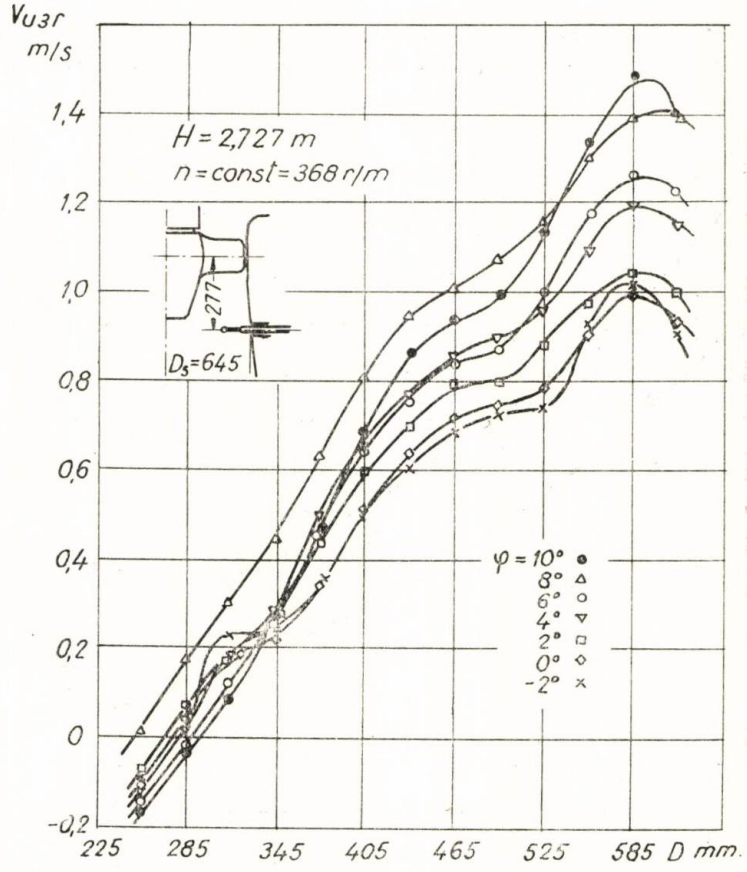


Fig. 9

3. DETERMINAREA DIMENSIUNILOR PRINCIPALE ALE ROTORULUI

Ca dimensiune principală se consideră diametrul exterior $D_e = D$ al rotorului şi diametrul butucului (fig. 1). Pentru diametrul exterior se poate scrie

$$D_e = D = \frac{k_{u_R}\sqrt{2gH}}{\frac{\pi n}{60}}, \tag{13}$$

iar diametrul butucului se poate calcula din relaţia (10), în care s-a explicitat ν:

$$\nu = \frac{d}{D} = -\frac{\frac{n_i \varphi_s}{\frac{\eta_h}{k_{u_R}^2}}}{\delta_{u_i}} + \sqrt{\frac{n_i^2 \varphi_s^2}{\left(\frac{\eta_h}{k_{u_R}^2}\right)^2} \cdot \delta_{u_i}^2 + 1}. \tag{14}$$

Valorile diametrului butucului în cazul celor două variante admise pentru coeficientul de deviaţie al curentului sînt prezentate în figura 10.

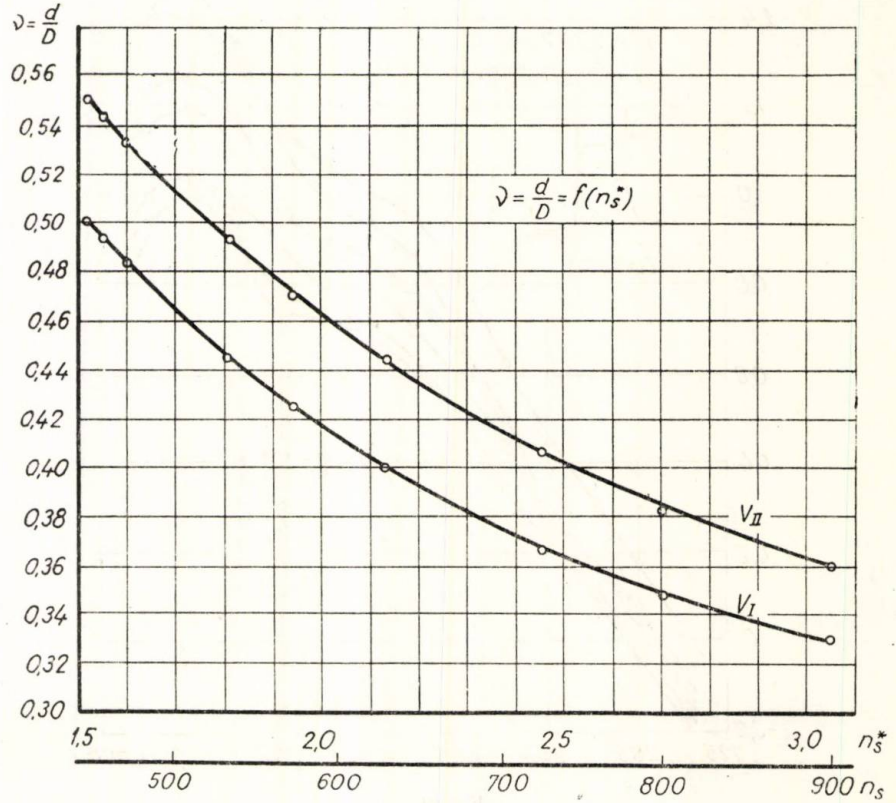


Fig. 10

4. ELEMENTELE UNGHIULARE ŞI DEVIAŢIILE UNGHIULARE

Pentru curentul de trecere prin turbină în afara zonei de influenţă a rotorului cu notaţiile din figura 2 se obţine

$$\operatorname{ctg} \beta_{0_r} = \frac{u_r - v_{0u_r}}{v_{m_r}} = \delta_{u_r} \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - 1 - k_r \right], \tag{15}$$

$$\operatorname{ctg} \beta_{3_r} = \frac{u_r - v_{3m_r}}{v_{m_r}} = \delta_{u_r} \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_r \right], \tag{16}$$

$$\operatorname{ctg} \beta_{\infty_r} = \frac{u_r - v_{3u_r} - \frac{\Delta v_{u_r}}{2}}{v_{m_r}} = \delta_{u_r} \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_r - \frac{1}{2} \right], \tag{17}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_{0_r} = \frac{v_{0u_r}}{v_{m_r}} = \delta_{u_r} [1 + k_r], \tag{18}$$

$$\operatorname{ctg} \alpha_{3_r} = \frac{v_{3u_r}}{v_{m_r}} = \delta_{u_r} \cdot k_r . \tag{19}$$

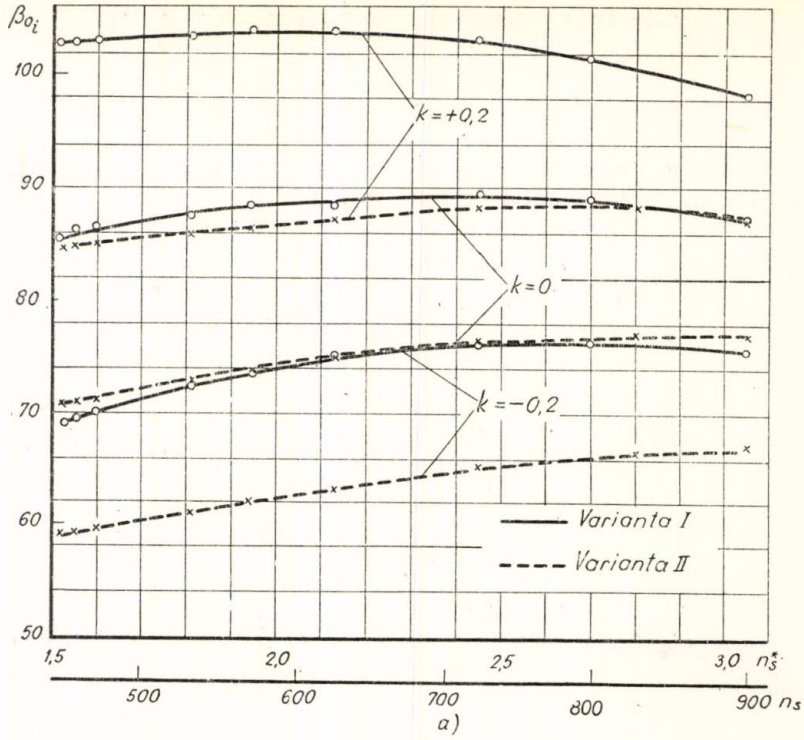
Deviaţia unghiulară a curentului la raza r este definită prin $\Delta\beta_r = \beta_{0r} - \beta_{3r}$ şi se exprimă sub forma

$$\operatorname{ctg} \Delta\beta_r = \frac{1}{\delta_{u_r}} - \frac{\delta_{u_r}}{4} + \delta_{u_r} \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_i - \frac{1}{2} \right]. \tag{20}$$

Calculînd unghiurile β_{0_i}, β_{3i}, β_{0_e} şi β_{3_e} pentru variantele admise şi pentru coeficientul de torsionare al curentului de după rotor $k = \pm 0{,}2$ şi $k = 0$, se obţin valorile din figurile 11 *a* — *d*.

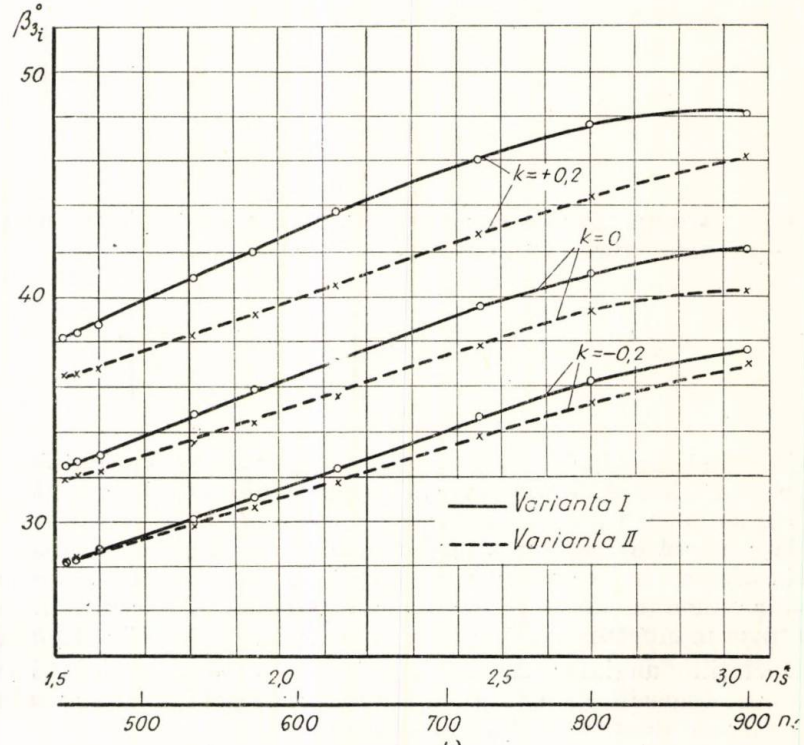
Se remarcă o creştere a unghiurilor de lîngă butuc şi o scădere la periferie atunci cînd creşte turaţia specifică. De asemenea, la o creştere a acestor unghiuri duce şi torsionarea pozitivă a curentului. Aceeaşi influenţă se manifestă şi asupra unghiurilor β_{∞_i} şi β_{∞_e} (fig. 12 *a* şi *b*).

Deviaţiile ungiulare $\Delta\beta_i$ şi $\Delta\beta_e$ (fig. 13 *a* şi *b*) scad o dată cu creşterea turaţiei specifice, în timp ce torsionarea pozitivă a curentului duce la o creştere a acestora mai ales lîngă butuc.



a)

Fig. 11 a



b)

Fig. 11 b

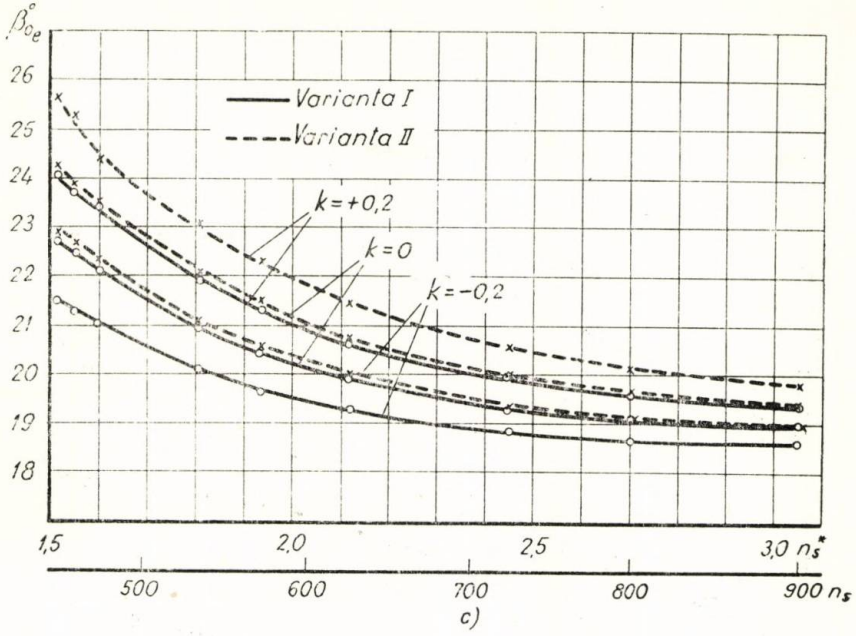


Fig. 11 c

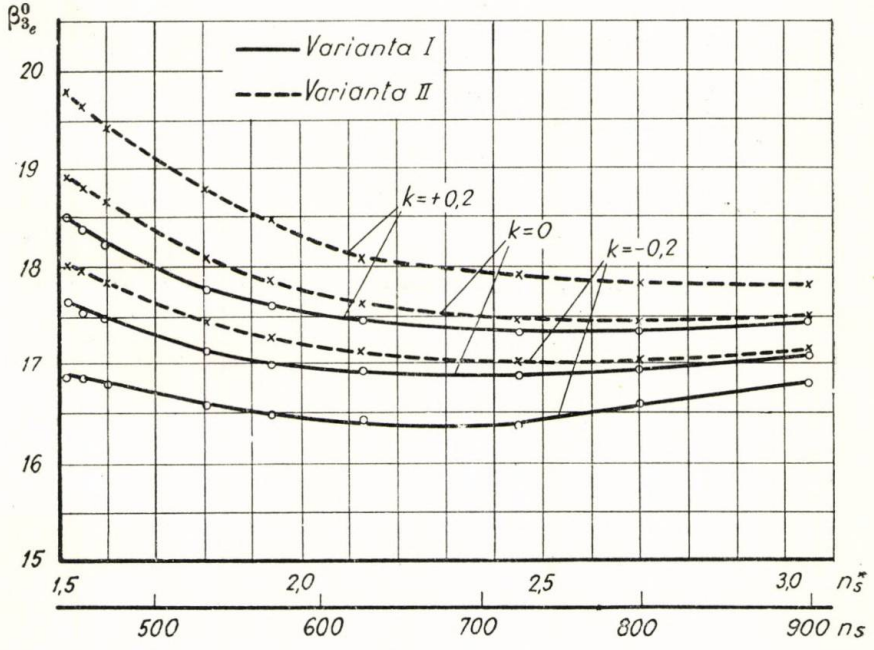


Fig. 11 d

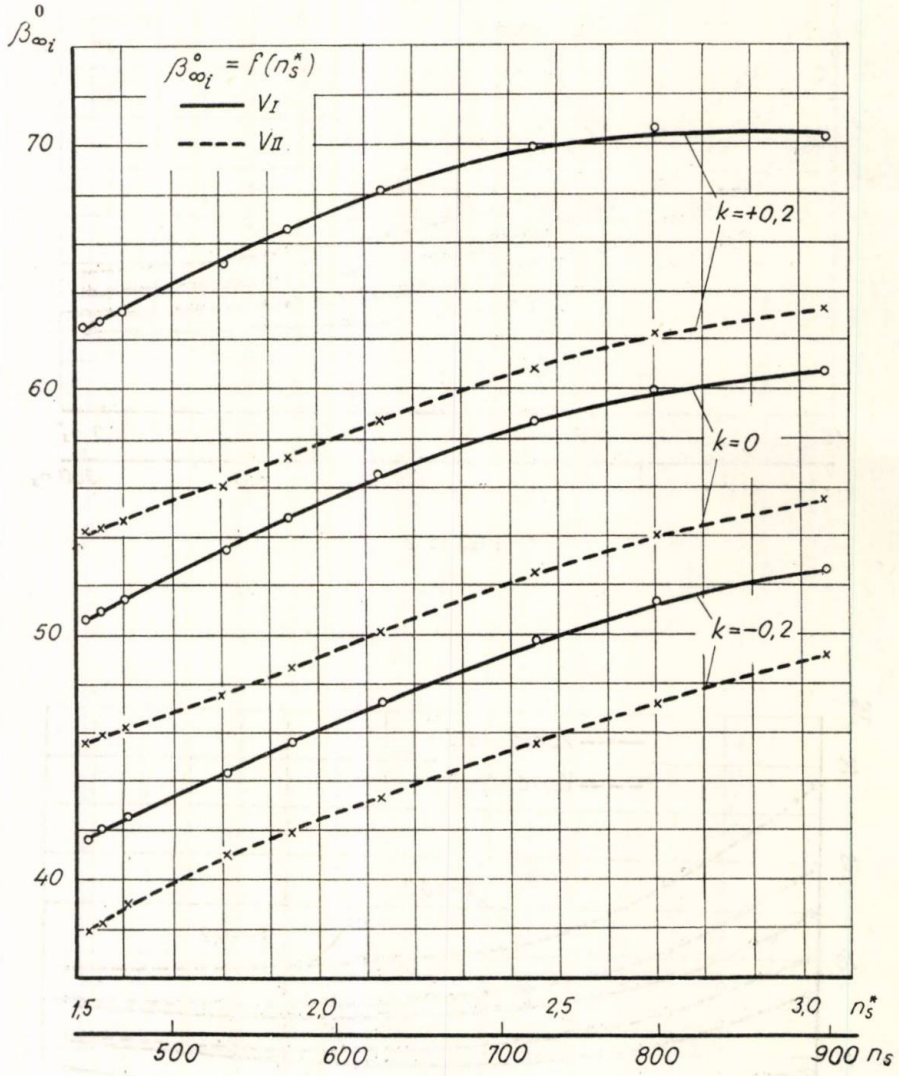
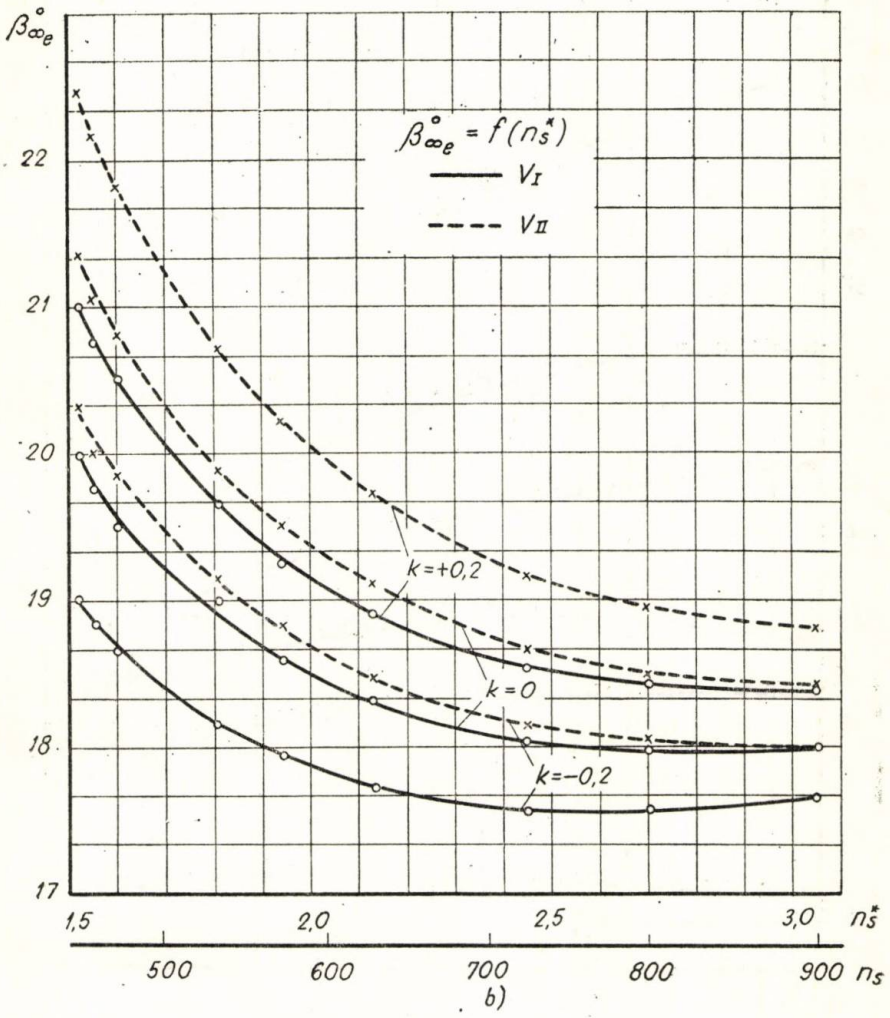

$\beta^{0}_{\infty i}$
$\beta^{0}_{\infty i} = f(n_s^*)$
V_I
V_{II}
70
60
50
40
k=+0,2
k=0
k=−0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 12 a


$\beta^{\circ}_{\infty e}$
22
21
20
19
18
17
$\beta^{\circ}_{\infty e} = f(n_s^*)$
V_I
V_{II}
k=+0,2
k=0
k=−0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

b)

Fig. 12 b

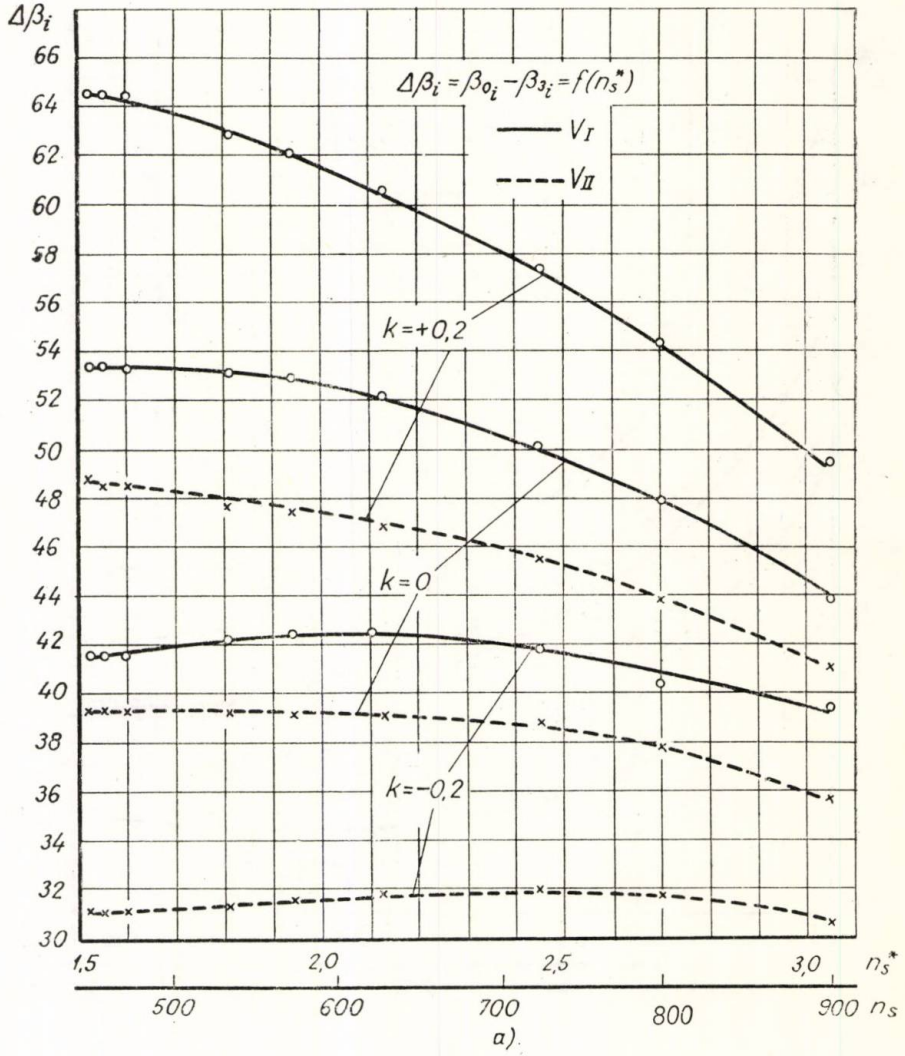

Δβi
66
64
62
60
58
56
54
52
50
48
46
44
42
40
38
36
34
32
30
Δβi = β0i − β3i = f(ns*)
VI
VII
k = +0,2
k = 0
k = −0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
ns*
500
600
700
800
900
ns
a)

Fig. 13 a

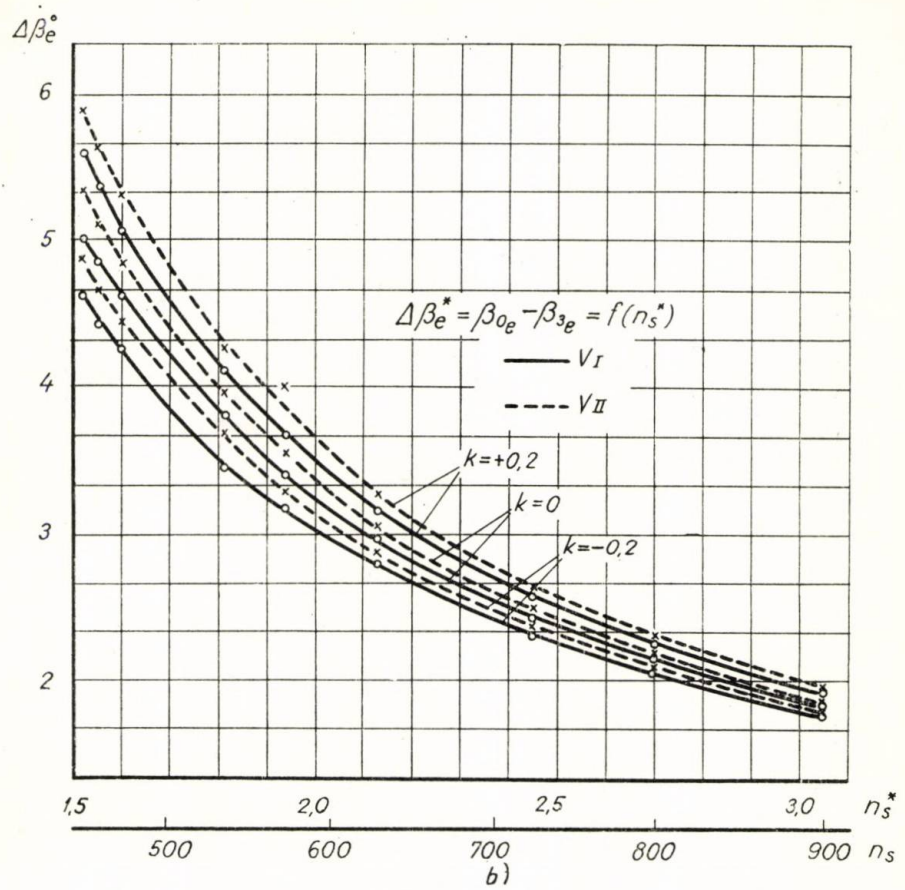


Fig. 13 b

5. TORSIONAREA PALETEI ROTORULUI

Torsionarea paletei este definită prin $\Delta\beta_{i_e} = \beta_{s_i} - \beta_{s_e}$, unde β_s este unghiul de instalare al profilului. În cazul incidenţelor curentului α mici se poate scrie $\Delta\beta_{\infty ie} \cong \Delta\beta_{sie}$, deoarece

$$\Delta\beta_{\infty ie} = \beta_{\infty i} - \beta_{\infty_e} = (\beta_{s_i} + \alpha_i) - (\beta_{s_e} + \alpha_e) \cong \Delta\beta_{sie}\,.$$

Astfel torsionarea paletei se exprimă

$$\operatorname{ctg}\Delta\beta_\infty = \frac{1 + \nu\delta_{u_i}\left[\dfrac{\nu^2}{\dfrac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_i - \dfrac{1}{2}\right]\left[\dfrac{1}{\dfrac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_e - \dfrac{1}{2}\right]}{\delta_{u_i}\left[\nu\left(\dfrac{1}{\dfrac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_e - \dfrac{1}{2}\right) - \left(\dfrac{\nu^2}{\dfrac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_i - \dfrac{1}{2}\right)\right]}\,. \qquad (21)$$

Se remarcă din figura 14 o creştere importantă a torsionării paletei o dată cu creşterea turaţiei specifice şi a torsionării curentului la ieşirea din rotor.

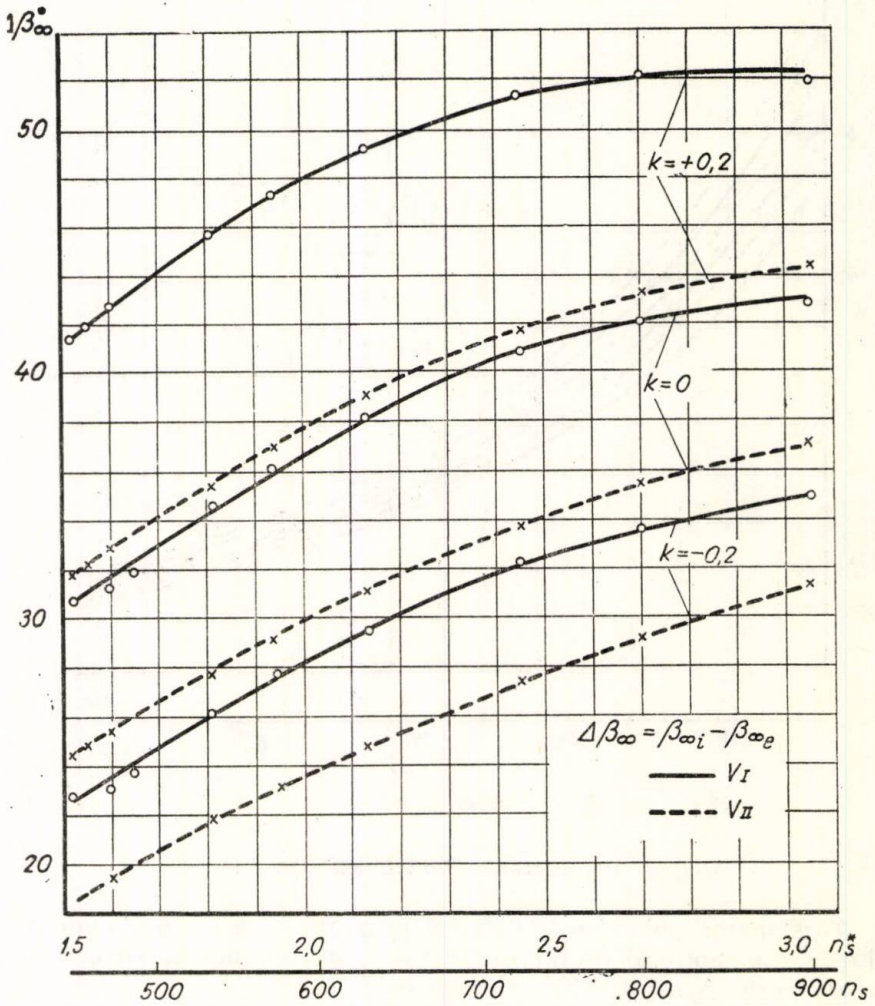


Fig. 14

6. ELEMENTELE CINEMATICE

Vitezele din zona rotorului se pot exprima în funcţie de parametrii de bază admişi la studiul turbinelor Kaplan, astfel :

$$\frac{u_r}{u_R} = \delta_r, \tag{22}$$

$$\frac{w_{\infty r}}{u_R} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1}{\delta_r} \cdot \frac{1}{\delta_{u_r}} \sqrt{1 + \delta_{u_r}^2 \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_r - \frac{1}{2} \right]^2}, \tag{23}$$

$$\frac{w_{0r}}{u_R} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1}{\delta_r} \cdot \frac{1}{\delta_{u_r}} \sqrt{1 + \delta_{u_r}^2 \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_r - 1 \right]^2}, \tag{24}$$

$$\frac{w_{3r}}{u_R} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1}{\delta_r} \cdot \frac{1}{\delta_{u_r}} \sqrt{1 + \delta_{u_r}^2 \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_r \right]^2}, \tag{25}$$

$$\frac{v_{0r}}{u_R} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1}{\delta_r} \cdot \frac{1}{\delta_{u_r}} \sqrt{1 + \delta_{u_r}^2 [1 + k_r]^2}, \tag{26}$$

$$\frac{v_{3r}}{u_R} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1}{\delta_r} \cdot \frac{1}{\delta_{u_r}} \sqrt{1 + \delta_{u_r}^2 \cdot k_r^2}. \tag{27}$$

7. CARACTERISTICILE REȚELEI

Ecuația turbinelor Kaplan [3], [21] exprimă legătura dintre caracteristicile rețelei și parametrii de funcționare ale acestora, astfel:

$$\left(C_{a_r} \cdot \frac{l}{t} \right)_r = \frac{2g\,\eta_h H}{u_r w_{\infty r} \left[1 - \frac{\operatorname{tg} \theta_r}{\operatorname{tg} \beta_{\infty r}} \right]} \tag{28}$$

sau

$$\left(C_{a_r} \cdot \frac{l}{t} \right)_r = 2\delta_{u_r} \sin \beta_{\infty r} + \left(C_{x_r} \frac{l}{t} \right)_r \cdot \operatorname{ctg}\, \beta_{\infty r}, \tag{29}$$

$$\left(C_{a_r} \cdot \frac{l}{t} \right)_r = 2\delta_{u_r} \sin \beta_{\infty r} + \zeta_{p_r} \sin^2 \beta_{\infty r} \cos \beta_{\infty r}, \tag{30}$$

$$\left(C_{a_r} \cdot \frac{l}{t} \right)_r \cong 2\delta_{u_r} \cdot \sin \beta_{\infty r}, \tag{30'}$$

unde C_{a_r} este coeficientul de portanță, C_{x_r} coeficientul de rezistență, t/l desimea rețelei și ζ_{p_r} coeficientul de pierderi în rețea.

În figurile 15 *a* și *b* s-au reprezentat valorile obținute pentru încercarea profilelor de lîngă butuc și de la periferie în funcție de turația specifică. Se observă o scădere a încărcării profilului o dată cu creșterea turației specifice, respectiv cu torsionarea negativă a curentului de la ieșirea din rotor.

Din analiza critică a diferitelor indicații privitor la desimea rețelelor [4] — [6], [13], [16], [17], [20] — [22] rezultă că se poate admite $(l/t)_e = f(n_s^*)$, ca în figura 15. Conform cercetărilor prof. V. S. Kviatkovski [17] $(l/t)_e$ influențează apreciabil caracteristicile energetice și cavitaționale ale turbinei.

Pentru desimea rețelei la butuc se va lua $(l/t)_i = 1{,}25 \left(\frac{l}{t}\right)_e$ [4], [17] (fig. 16).

Odată admisă variația desimii rețelei, rezultă coeficientul de portanță C_{a_r} care trebuie realizat de profilul dispus în rețea de turbină (fig. 17 *a* și *b*).

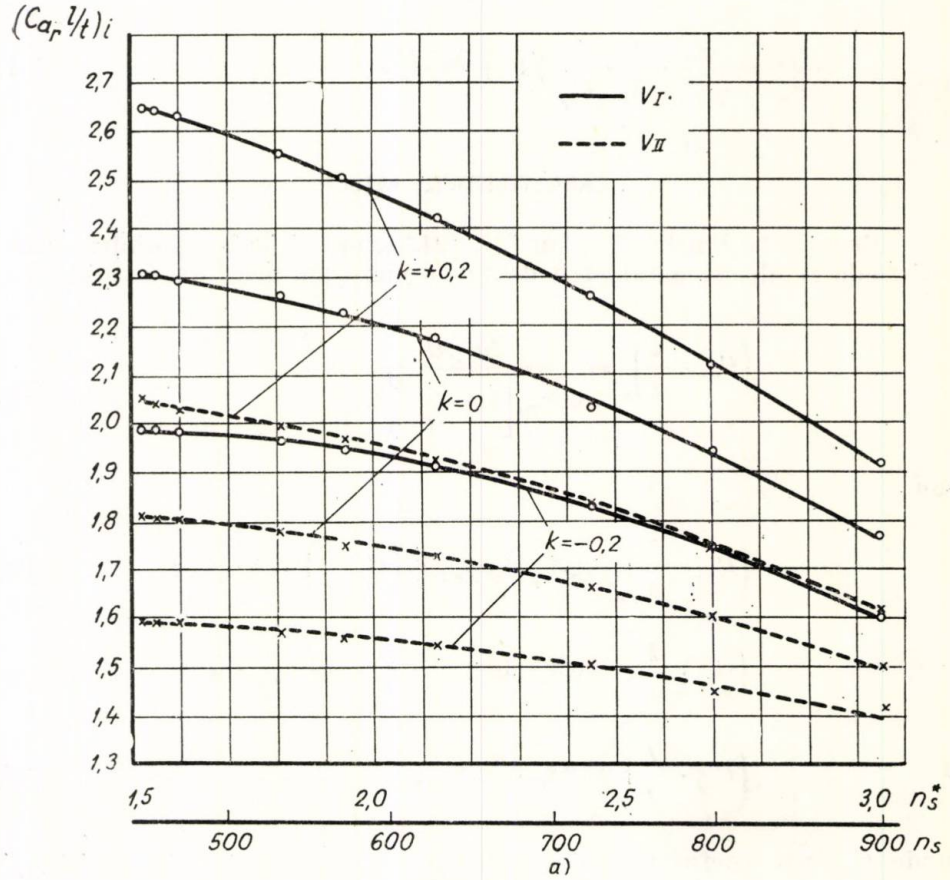


Fig. 15 a

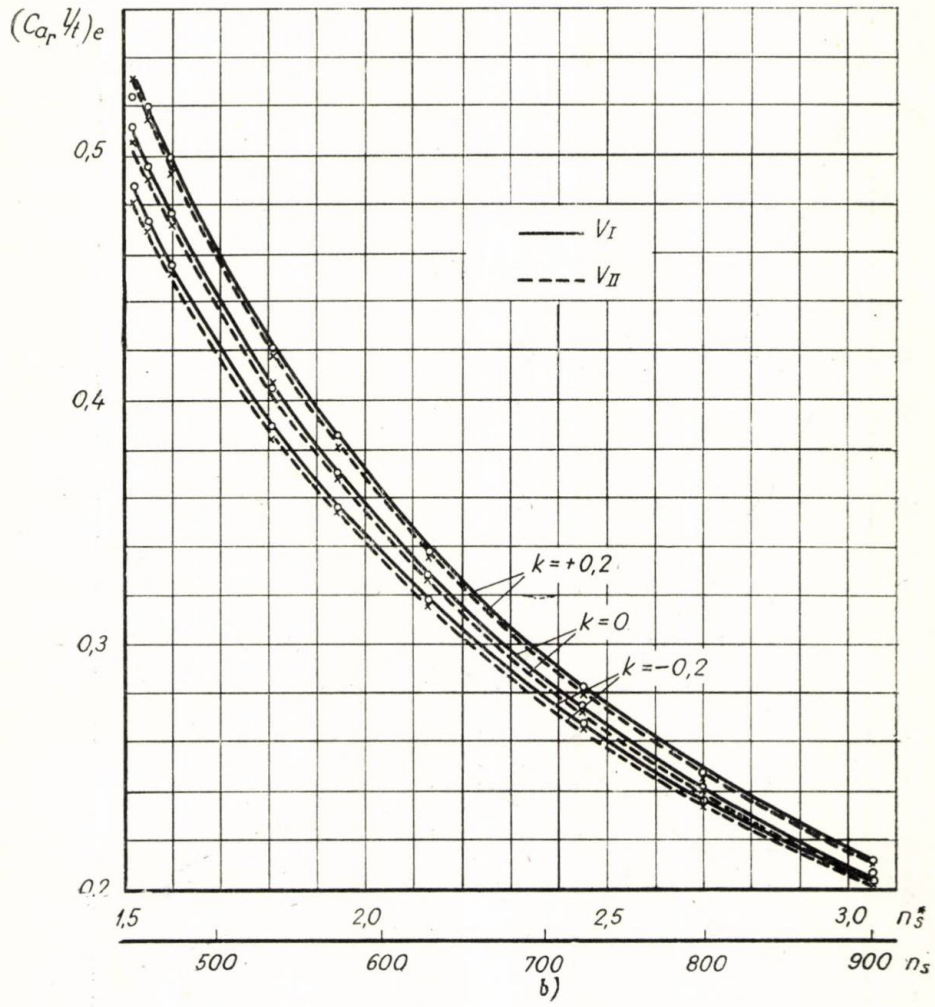

$(C_{a_r} \frac{y}{t})_e$
0,5
0,4
0,3
0,2
V_I
V_{II}
k = +0,2
k = 0
k = −0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s
b)

Fig. 15 b

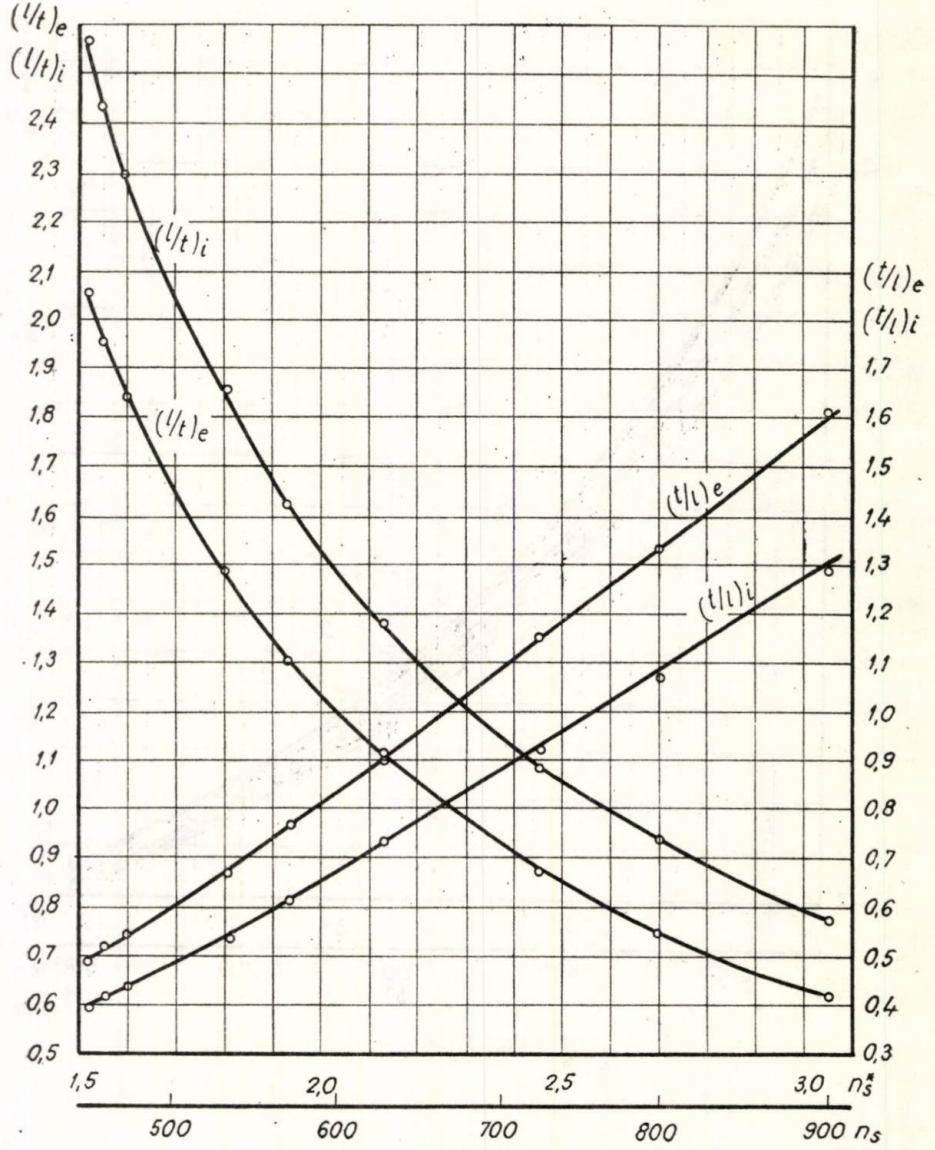

$(l/t)_e$
$(l/t)_i$
2,4
2,3
2,2
2,1
2,0
1,9
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
$(l/t)_i$
$(l/t)_e$
$(t/l)_e$
$(t/l)_i$
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
$(t/l)_e$
$(t/l)_i$
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 16

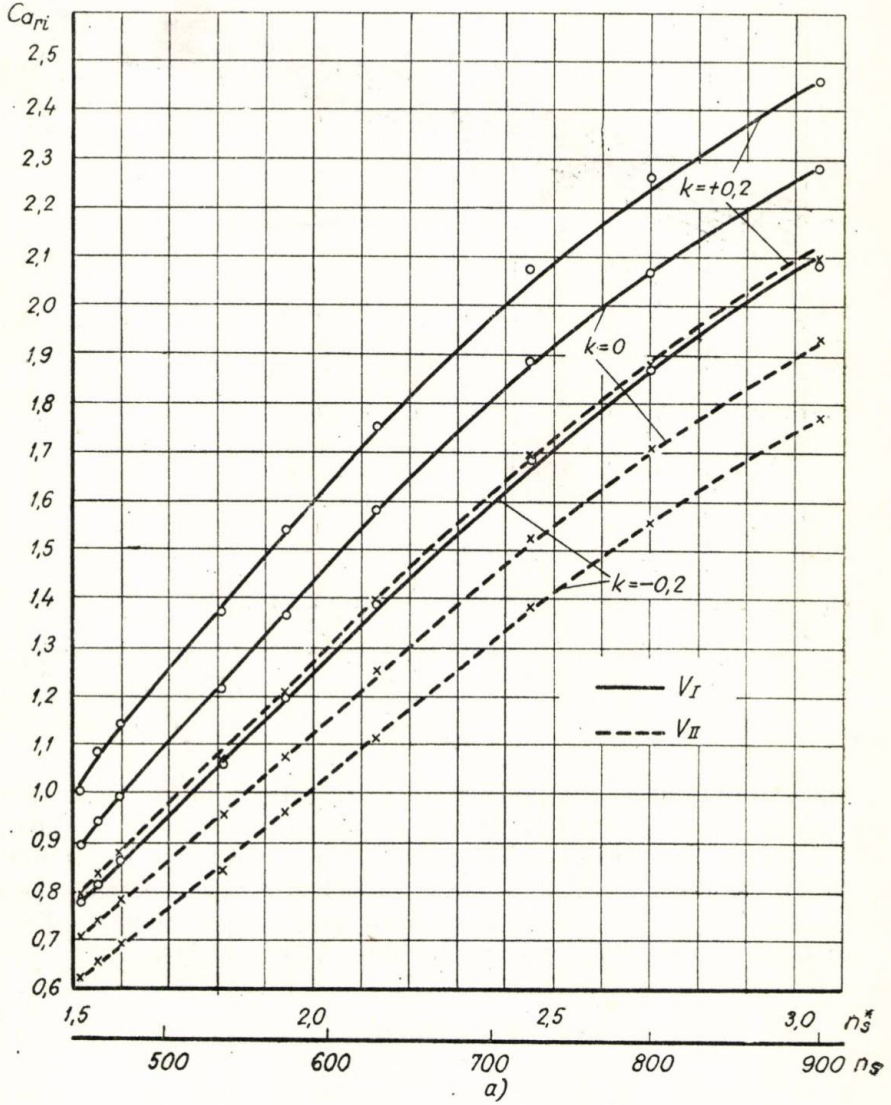


Fig. 17 a

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

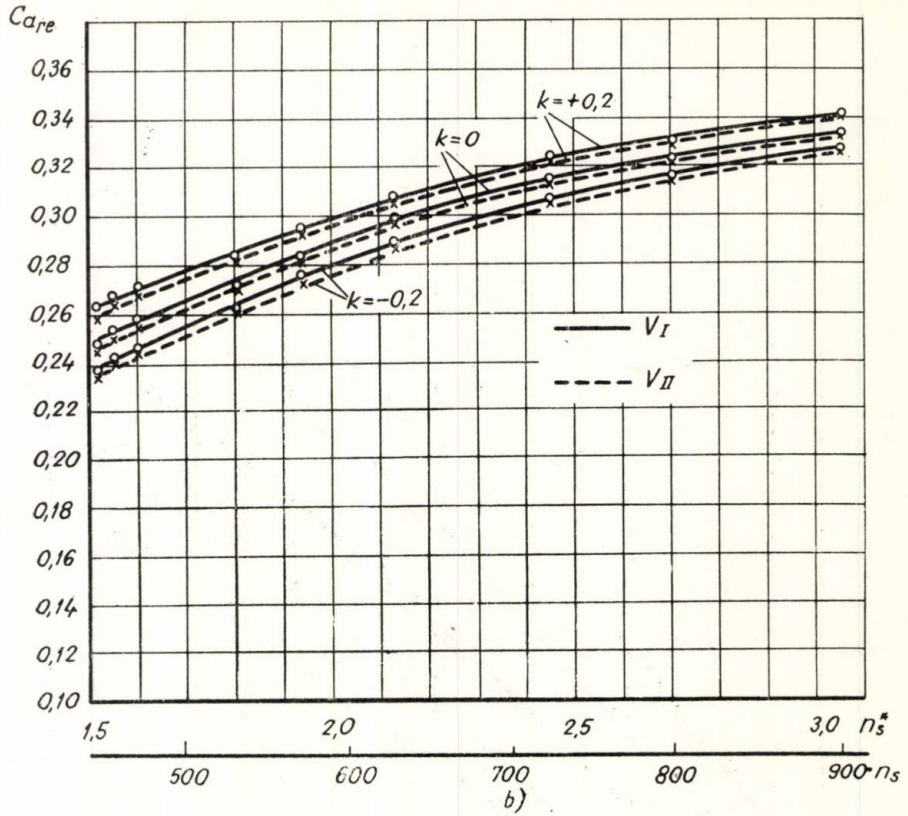


Fig. 17 b

Din aceste figuri rezultă o creştere a portanţei la butuc şi la periferie cu turaţia specifică şi cu torsionarea pozitivă a curentului de la ieşire din rotor. Creşterea diametrului butucului (V_{II}) duce la o reducere însemnată a coeficientului de portanţă. Valorile coeficienţilor de portanţă pentru ambele variante sînt în domeniul normal al portanţelor realizate de reţelele calculate [23], [24] sau experimentate [25] — [28].

8. CONCLUZII

1. Cunoscînd legea de variaţie cu turaţia specifică a coeficientului vitezei tangenţiale periferice k_{u_R}, se impune o anumită variaţie a vitezei meridionale (v_{m_s}), a debitului unitar Q_{11} şi a turaţiei unitare n_{11}. Alegerea acestor parametri independent de k_{u_R}, aşa cum se face de multe ori, duce la îndepărtarea regimului de calcul de cel optim realizat.

2. În caz că se admite coeficientul δ_{u_i} de deviaţie al curentului prin reţeaua de profile, este posibilă exprimarea unitară a elementelor geometrice, cinematice, unghiulare şi energetice ale rotorului turbinei axiale.

Relaţiile stabilite permit studiul influenţei diferiţilor parametri asupra construcţiei şi funcţionării turbinei Kaplan, precum şi calculul lor programat.

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. L. VIVIER, *Turbines hydrauliques et leur régulation*, Paris, Edit. Albin Michel, 1966, p. 72, 79 şi 84.
2. * * * *Design Standards no. 6 Turbines and Pumpes*, United States Department of the Interior Bureau of Reclamation Commissioner's Office Denver Colorado, 1960.
3. G. F. PROSKURA, *Gidrodinamica turbomaşin*, Maşgiz, 1954.
4. G. A. SVINAREV, *Visokonapornie povorotnolopastnie gidroturbini*, osevogo tipa, Kiev, 1964.
5. W. ALBRING, *Das Eulerdiagramm zur Auslegung von axialen Schaufelrädern*, Maschinenbautechnik, *7*, 467 — 477 (1958).
6. L. SPEIDEL, N. SCHOLZ, *Untersuchungen über die Strömungsverluste in ebenen Schaufelgittern* VDI Forsch., *464* (1957).
7. O. E. BALJÉ, *Axial Cascade technology and Aplication to Flow Path Designs*, Part I and Part II, Trans ASME, Journal of engineering for Power, octombrie 1968.
8. W. BOLTE, *Zur Berechnung und optimierung des Wirkungsgrades axialer Strömungsmaschinen*, VDI Forsch., *501* (1964).
9. G. CORDES, *Flow Technology and Axial Gas Turbines*, Springer, 1963.
10. W. TRAUPEL, *Termische Turbomaschinen*, Berlin, Springer-Verlag, 1962.
11. H. HAUSENBLAS, *Zusammenfassende Übersicht über britische Schaufelgittermessungen*, Konstruktion, **11**, *12* (1959).
12. H. SCHLICHTING, A. DAS, *Recent Research on Cascade-Flow Problems*, Trans ASME Journal of Basic Engineering, martie 1966.
13. W. ALBRING, *Taschenbuch Maschinenbau Strömungsmaschinen* VEB, VT Berlin, 1968, p. 250 — 289.
14. R. DÖGE, R. HERMANN, *Zur Auswertung systematischer Messungen an ebenen geraden Schaufelgittern*, Maschinenbautechnik, *12*, 655 — 660 (1959).
15. R. DÖGE, R. HERRMANN, *Zur Auswertung systematischer Messungen an ebenen geraden Schaufelgittern*, Maschinenbautechnik, **9**, *11*, 571 — 573 (1960).
16. I. E. ETINBERG, *Teoria i rasciot protocinoi ciasti povorotnolopastnih gidroturbin*, Moskva-Leningrad, Maşinostroenie, 1965.
17. V. S. KVIATKOVSKI, *Rabocii proţess osevoi ghidroturbini*, I, II, Tr. VIGM, XIV, XV, Maşgiz, 1951 — 1952.
18. A. IU. KOLTON, I. E. ETINBERG, *Osnovi teorii i gidrodinamiceskogo rasciota vodianih turbin*, Maşgiz, 1958, p. 31, 130 şi 132.
19. R. JAHN, *Absolzte and relative flow measurements in Kaplan Turbines*. Proceedings of the third Conference on Fluid Mechanics and Fluid Machinery, Budapesta, Akadémiai Kiadó, 1969.
20. A. E. SUSKO, *O vibore rascetnih parametrov pri proektirovanii nizkonapornih osevih gidroturbin*, Akad. Nauk Ukrainskoi SSR. Trudî Laboratorii gidravliceskih maşin, nr. 11, Kiev, 1964.
21. C. PFLEIDERER, *Die Kreiselpumpen für Flüssigkeiten und Gase*, Berlin, Springer-Verlag, 1955.
22. * * * Leningradski Metalliceskii Zavod, *Nomenklatura krupnih vertikalnih povorotnolopastnih i radialno-osevih ghidroturbin*, 1962.
23. O. POPA, *Caracteristicile hidrodinamice ale reţelelor de profile Carafoli, MHTC 04.04.10*, St. cerc. stiinţ. Timişoara, **IX**, *1 — 2* (1962).

24. H. SCHLICHTING, *Berechnung der reibungslosen inkompressiblen Strömung für ein vorgegebenes ebenes Schaufelgitter*, VDI Forsch, *447* (1955).
25. F. NUMACHI, *Cavitation Tests on Hydrofoils Designed for Accelerating Flow Cascade Report 4 — Three Profiles Designed for High Head Kaplan, Turbine*, Trans ASME Journal *of basic engineering*, september 1969.
26. F. NUMACHI, S. ABE, I. CHIDA, *Cavitation Tests on Hydrofoils Profiles. Suitable for Arrangement in Cascade* (Rep 3 a, Rep. 4). Rep. Inst. High. Spe. Mech. Tohoku Univ. Japan, **3** (1953).
27. S. I. NASILOV, B. M. TEVEROVSKII, *Nekotorîe rezultatî eksperimentalnogo issledovania polskih reşetok v gidroturbe*, VIG Ma Trudî VIGM, vîp. *XXX* Moskva, 1962.
28. V. ANTON, I. SANTĂU, *Cercetări asupra unor reţele de profile pentru turbine de foraj*, Bul. ştiinţific şi tehnic al Instit. politehnic Timişoara, **14** (**28**), *1* (1969).

ASUPRA INJECȚIEI FLUIDELOR CALDE ÎN ZĂCĂMINTELE DE PETROL. I

de T. OROVEANU

Institutul de petrol Ploiești

Se consideră problema stimulării termice în exploatarea zăcămintelor de petrol, în varianta cea mai simplă și anume injecția de apă caldă. Se admite de asemenea că se produce un proces de dezlocuire integrală. Întrucît această problemă a făcut obiectul unui număr relativ mare de studii, se urmărește cercetarea unor aspecte mai puțin cercetate. În prima parte a lucrării, după o serie de considerații generale referitoare la ecuațiile diferențiale corespunzătoare scurgerii liniare, respectiv plan-radiale, pe care trebuie să le satisfacă temperatura, se examinează în amănunt condițiile inițiale și la limită pentru diverse situații și se prezintă unele considerații asupra posibilităților de rezolvare a unor probleme încă nestudiate.

1. **Introducere.** Printre metodele utilizate cu succes în ultimul timp în scopul sporirii eficienței procesului de exploatare a zăcămintelor de petrol, se situează și acelea care constau în injectarea unui fluid în stratul productiv. Într-adevăr, pentru a se obține o eficacitate mai mare a dezlocuirii petrolului de către un alt fluid, apare indicat să se introducă și o cantitate de căldură care să micșoreze viscozitatea petrolului. De fapt, încălzirea în acest scop a zăcămîntului se poate realiza fie prin procedeul menționat, fie prin combustia subterană. Problemele termice legate de aceasta din urmă sînt însă foarte diferite de acelea care apar în legătură cu injecția unui fluid cald și nu își au locul în cadrul acestei lucrări. De altfel chiar și atunci cînd căldura este introdusă în zăcămînt prin intermediul unui fluid, intervin numeroase aspecte care complică tratarea matematică. Într-adevăr, un studiu riguros al problemei trebuie să îmbrățișeze atît fenomenul de dezlocuire cît și pe acela de transfer de căldură. În acest mod se ajunge la un sistem de ecuații diferențiale cu derivate parțiale a cărui rezolvare este anevoioasă și devine extrem de dificilă atunci cînd sînt luate în considerație sisteme de scurgere cu o geometrie mai apropiată de situațiile reale. Într-un caz particular, destul de simplu, problema a fost studiată pe această cale de F. J. Fayers [6]; sistemul de ecuații fiind de tip hiperbolic, au fost puse în evidență în soluție atît discontinuități de

saturație cît și de temperatură. Ni se pare util să precizăm că s-a ajuns la un sistem hiperbolic neglijîndu-se conductivitatea termică a mediului poros, transferul de căldură avînd deci un caracter pur convectiv. Alte complicații au fost evitate în [6] prin ipoteza că în zăcămînt se injectează apă caldă la o temperatură constantă. În practică se recurge însă adesea la injecția de abur supraîncălzit, în care caz procesul de dezlocuire și de transfer de căldură devine mai complex, fiind însoțit de schimbări de fază. Dintre cercetările efectuate pînă în prezent asupra injecției de abur, menționăm aci, cu titlul de exemple, pe acelea cuprinse în lucrările [4], [5] și [9].

Există însă și o altă cale de tratare a problemei, prima din punct de vedere cronologic, în care transferul de căldură este decuplat de fenomenul de dezlocuire, ajungîndu-se astfel la o singură ecuație cu derivate parțiale. Implicit, se presupune că se scurge un singur fluid sau, în orice caz, două fluide care formează un amestec avînd o compoziție specificată și putînd fi deci tratat ca un singur fluid. Se studiază astfel numai transferul de căldură și există posibilitatea de a se rezolva prin procedee de calcul mai simple probleme relativ mai complicate. La început au fost studiate totuși unele situații mai puțin complexe la care se ajunge în urma unor ipoteze simplificatoare. Menționăm astfel lucrarea lui H. A. Lauwerier [7], ca și pe acelea ale lui G. E. Malofeev [8] și N. A. Avdonin [3]; unele soluții au fost date și de A. A. Abbasov [2], în a cărui lucrare citată poate fi găsită o bibliografie amplă a cercetărilor sovietice în această problemă.

În cele ce urmează, ne propunem ca, urmînd aceeași cale, să găsim unele soluții în care să se țină seama de anumite aspecte mai puțin studiate ale fenomenului.

2. **Ecuația diferențială a problemei.** Pentru a se ajunge la ecuația diferențială cu derivate parțiale pe care o satisface temperatura T, este necesar să se precizeze problema și să se facă o serie de ipoteze pe care socotim util să le reamintim. Stratul poros, saturat cu petrol, este încălzit prin injecția unui fluid cald presupus, ca și petrolul, incompresibil. Mai precis, pentru evitarea unor complicații semnalate mai sus, vom admite că în strat se injectează apă caldă. Atît la acoperiș cît și la talpă, stratul încălzit se mărginește cu strate impermeabile, cu parametri termici în general diferiți. Procesul de dezlocuire a petrolului de către apa caldă este presupus a se petrece în varianta cea mai simplă, respectiv cu formarea unei suprafețe de contact între cele două lichide. Aceasta înseamnă că nu se ține seama de variația saturației în zona invadată de lichidul de deslocuire, admițîndu-se eventual existența unei saturații reziduale în lichidul deslocuit, care se adaugă la matricea mediului poros.

În legătură cu procesul de dezlocuire, se mai admite că nu se produce nici o schimbare de fază în zona de transfer de căldură. Această ipoteză este plauzibilă în cazul injecției de apă caldă, cu o temperatură relativ moderată, dar nu corespunde cu realitatea atunci cînd se injectează abur, așa cum am amintit de altfel mai sus.

Se presupune, de asemenea, că între rocă și cele două lichide echilibrul termic se realizează instantaneu; anumite date experimentale justifică destul de bine această ipoteză.

O simplificare remarcabilă în tratarea matematică a problemei se obține prin presupunerea că masa specifică și parametrii termici (căldura specifică și conductivitatea termică) sînt constanți. În realitate, variația în funcție de temperatură a parametrilor termici este relativ redusă, atît pentru lichide cît și pentru roci, la acestea din urmă existînd ca dovadă în acest sens datele experimentale din [11] și [12]. Precizăm însă că pentru mediul poros se poate admite existența unei anizotropii în ceea ce privește conductivitatea termică.

Cu aceste ipoteze, care pot fi găsite în cele mai multe dintre studiile teoretice executate pînă în prezent, se ajunge, pentru scurgerea liniară la ecuația

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + w \rho_a C_a \frac{\partial T}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}, \tag{1}$$

în care coordonata x este considerată în sensul scurgerii (paralelă cu talpa și acoperișul stratului), iar coordonata y în direcția perpendiculară pe aceasta; avem de asemenea

$$w = \frac{q}{h}, \tag{2}$$

q fiind debitul de lichid injectat pe unitatea de lățime de mediu poros, presupus constant, h înălțimea stratului și

$$\rho C = m s_p \rho_p C_p + m s_a \rho_a C_a + (1 - m)\, \rho_r C_r, \tag{3}$$

relație în care m este porozitatea, s saturația, ρ masa specifică și C căldura specifică, indicii p, a și r referindu-se respectiv la petrol, apă și rocă. Am notat de asemenea cu k_x și k_y conductivitățile termice în raport cu cele două direcții considerate; implicit, am presupus că acestea sînt axele principale.

Pentru scurgerea plan-radială, se obține în loc de (1) ecuația

$$\rho C \frac{\partial T}{\partial t} + w_r \rho_a C_a \frac{\partial T}{\partial r} = k_r \left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \right) + k_z \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}, \tag{4}$$

unde

$$w_r = \frac{Q}{2\pi h r}, \tag{5}$$

Q fiind debitul, r distanța radială, z coordonata în direcția grosimii stratului, celelalte mărimi avînd aceleași semnificații ca mai sus.

Condiția inițială și condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă soluția urmează a fi precizate, bine înțeles, pentru fiecare caz în parte.

Mai înainte de a merge mai departe, vom observa că, dacă introducem variabilele adimensionale

$$\tau = \frac{k_x t}{h^2 \rho C}, \qquad \xi = \frac{x}{h}, \qquad \eta = \frac{y}{h}, \tag{6}$$

ecuaţia (1) ia forma

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \alpha \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2}, \tag{7}$$

în care

$$\alpha = \frac{\rho_a C_a q}{k_x}, \qquad \beta = \frac{k_y}{k_x}. \tag{8}$$

De asemenea, cu variabilele adimensionale

$$\bar{t} = \frac{k_r t}{h^2 \rho C}, \qquad \bar{r} = \frac{r}{h}. \qquad \bar{z} = \frac{z}{h}, \tag{9}$$

ecuaţia (4) devine

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + a \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} + b \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{z}^2}, \tag{10}$$

unde

$$a(\bar{r}) = \frac{\rho_a C_a Q}{2\pi h k_r \bar{r}}, \qquad b = \frac{k_z}{k_r}. \tag{11}$$

3. **Consideraţii generale asupra scurgerii liniare.** Referindu-ne la ecuaţia (7), vom presupune că în momentul iniţial temperatura din strat este constantă şi are valoarea T_0; de aci rezultă condiţia iniţială

$$\tau = 0, \qquad T = T_0. \tag{12}$$

De asemenea, se poate admite că la injectarea în strat apa caldă are temperatura constantă T_i şi prin urmare prima condiţie la limită este

$$\xi = 0; \qquad T = T_i. \tag{13}$$

Dacă se presupune că stratul are o lungime infinită, se obţine o a doua condiţie la limită şi anume

$$\xi = +\infty, \qquad T = T_0. \tag{14}$$

Alte condiții la limită sînt acelea ce trebuie îndeplinite pe frontierele cu care stratul încălzit vine în contact cu stratele impermeabile. Stabilirea acestor condiții prezintă o serie de aspecte care merită să fie discutate mai în amănunt, lucru pe care vom încerca să-l facem în cele ce urmează.

Stratul impermeabil, care mărginește la partea superioară stratul supus procesului de încălzire, se întinde pe verticală de la suprafața solului pînă la o adîncime H. În realitate, avîndu-se în vedere faptul că H este cel puțin de ordinul sutelor de metri, putînd atinge cîteva mii de metri, nu se poate vorbi de o formație cu masă specifică și parametri termici constanți. De fapt, există o succesiune de strate în care mărimile amintite au valori diferite, dar este practic imposibil ca în calcule să se țină seama de această situație. Trebuie deci să se considere un strat unic, cu masa specifică și parametrii termici constanți, obținuți printr-un proces de mediere destul de greu de definit. În acest strat, care vine în contact cu coloana sondei, sau mai corect, în cazul scurgerii liniare, cu galeria de injecție, se petrece un proces de transfer de căldură atît de la stratul încălzit cît și de la lichidul cald care circulă spre acest din urmă strat.

Rezultă deci că trebuie să se rezolve ecuația

$$\rho_f C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = k_x^{(f)} \frac{\partial^2 T_f}{\partial x^2} + k_y^{(f)} \frac{\partial^2 T_f}{\partial y^2}, \tag{15}$$

cu o condiție inițială și condiții la limită corespunzătoare. Am notat în această ecuație cu ρ_f și C_f masa specifică, respectiv căldura specifică a formației; $k_x^{(f)}$ și $k_y^{(f)}$ reprezintă conductivitățile termice presupuse, ca și mai înainte, diferite în raport cu cele două direcții considerate. Am atribuit și temperaturii același indice, pentru diferențiere față de ecuația (1).

Pentru a merge mai departe, apare necesar să precizăm că originea axelor de coordonate este situată la jumătatea înălțimii h a stratului încălzit iar axa Oy are sensul verticalei ascendente. Dacă introducem aceleași variabile adimensionale ca și mai înainte (6), obținem în loc de (15) ecuația

$$\lambda \frac{\partial T_f}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 T_f}{\partial \xi^2} + \beta_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial \eta^2}. \tag{16}$$

în care

$$\lambda = \frac{\rho_f C_f k_x}{\rho C k_x^{(f)}}, \qquad \beta_f = \frac{k_y^{(f)}}{k_x^{(f)}}. \tag{17}$$

Datorită grosimii mari a stratului, temperatura inițială nu mai poate fi admisă constantă, ci funcție de variabila η. Prin urmare, condiția inițială este

$$\tau = 0, \qquad T_f = T_f^{(0)}(\eta) \tag{18}$$

şi după cum se ştie, se poate admite că $T_f^{(0)}$ depinde liniar de η; în sistemul de coordonate pe care îl utilizăm, rezultă

$$T_f^{(0)} = a\,h\left(\frac{H}{h} + \frac{1}{2} - \eta\right) + b, \tag{19}$$

a şi b fiind mărimi cunoscute.

În ceea ce priveşte condiţiile la limită, prima dintre acestea are forma

$$\xi = 0, \qquad T_f = T_f^{(i)}(\tau, \eta), \tag{20}$$

$T_f^{(i)}$ fiind temperatura la contactul dintre formaţie şi galeria de injecţie. Această temperatură depinde atît de τ cît şi de η, determinarea legii de variaţie fiind posibilă prin consideraţii asemănătoare cu cele expuse în [10]. Remarcăm totuşi că această condiţie la limită complică sensibil rezolvarea problemei.

De asemenea, stratul impermeabil fiind de lungime infinită, rezultă condiţia

$$\xi = +\infty, \qquad T_f = T_f^{(0)}(\eta). \tag{21}$$

Stratul impermeabil superior venind în contact cu suprafaţa solului, condiţia la limită corespunzătoare este

$$\eta = \frac{H}{h} + \frac{1}{2}, \qquad T_f = T_s, \tag{22}$$

T_s fiind temperatura de la suprafaţă presupusă constantă.

În sfîrşit, pe frontiera cu stratul încălzit trebuie să fie satisfăcute două condiţii, atît de către soluţia ecuaţiei (7) cît şi de către soluţia ecuaţiei (16). Aceste condiţii sînt

$$\eta = +\frac{1}{2}, \qquad T = T_f, \tag{23}$$

respectiv

$$\eta = +\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \delta_f \frac{\partial T_f}{\partial \eta}, \tag{24}$$

cu

$$\delta_f = \frac{k_y^{(f)}}{k_y}. \tag{25}$$

În ceea ce privește stratul impermeabil care mărginește la partea inferioară stratul supus procesului de încălzire, acesta poate fi considerat, teoretic, de grosime infinită. În această situație soluția ecuației (7) satisface condiția la limită

$$\eta = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \eta} = \nu (T - T_e), \tag{26}$$

în care

$$\nu = \frac{\alpha h}{k_y}, \tag{27}$$

α fiind coeficientul de transmisie a căldurii. La stabilirea acestei condiții am presupus că stratul impermeabil are, în vecinătatea frontierei, temperatura constantă T_e. Un alt mod de a considera problema transmisiei căldurii în acest strat se lovește de dificultăți destul de mari.

Este cazul să amintim aci că în stratul supus încălzirii problema poate fi astfel considerată încît să se obțină o precizie mai bună, cel puțin în sensul apropierii de realitatea fizică. Într-adévăr, coeficientul ρC din ecuația (1), care are expresia (3), a fost presupus constant în tot domeniul în care se produce scurgerea. Însă, chiar dacă se admite că dezlocuirea este integrală, există două zone în care acest coeficient are valori diferite și anume aceea invadată de apa caldă, respectiv aceea în care acest lichid nu a pătruns încă. Frontiera dintre aceste zone este mobilă, avînd ecuația

$$x_1 = \frac{\int_0^t q \, dt}{m h} \tag{28}$$

sau, după ce trecem la variabilele adimensionale (6),

$$\xi_1 = \frac{\rho C}{m k_x} \int_0^\tau q \, d\tau, \tag{29}$$

ambele expresii fiind scrise în ipoteza că debitul de injecție variază în timp. Simplificarea corespunzătoare pentru cazul în care q este constant, rezultă imediat.

Pentru ξ cuprins între 0 și ξ_1 rămîne deci valabilă ecuația (7) în timp ce pentru $\xi > \xi_1$ trebuie scrisă o altă ecuație deoarece coeficientul ρC nu mai are aceeași valoare. De fapt, pentru $\xi < \xi_1$, avem, în loc de (3)

$$\rho C = m s_p^{(r)} \rho_p C_p + m (1 - s_p^{(r)}) \rho_a C_a + (1 - m) \rho_r C_r, \tag{30}$$

$s_p^{(r)}$ fiind saturația reziduală în petrol și $1 - s_p^{(r)}$ aceea corespunzătoare în apă, iar pentru $\xi > \xi_1$ trebuie să scriem

$$\rho_1 C_1 = m (1 - s_a^{(i)}) \rho_p C_p + m s_a^{(i)} \rho_a C_a + (1 - m) \rho_r C_r, \tag{31}$$

$s_a^{(i)}$ fiind saturația în apă interstițială și $1 - s_a^{(i)}$ aceea în petrol care îi corespunde.

Pentru $\xi < \xi_1$ rămîne valabilă ecuația (1), respectiv (7),cu observația că pentru ρC trebuie introdusă expresia (30); dacă $\xi > \xi_1$, ecuația are forma

$$\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} + w \rho_p C_p \frac{\partial T_1}{\partial x} = k_x \frac{\partial^2 T_1}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 T_1}{\partial y^2}, \tag{32}$$

T_1 fiind temperatura în această zonă; precizăm că, deoarece lichidele sînt presupuse incompresibile, viteza w are aceeași valoare în ambele zone.

După introducerea variabilelor adimensionale (6), găsim în loc de (32) ecuația

$$\lambda_1 \frac{\partial T_1}{\partial \tau} + \alpha_1 \frac{\partial T_1}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \xi^2} + \beta \frac{\partial^2 T_1}{\partial \eta^2}, \tag{33}$$

în care

$$\lambda_1 = \frac{\rho_1 C_1}{\rho C}, \qquad \alpha_1 = \frac{\rho_p C_p q}{k_x}, \tag{34}$$

iar β are aceeași expresie ca mai înainte și anume (8).

Soluția ecuației (33) satisface tot condiția inițială (12) iar condiția (14) se transpune de asemenea pentru ea, ne mai fiind valabilă pentru soluția ecuației (7).

Apar în schimb două condiții la limită pe frontiera ξ_1, care sînt cele clasice și anume continuitatea temperaturii, respectiv a fluxului termic, care se scriu

$$\xi = \xi_1, \qquad T = T_1, \tag{35}$$

respectiv

$$\xi = \xi_1, \qquad \frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial T_1}{\partial \xi}. \tag{36}$$

Condiția (36) are această formă simplificată deoarece am admis, în ambele zone, aceeași valoare a conductivității termice k_x. A.A. Abbasov [2], care a considerat această variantă a problemei, a presupus că există o discontinuitate a conductivității termice la traversarea frontierei ξ_1. Acest mod de a vedea lucrurile este de altfel mai corect, deoarece în k_x și k_y trebuie inclusă și conductivitatea termică a lichidului care saturează zona respectivă.

Condițiile la limită pe care trebuie să le satisfacă soluția ecuației (33) pe frontierele cu stratele impermeabile rămîn astfel cum le-am precizat pentru soluția ecuației (7) și prin urmare nu mai considerăm necesar să le transcriem aci. În ceea ce privește stratele impermeabile, formularea problemei nu se schimbă cu nimic față de aceea dată mai sus.

Desigur că existența unei frontiere mobile complică sensibil problema în stratul supus procesului de încălzire și se repercutează și asupra situației din stratele impermeabile învecinate. Din acest motiv, rezolvarea problemei devine foarte dificilă; de altfel, soluția pe care o cunoaștem [1] este dată într-un caz extrem de simplificat și anume în ipoteza că stratul supus procesului de încălzire are o grosime nelimitată. Scopul urmărit de autorii lucrării citate a fost acela de a compara soluția problemei astfel simplificate, obținută cu ajutorul ecuației (7) în care nu se ține seama de proprietățile fizice diferite ale lichidelor din cele două zone, cu soluția aceleiași probleme rezultată din rezolvarea ecuațiilor (7) și (33). Ca structură, soluțiile acestea sînt destul de diferite, dar în [1] nu sînt date calcule numerice care să pună în evidență mai bine deosebirile cantitative. Observăm însă că prin această simplificare se pierde un aspect esențial din punct de vedere practic al problemei și anume pierderile de căldură în stratele impermeabile adiacente.

Pentru a se putea rezolva problema cu mai multă ușurință însă fără neglijarea aspectului pe care tocmai l-am semnalat, se poate face simplificarea ce constă în a admite că stratul impermeabil superior este de asemenea de grosime infinită. Dacă ținem seama de faptul că grosimea acestui strat este foarte mare în comparație cu aceea a stratului supus procesului de încălzire, aproximația astfel introdusă pare a nu avea o importanță deosebită.

4. **Considerații generale asupra scurgerii plan-radiale.** Trecînd acum la ecuația (10), observăm că în bună parte considerațiile precedente își păstrează valabilitatea. Astfel, condiția inițială (12) trebuie să fie satisfăcută și de soluția acestei ecuații. În ceea ce privește condițiile la limită, în loc de (13) obținem

$$\bar{r} = \bar{r}_s, \qquad T = T_i \tag{37}$$

$\bar{r}_s$ fiind raza adimensională a sondei de injecție; avem, de asemenea,

$$\bar{r} = \infty, \qquad T = T_0, \tag{38}$$

temperaturile T_i și T_0 avînd aceleași semnificații ca și mai înainte.

În stabilirea condițiilor pe care soluția trebuie să le îndeplinească pe frontierele cu stratele impermeabile, calea de urmat este foarte asemănătoare cu aceea prezentată mai înainte. Astfel, în stratul impermeabil superior trebuie rezolvată ecuația

$$\rho_f C_f \frac{\partial T_f}{\partial t} = k_r^{(f)} \left(\frac{\partial^2 T_f}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_f}{\partial r} \right) + k_z^{(f)} \frac{\partial^2 T_f}{\partial z^2}, \tag{39}$$

în care diverșii coeficienți au semnificațiile precizate mai înainte cu deosebirea că, în ceea ce privește conductivitățile termice, se consideră direcția radială și aceea verticală. Precizăm și aici că origina axelor de coordonate este aleasă la fel ca în cazul precedent examinat, iar axa Oz are sensul verticalei ascendente.

După introducerea variabilelor adimensionale (9), ecuația (39) devine

$$l\frac{\partial T_f}{\partial t} = \frac{\partial^2 T_f}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial T_f}{\partial \bar{r}} + b_f \frac{\partial^2 T_f}{\partial \bar{z}^2}, \tag{40}$$

cu

$$l = \frac{\rho_f C_f k_r}{\rho C k_r^{(f)}}, \qquad b_f = \frac{k_z^{(f)}}{k_r^{(f)}}. \tag{41}$$

Pentru a se obține soluția corespunzătoare a acestei ecuații trebuie luată în considerație condiția inițială

$$\bar{t} = 0, \qquad T_f = T_f^{(0)}(\bar{z}), \tag{42}$$

în care are tot expresia (19), cu observația că variabila η se înlocuiește cu $\bar{z}$.

O condiție la limită, similară cu (20) este

$$\bar{r} = \bar{r}_s, \qquad T_f = T_f^{(i)}(\bar{t}, \bar{z}), \tag{43}$$

în care $T_f^{(i)}$ este temperatura la contactul dintre formație și sonda de injecție. Pentru aceasta se poate utiliza expresia dedusă în [10] și anume

$$T_f^{(i)} = ah\left(\frac{H}{h} + \frac{1}{2} - \bar{z}\right) - a\,A(\bar{t}) + b + \\ + [T_{ac} + a\,A(\bar{t}) - b]\,\mathrm{e}^{-\frac{h\left(\frac{H}{h} + \frac{1}{2} - \bar{z}\right)}{A(\bar{t})}}, \tag{44}$$

T_{ac} fiind temperatura de injecție a apei calde la suprafață, iar $A(\bar{t})$ având expresia dată în [10]. Precizăm că expresia lui $T_f^{(i)}$ a fost transcrisă în sistemul de coordonate pe care îl utilizăm.

Presupunerea că stratul impermeabil este infinit în plan ne conduce la condiția

$$\bar{r} = \infty, \qquad T_f = T_f^{(0)}(\bar{z}), \tag{45}$$

iar la suprafața solului avem

$$\bar{z} = \frac{H}{h} + \frac{1}{2}, \qquad T_f = T_s, \tag{46}$$

T_s având semnificația cunoscută din (22).

Pe frontiera cu stratul încălzit, trebuie satisfăcute condițiile

$$\bar{z} = +\frac{1}{2}, \qquad T = T_f, \tag{47}$$

respectiv

$$\bar{z} = +\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = d_f \frac{\partial T_f}{\partial \bar{z}}, \tag{48}$$

în care

$$d_f = \frac{k_z^{(f)}}{k_z}. \tag{49}$$

Ca și mai înainte, aceste condiții racordează soluțiile ecuațiilor (10) și (40).

Trecînd acum la stratul impermeabil inferior, considerat ca și în cazul precedent de grosime infinită, vom presupune, de asemenea, că pe frontiera cu stratul încălzit este satisfăcută o condiție de forma

$$\bar{z} = -\frac{1}{2}, \qquad \frac{\partial T}{\partial \bar{z}} = n\,(T - T_e), \tag{50}$$

în care

$$n = \frac{\alpha h}{k_z}, \tag{51}$$

temperatura T_e fiind dată. Și aci s-ar putea încerca o mai bună apropiere de aspectul fizic real dar acest lucru ar conduce la complicații destul de mari. Și așa problema nu este deosebit de simplă, dar dacă presupunem că stratul impermeabil superior este de grosime infinită putem ajunge la o formulare care să conducă la mai puține complicații de calcul. Ni se pare însă util să precizăm că, pentru ca această simplificare să fie efectivă, trebuie să se renunțe și la alte condiții puse anterior. Ne gîndim în special la variația temperaturii pe adîncimea sondei care nu mai poate fi luată în considerație în acest caz. Observația este de altfel valabilă și pentru scurgerea liniară.

Încercarea de a se ține seamă de proprietățile diferite ale lichidelor în zona invadată de apa caldă și în aceea care nu a fost încă supusă acestui proces, a fost făcută tot de autorii lucrării citate [1], în aceleași condiții de simplificare extremă a problemei. Calculul numeric efectuat în acest caz nu pune însă, în general, în evidență deosebiri prea mari. Ar părea deci mai interesant să se renunțe la această ameliorare și în schimb să se țină seama de pierderile de căldură în stratele adiacente.

De data aceasta, ecuația frontierei care separă cele două lichide este, dacă facem abstracție de raza sondei și de saturația reziduală în petrol,

$$r_1 = \sqrt{\frac{\int_0^t Q\,\mathrm{d}t}{m\,\pi h}}, \tag{52}$$

debitul de injecție Q fiind variabil în timp; pentru Q constant, simplificarea apare imediat. Cu variabilele adimensionale (9), găsim

$$\bar{r}_1 = \sqrt{\frac{\rho C}{m\pi h k_r} \int_0^{\bar{t}} Q \mathrm{d}\bar{t}}\,, \tag{53}$$

dar credem util să precizăm că această formulă, ca și (29) are un caracter aproximativ, deplasarea suprafeței de contact dintre două lichide într-un mediu poros putîndu-se studia, chiar în cazul dezlocuirii integrale, prin metode mai exacte.

Ecuația (10) se referă deci la zona pentru care $\bar{r}_s < \bar{r} < r_1$, cu expresia lui $\rho\, C$ dată de formula (30), iar pentru $\bar{r} > \bar{r}_1$, avem

$$\rho_1 C_1 \frac{\partial T_1}{\partial t} + w_r \rho_p C_p \frac{\partial T_1}{\partial r} = k_r \left(\frac{\partial^2 T_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T_1}{\partial r} \right) + k_z \frac{\partial^2 T_1}{\partial z^2} \tag{54}$$

cu $\rho_1 C_1$ dat de (31).

Cu variabilele adimensionale (9), obținem

$$l_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{t}} + a_1 \frac{\partial T_1}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2 T_1}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T_1}{\partial \bar{r}} + b \frac{\partial^2 T_1}{\partial \bar{z}^2}\,, \tag{55}$$

unde

$$l_1 = \frac{\rho_1 C_1}{\rho C}\,, \qquad a_1(\bar{r}) = \frac{\rho_p C_p Q}{2\pi h k_r \bar{r}}\,, \tag{56}$$

iar b are expresia (11).

Condiția inițială rămîne tot (12), iar condiția la limită (38) devine acum valabilă pentru ecuația (55). Mai găsim de asemenea condițiile

$$\bar{r} = \bar{r}_1\,, \qquad T = T_1 \tag{57}$$

și

$$\bar{r} = \bar{r}_1\,, \qquad \frac{\partial T}{\partial r} = \frac{\partial T_1}{\partial \bar{r}}\,, \tag{58}$$

ultima dintre acestea fiind scrisă în ipoteza continuității lui k_r.

Evident, la acestea se adaugă condițiile pe frontierele cu stratele impermeabile adiacente. Problema devine astfel destul de complicată și susceptibilă de o rezolvare mai ușoară numai în cazul în care se face uz de anumite simplificări.

Primită la redacție la 11 noiembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. M. T. Abasov, A. A. Abbasov, *O raspredelenii temperaturî v plaste pri vitesnenii nefti goriacei jidkostiu*, Izvestiia Akademii Nauk Azerbaidjanskoi SSR, Seria gheologhiceskih-gheograficeskih nauk i nefti, *3* (1964).
2. A. A. Abbasov, *Ghidrodinamiceskie i eksperimentalnîie issledovaniia voprosov, sviazannîh s primeneniem termiceskogo metoda vozdeistviia*, Izdatelstvo Akademii Nauk Azerbaidjanskoi SSR, Baku, 1966.
3. N. A. Avdonin, *O nekotorîh formulah dlia rascета temperaturnogo polia plasta pri teplovoi injekții*, Izvestiia vîsșih ucebnih zavedenii. Nefti i gaz, **7**, *3* (1964).
4. P. J. Closmann *Steam Zone Growth During Multiple-Layer Steam Injection*, Transactions AIME, **240** (1967).
5. L. B. Davidson, F. G. Miller, T. D. Mueller, *A Mathematical Model of Reservoir Response During the Cyclic Injection of Steam*, Transactions AIME, **240** (1967).
6. F. J. Fayers, *Some theoretical results concerning the displacement of a viscous oil by a hot fluid in a porous medium*, Journal of Fluid Mechanics, **13**, *1* (1962).
7. H. A. Lauwerier, *The transport of heat in an oil layer by the injection of hot fluid*, Applied Scientific Research, A, **V**, 2, 3 (1955).
8. G. E. Malofeev, *K rascetu raspredeleniia temperaturî v plaste pri zakacike goriacei jidkosti v skvajinu*, Izvestiia vîsșih ucebnih zavedenii. Nefti i gaz, **3**, *7* (1960).
9. John C. Martin, *A Theoretical Analysis of Steam Stimulation*, Transactions AIME, **240** (1967).
10. H. J. Ramey, Jr., *Wellbore Heat Transmission*, Transactions AIME, **225** (1962).
11. W. H. Somerton, *Some Thermal Characteristics of Porous Rocks*, Transactions AIME, **213** (1958).
12. W. H. Somerton, M. A. Selim, *Additional Thermal Data for Porous Rocks-Thermal Expansion and Heat of Reaction*, SPE Journal, **1**, 4 (1961).

MIȘCAREA BIFAZICĂ NECAPILARĂ ÎN MEDII POROASE NEOMOGENE

de VASILE IONESCU și CIPRIAN COZMA
Centrul de cercetări hidraulice București

Dezlocuirea cu saturație variabilă în medii poroase neomogene în ipoteza mișcării plane, necapilare și negravitaționale este studiată în lucrare cu metoda utilizată la mediile omogene, în cazul unei singure sonde de injecție. Se demonstrează că neomogenitatea mediului influențează apariția și evoluția saltului de saturație, dar nu o poate elimina complet atunci cînd mișcarea are loc în tot planul complex, fără obstacole impermeabile. Pe linia de șoc apărută în timpul mișcării se pun condițiile și se formulează problema la limită care se rezolvă în cazul particular considerat.

Cu toate că dezlocuirea cu saturație variabilă în medii poroase neomogene prezintă mai mare interes practic decît dezlocuirea în medii omogene prin faptul că modelul matematic descrie mai fidel fenomenul real, problema a fost studiată mai ales în cazuri geometrice simplificate sau în ipoteze mecanice restrictive. În afară de lucrarea de sinteză [1] în care se formulează problemele matematice generale ale mișcărilor bifazice în medii poroase, foarte mulți autori au abordat problema dezlocuirii unidimensionale în medii neomogene (liniară sau radială) [2] sau a dezlocuirii bidimensionale în medii cu neomogenități particulare (de tip eliptic) [3] ori au fost propuse metode matematice pentru cazul cînd neomogenitatea mediului are variabilele separate [4]. Demne de remarcat sînt de asemenea generalizările rezultatelor lui Efros [5] privitoare la dezlocuirea în tuburi de curent cu secțiune variabilă în medii omogene și la cazul dezlocuirii în tuburi de medii neomogene, ținîndu-se seama și de efectul gravitației [6], [7].

Metodele folosite în studiul dezlocuirii în medii omogene pot fi aplicate și la mișcarea în medii neomogene, întrucît ecuațiile fundamentale ale celor două tipuri de mișcări au același caracter. Acești parametri au importanță deosebită asupra evoluției mișcării, lucru care va fi subliniat la momentul potrivit. Remarcăm de la început că impunem permeabilității variabile numai condiția de a fi pozitivă și de clasă C^1 în tot planul. Această restricție ni se pare firească și mult mai lejeră decît cele ce se impun permeabilității în mod obișnuit în literatură. Ea a fost adoptată și în [8],

unde a fost dată soluţia generală a mişcării unui fluid monofazic într-un mediu poros neomogen în prezenţa unui sistem arbitrar de sonde. În rest vom adopta aceleaşi ipoteze de mişcare ca şi în [9], lucrarea de faţă reprezentînd o extensiune firească a ei.

1. **Ipoteze fizice. Formule fundamentale.** Studiem, ca şi în [9], dezlocuirea plană, necapilară şi negravitaţională a două fluide nemiscibile într-un mediu neomogen în care se cunoaşte porozitatea $m(x, y)$ şi permeabilitatea $k(x, y)$. Impunem funcţiei $m(x, y)$ numai condiţia de a fi continuă în tot planul. Necesitatea acestei condiţii va rezulta din cele ce urmează. Ecuaţiile fundamentale ale mişcării sînt

$$\vec{V}_a = -k(x, y)\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\nabla p(x, y); \qquad \vec{V}_t = -k(x, y)\frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\nabla p(x, y), \tag{1}$$

$$\vec{V} = \vec{V}_a + \vec{V}_t; \quad \nabla\vec{V} = 0, \tag{2}$$

$$m(x, y)\frac{\partial S}{\partial t} + \nabla\vec{V}_a = 0. \tag{3}$$

Indicii ataşaţi mărimilor din expresiile de mai sus disting cele două faze fluide (a — apă; t — ţiţei). Relaţiile (1) sînt ecuaţiile lui Darcy pentru cele două faze, iar ultimele două sînt ecuaţiile de continuitate pentru ansamblul celor două fluide şi respectiv, pentru faza de apă. Funcţia $S(x, y, t)$ este saturaţia în apă, iar $p(x, y, t)$ presiunea în mediul fluid.

Din sistemul precedent de cinci ecuaţii cu cinci necunoscute (trei vectoriale, $\vec{V}_a$, $\vec{V}_t$, $\vec{V}$, şi două scalare, S şi p, vom elimina necunoscutele vectoriale, rămînînd un sistem în S şi p. Adunăm pentru aceasta relaţiile (1) şi ţinem seama de ambele relaţii (2). Obţinem

$$\Delta p + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\ln\left[\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right]\nabla S\ \nabla p + \nabla p\,\nabla \ln k(xy) = 0. \tag{4}$$

Dacă introducem (1) în (3) şi ţinem seama de (4), deducem

$$\frac{m(x, y)}{k(x, y)}\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{k_{ra}}{\mu_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\ln\frac{\dfrac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \dfrac{k_{rt}(S)}{\mu_t}}{k_{ra}(S)}\nabla S\cdot\nabla p = 0. \tag{5}$$

Introducînd notaţiile

$$\alpha(s) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\ln\left[\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right],$$

$$\beta(S) = \frac{k(x, y)}{m(x, y)}\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}S}\ln\frac{\dfrac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \dfrac{k_{rt}(S)}{\mu_t}}{k_{ra}(S)},$$

$$\alpha_1(x, y) = \ln k(x, y),$$

sistemul de ecuații (4) — (5) poate fi scris sub forma

$$\Delta p(x, y, t) + \alpha(S)\, \nabla p(x, y, t)\, \nabla S(x, y, t) + \nabla \alpha_1(x, y)\, \nabla p(x, y, t) = 0,$$

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta(S)\, \nabla S(x, y, t)\, \nabla p(x, y, t) = 0. \qquad (6)$$

Deoarce $k(x, y)$ a fost presupusă pozitivă în plan și continuă, $\alpha_1(x, y)$ va fi de asemenea continuă. Se vede din expresiile lor că și funcțiile $\alpha(S)$ și $\beta(S)$ sînt continue de S și de variabilele independente x și y.

Sistemul (6), fundamental pentru dezlocuirea în mediile neomogene, este de același tip cu sistemul (6), obținut în lucrarea [9] pentru dezlocuirea în mediile omogene. În ceea ce privește prima ecuație, diferența constă în faptul că ea conține în plus termenul liniar $\nabla \alpha_1$, ∇p care aduce efectul permeabilității monofazice variabile în fenomenul de dezlocuire, iar în ceea ce privește cea de-a doua ecuație diferența constă în faptul că $\beta(S)$ conține atît permeabilitatea, cît si porozitatea, variabile în plan. Nici una, nici alta nu modifică tipul sistemului fundamental. Acesta este și motivul pentru care se pot aplica aceleași metode matematice pentru studiul celor două fenomene.

Sistemul (6), fiind neliniar, nu poate fi integrat exact, ci propunem un procedeu iterativ pentru rezolvarea lui, similar cu cel utilizat în cazul mediului omogen. În ceea ce privește condițiile inițiale și la limită, păstrăm aceleași restricții ca și în [9]: presupunem că dezlocuirea are loc datorită unei sonde de injecție plasate în origine cu debit cunoscut, iar sonda de extracție este la infinit. În tot planul complex nu există frontiere impermeabile. La momentul inițial presupunem cunoscută saturația $S_0(x, y) = S(x, y, 0)$, continuă și cu derivate parțiale continue în tot planul. Am impus această restricție numai pentru a degaja studiul problemei de elemente auxiliare care ar putea distrage atenția de la ceea ce este specific fenomenului. Ne propunem să luăm în considerație într-o altă lucrare elementele excluse acum.

2. **Metoda aproximativă de integrare.** Introducem saturația inițială $S_0(x, y)$ în prima ecuație a sistemului (6). Aceasta devine

$$\Delta p(x, y) + \{\alpha[S_0(x, y)]\, \nabla S_0(x, y) + \nabla \alpha_1(x, y)\}\, \nabla p(x, y) = 0. \qquad (7)$$

Dacă facem notația

$$f(x, y) = \int_0^{S_0(x, y)} \alpha(S_0)\, dS_0,$$

ecuația (7) devine

$$\Delta p(x, y) + [\nabla f(x, y) + \nabla \alpha_1(x, y)]\, \nabla p(x, y) = 0. \qquad (7')$$

de aceeași formă cu ecuația corespunzătoare din cazul dezlocuirii în mediul omogen, de tip eliptic în $p(x, y)$. În cazul mediului neomogen se adaugă termenul $\nabla \alpha_1(x, y)$ legat de permeabilitatea $k(x, y)$ prin relația introdusă

în punctul precedent. Cum o ecuație de forma (7′) se întîlnește și în mișcarea fluidelor monofazice în medii neomogene, rezultă că pentru determinarea presiunii în prima aproximație este necesară cunoașterea unei mișcări într-un mediu neomogen în care neomogenitatea e determinată de saturația variabilă, ca și la mediul omogen, la care se adaugă neomogenitatea monofazică propiu-zisă. Făcînd în (7′) o nouă substituție,

$$F(x, y) = f(x, y) + \alpha_1(x, y),$$

aceasta devine

$$\Delta p(x, y) + \nabla F(x, y)\, \nabla p(x, y) = 0, \qquad (7'')$$

identică ca formă cu ecuația (7) din [9], care trebuia integrată pentru determinarea presiunii corespunzătoare saturației inițiale $S_0(x, y)$ în procedeul iterativ propus.

Întrucît problema integrării ecuației (7″) este bine studiată [10] [12], iar noi ne-am ocupat de ea în repetate rînduri [8], [9], nu ne oprim asupra acestei chestiuni. Presupunem că am găsit, așadar, presiunea $p_0(x, y)$ corespunzătoare saturației inițiale care satisface condițiile la limită impuse de noi. Funcția $p_0(x, y)$ o introducem în cea de-a doua ecuație a sistemului (6), care devine

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta\, [S(x, y, t)]\, \nabla p_0(x, y)\, \nabla S(x, y, t) = 0. \qquad (8)$$

Această ecuație cvasiliniară în $S(x, y, t)$ poate fi integrată prin metodele cunoscute, cu condiția inițială $S(x, y, 0) = S_0(x, y)$. Soluția $S(x, y, t)$ obținută o considerăm valabilă pînă la un moment t_1, arbitrar ales, cît mai apropiat de momentul inițial. Se obține astfel distribuția de saturații la momentul t_1, $S_1(x, y) = S(x, y, t_1)$. Foarte utilă pentru interpretarea fizică a fenomenului este considerarea liniilor de curent ale mișcării în diferitele aproximații, la care vom face apel în cele ce urmează.

Din expresia funcției $p_0(x,y)$ se poate deduce familia liniilor de curent cu ajutorul relațiilor (1) și (2), pe care urmează să se facă dezlocuirea în prima aproximație. Ecuația (8) poate fi transcrisă pentru fiecare tub de curent de dimensiuni arbitrar de mici, a cărui secțiune este cunoscută. Pe baza rezultatelor lui Efros [5], generalizate la cazul dezlocuirii în mediul neomogen de Cen Cijan-sian [7], se poate obține pentru fiecare tub de curent o ecuație similară cu (8), la care să satisfacă saturația. În noua ecuație, ea va depinde numai de o singură coordonată spațială σ, abscisa curbilinie a liniei mediane a tubului și de timp. Acest lucru poate fi făcut în orice aproximație a soluției.

Cunoscînd distribuția de saturație la momentul t_1, se poate determina variația presiunii la momentul t_1, așa cum $p_0(x,y)$ a fost determinat cu ajutorul funcției $S_0(x,y)$. Pentru aceasta avem de integrat ecuația

$$\Delta p(x, y) + \alpha\, [S_1(x, y)]\, \nabla S_1(x, y)\, \nabla p(x, y) + \nabla \alpha_1(x, y)\, \nabla p(x, y) = 0, \qquad (9)$$

obținută din înlocuirea în prima ecuație a sistemului (6) a funcției $S(x,y,t)$ cu $S_1(x,y)$. Condițiile la limită sînt aceleași ca și în prima aproximație. Făcînd în (9) substituția

$$F_1(x, y) = \int_0^{S_1(x, y)} \alpha(S_1)\, dS_1 + \alpha_1(x, y),$$

se obține pentru $p(x, y)$ ecuația

$$\Delta p(x, y) + \nabla F_1(x, y)\, \nabla p(x, y) = 0, \tag{9'}$$

similară cu (7''). Integrarea ei ne dă expresia $p_1(x, y)$ a presiunii corespunzătoare saturației $S_1(x, y)$. Înlocuind această funcție în cea de-a doua ecuație a sistemului (6), obținem pentru determinarea saturației în a doua aproximație ecuația

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta\,[S(x, y, t)]\, \nabla p_1(x, y)\, \nabla S(x, y, t) = 0. \tag{10}$$

Integrarea acestei ecuații ne dă saturația la momentul t_2, $S_2(x, y) = S(x,y,t_2)$, unde am considerat drept condiție inițială distribuția de saturație la momentul t_1.

Procedeul poate fi continuat și, din moment în moment, pot fi determinate saturația și presiunea corespunzătoare. Astfel, pentru determinarea saturației la momentul t_j avem de integrat ecuația

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \beta\,[S(x, y, t)]\, \nabla p_{j-1}(x, y) \cdot \nabla S(x, y, t) = 0, \tag{11}$$

iar pentru determinarea presiunii la același moment ecuația

$$\Delta p(x, y) + \nabla F_j(x, y)\, \nabla p(x, y) = 0, \tag{12}$$

unde

$$F_j(x, y) = \int_0^{S_j(x, y)} \alpha(S_j)\, dS_j + \alpha_1(x, y)$$

în aceleași condiții la limită ca și pentru ecuația (7'').

Ca și în cazul mediului omogen, acest procedeu nu mai poate fi continuat din momentul apariției saltului de saturație. Prezența lui schimbă formularea matematică a problemei. Întrucît în cazul mediului neomogen apariția saltului pune probleme speciale, îi vom consacra punctul următor în întregime.

3. **Saltul de saturație în mediul neomogen.** Prin faptul că neomogenitatea mediului influențează asupra mișcării, așa cum rezultă din cele

de mai sus, se poate pune în mod firesc întrebarea dacă nu poate exista o clasă de medii neomogene care să împiedice apariţia lui în cazul absenţei frontierelor impermeabile pe care îl considerăm. Vom arăta că neomogenitatea mediului poate grăbi sau întîrzia apariţia saltului, îi poate schimba aspectul şi locul de apariţie, dar nu-l poate elimina cu desăvîrşire.

Vom arăta acest lucru întîi pentru dezlocuirea unidimensională liniară, urmînd un alt raţionament decît cel utilizat în [2]. În acest caz, ecuaţiile (1), (2) şi (3) devin, respectiv,

$$V_a = -k(x)\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\frac{\partial p}{\partial x}; \quad V_t = -k(x)\frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\frac{\partial p}{\partial x}, \tag{1'}$$

$$V = V_a + V_t; \quad \frac{\partial V}{\partial x} = 0, \tag{2'}$$

$$m(x)\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial V_a}{\partial x} = 0. \tag{3'}$$

Ca şi în cazul mediului omogen, se poate deduce o singură ecuaţie pentru $S(x,t)$. Ţinînd seama de prima ecuaţie (2'), obţinem

$$V = -k(x)\left[\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right]\frac{\partial p}{\partial x}.$$

Din (1') deducem

$$V_a = V\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\left[\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right]^{-1}.$$

Dacă introducem expresia precedentă a lui V_a în (3') şi facem ipoteza că V este constant, obţinem ecuaţia căutată

$$m(x)\frac{\partial S}{\partial t} + f'(S)\frac{\partial S}{\partial x} = 0, \tag{13}$$

similară cu ecuaţia la care satisface $S(x, t)$ în cazul dezlocuirii în mediul omogen. Aici apare în plus porozitatea variabilă $m(x)$. În (13) am făcut notaţia

$$f(S) = V\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a}\left[\frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t}\right]^{-1}.$$

Sistemul caracteristic ataşat ecuaţiei (13) este

$$m(x)\,dx = f'(S)\,dt; \quad dS = 0,$$

iar soluţia lui în condiţia iniţială $x(0, S) = x_0(S)$ se scrie

$$S = \text{const}; \quad M(x) = f'(S)\, t + M\,[x_0(S)], \tag{14}$$

unde am notat

$$M(x) = \int_0^x m(x)\, \mathrm{d}x. \tag{15}$$

La diferite momente, relaţia (14) ne dă distribuţia de saturaţie în funcţie de distanţă.

Să căutăm condiţia ca să nu apară tripla valoare pe curba $x = x(S)$ la orice moment t_j. Pentru a nu avea situaţia din figura 2 la momentul t_j, ci una similară cu cea de la momentul $t = 0$, este suficient să avem la orice t_j

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} < 0.$$

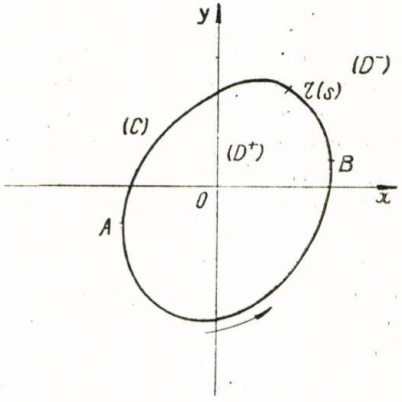


Fig. 1

Derivînd relaţia (14) în raport cu S, avem

$$M'(x)\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} = f''(S)\, t + M'(x_0)\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}S},$$

de unde deducem

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}S} = \frac{f''(S)\, t + M'(x_0)\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}S}}{M'(x)} < 0$$

sau încă, ţinînd seama de (15),

$$\frac{f''(S)\, t + m(x_0)\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}S}}{m(x)} < 0.$$

Deoarece porozitatea $m(x)$ este o funcţie strict pozitivă, găsim

$$f''(S)\,t + m(x_0)\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}S} < 0.$$

Dacă ţinem seama că

$$\frac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}S} < 0$$

în tot domeniul de variaţie a lui S, ceea ce este normal să presupunem, relaţia precedentă se scrie

$$-\,m(x_0) < \frac{f''(S)\,t}{\dfrac{\mathrm{d}x_0}{\mathrm{d}S}},$$

de unde se vede că ea nu poate fi satisfăcută pentru orice t : pentru valori mari ale lui t şi valori ale lui S aşa încît $f''(S) > 0$, membrul stîng este negativ, foarte mare în valoare absolută, şi deci inegalitatea nu poate subzista. Tripla valoare, aşadar, nu poate să nu apară.

Dacă însă dezlocuirea are loc pe un domeniu limitat al axei reale, tripla valoare poate să nu apară, căci timpul nu poate varia în acest caz pînă la infinit. Acest lucru însă este adevărat şi în cazul dezlocuirii în mediul omogen ; el nu este specific mediului neomogen. Ceea ce poate influenţa neomogenitatea mediului este, aşadar, momentul apariţiei triplei valori, punctul de apariţie şi evoluţia ei, odată apărută. Cu aceasta propoziţia este demonstrată.

Pentru cazul dezlocuirii radiale (mediu cu neomogenitate radială şi saturaţie iniţială radială), ea rămîne valabilă şi demonstraţia se face în acelaşi mod. În acest caz, mişcarea este influenţată, pe lîngă permeabilitatea şi porozitatea variabilă, şi de distanţa la sondă care intervine în coeficienţii ecuaţiei de dezlocuire. Această concluzie poate fi extinsă şi la cazul dezlocuirii bidimensionale în medii neomogene pe baza generalizărilor din [7], în care se arată că studiul dezlocuirii într-un tub de curent de secţiune variabilă cunoscută, trasat într-un mediu neomogen, poate fi redus la o dezlocuire unidimensională pe linia de curent mediană a tubului. Ecuaţia la care satisface saturaţia este similară cu cea din cazul liniar şi radial. Pe această ecuaţie se poate arăta că nici în cazul bidimensional apariţia saltului nu poate fi înlăturată de neomogenitatea mediului. Nu ne oprim asupra acestei demonstraţii, deoarece ea nu prezintă dificultăţi specifice. Deducem, în concluzie, că problema saltului de saturaţie se pune şi în cazul mediului neomogen. În punctul următor ne vom ocupa de condiţiile la limită pe această linie.

4. **Condiţiile la limită pe linia de şoc.** În [8] şi [13] am arătat că din momentul apariţiei liniei de şoc (fig. 1) coeficienţii ecuaţiei (12), care trebuie integrată conform procedeului de aproximare succesivă, devin

discontinue pe C, cu discontinuități de prima speță. Pe C urmează să punem condițiile la limită necesare pentru integrarea ecuației. În lucrările citate am arătat că se pot pune două astfel de condiții, fiecare conducînd la probleme la limită corespunzătoare, cu avantajele și dezavantajele discutate în studiul dezlocuirii în medii omogene. În cazul mediului neo-

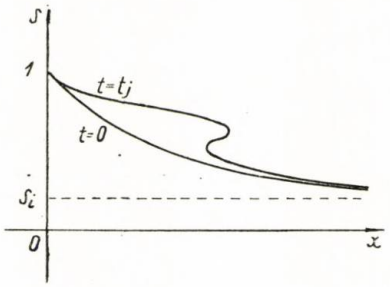


Fig. 2

mogen, lucrurile se repetă în așa fel, încît studiul poate fi urmărit în paralel.

În cazul condiției de egalitate a presiunilor și a debitelor :

$$p^+(S) = p^-(S); \quad V_n^+(S) = V_n^-(S), \tag{16}$$

unde indicii $(\ )^+$ și $(\ )^-$ se referă la D^+, respectiv D^-, (fig. 1), putem exprima relația pe C în elementele mișcării, explicitînd cea de-a doua condiție :

$$\left\{\frac{k_{ra}[S^+(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{ri}[S^+(s)]}{\mu_i}\right\}\frac{\partial p^+}{\partial n} = \left\{\frac{k_{ra}[S^-(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{ri}[S^-(s)]}{\mu_i}\right\}\frac{\partial p^-}{\partial n}. \tag{17}$$

Această ultimă condiție, împreună cu prima condiție (16), sînt suficiente pentru integrarea ecuației (12), așa cum vom arăta în punctul următor. Admițînd că am găsit soluția acestei ecuații la momentul t_j, $p(x,y)$ (suprimăm indicii pentru simplificarea notației), care satisface pe C condiția (16), apar unele dificultăți în legătură cu determinarea saturației la momentul t_{j+1}, similare cu cele din cazul mediului omogen [9], prin integrarea ecuației (11). Întrucît ne-am ocupat în detaliu de această problemă, acum nu vom face altceva decît să semnalăm prezența ei și în cazul dezlocuirii în mediul neomogen. Deoarece componentele vectorului $\nabla p\,(x, y)$ care satisfac pe C condiția (16) sînt discontinue pe C (conform primei relații (16), componenta tangențială a sa este continuă, dar, conform relației (17), componenta sa normală este discontinuă), ecuația (11), în care înlocuim vectorul $\nabla p\,(x, y)$ cu vectorul găsit prin rezolvarea ecuației (12) la momentul anterior, va avea coeficienți discontinui. Pentru a înlătura această situație, vom grupa în (11) coeficienții în așa fel, încît să punem în evidență expresia

$$E = G(S)\frac{\partial p}{\partial n},$$

cu notația

$$G(S) = \frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} + \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t},$$

care este continuă la trecerea lui C conform cu (17). Scriem (11) sub forma

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta\,[S(x, y, t)]\frac{\partial S}{\partial s}\frac{\partial p}{\partial s} + \frac{\beta\,[S(x, y, t)]}{G\,[S(x, y, t)]}\,G\,[S(x, y, t)]\,\frac{\partial p}{\partial n}\,\frac{\partial S}{\partial n} = 0, \tag{18}$$

în care am pus în evidență expresia lui E. Considerînd că în expresia precedentă coeficientul $\frac{\beta(S)}{G(S)}$ este continuu de S, ecuația (18) va avea coeficienții continui și se încadrează în condițiile teoremei de existență și de unicitate a soluției. Pentru a putea fi efectiv integrată trebuie să se facă o schimbare de coordonate curbilinii ortogonale, în care curba C să figureze ca o curbă a familiei.

Folosirea condiției la limită (16) are două dezavantaje. În primul rînd a trebuit să considerăm în (18) drept coeficient al ultimului termen expresia $\frac{\beta(S)}{G(S)}$, ceea ce înseamnă de fapt o schimbare a ecuației inițiale (11). În al doilea rînd sîntem nevoiți să efectuăm la fiecare aproximație o schimbare de coordonate curbilinii, ceea ce îngreuiază rezolvarea problemei.

Pentru înlăturarea acestor dificultăți am propus în [13] pe C condiția la limită.

$$\vec{V}^{+}(s) = \vec{V}^{-}(s), \tag{19}$$

care însă nu evită prima dificultate. Relația (19) asigură continuitatea vitezei ca vector pe C și deci și a componentelor normală și tangențială. Se sacrifică, în schimb, continuitatea presiunii, ceea ce nu este surprinzător, întrucît ea apare în orice proces de balanță materială, așa cum am arătat în [13].

Condiția (19) poate fi scrisă sub forma

$$G\,[S^{+}(s)]\,\nabla p^{+}(s) = G\,[S^{-}(s)]\,\nabla p^{-}(s). \tag{20}$$

Presupunînd că am rezolvat ecuația (12) în condițiile precedente, se vede că vectorul $\nabla p\,(x,y)$ este discontinuu la trecerea lui C, dar este continuă expresia

$$\vec{E} = G\,[S(x, y)]\,\nabla p(x, y).$$

Pentru integrarea ecuației (11), care determină daturația la momentul următor, vom pune în evidență expresia precedentă. Aceasta se scrie

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \frac{\beta(S)}{G(S)}\,\overrightarrow{E\,[S(x, y)]}\,\nabla S\,(x, y, t) = 0. \tag{21}$$

De această dată vom considera în (21) drept coeficient al lui ∇S tot expresia $\frac{\beta(S)}{G(S)}$ (acum se schimbă coeficienții ambelor componente ale lui ∇S). Dezavantajul acestei condiții la limită este compensat de forma simplă a problemei la limită la care se ajunge, așa cum vom vedea în punctul următor.

5. Problema la limită în prezența liniei de salt. Prin apariția curbei C în domeniul de mișcare, planul complex s-a împărțit în două domenii complementare, D^+ și D^- (fig. 1), în care trebuie integrate simultan ecuațiile

$$\Delta p^+(x, y) + \nabla F^+(x, y)\, \nabla p^+(x, y) = 0,$$

$$\Delta p^-(x, y) + \nabla F^-(x, y)\, \nabla p^-(x, y) = 0, \tag{22}$$

în așa fel încît pe C să fie satisfăcută condiția (16) sau (19). Această problemă se întîlnește și în cazul dezlocuirii integrale în medii poroase neomogene [14] și rezolvarea ei este echivalentă cu rezolvarea unei ecuații integrale singulare sau cu rezolvarea unei probleme la limită de tip Riemann pentru funcții analitice generalizate, după cum considerăm prima sau a doua condiție la limită. Dacă în (22) facem substituția

$$u^\pm(x, y) = \frac{\partial p^\pm(x, y)}{\partial x}; \quad v^\pm(x, y) = -\frac{\partial p^\pm(x, y)}{\partial y},$$

$$U^\pm(z) = u^\pm(x, y) + \mathrm{i}v^\pm(x, y), \tag{22'}$$

$$A^\pm(x, y) = -\frac{1}{2}\frac{\partial F^\pm}{\partial \bar{z}}; \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial}{\partial y}\right),$$

unde semnele se corespund, sistemul (22) se reduce la

$$\frac{\partial U^\pm(z)}{\partial \bar{z}} = A^\pm(z)\, U^\pm(z) + \overline{A^\pm(z)}\ \overline{U^\pm(z)}. \tag{23}$$

Prin schimbarea de funcție

$$U^\pm(z) = V^\pm(z)\, \mathrm{e}^{\omega^\pm(z)}, \tag{23'}$$

unde am notat

$$\omega^\pm(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{D^\pm} \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, \mathrm{d}\xi\, \mathrm{d}\eta; \quad \zeta = \xi + \mathrm{i}\eta,$$

sistemul fundamental al mișcării devine

$$\frac{\partial V^\pm(z)}{\partial \bar{z}} = B^\pm(z)\, \overline{V^\pm(z)}, \tag{24}$$

cu notația

$$B^{\pm}(z) = \overline{A^{\pm}(z)}\, e^{\overline{\omega^{\pm}(z)}-\omega^{\pm}(z)}.$$

La un sistem similar am ajuns și în cazul dezlocuirii integrale a fluidelor în medii poroase neomogene, cu diferența că $B^{\pm}(z)$ are altă expresie în acel caz.

Pentru rezolvarea acestui sistem se pot pune pe C condițiile la limită discutate în punctul precedent, care pot fi exprimate în funcție de elementele lui. În cazul condiției (16), dacă introducem notația

$$\rho(s) = \frac{G\,[S^{-}(s)]}{G\,[S^{+}(s)]},$$

ele devin

$$\frac{\partial p^{+}}{\partial s} = \frac{\partial p^{-}}{\partial s}; \qquad \frac{\partial p^{+}}{\partial n} = \rho(s)\,\frac{\partial p^{-}}{\partial n}. \tag{25}$$

Dacă adunăm prima relație cu a doua înmulțită cu i, explicităm derivata tangențială și normală și ținem seama de substituțiile (22′) și (23′), condiția la limită are forma

$$V^{+}(\tau) - \frac{1}{2}\,[\rho(s)+1]\, e^{\omega^{-}(\tau)-\omega^{+}(\tau)}\, V^{-}(\tau) + \tag{26}$$

$$+\frac{1}{2}[\rho(s)-1]\,\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\, e^{\overline{\omega^{-}(\tau)}-\omega^{+}(\tau)}\,\overline{V^{-}(\tau)} = 0,$$

unde

$$\tau(s) = x(s) + i\,y(s)$$

este ecuația complexă a conturului (pentru detalii vezi [9]).

Dacă însă impunem pe C condiția vectorială (19), ea poate fi adusă la o relație de tip Riemann între valorile limită $V^{+}(\tau)$ și $V^{-}(\tau)$, printr-un raționament folosit deja în [13], de forma

$$V^{+}(\tau) = \frac{G^{+}(\tau)}{G^{-}(\tau)}\, e^{\omega^{-}(\tau)-\omega^{+}(\tau)}\, V^{-}(\tau), \tag{27}$$

unde toate elementele sînt cunoscute. Pentru a ajunge la condiția (27), am proiectat condiția vectorială (19) pe tangenta și normala la C, am adunat prima relație cu a doua înmulțită cu i și am ținut seama de substituția (22′).

Cu aceasta considerăm studiul problemei încheiat, deoarece rezolvarea sistemului (24) în condițiile (26) sau (27) este o chestiune rezolvată.

Prima problemă am întîlnit-o în studiul dezlocuirii fluidelor în medii poroase neomogene [14] și am redus-o la o ecuație integrală singulară, iar a doua este o problemă a lui Riemann în clasa funcțiilor analitice generalizate, de asemenea rezolvată în tratatele clasice [11], [12].

Formularea problemei în condițiile (26) și (27) trebuie de fapt modificată în sensul că trebuie să ținem seama de existența singularităților pe care le introduc sondele în domeniul de mișcare. Pentru aceasta trebuie izolată influența lor printr-o substituție adecvată în (24), în care se pune în evidență potențialul vitezelor determinat de sistemul de sonde considerat în cazul mișcării unui fluid monofazic în mediu neomogen. Procedeul este frecvent folosit în cazuri similare și a fost utilizat și de noi în mai multe lucrări, printre care [14]. Prin aceasta, sistemul (24) schimbă numai coeficienții, iar condițiile (26) și (27) devin neomogene. În cazul particular al unei singure sonde de injecție considerat de noi, substituția în discuție are forma simplă

$$V_1(z) = V(z) - \frac{A_1}{z},$$

unde $V_1(z)$ este noua funcție necunoscută, iar A_1 o constantă care poate fi determinată în funcție de debitul mișcării [8].

6. **Concluzii** În studiul dezlocuirii necapilare în medii poroase neomogene se ajunge la rezolvarea unor probleme la limită similare cu cele din cazul mediilor omogene. Mișcarea poate fi considerată ca determinată de un mediu neomogen fictiv, a cărui neomogenitate rezultă din suprapunerea saturației și a neomogenității monofazice a mediului. Este deci firesc ca dezlocuirea necapilară prin medii omogene și neomogene să fie urmărită în paralel.

Chestiunea cea mai delicată în studiul matematic al problemei, întîlnită și în cazul mediului omogen, este problema la limită pe linia de salt a saturației, după apariția acesteia în cîmpul mișcării. Din cauză că egalitatea presiunii și a debitelor pe linia de salt ne conduce la o transformare de coordonate curbilinii ortogonale și la schimbarea coeficienților ecuației de mișcare, am propus condiția de egalitate a vitezelor la trecerea lui C. Nici această condiție nu evită schimbarea ecuației ce urmează a fi integrată, dar nu cere transformarea de coordonate necesară în celălalt caz. Consecința cea mai importantă a celei de-a doua condiții la limită este că problema care rezultă este mult mai simplă în comparație cu cea corespunzătoare primei condiții. Dacă în acest din urmă caz avem de determinat o funcție analitică generalizată pe porțiuni cînd este cunoscută o relație liniară cu valori conjugate pe C, ceea ce echivalează cu rezolvarea unei ecuații integrale singulare, în cazul condiției de egalitate a vitezelor avem de rezolvat o problemă a lui Riemann în aceeași clasă de funcții, ceea ce este incomparabil mai simplu. Acesta este și motivul pentru care credem că, cel puțin din punct de vedere practic, condiția de egalitate a vitezelor prezintă mai mare avantaj, avînd în vedere că aceste probleme la limită se pun la toate momentele t_j după apariția șocului. În afară de aceasta, condiția în discuție înlătură fenomenul de refracție al liniilor de curent pe C, lucru destul de greu de admis, ținînd seama că

fluidele în mişcare sînt vîscoase. În schimb, condiţia implică un salt de presiune pe C, întrucît condiţia de continuitate a presiunii nu a mai fost pusă prin condiţia la limită. Acest lucru este destul de greu de acceptat din punct de vedere hidrodinamic, dar el apare în toate mişcările unde se aplică principiul balanţei materiale [13], pe baza cărora s-au obţinut rezultate acceptabile practic. Rămîne de văzut dacă rezultatele teoretice obţinute în condiţiile la limită puse pot fi comparate cu cele experimentale şi în ce măsură diferă de acestea.

Primită la redacţie la 21 ianuarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. L. Danilov şi colab., *Ob uradneniah i kraevih teoriii dvuhfaznih filtrationnih tecenii v poristoi srede*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, **183**, *2*, 307 (1968).
2. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1966.
3. Şt. Gheorghiţă, *Metode matematice în hidrogazodinamica subterană*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1966.
4. Th. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor prin medii poroase neomogene*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1963.
5. D. A. Efros, *Issledovaniia filtraţii neodnorodnih sistem*, Leningrad, Gostoptehizdat, 1963.
6. I. A. Ciarnîi, *Podzemnaia ghidrogazodinamika* Moskva, Gostoptehizdat 1963.
7. Cen Cijan-Sian, *Filtraţiia dvuhfaznoi jidkosti s massovami silami v neodorodnoi poristoi srede*, J. Prikl. Meh. i. teh. fiz., *2* (1962).
8. V. Ionescu, C. Cozma, *Mişcarea fluidelor într-un mediu poros neomogen determinată de un sistem arbitrar de sonde*. St. cerc. mec. apl., **28**, *5* (1969).
9. — *Dezlocuirea necapilară a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **29**, 5 (1970).
10. N. I. Mushelişvili, *Singulearntie integralnie uravneniia*, Moskva, Fizmatiz, 1962.
11. I. N. Vekua, *Obobşcionie analiticeskie funkţii*, Moskva, 1959.
12. F. D. Gahov, *Kraevîie zadaci*, Moskva, 1963.
13. V. Ionescu, C. Cozma, *Asupra unor condiţii la limită în dezlocuirea necapilară în medii poroase*, St. cerc. mec. apl., **30**, *1* (1971).
14. — *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene*, St. cerc. mec.apl., **28**, *6* (1969).

ASUPRA STABILITĂȚII LINIARE A UNEI CURGERI LAMINARE PLANE

de VALERIU PANAITESCU
Institutul politehnic București

Se demonstrează posibilitatea obținerii unei soluții exacte a ecuației orr-sommerfeld prin reducerea rezolvării acestei ecuații diferențiale la rezolvarea unei ecuații integrale volterra de speța a doua și se indică un procedeu de rezolvare numerică, prin iterații, a ecuației integrale. Se demonstrează existența și unicitatea soluției propuse și se justifică oportunitatea și utilitatea metodei preconizate pentru rezolvarea problemei stabilității liniare a unei curgeri laminare plane.

1. INTRODUCERE

Se spune despre o mișcare fluidă, numită mișcare de bază, că este stabilă la o anumită perturbație dacă după un timp suficient de mare perturbația se amortizează.

Teoria stabilității hidrodinamice prezintă un mare interes matematic, fizic și tehnic. Interesul matematic constă în aceea că stabilitatea hidrodinamică conduce la studiul stabilității soluției unui sistem de ecuații cu derivate parțiale de ordinul doi și de gradul doi (ecuațiile Navier-Stokes) sau, în anumite condiții, la o problemă de valori proprii pentru un operator diferențial de ordinul patru neautoadjunct, cu coeficienți variabili, în condiții la limite bilocale omogene (ecuația Orr-Sommerfeld). Aceste probleme teoretice nu au fost încă rezolvate sub forma lor generală, deși au fost aplicate metode matematice moderne, ca teoria calitativă a ecuațiilor cu derivate parțiale, metode ale analizei funcționale, metode variaționale, teoria grupurilor Lee, metoda energetică etc. Aspectul fizic important al studiului stabilității hidrodinamice constă în aceea că acest studiu furnizează o explicație a tranziției de la regimul laminar de mișcare la regimul turbulent, deci a originii turbulenței. Interesul tehnic al studiului stabilității hidrodinamice se bazează pe considerente de economisire a energiei, fiind cunoscut faptul că în regimul laminar consumul de energie este mai mic decît în cel turbulent. Pe de altă parte, există domenii

ale tehnicii moderne în care studiul stabilității hidrodinamice intervine nemijlocit și joacă un rol esențial: proiectarea și încercarea profilelor aerodinamice în regim supersonic; proiectarea modernă a camerelor de combustie și a unor instalații de răcire; proiectarea elementelor de automatizare cu jeturi fluide; aplicații speciale, ca, de exemplu, scurgerea pe plan înclinat în pelicule foarte subțiri utilizate în tehnica emulsiilor etc.

2. FORMULAREA MATEMATICĂ A PROBLEMEI

Se examinează mișcarea unui fluid vîscos de densitate ρ și de viscozitate ν. Ecuațiile de bază care sînt satisfăcute de componentele vitezei u_i și presiunea p sînt ecuațiile Navier-Stokes și ecuația de continuitate [1]:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta u_i, \quad \frac{\partial u_k}{\partial x_k} = 0. \tag{1}$$

Pe frontierele solide care se deplasează cu viteza S_i trebuie satisfăcută condiția

$$u_i = S_i. \tag{2}$$

Dacă viteza S_i nu depinde de timp, se poate obține soluția staționară

$$U_i(x_k), \quad P(x_k), \tag{3}$$

care verifică ecuațiile (1) și condiția la limită (2). Pentru rezolvarea problemei stabilității hidrodinamice trebuie examinată problema Cauchy, cu valorile inițiale ale variabilelor u_i și p foarte puțin diferite, prin mici perturbații u_i' și p', de valorile corespunzătoare soluției staționare

$$u_i = U_i(x_k) + u_i'(x_k, t), \quad p = P(x_k) + p'(x_k, t). \tag{4}$$

Dacă soluția găsită tinde către soluția staționară (3) cînd timpul $t \to \infty$, atunci mișcarea este stabilă. În caz contrar, mișcarea este instabilă. Pentru evitarea problemei foarte dificile a găsirii soluției ecuațiilor Navier-Stokes se presupune că în cazul micilor oscilații ecuațiile pot fi liniarizate, adică se pot neglija termenii patratici în raport cu perturbațiile.

Se studiază stabilitatea unei mișcări laminare plane permanente, de exemplu mișcarea dintre doi pereți plani paraleli sau mișcarea în stratul-limită laminar (fig. 1), caracterizată prin

$$U = U(y), \quad V = 0, \quad P = P(x, y). \tag{5}$$

Peste această mișcare se suprapun perturbațiile $u'(x, y, t)$, $v'(x, y, t)$ și $p'(x, y, t)$. Perturbația vitezei este dată de funcția de curent $\psi(x,y,t)$ [2]:

$$\psi(x, y, t) = \varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}; \quad u' = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \varphi'(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)},$$
$$v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x} = -i\alpha\varphi(y)\, e^{i(\alpha x - \beta t)}, \tag{6}$$

în care $\varphi(y)$ este amplitudinea complexă a perturbației ondulatorii. Mărimea α este o mărime reală, legată de lungimea de undă λ a perturbației prin relația $\alpha = \frac{2\pi}{\lambda}$. Mărimea β este o mărime complexă, $\beta = \beta_r + i\beta_i$, la care partea reală β_r reprezintă pulsația perturbației, iar partea imaginară β_i este coeficientul de amplificare: dacă $\beta_i < 0$, perturbația se amortizează și mișcarea laminară rămîne stabilă; dacă $\beta_i > 0$, perturbația se amplifică și mișcarea devine instabilă. Se introduce mărimea complexă $c = c_r + ic_i = \frac{\beta}{\alpha}$, în care c_r reprezintă viteza de deplasare a undei, iar c_i este viteza de amplificare; $c_i < 0$ caracterizează amortizarea perturbației, iar $c_i > 0$ caracterizează amplificarea perturbației.

Se introduc componentele vitezei și presiunea:

$$u = U + u', \quad v = v'; \quad p = P + p'; \tag{7}$$

în ecuațiile (1) se neglijează termenii de gradul doi în raport cu u' și v' și se ține seama de faptul că mișcarea de bază (5) verifică ecuațiile Navier-Stokes. Prin eliminarea presiunii în sistemul de ecuații astfel obținut rezultă ecuația diferențială a amplitudinii perturbației [3], [4]:

$$(U - c)(\varphi'' - \alpha^2\varphi) - U''\varphi = -\frac{i}{\alpha \mathrm{Re}}(\varphi^{IV} - 2\alpha^2\varphi'' + \alpha^4\varphi). \tag{8}$$

Această ecuație diferențială ordinară liniară de ordinul patru, cu coeficienți variabili, cunoscută sub numele de ecuația Orr-Sommerfeld, stă la baza studiului stabilității liniare a mișcărilor paralele și în primă aproximație (cel puțin) a mișcărilor aproape paralele. Se menționează că această ecuație este adusă la forma adimensională prin împărțirea lungimilor la o lungime caracteristică δ și prin împărțirea vitezelor la viteza maximă U_m a mișcării de bază. Derivarea se face în raport cu variabila adimensională $\frac{y}{\delta}$. Numărul Reynolds este dat de relația

$$\mathrm{Re} = \frac{U_m\delta}{\nu}.$$

Cele patru condiții la limită în care se rezolvă ecuația (8) se obțin din considerarea valorilor u' și v' ale perturbației vitezei (6) pe frontierele domeniului în care are loc mișcarea studiată. Astfel, pentru cele două situații reprezentate în figura 1, primele condiții la limită se determină din condiția ca perturbațiile u' și v' să fie nule pe prima placă:

$$\varphi(0) = \varphi'(0) = 0. \tag{9}$$

Celelalte condiții la limită se obțin din condiția anulării perturbațiilor u' și v' pe cea de-a doua placă în cazul mișcării între două plăci plane para-

lele sau din condiţia racordării vitezelor din stratul-limită şi curgerea exterioară în cazul mişcării în stratul-limită. Rezultă, respectiv,

$$\varphi(1) = \varphi'(1) = 0, \tag{9'}$$

$$\varphi(\infty) = \varphi'(\infty) = 0. \tag{9''}$$

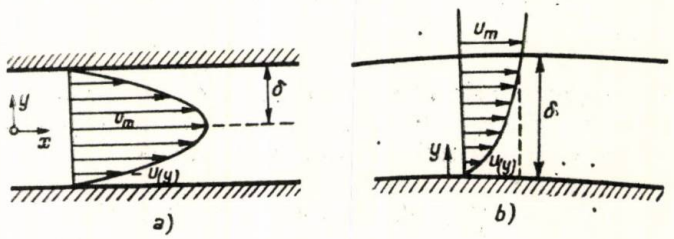


Fig. 1. — Studiul stabilităţii liniare a unei curgeri laminare plane: *a* — curgerea între două plane paralele; *b* — curgerea în stratul-limită.

3. CONSTRUIREA UNEI SOLUŢII EXACTE A ECUAŢIEI DIFERENŢIALE A MIŞCĂRII PERTURBATOARE

În cele ce urmează se expune un procedeu de obţinere a soluţiei ecuaţiei (8) cu condiţiile la limită (9) — (9') sau (9) — (9'') prin reducerea acestei ecuaţii diferenţiale ordinare de ordinul patru cu coeficienţi variabili la o ecuaţie integrală de tip Volterra de speţa a doua. Ideea acestei metode provine dintr-o demonstraţie dată de matematicianul român Traian Lalescu, care a arătat că o ecuaţie integrală de tipul Volterra de speţa a doua apare ca o limită a unei ecuaţii diferenţiale ordinare liniare de ordinul n cu coeficienţi variabili [5]. Pentru construirea soluţiei s-a examinat îndeaproape structura ecuaţiei (8), constatîndu-se că în membrul întîi al ecuaţiei funcţia necunoscută φ intervine şi sub forma grupului $(\varphi'' - \alpha^2\varphi)$, cu ajutorul căruia se poate construi forma pătratică din membrul al doilea al ecuaţiei $(\varphi^{V} - 2\alpha^2\varphi + \alpha^4\varphi)$.

Se introduce funcţia f prin ecuaţia diferenţială

$$f = \varphi'' - \alpha^2\varphi. \tag{10}$$

Prin integrare se obţine pentru amplitudinea φ expresia

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^y f(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p + C_1\,\mathrm{ch}\,\alpha y + C_2\,\mathrm{sh}\,\alpha y, \tag{11}$$

unde s-a notat cu p parametrul de integrare. Constantele de integrare C_1 şi C_2 se determină impunînd funcţiei necunoscută primele condiţii la limită

(9); se obține $C_1 = C_2 = 0$, deci amplitudinea φ a perturbației este dată de ecuația

$$\varphi = \frac{1}{\alpha}\int_0^y f(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p. \tag{11'}$$

Cu această expresie a funcției φ ecuația (8) devine

$$\alpha(U-c)f - U''\int_0^y f(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{Re}}(f''-\alpha^2 f). \tag{12}$$

Se introduce o nouă funcție Φ prin ecuația

$$\Phi = f'' - \alpha^2 f. \tag{13}$$

Integrala generală a acestei ecuații este

$$f = \frac{1}{\alpha}\int_0^y \Phi(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p + A\,\mathrm{ch}\,\alpha y + B\,\mathrm{sh}\,\alpha y. \tag{14}$$

Se introduce expresia (14) a funcției f în ecuația (12) și se ține seama de (13):

$$(U-c)\int_0^y \Phi(p)\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p + \alpha(U-c)A\,\mathrm{ch}\,\alpha y +$$

$$+\alpha(U-c)B\,\mathrm{sh}\,\alpha y - U''\int_0^y\left[\frac{1}{\alpha}\int_0^p \Phi(t)\,\mathrm{sh}\,\alpha(p-t)\,\mathrm{d}t + A\,\mathrm{ch}\,\alpha p +\right.$$

$$\left.+ B\,\mathrm{sh}\,\alpha p\right]\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\,\mathrm{d}p = -\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{Re}}\Phi. \tag{15}$$

În această ultimă ecuație se efectuează cîteva calcule (care nu se reproduc, fiind relativ lungi și neesențiale), și anume se schimbă ordinea de integrare în integrala dublă obținută, se efectuează integralele care intervin, se grupează convenabil termenii și se introduc notațiile

$$K(y,p) = \left(c - U - \frac{U''}{2\alpha^2}\right)\mathrm{sh}\,\alpha(y-p) + \frac{U''}{2\alpha}(y-p)\,\mathrm{ch}\,\alpha(y-p), \tag{16}$$

$$F(y) = \alpha A\,\mathrm{Re}\left[(c-U)\,\mathrm{ch}\,\alpha y + \frac{U''}{2\alpha}\,y\,\mathrm{sh}\,\alpha y\right] +$$

$$+\alpha B\mathrm{Re}\left[\left(c - U - \frac{U''}{2\alpha^2}\right)\mathrm{sh}\,\alpha y + \frac{U''}{2\alpha}\,y\,\mathrm{ch}\,\alpha y\right]. \tag{17}$$

Cu aceste notaţii, ecuaţia (15) se scrie sub forma

$$\Phi(y) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\int_0^y K(y,p)\,\Phi(p)\,\mathrm{d}p = -\mathrm{i}F(y). \tag{18}$$

S-a obţinut o ecuaţie integrală Volterra de speţa a doua, complexă, în care funcţia necunoscută este funcţia $\Phi(y)$. Nucleul $K(y,p)$ şi funcţia $F(y)$ sînt funcţii cunoscute.

Din examinarea expresiilor (16) şi (17) se constată că nucleul $K(y,p)$ este o funcţie continuă pe domeniul de definiţie, pătratul închis $0 \leqslant y, p \leqslant 1$, şi funcţia $F(y)$ este o funcţie continuă pe intervalul închis $0 \leqslant y \leqslant 1$. În aceste condiţii de regularitate, ecuaţia (18) admite o soluţie unică şi poate fi scrisă cu ajutorul nucleului rezolvant $\mathcal{K}(y,p\,;-\mathrm{i}\,\mathrm{Re})$

$$\Phi(y) = -\mathrm{i}F(y) + \mathrm{i}\,\mathrm{Re}\int_0^y \mathcal{K}(y,p\,;-\mathrm{i}\,\mathrm{Re})\,\mathrm{i}F(p)\,\mathrm{d}p. \tag{19}$$

Nucleul rezolvant se scrie sub forma unei serii întregi în numărul lui Reynolds :

$$\mathcal{K}(y,p\,;-\mathrm{i}\,\mathrm{Re}) = \sum_{n=1}^{\infty}(-\mathrm{i}\,\mathrm{Re})^{n-1}\,K^{(n)}(y,p), \tag{20}$$

unde $K^{(n)}(y,p)$ reprezintă nucleul iterat de ordinul n :

$$K^{(n)}(y,p) = \int_p^y K(y,s)\,K^{(n-1)}(s,p)\,\mathrm{d}s. \tag{21}$$

Prin procedeul expus, rezolvarea ecuaţiei diferenţiale (8) se reduce la rezolvarea ecuaţiei integrale (18). În această ecuaţie, funcţia $F(y)$ este considerată cunoscută. Conform relaţiei (17), în expresia funcţiei $F(y)$ intervin constantele arbitrare A şi B, ceea ce corespunde faptului că în afara condiţiilor la limită (9) mai sînt de îndeplinit încă două condiţii la limite, şi anume pe cel de-al doilea perete (9′) sau în exteriorul stratului-limită (9″).

Se remarcă cu uşurinţă că ecuaţia integrală (18) de tip Volterra se poate rezolva numeric prin iteraţii. Se consideră mai întîi valori mici ale variabilei y, deci în apropierea peretelui, şi se măreşte treptat variabila y pe măsură ce iteraţiile tind către soluţia ecuaţiei integrale. Se constată că acest procedeu iterativ converge destul de repede, chiar pentru valori mari ale numărului lui Reynolds. Se calculează la început nucleele iterate, după care se determină seria prin care se exprimă nucleul rezolvant. Soluţia $\Phi(y)$ a ecuaţiei integrale (18) se obţine în final cu ajutorul relaţiei (19).

Cunoaşterea soluţiei $\Phi(y)$ a ecuaţiei integrale Volterra de speţa a doua permite obţinerea soluţiei $\varphi(y)$ a ecuaţiei Orr-Sommerfeld prin simpla cvadratură ; se folosesc ecuaţiile (11′) şi (14) şi rezultă

$$\varphi = \frac{1}{2\alpha^2}\int_0^y\left[(y-p)\,\mathrm{ch}\,\alpha(y-p) - \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha(y-p)\right]\Phi(p)\,\mathrm{d}p + \\ + \frac{A}{2\alpha}\,y\,\mathrm{sh}\,\alpha y + \frac{B}{2\alpha}\left(y\,\mathrm{ch}\,\alpha y - \frac{1}{\alpha}\,\mathrm{sh}\,\alpha y\right). \tag{22}$$

Determinarea constantelor arbitrare A și B particularizează și individualizează diferitele probleme concrete de stabilitate liniară în funcție de curgerea laminară de bază a cărei stabilitate se studiază.

4. DEMONSTRAREA EXISTENȚEI ȘI UNICITĂȚII SOLUȚIEI PROPUSE

Metoda propusă pentru soluționarea ecuației diferențiale a mișcării perturbatoare rezolvă și problema demonstrării existenței și unicității soluției. Deoarece prin procedeul indicat anterior rezolvarea ecuației diferențiale Orr-Sommerfeld se reduce la rezolvarea unei ecuații integrale Volterra, problema existenței și a unicității soluției unei ecuații diferențiale ordinare de ordinul patru liniară și cu coeficienți variabili se reduce la problema existenței și a unicității soluției unei ecuații integrale de tipul Volterra de speța a doua. Se evită astfel o problemă matematică dificilă [6]. De asemenea se evită considerațiile matematice complicate făcute în legătură cu existența și cu unicitatea soluției Orr-Sommerfeld [7].

Existența soluției este dovedită prin indicarea unui procedeu de construcție efectivă a soluției (relațiile (10) — (22)). Existența soluției (22) este asigurată în primul rînd de existența soluțiilor ecuațiilor diferențiale ordinare liniare cu coeficienți constanți (10) și (13) [6]. Pe de altă parte, existența soluției ecuației integrale (18) este asigurată de faptul că nucleul (16) și funcția cunoscută (17) îndeplinesc, așa cum s-a arătat, condițiile de regularitate cerute.

Unicitatea soluției este asigurată în primul rînd de unicitatea soluției ecuației integrale Volterra de speța a doua (18). Într-adevăr, dacă se presupune că ecuația (18) ar fi verificată și de o altă soluție, $\Phi_1(y)$, se deduce ușor că $\Phi_1(y) \equiv \Phi(y)$; pentru aceasta se scrie relația (19) succesiv:

$$\Phi(y) = \Phi_1(y) + \mathrm{iRe}\int_0^y K(y,t)\,\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{iRe}\int_0^y \mathcal{K}(y,p\,;-\mathrm{iRe})\Big[-$$

$$-\Phi_1(p) - \mathrm{iRe}\int_0^p K(p,t)\,\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t\Big]\,\mathrm{d}p = \Phi_1(y) + \mathrm{iRe}\int_0^y K(y,t)\times$$

$$\times\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t - \mathrm{iRe}\int_0^y \mathcal{K}(y,p\,;-\mathrm{iRe})\,\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{Re}^2\int_0^y \mathcal{K}(y,p\,;-$$

$$-\mathrm{iRe})\,\mathrm{d}p\int_0^p K(p,t)\,\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t = \Phi_1(y) + \mathrm{iRe}\int_0^y [K(y,t-\mathcal{K}(yt\,;-$$

$$-\mathrm{iRe})]\,\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t + \mathrm{Re}^2\int_0^y \Phi_1(t)\,\mathrm{d}t\int_0^y \mathcal{K}(y,p\,;-\mathrm{iRe})\,K(p,t)\,\mathrm{d}p =$$

$$= \Phi_1(y) + \mathrm{iRe}\int_0^y\Big[K(y,t) - \mathcal{K}(y,t\,;-\mathrm{iRe}) - \mathrm{iRe}\int_t^y \mathcal{K}(y,p\,;-$$

$$-\mathrm{iRe})\,K(p,t)\,\mathrm{d}p\Big]\,\Phi_1(t)\,\mathrm{d}t.$$

Penultima parte a acestui şir de egalităţi a fost obţinută din precedenta, aplicînd integralei duble formula Leujeune-Dirichlet. Paranteza pătrată din ultima parte a şirului de egalităţi este identic nulă, deoarece se recunoaşte uşor că reprezintă ecuaţia integrală a nucleului rezolvant. Prin urmare s-a demonstrat că $\Phi(y) = \Phi_1(y)$, deci ecuaţia (18) are soluţie unică. Pe de altă parte, unicitatea soluţiei (22) este asigurată şi de unicitatea soluţiei ecuaţiilor diferenţiale ordinare liniare cu coeficienţi constanţi (13) şi (10) [6].

5. COMPARAŢIE CU ALTE METODE DE STUDIU ALE STABILITĂŢII LINIARE PLANE

Pentru rezolvarea problemei stabilităţii hidrodinamice se folosesc diferite metode matematice : metode energetice [8], metode variaţionale [9], metode ale analizei funcţionale [10], teoria grupurilor Lee [11], teoria calitativă a ecuaţiilor cu derivate parţiale [12], [13]. Deşi atacată din aceste puncte de vedere, problema stabilităţii hidrodinamice nu a fost încă rezolvată sub forma generală. Au fost efectuate, în schimb, numeroase cercetări experimentale [14], [15]. Uneori pentru rezolvarea teoretică a problemei stabilităţii s-au introdus simplificări ale ecuaţiilor matematice, sugerate de observarea atentă a fenomenului de mişcare a fluidului ; astfel, pentru studiul fenomenelor de instabilitate liniară guvernate de ecuaţia Orr-Sommerfeld, plecînd de la constatarea că limita de stabilitate corespunde unor valori mari ale numărului Reynold, se neglijează într-o primă aproximaţie termenii din membrul al doilea al ecuaţiei (8), obţinîndu-se ecuaţia Reyleigh [16] — [19] Alteori, din dorinţa de a trata mai riguros problema stabilităţii, se ia în consideraţie ecuaţia Orr-Sommerfeld completă şi se caută soluţia prin folosirea unor metode asimptotice [19] —[22], a unor metode de aproximaţie [23], [24] sau a calculatoarelor electronice [25]. Metodele de studiu evidenţiate nu au reuşit să dea o rezolvare definitivă a problemei stabilităţii. În cazuri particulare corespunzătoare unor mişcări întîlnite în practică, s-au propus metode aproximative care duc la rezultate apropiate de rezultatele experimentale. Metodele de studiu enumerate mai sus se dovedesc a fi laborioase şi, în general, complicate.

Se apreciază că metoda propusă pentru soluţionarea ecuaţiei Orr-Sommerfeld este simplă. Acest procedeu poate fi aplicat la studiul stabilităţii liniare a unei curgeri laminare plan-paralele sau aproape paralele. La obţinerea soluţiei nu a fost impusă nici o condiţie restrictivă asupra profilului de viteze al curgerii laminare de bază.

Soluţia obţinută este o soluţie exactă. Se menţionează că, în lucrări cu caracter monografic alcătuite în urma consultării unui foarte bogat material bibliografic, nu este evidenţiată o metodă de soluţionare exactă a ecuaţiei Orr-Sommerfeld. Se citează în primul rînd excelenta monografie a lui C.C. Lin [26], care face o prezentare sistematică a problemelor legate de stabilitatea mişcărilor plan-paralele bazată pe majoritatea lucrărilor şcolii germane (L. Prandtl, H. Schlichting, W. Tollmien, O. Tietjen, H. Holstein, A. Ulrich, H. Schade etc.), engleze (lord Rayleigh, lord Kelvin, H. Jeffreys, D. Meksyn, G. I. Taylor, S. Chandrasekhar etc.) şi americane (C. C. Lin, S. I. Pai, H. Dryden, G. C. Schubauer, M. K.

Skramstad, P. S. Klebanoff, J. L. Synge etc.). Se mai citează şi alte lucrări [27] — [30], care fac o minuţioasă trecere în revistă a metodelor de rezolvare a ecuaţiei Orr-Sommerfeld.

Aplicarea metodei propuse conduce la obţinerea soluţiei ecuaţiei Orr-Sommerfeld cu un volum de calcul mai mic decît al altor metode.

6. CONCLUZII

Metoda propusă pentru rezolvarea problemei stabilităţii liniare plane prezintă cîteva avantaje : construcţia soluţiei este simplă ; la obţinerea soluţiei nu au fost considerate ipoteze simplificatoare sau restrictive ; soluţia este exactă ; demonstrarea existenţei şi unicităţii soluţiei se face riguros şi fără dificultate ; se indică un procedeu iterativ pentru rezolvarea numerică a ecuaţiei integrale cu ajutorul căreia se scrie soluţia ; comparativ cu alte metode, volumul de lucrări necesitat de obţinerea soluţiei este mai mic ; metoda preconizată poate fi aplicată pentru studiul stabilităţii liniare a curgerilor staţionare plane, paralele sau aproape paralele (de exemplu curgeri de tip Couette ; curgeri de tip Poiseuille ; curgeri combinate de tip Couette-Poiseuille ; curgerea în stratul-limită ; curgerea în difuzorul plan ; curgerea în jetul plan ; curgerea în dîra plană etc.).

Ţinînd seama de consideraţiile de mai sus şi avînd în vedere interesul constant de aproape un secol de care se bucură problemele legate de studiul tranziţiei de la scurgerea laminară la cea turbulentă, se consideră utilă indicarea unei metode de obţinere a unei soluţii exacte a ecuaţiei diferenţiale Orr-Sommerfeld, punctul de plecare al studiului stabilităţii liniare a mişcării laminare a unui fluid.

Primită la redacţie la 20 iulie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. C. Jacob, *Introduction mathématique à la mécanique des fluides*, Bucarest-Paris, Gauthier-Villars, 1959.
2. H. Schlichting, *Entstehung der Turbulenz*, Berlin-Göttingen-Heidelberg, 1959.
3. W. Mc. F. Orr, *The stability or instability of the steady motions of a liquid*, proc. R. Irish. Acad., **A 27**, 9 — 27, 69 — 138 (1906 — 1907).
4. A. Sommerfeld, *Atti del congr. Internat. dei Mat.*, Rome, 1908.
5. T. Lalescu, *Introducere la teoria ecuaţiilor integrale*, Bucureşti, 1956.
6. E. Kamke, *Differentialgleichungen, Lösungsmethoden und Lössungen*, vol. I, Leipzig, 1967.
7. C. C. Lin, *Some mathematical problems in the theory od the stability of parallel flows*, J. Fluid. Mach., *10*, p. 430 — 438 (1961).
8. O. Reynolds, *On the dynamic theory of incompressible viscous fluids and the determination of the criterium* Phil. Trans. Roy. Soc. London, **A 186**, 123 — 164 (1895).
9. L. H. Lee, W. C. Reynolds, *A veriational method for investigating the stability of parallel flow*, Stanford. Univ. Termoscien, Divisions, Dept. Mach. Eng. Rep. FM-1 1964.
10. О. А. Ладыженская, *Математические вопросы вязкой несжимаемой жидкости*, Москва, 1961.
11. V. I. Arnold, *On a variational principle for steady flow of perfect liquids and its applications to nonlinear stability problems*, Journal de Mécanique, **5**, *1*, 29 — 43 (1966).
12. А.А. Мовчан, *О прямом методе Ляпунова в задачах устойчивости упругих систем*, П. М. М, **XXIII**, *3*, 483—493 (1959).

13. G. Prodi, *Teoremi di tipo locale per il sisteme di Navier-Stokes e stabilità delle soluzioni stazionari*, Rend. Sem. Matem. Padova, *20*, 374 — 397 (1960).
14. O. Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuos and the law of resistance in parallel channels*, Phil. Trans. Roy Soc., **A 74**, P III 51 — 105 (1883).
15. I. Tani, *A review of some experimental results on boundary-layer transition*, Abstracts IUGG-IUTAM Sympos on Bound-Layer and Turb. incl. Gephys. Appl. Kyoto, Sept. 1966.
16. Lord Rayleigh, *On the stability, or instability of certain fluid motions*, Scientific Papers, *1*, 474 — 487 (1880).
17. W. Heisenberg, *Über Stabilität und Turbulenz von Flüssigkeitsströmen*, Annalen der Physik, **74**, *4* (1924).
18. W. Tollmien, *Ein allgemeines Kriterium der Instabilität laminarer Geschwindigkeitevesteilungen*, Göttingen, Math. —Phys. Kasse, **I**, *1*, (1935).
19. C. C. Lin, *On the stability of two-dimensional parallel flows*, Part I, II, II, Quart. Appl. Math., **3**, 117 — 142, 218 — 234, 277 — 301 (1945).
20. G. I. Taylor *Stability of viscous liquid contained between two rotating cylinders*, Phil. Trans., **A 223**, 289 — 343 (1931).
21. O. G. Tietjens, *Beiträge zur Entstehung der Turbulenz*, ZAMM, *5*, 200 — 217 (1925).
22. W. H. Reid, *The stability of parallel flows, in Recent advances in fluid dynamics*, New York, Academic Press, 1964.
23 H. Holstein, *Über die äussere und innere Reibungsschicht bei Störungen laminarer Strömungen*, ZAMM, **30**, (1950).
24. K. T. Kuen, *On the asymptotic solution of the Orr-Sommerfeld equation by the method of multiple-scales*, J. of Fluid Mech., **34**, *1*, 145 — 158 (1968).
25. J. Florea, V. Panaitescu, *Studiul stabilității mișcării unui fluid incompresibil între două plane paralele cu ajutorul unor calculatoare analogice*, A XIII-a Sesiune științifică a Institutului politehnic din București, 1970.
26. C. C. Lin, *The theory of hydrodynamic stability*, Cambridge, 1955.
27. J. T. Stuart, *Hydrodynamic stability, in Laminar boundary layers*, Oxford, 1963.
28. S. Chandrasckhar, *Hydrodynamic and hydromagnetic stability*, Oxford, 1961.
29. Șt. N. Săvulescu, *Tranziția de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, București, 1968.
30. A. Georgescu, *Contribuții la studiul stabilității liniare a mișcării fluidelor*, teză de doctorat, București, 1970.

CERCETĂRI EXPERIMENTALE PRIVIND COMPORTAREA POLITETRAFLUORETILENEI ÎN CONDIȚIILE FRECĂRII DE ALUNECARE USCATĂ *)

OLGA BIȚĂ
I.M.F.C.A.

Lucrarea cuprinde o serie de observații și de date experimentale pe baza cărora se stabilesc parametrii optimi de funcționare ai unor bucșe din p.t.f.e. (teflon) folosite în cazul unor lagăre de dimensiuni relativ mari ($D = 60$ mm) și care lucrează normal în condițiile frecării de alunecare uscată (fără ungere). Studiul constituie totodată o verificare a concluziilor referitoare la mecanismul procesului de frecare uscată și, implicit, la comportarea în practică a acestui material plastic cu utilizări multiple, obținute de mai mulți cercetători pe diverse alte modele de laborator.

Calitățile deosebite manifestate de către politetrafluoretilena (p.t.f.e. sau teflon) în diverse condiții de frecare au atras atenția cercetătorilor cu mulți ani în urmă și au constituit baza a numeroase și variate studii experimentale și interpretări teoretice.

În ciuda performanțelor sale obținute în diverse aplicații practice, comportarea la alunecare fără ungere a p.t.f.e. nu a putut fi pe deplin explicată, iar cantitatea mare de date experimentale întîlnite în literatura de specialitate subliniază în mod evident complexitatea acestor procese și eforturile oamenilor de știință de a găsi explicația și mecanismul diverselor fenomene observate experimental. Cercetările efectuate de către F. P. Bowden [1], [2], D. Tabor [3], [4], P. H. Pinchbeck [5], R. P. Steijn [6] ș.a. sau, foarte recent, cele efectuate de către W. Wilkens și O. Kranz [7] au adus contribuții importante în înțelegerea mecanismului procesului de frecare în cazul teflonului și stabilirea condițiilor optime de utilizare în practică a acestui material plastic.

*) Lucrarea a fost efectuată în timpul stagiului de specializare în cadrul unei burse acordate de către Fundația „Alexander von Humboldt" (R.F.G.), folosind baza materială din laboratoarele Institutului „Abteilung Reibungsforschung am Max-Planck-Institut für Strömungsforschung" din Göttingen (R.F.G.) de sub conducerea prof. dr. G. Vogelpohl. Aduc mulțumiri deosebite tuturor și pe această cale.

Lucrarea de față contribuie la completarea tabloului general al comportării teflonului, în condiții de frecare de alunecare uscată, cu noi date și observații experimentale, obținute pe un lagăr experimental de dimensiuni relativ mari, și constituie totodată un mijloc de verificare a concluziilor anterioare furnizate de alte modele experimentale de laborator.

1. GENERALITĂȚI

Din gama extrem de bogată a polimerilor termoplastici (poliamide-nylon, policarbonați, polipropilene, polivinili, politetrafluoretilene — p.t.f.e. sau teflon), p.t.f.e. se evidențiază în mod deosebit prin calitățile sale mult mai bune la frecare pentru condiții egale de funcționare.

P.t.f.e. este un polimer semicristalin liniar

$$\left[\begin{array}{c} F \\ | \\ -C- \\ | \\ F \end{array}\right]_{n_m \cong 70},$$

stabil între limite largi de temperatură, foarte stabil din punct de vedere chimic (rezistă la toți acizii și bazele anorganice puternice, fiind atacat numai de metalele topite), posedînd, bineînțeles, și defectele specifice materialelor termoplastice: rezistență mecanică scăzută, proastă conductibilitate a căldurii, coeficient de dilatare ridicat etc.

Tabela 1 cuprinde cîteva caracteristici fizico-mecanice ale p.t.f.e., extrase din diverse lucrări de specialitate care tratează acest subiect.

Tabela 1

Caracteristica	Valoarea
Greutatea moleculară medie	1000 [7]
Temperatura de topire	320 °C [1]
Duritatea	5 kg/mm² [1]
Rezistența la rupere	2 ,, [1]
Modulul de elasticitate	40 ,, [1], [5]
Rezistența la forfecare	2 ,, [1]
Coeficientul de conductibilitate	$2{,}3 \cdot 10^{-4}$ cal/s cm°C [5]
Greutate specifică	2,2 kg/dm³ [5]
Coeficient de dilatare	$5{,}5 \cdot 10^{-5}$/°C [1]
	$8{,}0 \cdot 10^{-5}$/°C pt. PTFE armat
Tensiunea superficială	12—18,5 dyne/cm [6]
Energie de activare	7—10 kcal/mol (?) [6]
Puncte de tranziție cristalină	19 și 30°C [6]
Coeficient de frecare uscată	0,04—0,12 [1], [2]
	0,07—0,33 [3], [8]
	0,1—0,3 [5], [6], [autor]
Temperatura maximă de utilizare	250 °C [1]

Bowden [1] și-a explicat buna comportare la frecare a suprafețelor de teflon prin prezența atomilor de fluor în locul celor de hidrogen, care

conferă moleculei o mai slabă interacţiune cu moleculele vecine şi deci o mai uşoară forfecare (alunecare) în timpul procesului de frecare. Aceasta ca urmare a faptului că atomii de fluor, fiind mari şi încărcaţi negativ, maschează sarcina pozitivă a atomilor de carbon, ceea ce face ca adeziunea intrinsecă între cristalitele acestui polimer să fie mai scăzută. Studiile ulterioare au arătat că această comportare cvasivîscoasă a straturilor de teflon este puternic influenţată de condiţiile de frecare, fapt care explică, în parte, diferenţa dintre valorile coeficientului de frecare obţinute experimental de către diverşi cercetători (vezi tabela 1) şi limitează domeniul de utilizare practică a acestui material plastic. Aceste aspecte vor fi discutate pe larg în diversele subcapitole ale lucrării de faţă.

Din cauza slabei sale rezistenţe mecanice, teflonul se foloseşte placat pe suprafeţe mai dure, în combinaţie cu MoS_2 sau cu grafit, ca adaos în diverse bronzuri poroase şi alte aliaje sau, pentru utilizări speciale, întărit cu fibre de sticlă. Acest material plastic a căpătat largi utilizări la confecţionarea lagărelor de dimensiuni reduse, întîlnite la diverse tipuri de motoare de putere mică, la multe aparate chimice, aparate electrice, maşini de scris, diverse maşini de uz casnic, jucării, cărucioare etc., precum şi la confecţionarea segmenţilor pentru pistoanele compresoarelor, la a căror utilizare este exclusă folosirea uleiurilor minerale sau a altor materiale ca mediu lubrifiant.

2. STUDIUL EXPERIMENTAL

2.1. STANDUL EXPERIMENTAL ŞI MATERIALELE STUDIATE

Observaţiile şi concluziile cuprinse în lucrarea de faţă au fost obţinute pe un stand experimental prevăzut cu balanţă pendulară hidrostatică pentru măsurarea momentului de frecare [9], lagărul experimental propriu-zis $\left(D = 60 \text{ mm}, \ \lambda = \frac{b}{D} = 0{,}665\right)$ avînd axul confecţionat din oţel-carbon (C_{60}), iar bucşa din teflon placat pe aluminiu, grosimea stratului de teflon fiind de $\sim 0{,}2$ mm. Această bucşă era introdusă într-o carcasă de oţel cu diametrul exterior $D_A = 194$ mm.

Acest stand experimental a permis varierea turaţiei şi sarcinii, măsurarea temperaturii atît în zona încărcată a lagărului, cît şi la suprafaţa axului din oţel, precum şi măsurarea cu precizie a momentului de frecare. S-a lucrat în condiţiile frecării de alunecare uscată (fără lubrifiant).

Suprafaţa bucşelor din teflon a prezentat iniţial o rugozitate medie $R_a \cong 0{,}2 - 0{,}3$ μ, măsurată după metoda Forster folosind un aparat tip Leitz-Wetzlar (vezi şi fig. 10*a*).

Temperatura s-a măsurat în bucşă cu ajutorul unui termocuplu, introdus în carcasa lagărului pînă la distanţa de $\sim 0{,}5$ mm faţă de stratul de teflon în zona cu încărcare maximă, iar la capătul de oţel cu ajutorul unui pirometru electric plasat central la extremitatea liberă a axului, la o distanţă de ~ 7 cm faţă de lagărul propriu-zis.

S-a urmărit în special influența sarcinii, a vitezei de lucru, implicit a temperaturii, și a timpului de funcționare asupra comportării la frecare uscată a acestui cuplu teflon/oțel, folosit sub forma unui lagăr cu alunecare de dimensiuni relativ mari.

2.2. OBSERVAȚII EXPERIMENTALE

2..2.1 Rodajul

Procesul inițial de păsuire a două suprafețe conjugate în mișcare relativă își menține importanța și în cazul suprafețelor din material plastic și pare să aibă o evoluție proprie, mult influențată de condițiile de funcționare.

Evoluția curbelor din figura 1 indică un timp relativ lung (circa 6 ore) necesar rodajului cuplului teflon/oțel, fie după un repaus în funcționare, fie după modificarea uneia dintre condițiile de lucru (turația sau sarcina) chiar numai accidental.

Pînă la $P \cong 400$ kgf și $n \cong 40$ rot/min, acest timp de rodaj a fost aproximativ același, indiferent de sarcina și de viteza de lucru, stabilizarea procesului de frecare în urma acestui proces inițial de rodaj fiind însoțită și de stabilizarea regimului termic, respectiv a temperaturii lagărului.

Evoluția curbelor din figura 1 arată o scădere aproape liniară a coeficientului de frecare în primele două ore de lucru, scăderea devenind apoi mai lentă pînă la stabilizare. Pentru acest lagăr de teflon/oțel nu s-au înregistrat coeficienți de frecare sub valoarea $f = 0{,}1$ (obținuți la sarcini mari $P > 500$ kgf), pentru cele mai multe condiții de lucru considerate normale acesta oscilînd între 0,17 și 0,22.

La sarcini superioare lui $P \cong 400$ kgf, timpul de rodaj rămîne aproximativ același, dar stabilizarea procesului de frecare nu mai are loc, coeficientul de frecare începînd din nou să crească, la început mai puțin și apoi din ce în ce mai repede, conducînd la supraîncălzirea lagărului și apoi la gripajul suprafețelor (curba f obținută la $P \cong 500$ kgf și $n \cong$ $\cong 20$ rot/min, fig. 1). Aceeași comportare s-a observat și în cazul creșterii turației (curba f obținută la $n \cong 40$, fig. 1). La sarcini și la viteze ridicate, procesul de frecare este de la început în creștere continuă (curba f obținută la $P \cong 500$ kgf și $n \cong 40$ rot/min, fig. 1), conducînd rapid la griparea suprafețelor.

S-a observat de asemenea că după ce cuplul teflon/oțel a lucrat la o viteză mai ridicată, stabilizarea procesului de frecare la o viteză mai scăzută necesită un timp mult mai îndelungat.

În continuare, experiențele au arătat că timpul de repaus influențează destul de puțin comportarea ulterioară a cuplului și că îndepărtarea din cînd în cînd a produselor de uzură de pe suprafețele de lucru contribuie simțitor la îmbunătățirea comportării ulterioare a acestora, respectiv la reducerea frecării dintre ele (curbele din figura 2). Această operație este necesară mai ales după o perioadă de funcționare mai lungă sau după o funcționare accidentală în condiții necorespunzătoare.

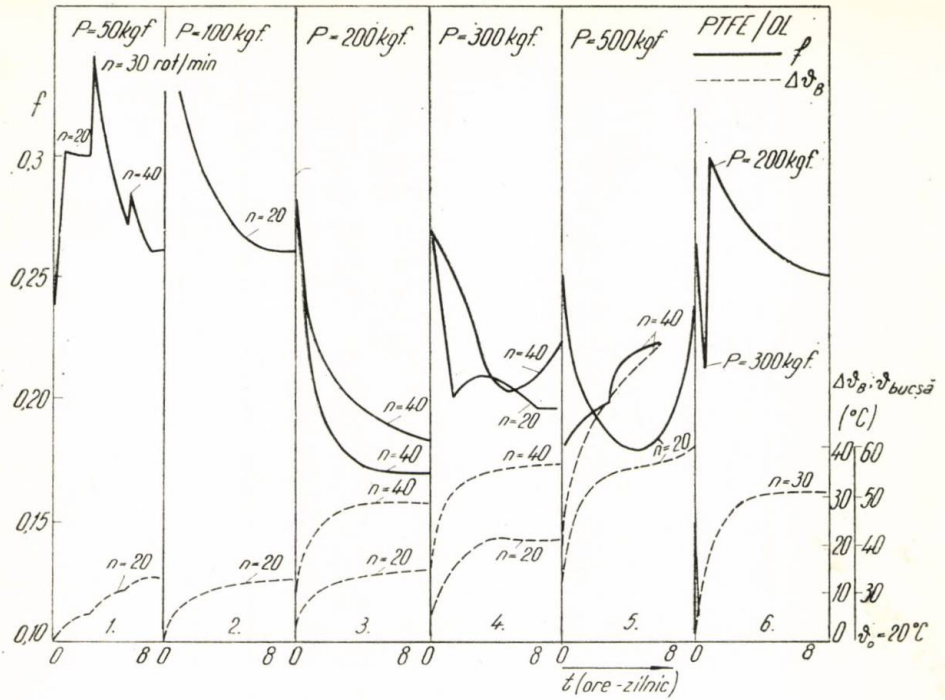


Fig. 1. — Variația coeficientului de frecare (f) și a temperaturii lagărului (ϑ) în timpul probelor zilnice pentru diverse condiții de funcționare uscată (fără lubrifiant) în cazul cuplului teflon/oțel studiat.

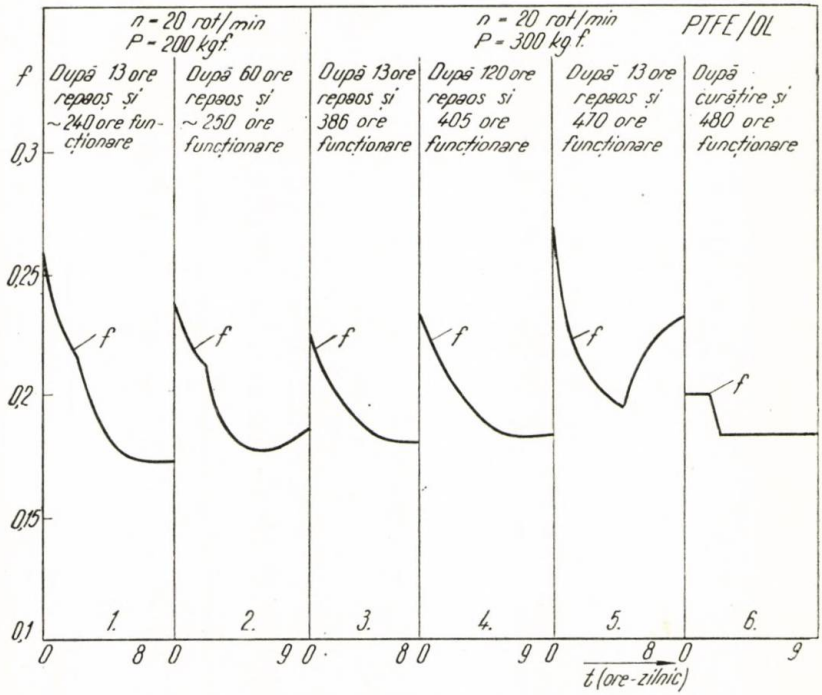


Fig. 2. — Influența timpului de repaus și a îndepărtării produselor de uzură asupra procesului ulterior de frecare al aceluiași cuplu teflon/oțel.

2.2.2. Influența sarcinii

Curbele F_r din figura 3 indică o dependență exponențială a forței de frecare față de sarcina normală aplicată (P), $F_r \cong P^x$, exponentul x variind în cazul acestei curbe între limitele $0{,}67 < x < 0{,}725$.

Tabela 2

n rot/min	P kgf	$F_r \cong P^x$ kgf	x	f	ϑ_L °C	Observații
20	↓ 50 100 ↓ 200 ↑ 300 400	↓ 15,4 26,9 ↑ 33,0 59,0 78,0	↓ 0,7 0,71 ↑ 0,67 0,715 0,725	↓ 0,3 0,26 ↑ 0,17 0,192 0,195	↓ 26 35 ↑ 37 50 62	
20	400	95	0,76	0,4	71	gripaj *)

*) Acest cuplu teflon/oțel lucrase deja la $n \cong 40$ rot/min și $P \cong 400$ kgf.

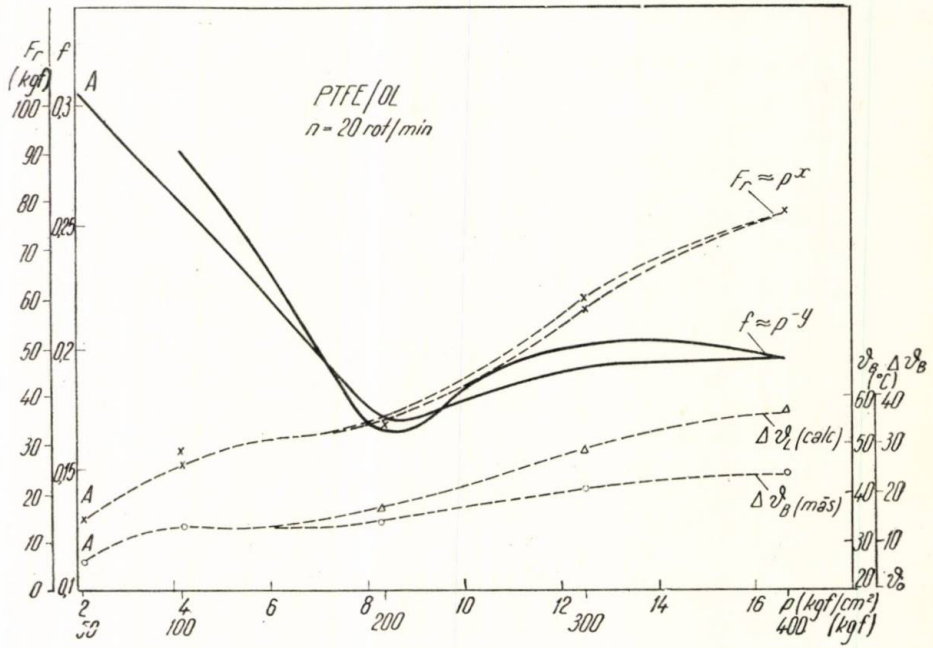


Fig. 3. — Influența sarcinii în procesul frecării de alunecare uscată (fără lubrifiant) a cuplului teflon/oțel.

În tabela 2 sînt redate aceste valori pentru o evoluție crescătoare și descrescătoare a sarcinii P la o turație constantă $n \cong 20$ rot/min ($v \cong$ $\cong 6{,}28$ cm/s).

Atît curbele din figura 3, cît şi valorile din tabela 2 nu arată o influenţă importantă a sarcinii aplicate (pînă la $P \cong 400$ kgf şi pentru $n \cong 20$ rot/min) asupra comportării ulterioare a cuplului teflon/oţel. Valoarea $x \cong 0{,}67 \cong \frac{2}{3}$ corespunde unei comportări pur elastice a suprafeţelor în zona de frecare, valorile crescătoare ale lui x indicînd intensificarea deformaţiilor plastice în această zonă, a transferului de material pe suprafaţa de oţel opusă şi a întreruperii reţelei cristaline a polimerului. La valori ale lui $x > \sim 0{,}75$, procesele plastice au devenit predominante, conducînd în final la gripajul suprafeţelor (vezi tabela 2)*).

Variaţia coeficientului de frecare f în funcţie de sarcina P (curba f din figura 3) arată aceeaşi evoluţie, $f \cong P^{-\nu}$. D. Tabor [10] a găsit experimental în zona de tranziţie de la comportarea elastică spre cea plastică în cazul plasticelor, în general, $y = 0{,}2 \ldots 0{,}3$, iar pentru p.t.f.e., în particular, $y \cong 0{,}2$. Aproximativ aceeaşi valoare a rezultat şi din experienţele de faţă, valoarea $y = 0{,}25$ indicînd deja un proces de gripaj (vezi tabela 2*), cu consecinţe ale deformaţiei plastice destul de accentuate (în cazul unui proces intens de gripaj, valoarea lui y a scăzut, de asemenea la $y \cong 0{,}2$).

După un timp mai îndelungat de funcţionare, cînd suprafaţa de lucru a polimerului a suferit modificări apreciabile în urma procesului de uzură, iar coeficientul de frecare s-a ridicat la $f \geqslant 0{,}25$, a crescut şi influenţa sarcinii asupra comportării ulterioare a lagărului.

S-a observat de asemenea la toate cuplurile teflon/oţel încercate că valoarea coeficientului de frecare scade mult cînd sarcina creşte apreciabil, fără ca aceasta să aibă urmări favorabile asupra comportării lor ulterioare, adică asupra duratei lor de funcţionare.

2.2.3. Influenţa vitezei şi valabilitatea criteriului (p. v.)

Influenţa negativă a creşterii vitezei asupra comportării la frecarea de alunecare a materialelor termoplastice, şi în special a p.t.f.e., a fost observată experimental de numeroşi cercetători [1], [4] — [6] ş.a., rezultatele experimentale şi concluziile obţinute pe diverse modele simple de laborator fiind confirmate şi în studiul de faţă.

Evoluţia curbelor din figura 4 (variaţia coeficientului de frecare f în funcţie de produsul (p.v.) la sarcina $P \cong 200$ kgf = const), precum şi datele din tabela 3, indică o mai mare dependenţă a proceselor de frecare faţă de viteza de lucru decît faţă de sarcina aplicată.

Cele mai mici valori ale coeficientului de frecare ($f \cong 0{,}16 \ldots 0{,}19$) au fost obţinute la un produs p.v. $\cong 45 \ldots 100$ kgf/cm^2. cm/s, turaţia

*) De altfel, Archard, citat de mai mulţi autori [2], [5] ş.a., a arătat că este greu să se imagineze un proces de deformaţie care să dea valori ale parametrului x din relaţia $F_r \cong P^*$ în afara limitelor $0{,}67 < x < 1$, valoarea $x = 1$ indicînd comportarea pur plastică a suprafeţelor. Aceasta ca urmare a faptului că la sarcini moderate deformaţia suprafeţelor este proporţională cu $P^{2/3}$ şi deci forţa de frecare F_r va fi de asemenea proporţională cu $P^{2/3}$, iar coeficientul de frecare va fi $f = \frac{Fr}{P} = \frac{P^{2/3}}{P^1} \cong P^{-1/3}$. Pe măsură ce deformaţia suprafeţelor are loc din ce în ce mai mult în domeniul plastic, aria reală de contact devine direct proporţională cu exponentul x, tinzînd către valoarea 1 ($x \to 1$); $x = 1$ indică deci o deformaţie pur plastică.

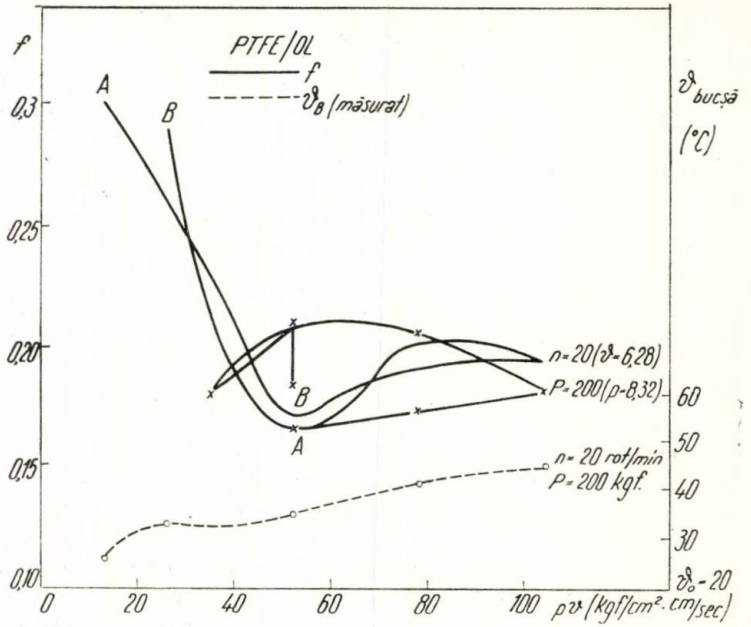


Fig. 4. — Variația coeficientului de frecare și a temperaturii bucșei de teflon în funcție de produsul p.v.

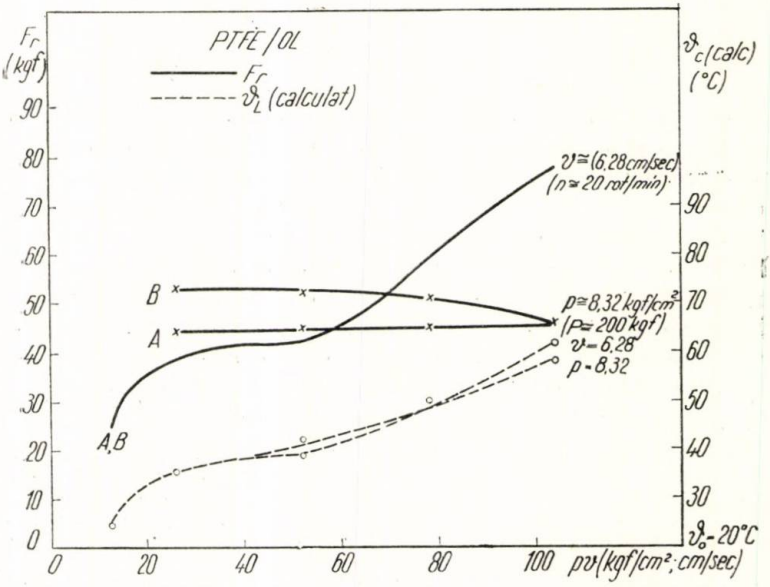


Fig. 5. — Variația forței de frecare și a temperaturii lagărului ϑ_L (calculată) în funcție de produsul p.v.

optimă pentru acest lagăr experimental fiind însă $n \cong 20$ rot/min, sarcina aplicată putînd varia între limite mai largi : $200 \leqslant P_{kgf} \leqslant 300$ (p.v. $\cong$ $\cong 50 \ldots 80$ kgf/cm^2.cm/s).

Tabela 3

P kgf	n rot/min	$F_r \cong P^x$ kgf		x		f		ϑ_{exp} °C		Observaţia
200	↓13,4 20 ↑ ↓34 40	34,4 34,0 ↓35,0 36,0	43 ↑42 41	0,67 0,67 ↓0,67 0,675	0,715 ↑0,71 0,7	0,17 0,17 ↓0,175 0,18	0,22 ↑0,21 0,205	34 37 ↓48 59	35 ↑43 52	
400	40	103		0,775		0,3		100		gripaj

Evoluţia crescătoare şi descrescătoare a curbelor din figura 4, arătînd că pentru aceeaşi valoare a lui p.v. influenţa vitezei este mult mai importantă, subliniază că produsul (p.v.) folosit pentru stabilirea condiţiilor optime de funcţionare în regim de alunecare a acestor materiale, fără a se indica fie turaţia, fie sarcina de lucru, nu poate fi acceptat drept criteriu de apreciere a comportării lor în practică, deoarece poate conduce la concluzii eronate.

Diferenţele dintre valorile coeficientului de frecare (figura 4), respectiv ale forţei de frecare (fig. 5) la $P = 200$ kgf = const şi la turaţii crescătoare şi descrescătoare, nu au fost observate la $n \cong 20$ rot/min=const şi sarcină variabilă (vezi fig. 3 şi tabela 2), deşi pentru aceleaşi valori ale lui (p.v.) frecarea la $n \cong 20$ rot/min şi $P = 300$ şi 400 kgf era mult mai mare, după cum se vede din curbele din figura 5.

În plus, temperatura lagărului, aproximativ aceeaşi în ambele cazuri (vezi curbele întrerupte din figura 5), confirmă că acest histerezis observat la valorile descrescătoare ale turaţiei este datorat numai influenţei vitezei de alunecare. Influenţa negativă a vitezei de alunecare asupra comportării la frecare a p.t.f.e. a fost explicată prin modificările reologice suferite de acest polimer în stratul superficial sub efectul vitezelor ridicate, comportare care rezultă din înseşi proprietăţile lui cristaline : p.t.f.e., fiind un polimer liniar semicristalin caracterizat printr-o mare flexibilitate a lanţului molecular, arată o comportare viscoelastică la turaţii ridicate [1], [4], [6] ş.a.*)

F. P. Bowden [1] a considerat că frecarea plasticelor este guvernată în general de proprietăţile lor elastice şi că, prin urmare, energia elastică pierdută (histerezis elastic) de aceste materiale în timpul frecării constituie sursa primară a lucrului de frecare, deci în frecarea de alunecare acest lucru de frecare se va cumula cu cel de forfecare.

Markison şi Tabor, citaţi de [3], consideră însă că frecarea în cazul teflonului este datorată mai ales forfecării straturilor de polimer cristalin şi că, o dată cu creşterea vitezei de alunecare, forţa vîscoasă necesară

*) Polimerii amorfi, mai puţin flexibili, vor arăta o mai mică dependenţă a procesului de frecare faţă de viteza de alunecare, iar cei termostabili, care au structură rigidă şi sînt relativ casanţi, vor arăta cea mai mică dependenţă a frecării de viteza de lucru.

pentru a forfeca filmul de teflon creşte pînă cînd va depăşi rezistenţa legăturilor dintre cristale sau grăunţii de polimeri sinterizat; aceasta face ca, paralel cu creşterea frecării, să se intensifice şi transferul de material de pe suprafaţa acestuia pe suprafaţa de oţel conjugată.

Autorii citaţi mai sus consideră astfel că aceste cristalite mai mari conţin particule cristaline subţiri, de cîteva sute de Å grosime, care pot aluneca uşor între ele numai în condiţiile unor viteze scăzute şi la temperaturi moderate.

Într-o lucrare foarte recentă [7] privind frecarea teflonului în vacuum, Wilkens şi Kranz au arătat că în procesul de frecare moleculele lungi de p.t.f.e. se fragmentează şi produc gaze, care condensează sau reacţionează chimic cu suprafeţele metalice cu care vin în contact.

Experienţele lor au arătat că proporţia dintre concentraţia maselor moleculare gazoase rezultate (FC, F_2C, N_2, CO etc.) se schimbă în timp, fiind dependentă de natura procesului de frecare, cantitatea de gaz produsă fiind mai mare la valori ridicate ale vitezei de alunecare. Prin urmare, s-a demonstrat şi în acest mod influenţa negativă a vitezei asupra comportării la alunecare a suprafeţelor de teflon.

La valori crescătoare ale turaţiei şi la sarcini reduse, forţa de frecare a arătat însă o dependenţă liniară faţă de prima (ramurile crescătoare ale curbelor $f = f$ (p. v), respectiv $F_r = f$ (p.v.) obţinute la $P = \text{const}$ din figurile 4 şi 5).

2.2.4. Aspecte termice în lagărul teflon/oţel

Este bine cunoscut faptul că alegerea sarcinii şi a vitezei de lucru în cazul unui lagăr cu funcţionare normală în regim de frecare uscată (fără ungere) porneşte de la condiţia că acestuia nu-i este permis să se încălzească. Sarcina şi viteza optimă reprezintă deci factori importanţi care determină stabilizarea regimului termic în lagăr şi implicit durata lui de viaţă. Acest aspect capătă importanţă şi mai mare în cazul lagărelor confecţionate din materiale plastice, ca urmare a proastei lor capacităţi de a transmite căldura rezultată în procesul de frecare.

Creşterea temperaturilor în zona de frecare peste o anumită limită permite ca mişcarea termică să rupă ordinea moleculară în straturile superficiale de polimer, conducînd astfel la modificarea proceselor de frecare cu predominarea comportării plastice a polimerului şi implicit, la transfer masiv de material. În aceste condiţii, comportarea suprafeţei în cazul p.t.f.e., de exemplu, va fi determinată, după cum s-a mai spus, de proprietăţile cvasivîscoase ale filmului superficial topit, coeficientul de frecare putînd atinge valori superioare lui $f \geqslant 0{,}3$, materialul pierzîndu-şi astfel calităţile sale antifricţiune.

Ţinînd seama de proasta capacitate a teflonului de a transmite căldura generată prin frecare (valorile temperaturii măsurate în bucşă au fost întotdeauna inferioare celor măsurate pe ax, diferenţa crescînd o dată cu creşterea temperaturii), pentru determinarea temperaturii în zona de frecare s-a considerat mai întîi cazul evacuării acesteia prin axul de oţel [9], [11].

Astfel s-a considerat că pierderile prin frecare sînt egale cu căldura de frecare ce trebuie evacuată din lagăr:

$$M\omega = f\,P\,v = JQ \quad [\text{Kg m/s}], \tag{1}$$

unde M este momentul de frecare, ω viteza unghiulară, f coeficientul de frecare, P sarcina normală aplicată, v viteza periferică şi Q căldura generată prin frecare.

Această cantitate de căldură Q se transmite prin axul de oţel în mediul înconjurător atît prin conductibilitate, cît şi prin convecţie:

$$Q = Q_{cd} + Q_{cv}, \tag{2}$$

unde

$$Q_{cd} = \lambda_{\text{oţel}} \frac{\Delta\vartheta_A}{3{,}5D} \cdot \frac{\pi D^2}{4}, \tag{3}$$

iar

$$Q_{cv} = \alpha\left(\frac{\pi D^2}{4} + \pi D l\right) \cdot \Delta\vartheta_A. \tag{4}$$

Relaţia (3) a fost stabilită pe baza unui vast studiu experimental [11], în urma căruia s-a constatat că, în general, pentru acest tip de lagăr căldura se transmite prin conductibilitate pe întreaga secţiune a axului de oţel pe o distanţă de $\sim 3{,}5D$.

Deci pentru $D = 6 \cdot 10^{-2}$ m; λ oţel $\cong 5{,}9$ kg m/ms°C ($\sim$ 50 kcal/mh°C), $\alpha \cong 2$ kg m/m²s °C şi l (lungimea axului în contact direct cu aerul) $\cong 10{,}5 \cdot 10^{-2}$ m, rezultă

$$Q_{cd} \cong 1{,}33\ D \cdot \Delta\vartheta_A, \tag{5}$$

$$Q_{cv} = 1{,}77\ D \cdot \Delta\vartheta_A \tag{6}$$

şi, prin urmare,

$$M\omega = f\,P\,v \cong 2{,}1\ D \cdot \Delta\vartheta_A \cong 126\ \Delta\vartheta_A\ [\text{Kgm/s}]. \tag{7}$$

Relaţia (7) a fost controlată folosind un alt procedeu de calcul şi anume considerînd căldura rezultată în procesul de frecare (1) evacuată prin bucşă [9]. În acest caz avem

$$M\omega = fPv = \frac{\Delta\vartheta_1}{k_1} + \frac{\Delta\vartheta_2}{k_2} + \frac{\Delta\vartheta_3}{k_3} = \frac{\Delta\vartheta_B}{k}, \tag{8}$$

unde

$$\Delta\vartheta_1 = (\vartheta_{teflon} - \vartheta_{otel}) = \frac{fPv}{2\pi\lambda_{teflon} b} \ln \frac{D_1}{D} = k_1 \cdot fPv. \quad (9)$$

Pentru $\lambda_{teflon} \cong 1.10^{-2}$ kg m/ms °C ($\sim 2{,}3 \cdot 10^{-4}$ cal/cms° C, tabela 1), $D = 6 \cdot 10^{-2}$ m, $D_1 = 6{,}04 \cdot 10^{-2}$ m (grosimea stratului de teflon fiind de $\sim$ 0,2 mm), rezultă $k_1 \cong 2{,}0$.

$$\Delta\vartheta = (\vartheta_{otel} - \vartheta_{supr.}) = \frac{f\,P\,v}{2\pi\lambda_{otel} b} \ln \frac{D_A}{D_1} = k_2 \cdot fPv. \quad (10)$$

Pentru λ oțel $\cong$ 5,9 kgm/ms °C și D_A = 0,194 m (diametrul exterior al carcasei în care este montată bucșa) a rezultat $k_2 \cong 0{,}785$.

$$\Delta\vartheta_3' = (\vartheta_{supr} - \vartheta_{aer}) = \frac{f\,P\,v}{\alpha_{otel} A} = k_3 \cdot f\,Pv. \quad (11)$$

În acest caz, pentru $\alpha' \cong 2$ kg m/m²s °C și o suprafață a lagărului în contact cu aerul de $A \cong 0{,}1$ m² [9], rezultă $k_3 \cong 5$.

Prin urmare, $\Delta\vartheta_B$ din relația (8) are valoarea

$$\Delta\vartheta_B = k \cdot fPv \cong 7,785\, fPv \quad (12)$$

sau

$$fPv \cong 0{,}128\ \Delta\vartheta_B. \quad (13)$$

Deci ambele procedee au condus la rezultate aproximativ egale și se poate considera

$$\Delta\vartheta_{ax} \cong \Delta\vartheta_{bucșă} \cong \Delta\,\vartheta_{lagăr}, \quad (14)$$

iar

$$fPv \cong 0{,}127\ \Delta\vartheta_L. \quad (15)$$

Cu ajutorul valorilor momentului de frecare măsurate (după stabilizarea regimului termic în lagăr) pentru diverse condiții de sarcină și turație, s-au calculat pierderile în lagăr ($M\omega = fPv$) și apoi, cu ajutorul relației (15), diferența de temperatură ($\Delta\vartheta_L$), respectiv temperatura lagărului (ϑ_L). Cu ajutorul valorilor obținute s-a trasat curba *3* din figura 6 în comparație cu curbele *1* și *2* din aceeași figură, obținute prin reprezentarea directă a valorilor temperaturilor măsurate pe axul de oțel și, respectiv, în bucșa de teflon.

Curbele din figura 7 indică influența turației asupra temperaturii de lucru (de regim) a lagărului de teflon/oțel studiat. Se observă din evo-

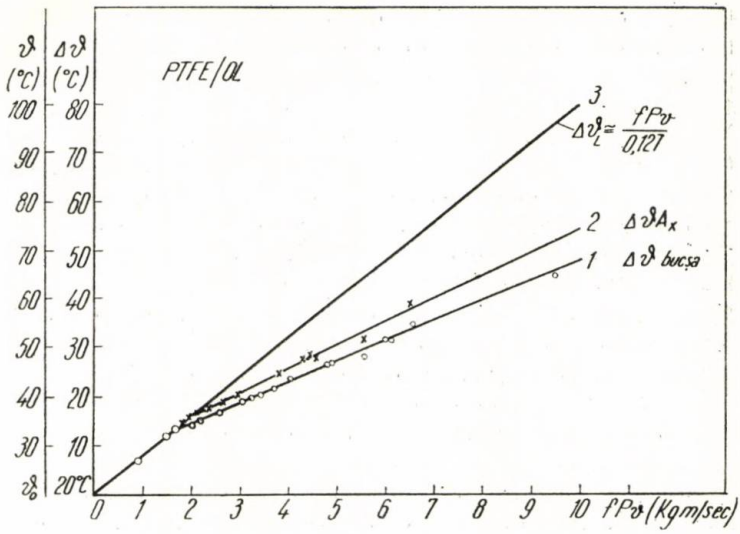


Fig. 6. — Interdependența dintre temperatură (ϑ), respectiv creșterea temperaturii ($\Delta\vartheta$), și pierderile datorite frecării (fPv) în lagărul teflon/oțel, atît pentru valorile măsurate ale temperaturii (curbele *1* și *2*), cît și pentru cele calculate (curba *3*).

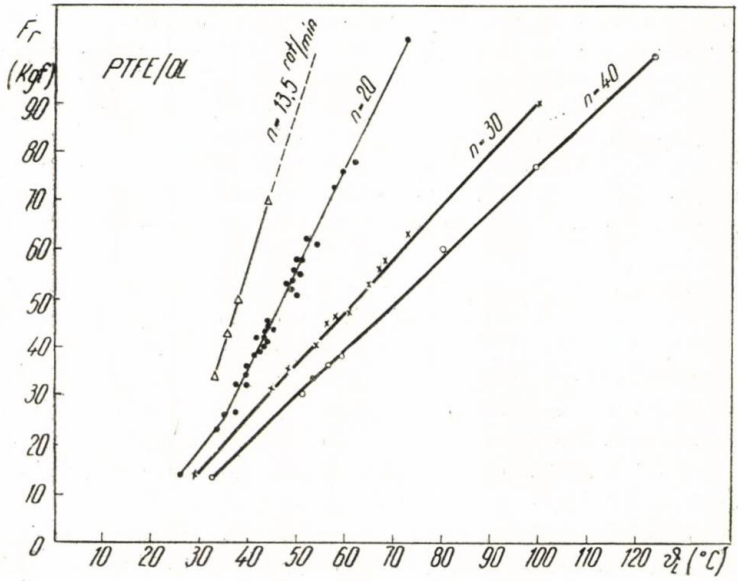


Fig. 7. — Influența vitezei de alunecare asupra stabilizării temperaturii lagărului pentru valori egale ale forței de frecare, F_r.

luția acestor curbe că, la aceleași valori ale forței de frecare (F_r), creșterea temperaturii lagărului este mai rapidă cînd turația crește, adică, la valori ale turației mult superioare valorii optime ($n \gg 20$ rot/min), temperatura lagărului se stabilizează la valori mai înalte.

La turații mai mici ($n \ll 20$ rot/min) și, respectiv, la temperaturi mai scăzute în lagăr ($\vartheta_L < 35 \div 37°C$), frecarea începe din nou să crească (vezi tabelele 2 și 3). De altfel, în tabela 1 se indică pentru teflon temperatura de 30°C ca punct de tranziție cristalină [5] și deci în jurul acestei temperaturi comportarea la alunecare a acestuia se va înrăutăți. În plus, cînd temperatura scade sub o anumită valoare-limită, începe să crească și forța vîscoasă dintre straturile de polimer angrenate în procesul de frecare și crește, bineînțeles și forța de frecare dintre ele.

Curbele din figura 7 oglindesc astfel interdependența dintre procesul de frecare, temperatură și viteză la sarcină variabilă, evidențiind saltul termic înregistrat în lagăr pentru aceeași valoare a forței de frecare, cînd viteza crește mult peste valoarea ei optimă ($n \gg 20$ rot/min). Temperatura înregistrează creșteri apreciabile, mai ales la sarcini ridicate.

Rezultă astfel că cuplul teflon/oțel lucrează în condiții bune în domeniul $35 \leqslant \vartheta_L °C \leqslant 60$, mai ales cînd această temperatură se obține prin creșterea sarcinii la valori reduse ale turației și nu invers. În cazul creșterii turației chiar la sarcini reduse, se produc în scurt timp modificări plastice profunde în suprafața de lucru a polimerului și, în final, griparea acesteia.

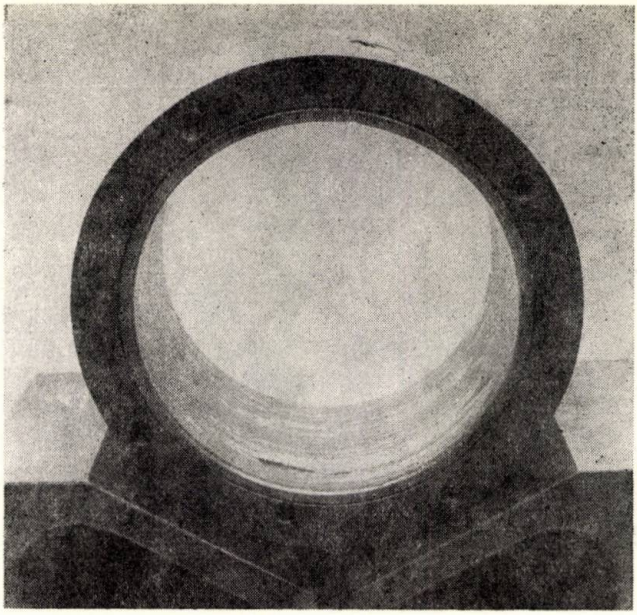
Aceste observații experimentale confirmă concluziile lui McLaren și Tabor [4] obținute pe baza unor studii microscopice privind frecarea teflonului pe sticlă, și anume că acest polimer prezintă în comportarea sa la frecarea de alunecare două regimuri de bază :

— *la viteze mari sau/și temperaturi scăzute*, frecare mare, cu transfer masiv de material și deformări plastice profunde în suprafața activă de lucru. În fotografiile din figurile 8*a* și *b*, reprezentînd suprafețele de lucru ale cuplului teflon/oțel (fig. 8*a* pentru bucșa de teflon și fig. 8*b* pentru axul de oțel) care a lucrat circa 75 de ore la $n \cong 40$ rot/min (vezi și curba *2* din figura 13), apar foarte evidente procesele plastice și transferul de material pe suprafața de oțel conjugată (fig. 8*b*). În figurile 9*a* și *b* sînt prezentate fotografiile acelorași suprafețe după îndepărtarea produselor de uzură.

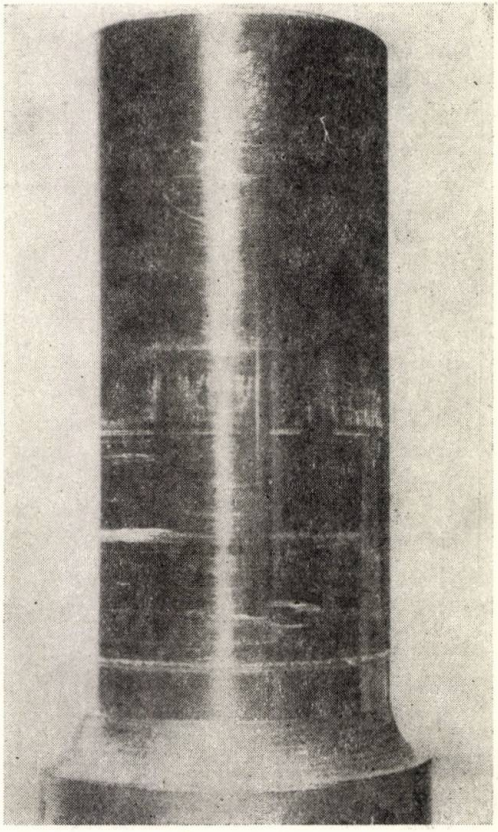
Îndepărtarea produselor de uzură a permis o mai bună evidențiere a modificărilor profunde suferite de suprafața activă a p.t.f.e. sub efectul vitezei ridicate, precum și structura orientată în direcția de alunecare a moleculelor fibroase ale acestui polimer.

Se observă de asemenea în mai multe locuri întreruperea rețelei cristaline (ruperea macromoleculelor) ca urmare a influenței negative a vitezelor ridicate (regiunea încercuită de pe suprafața de lucru a bucșei, reprezentată în fig. 9*a*).

Măsurarea rugozității suprafeței active de teflon după acest proces de frecare intensă a arătat de asemenea modificări apreciabile. În figurile 10*a* și *b* se prezintă comparativ profilogramele suprafeței aceleiași bucșe din teflon obținute înainte de funcționare (figura 10*a*) și după gripaj (fig. 10*b*). Diferența este apreciabilă ;

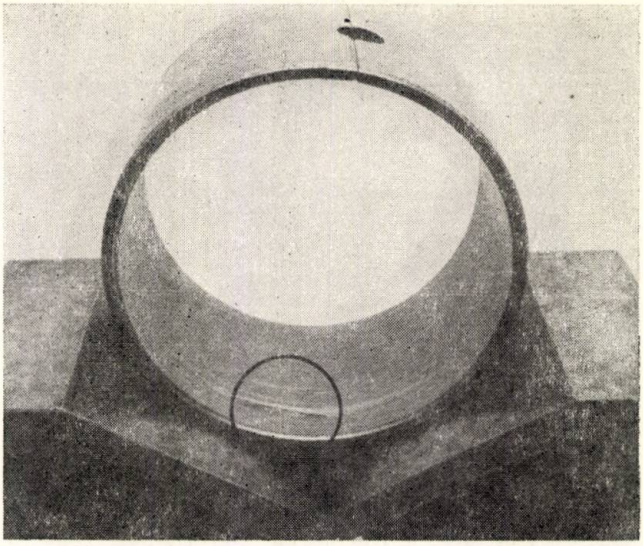


a

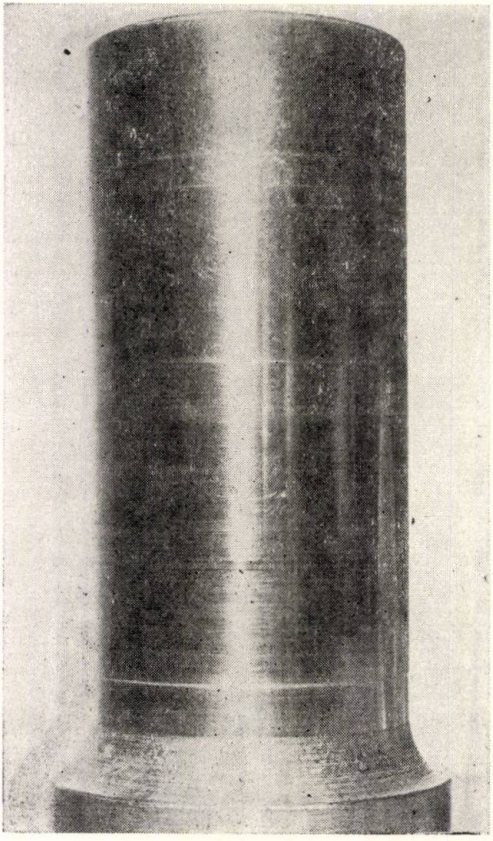


b

Fig. 8. — Aspectul suprafețelor active ale lagărului teflon/oțel după gripaj : *a* — suprafața bucșei de teflon ; *b* — suprafața axului de oțel.



a



b

Fig. 9. — Aspectul acelorași suprafețe din figura 8 după îndepărtarea produselor de uzură : *a* — suprafața bucșei ; *b* — suprafața axului.

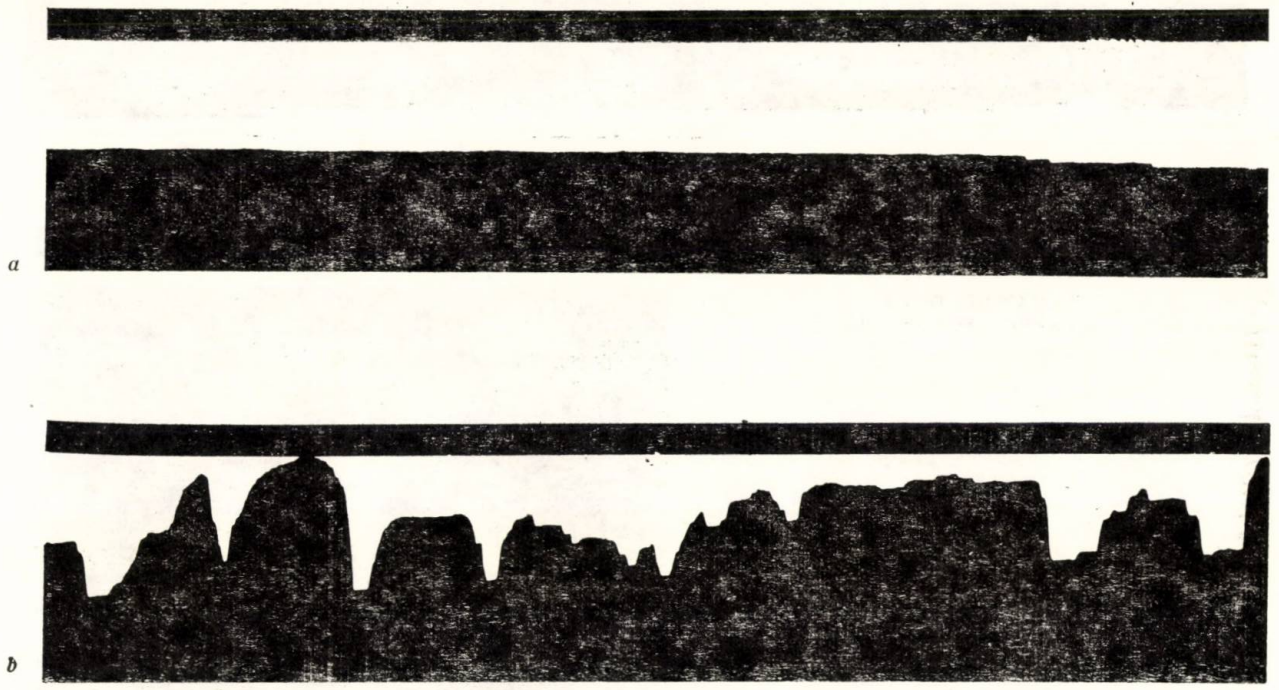


Fig. 10. — Modificarea rugozității superficiale a suprafeței active a bucșei de teflon în urma procesului de gripaj : *a* — profilograma suprafeței active a bucșei de teflon obținută înainte de funcționare ; *b* — profilograma obținută în aceeași zonă după gripaj ($\times 1\,000$).

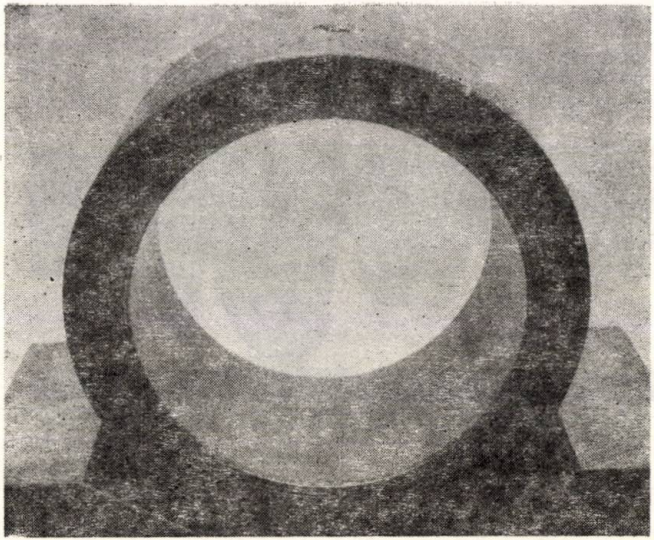
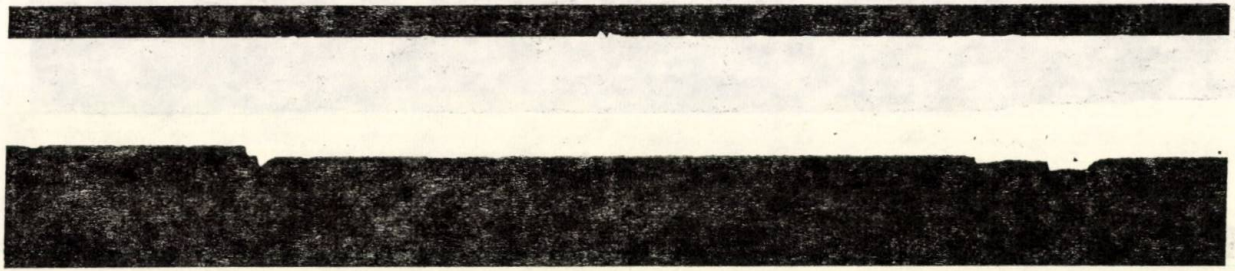


Fig. 11. — Aspectul suprafeței active a bucșei de teflon care a lucrat 500 de ore în condiții cît mai apropiate de cele optime.

Fig. 12. — Profilograma suprafeței prezentate în figura 11 (×1 000).



— *la viteze scăzute sau/și temperaturi moderate*, frecare scăzută, observîndu-se în acest caz prezența pe suprafața activă a bucșei a unui film fin de polimer, film cu o structură cristalină cu orientare pronunțată a lanțurilor lungi moleculare în sensul de alunecare.

Fotografiile din figurile 11 și 12 confirmă buna comportare a bucșei de teflon, care a funcționat în condiții optime, viteză scăzută și temperatură moderată, circa 500 ore (vezi curba *1* din figura 13). Această bucșă a lucrat în continuare pînă la circa 1 000 de ore fără să gripeze sau să prezinte uzuri apreciabile.

3. CONCLUZII PRIVIND DURATA DE FUNCȚIONARE A CUPLULUI TEFLON/OȚEL

Datele și observațiile experimentale prezentate în capitolele precedente și sintetizate în tabela 4 și în figura 13 permit tragerea cîtorva concluzii privind durata de funcționare în condiții de frecare de alunecare

Tabela 4

Nr. probei	n rot/min	P kgf	f	ϑ °C	t ore	Observații
1	20 (30)	200 (300)	0,17—0,25	60	1000	uzură normală
2	40	500	0,2—0,27	80	75	gripaj
3	40	600—1000	0,1 —0,27	90	15	gripaj
4	20, 30, 40	100—400	0,17—0,4	80	140	gripaj

uscată (fără lubrifiant) a cuplurilor de teflon/oțel în funcție de parametrii funcționali, viteză și sarcină, aleși.

Dacă cuplul teflon/oțel nu lucrează în condiții cît mai apropiate de cele optime, atunci durata sa de funcționare va fi cu atît mai scurtă, cu cît viteza (mai ales) și sarcina vor fi mai ridicate (vezi tabela 4, curbele *2* și *3* din figura 13 și fotografiile din figurile 8 și 9), influența sarcinii fiind însă mai importantă la viteze mai mari.

Curbele *2* și *3* din figura 13 reprezintă evoluția în timp a procesului de frecare în cazul bucșelor de teflon, care au lucrat atît la sarcini, cît și la viteze ridicate. Durata de funcționare a acestor bucșe a fost de numai ~ 75 și, respectiv, ~ 15 ore.

Bucșa 4 (tabela 4) a lucrat aproximativ timpi egali la cele trei viteze și $P < 400$ kgf și totuși după ~ 140 de ore de lucru a fost scoasă din funcțiune ca urmare a deteriorării severe a suprafeței active printr-un proces intens de gripaj.

Bucșa care a lucrat în condiții apropiate de cele optime, $n = 20$ rot/min (accidental $n \cong 30$ rot/min) și $200 < P < 300$ kgf, a prezentat cea mai lungă durată de funcționare, $\sim 1\,000$ de ore (> 225 km) (curba *1* din figura 13 și microfotografiile din figurile 11 și 12). După 1 000 de ore de funcționare, suprafața activă a acestei bucșe s-a prezentat încă foarte bine, arătînd o uzură normală fără modificări plastice profunde sau ruperi ale rețelei cristaline în suprafața polimerului. Aceasta indică o comportare similară bună în aceleași condiții de lucru și mai departe.

Se observă deci că scoaterea din funcțiune a bucșelor de p.t.f.e. nu se datorează de fapt uzurii, ca pierdere de material, ci acelor modificări și deformații plastice superficiale care conduc în final la deteriorarea gravă a suprafeței prin gripaj. Gripajul, chiar pe porțiuni reduse, poate

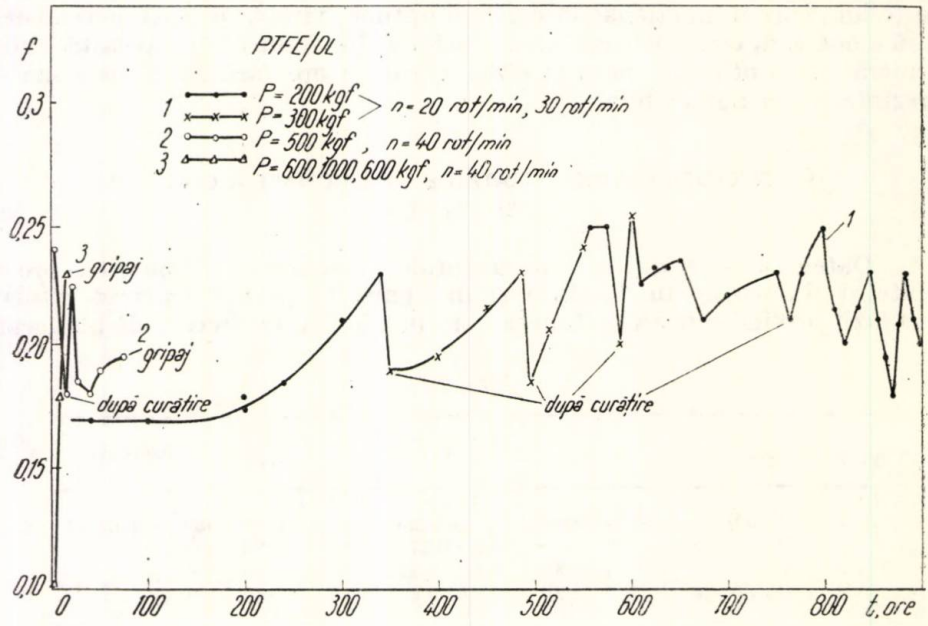


Fig. 13- — Influența condițiilor de lucru asupra duratei de funcționare a lagărului teflon/oțel exprimată prin variația coeficientului de frecare în funcție de timpul total de funcționare.

duce la creșteri excesive ale coeficientului de frecare și scoaterea din uz a cuplului teflon/oțel (probele *2*, *3* și din tabela 4).

Durata de funcționare a bucșelor de teflon poate fi prelungită dacă, după cum se poate vedea din curbele din figurile 2 și 13, se îndepărtează din timp în timp de pe suprafețele active produsele de uzură rezultate în urma proceselor plastice care pot avea loc în straturile superficiale ale acestui polimer în timpul procesului de frecare. După îndepărtarea acestor produse, coeficientul de frecare scade, iar procesul de frecare capătă un caracter mult mai stabil (vezi curbele *6* din figura 2 și, respectiv, *1* din figura 13).

Primită la redacție la 9 octomqrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. F. P. Bowden, D. Tabor, *The Friction and Lubrication of Solids*, vol. II, Oxford at the Clarendon Press, p. 216, 245, 256, și 477 1964.
2. F. P. Bowden, *Friction of Solids*, Wear, *1* (1957/1958).
3. K. G. McLaren D. Tabor, *The friction and deformation properties of irradiated PTFE*, Wear, *8*, 3 — 7, (1965).

4. K. G. McLaren, D. Tabor, *Friction of Polymers at Engineering Speeds: influence of speed, temperature and lubricants*, Wear, *8*, 79 — 83 (1965).
5. P. H. Pinchbeck, *A Review of Plastic Bearings*, Wear, *5*, 85 (1962).
6. R. P. Steijn, *Sliding Experiments with PTFE*, ASLE Trans., *11*, 235 — 247 (1968).
7. J. W. Wilkens and O. Kranz, *The Formation of Gases to the Sliding Friction of Teflon on Steel in Ultrahigh Vacuum*, Wear, *15*, 215 — 227 (1970).
8. E. J. Robbins, *Dry Lubrication*, Tribology **3**, *2*, p. 84 (1970).
9. G. Vogelpohl, *Betriebssichere Gleitlager*, vol. 1. Berlin — Heidelberg — New York Springer-Verlag, 1967, p. 77, 94, 141 și 147.
10. D. Tabor, *Friction and Wear of Synthetic Fibers*, Wear, *1*, 7, (1957/1958).
11. J. E. Wenger, *Belastungs- und Erwärmungsgrenzen bei Trockenlauflagern*, Schmiertechnik, **12**, *3*, 137, (1965).

CONTRIBUȚII LA ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR DE DIRECȚIE ALE AUTOVEHICULELOR RUTIERE [1)]

de N. I. MANOLESCU, P. ALEXANDRU

Institutul politehnic București
Institutul politehnic Brașov

Lucrarea, pe baza analizei fenomenelor de virare neutră, subvirare și supravirare cauzate de raportul unghiurilor de derivă a roților, sistematizează diferitele propuneri de legi analitice sau grafice recomandate a fi realizate de trapezul de direcție al autovehiculelor pe roți. Se propune o lege analitică simplă care să corecteze condiția geometrică a lui Ackermann, ținînd cont de deplasarea înspre înainte a centrului de viraj, datorat unghiurilor de derivă și comportării dinamice a vehiculului la parcurgerea unei curbe, făcîndu-se totodată comparația cu alte recomandări. Alegînd metoda analitică de studiu bazată pe rezolvarea conturului poligonal închis, se face studiul cinematic al trapezului de direcție nedivizat, plan și spațial, posterior și anterior osiei din față, determinîndu-se legile de transmitere. Pentru evaluarea erorilor se face un calcul numeric al unui caz concret, evidențiindu-se concluzii extrem de utile.

1. ÎNSCRIEREA AUTOVEHICULULUI ÎN CURBĂ

Deplasarea autovehiculului pe parcurs curbiliniu impune ca rularea roților să se facă pe traiectorii concentrice în jurul aceluiași centru de curbură, adică normalele la traiectoria roților să se intersecteze în centru unic de viraj. Notînd cu θ_i unghiul de bracare al roții directoare din interiorul curbei și cu θ_e unghiul de bracare al roții directoare din exteriorul curbei, se deduc relațiile (1) și (2), cunoscute sub denumirea de *condiția geometrică* a lui Ackermann [7], [9], [20], [30], [35], [41]:

$$\operatorname{ctg}\theta_e - \operatorname{ctg}\theta_i = \frac{b}{L}, \tag{1}$$

$$\operatorname{ctg}\theta_e - \operatorname{ctg}\theta_i = \frac{2b}{L}, \tag{2}$$

[1)] Din lucrarea susținută la a XII-a sesiune științifică a Institutului politehnic București, mai 1969.

relații care dau condiția înscrierii perfecte în curbă pentru vehiculul cu o punte directoare, respectiv cu două punți directoare (b fiind distanța dintre pivoții roților la nivelul osiei și L baza, adică distanța dintre osiile vehiculului). Pentru realizarea acestei legi se folosește cunoscutul trapez Jeantaud-Ackermann [8], [27], ale cărei laturi neparalele în poziția

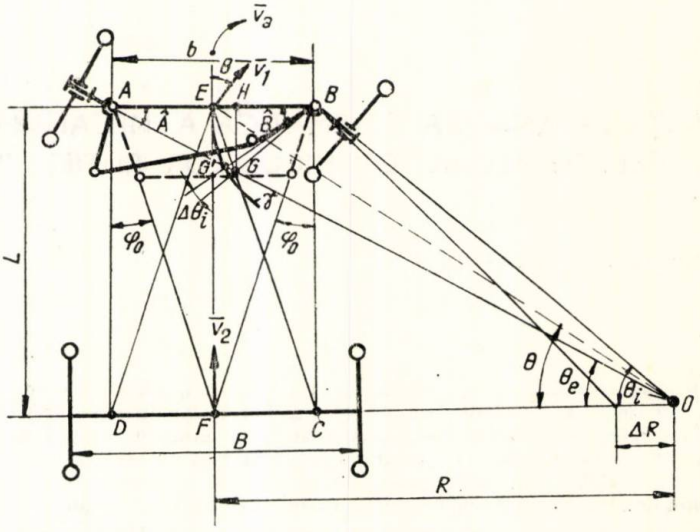


Fig. 1. — Schema întoarcerii perfecte a vehiculului cu roți rigide.

neutră (fig. 1, linii întrerupte) se intersectează la mijlocul osiei din spate a vehiculului, deci fac cu axa longitudinală unghiul φ_0 dat de următoarea relație (pentru o singură punte directoare):

$$\operatorname{tg}\varphi_0 = \frac{b}{2L}. \tag{3}$$

Este de asemenea cunoscut că Elșner [11] repune condiția (1) sub forma intersecției dreptelor duse din pivoții A și B sub unghiurile $\hat{A} = \theta_e$ și $\hat{B} = \theta_i$ în punctul G pe diagonala $\overline{EC}$ a semibazei și că, în realitate, trapezul Jeantaud nu îndeplinește matematic această condiție. Astfel, dreapta dusă sub unghiul θ_{ip}, rezultat practic din cinematica mecanismului, va intersecta dreapta $\overline{AO}$ în punctul G'. Se remarcă diferența dintre unghiul practic realizat θ_{ip} și cel teoretic θ_{it}, $\Delta\theta_i = \theta_{ip} - \theta_{it}$ sub forma *curbei erorilor unghiulare* γ, eroare admisă de Kamm [27] la $\pm$ $\pm$ 1,5°. Alți autori [37] recomandă drept criteriu de apreciere a direcției *curba erorilor de patinare*, dată de diferența razelor de viraj practice și teoretice $\Delta R = R_p - R_t$, valorile teoretice deducîndu-se după condiția Ackermann.

Considerațiile de mai sus sînt matematic exacte numai în cazul roților rigide transversal. În realitate, datorită faptului că pneul posedă și o *elasticitate transversală*, roata va rula înclinat față de planul său

longitudinal cu unghiurile de deviere laterală δ_1 pentru roata din față și, respectiv, δ_2 pentru roata din spate [4], [15], [17], [20], [41]. În această situație, relația lui Ackermann pierde din conținut, impunîndu-se studiul unghiurilor de virare în funcție de deriva roților și necesitatea de a găsi o alternativă la ecuația lui Ackermann în baza căreia să se producă o

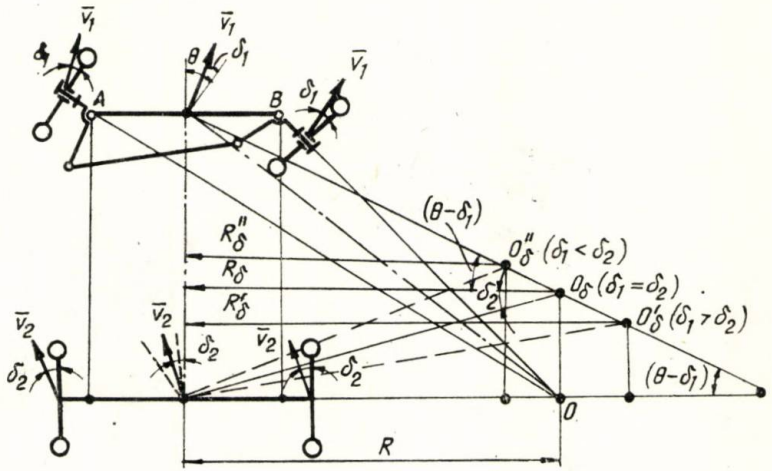


Fig. 2. — Schema vehiculului cu roți elastice transversal.

mai bună exploatare a caracteristicilor elastice ale cauciucurilor, o mai bună manevrabilitate și o reducere la minimum a efectului de derapare-patinare.

Pentru a vedea sensul în care trebuie corectată relația (1), trebuie cunoscută influența unghiurilor de derivă asupra mișcării vehiculului. După cum $\delta_1 \leqslant \delta_2$ (fig. 2), razele de viraj devin mai mari sau mai mici decît cele din cazul teoretic al roților rigide, conform relației

$$R_\delta = \frac{L}{\operatorname{tg}(\theta - \delta_1) + \operatorname{tg}\delta_2} \approx \frac{L}{\theta + (\delta_2 - \delta_1)}. \tag{4}$$

În figura 2 se arată sugestiv cele trei cazuri posibile prin menținerea constantă a unghiului δ_1 și varierea unghiului δ_2 în ipoteza că ambele roți ale unei osii se deformează cu același unghi. Astfel, pentru

$\delta_2 = \delta_1 \Rightarrow 0 \to 0_\delta$, $\quad R \to R_\delta = R$ — virare normală (neutră);

$\delta_2 < \delta_1 \Rightarrow 0 \to 0'_\delta$, $\quad R \to R'_\delta > R$ — virare insuficientă (subvirare);

$\delta_2 > \delta_1 \Rightarrow 0 \to 0''_\delta$, $\quad R \to R''_\delta < R$ — virare excesivă (supravirare).

Pentru înscrierea pe aceeași traiectorie, roțile trebuie bracate cu un unghi mai mare, $\theta_1 > \theta$, sau mai mic, $\theta_2 < \theta$, după cum vehiculul are capacitate de virare *insuficientă* sau *excesivă*. Acest lucru este arătat

în figura 3 pentru mersul în arc de cerc de rază R, vehiculul cu capacitate de virare normală (fig. 3*a*) corespunzînd şi cu cazul roţilor rigide. La vehiculul cu caracteristică de subvirare, puntea din faţă derapează spre exteriorul curbei, iar vehiculul refuză să se înscrie în curbă şi tinde să-şi menţină traiectoria rectilinie (fig. 3*b*). La vehiculul cu caracteristică de supra-

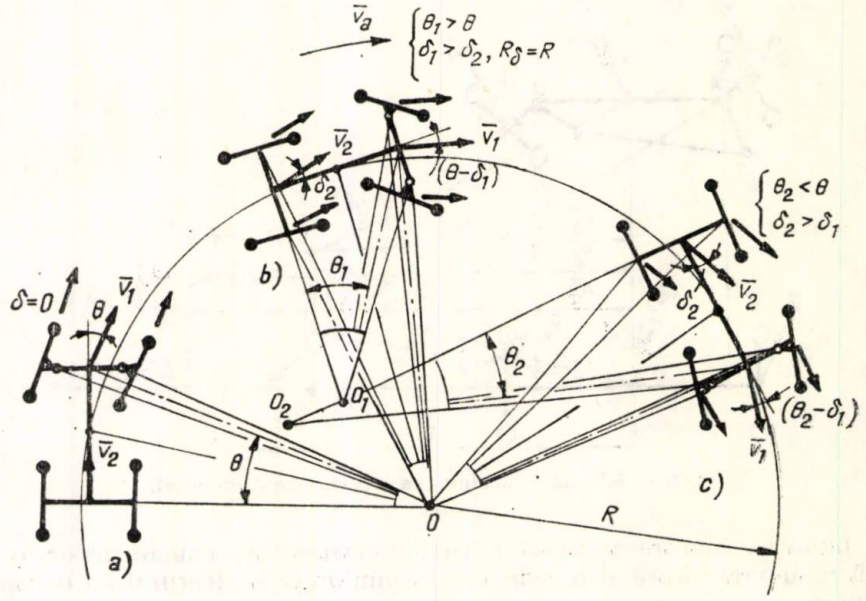


Fig. 3. — Schema parcurgerii unei curbe circulare de către vehiculele cu capacitate de virare normală (*a*), insuficientă (*b*) şi excesivă (*c*).

virare, puntea din spate derapează spre exteriorul curbei şi vehiculul tinde să părăsească traiectoria impusă spre interiorul curbei (fig. 3*c*). La tendinţa de supravirare se poate asigura mersul în cerc chiar pentru unghiul de bracaj $\theta_2 = 0$, datorită forţelor centrifuge care fac ca $\delta_2 > \delta_1$. Se precizează că schema din figura 3 corespunde comportării staţionare a vehiculului, adică mersul în cerc cu viteză constantă.

În afara definiţiei clasice a *sub-* şi *supravirării*, lucrările [5], [15] se opresc la denumirea de comandă proprie, definită în corespondenţă cu schimbarea vitezei de rotaţie a vehiculului în jurul axei verticale pentru mersul circular în funcţie de acceleraţia centripetă. *Sub-* şi *supracomanda* devin etalon de apreciere a comportării dinamice a vehiculului în curbă la bracarea roţilor directoare. Sensibilitatea autovehiculului la bracarea roţilor scade pentru vehicule subcomandate (subcomanda critică apare la refuzul definitiv de a se înscrie în curbă) şi creşte la vehicule supracomandate (supracomanda critică apare la descreşterea continuă a razei de virare după o spirală pentru care în lucrările [4], [10] se determină viteza critică). Parametrul principal de apreciere a capacităţii autovehiculului de a suferi modificări ale traiectoriei devine raportul dintre viteza unghiulară de rotire a axei longitudinale a vehiculului şi unghiul de bracaj al roţilor de

direcție sau raportul razelor de viraj R_δ/R la intrarea și la ieșirea din curbă, caracterizînd astfel întîrzierea sau avansul reacției autovehiculului față de bracarea roților [5], [17], [26]. În lucrarea [15], pentru aprecierea comenzii proprii se propune ca în loc să se înregistreze diferența unghiu-

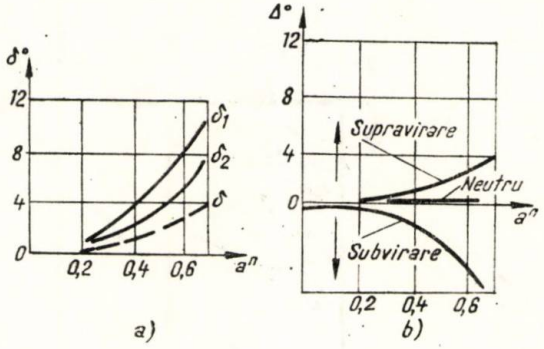


Fig. 4. — Grafice de apreciere cantitativă a capacității de virare prin calcularea diferenței $\delta = \delta_1 - \delta_2$ (*a*) sau $\Delta = 2\,\delta_2 - \delta_1$ (*b*) [15].

lară $\delta = \delta_1 - \delta_2$ (fig. 4*a*) să se înregistreze diferența $\Delta = \delta_2 - (\delta_1 - \delta_2) = 2\,\delta_2 - \delta_1$, care are avantajul că indică clar cele trei caracteristici (fig. 4*b*).

Studiul sub- și supravirării indică aspecte interesante și în cazul mersului rectiliniu sub acțiunea vîntului lateral. După cum metacentrul c_v (punctul de aplicație al forței vîntului $\overline{F}_v$) este înaintea sau în spatele centrului reacțiunilor c_δ (punctul în care aplicarea forței rezultante duce la deviații egale pentru cele două roți), rezultă $\delta_1 \gtrless \delta_2$, conform figurii 5 [4], [20], [41]:

$c_v \equiv c_\delta \Rightarrow \delta_1 = \delta_2, O_\delta$ la infinit pe o perpendiculară la $\overline{V}_1 \| \overline{V}_2$;

$c_v \equiv c'_v \Rightarrow \delta_1 > \delta_2, O'_\delta$ în partea opusă forței vîntului $\overline{F}_v$;

$c_v \equiv c''_v \Rightarrow \delta_1 < \delta_2, O''_\delta$ în partea din care bate vîntul.

Dacă în cazul virării neutre vehiculul se mișcă rectiliniu, dar înclinat față de direcția inițială, în cazul subvirării deplasarea este curbilinie în sensul indicat de forța $\overline{F}_v$, iar în cazul supravirării deplasarea curbilinie este în direcție contrară sensului forței $\overline{F}_v$ (fig. 5). Se vede că la subvirare forța de inerție $\overline{F}_i$ micșorează efectul forței $\overline{F}_v$, iar în cazul supravirării forța $\overline{F}_i$ mărește efectul forței $\overline{F}_v$, deci mărește deviațiile, putînd duce la pierderea stabilității. Și aici efectele virajului punții din față sînt conexe cu proprietățile de viraj ale osiei din spate.

Cazul real este în realitate mult mai complex, deoarece roțile unei osii nu se deformează egal. Forța centrifugă care ia naștere în cazul mișcării în curbă încarcă suplimentar roțile din exteriorul curbei; reducînd greutatea, deci și forța laterală pe roțile din interior, avîn loc astfel o

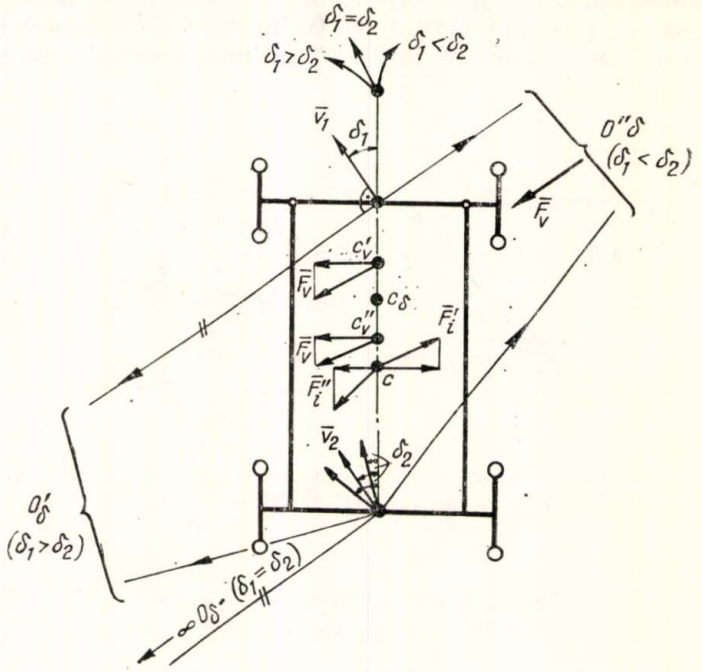


Fig. 5. — Schema deviației vehiculului de la mersul rectiliniu în cazul vîntului lateral.

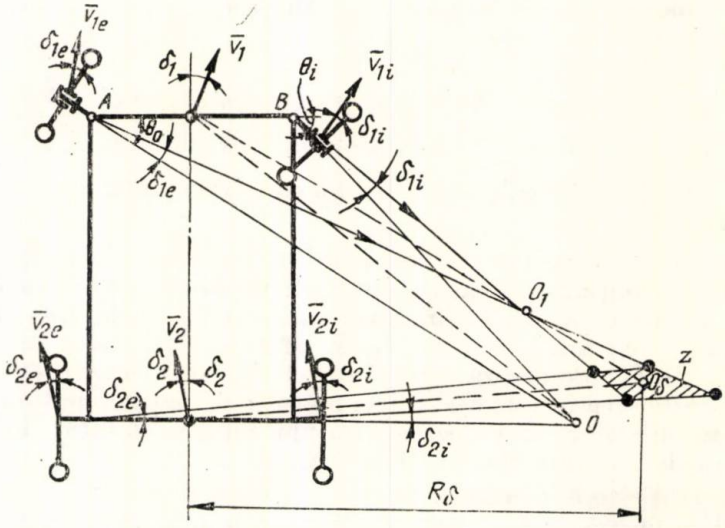


Fig. 6. — Schema virajului real al autovehiculului.

transferare de greutate între roțile unei osii, ceea ce duce la o deviație mai mare a roților din exterior $\delta_e > \delta_i$ (fig. 6). Centrul de viraj nu va fi nici O (roți rigide), nici O_1 (corespunzător roților din față), ci O_δ situat în interiorul zonei de viraj Z. Această zonă depinde de vîntul lateral, carac-

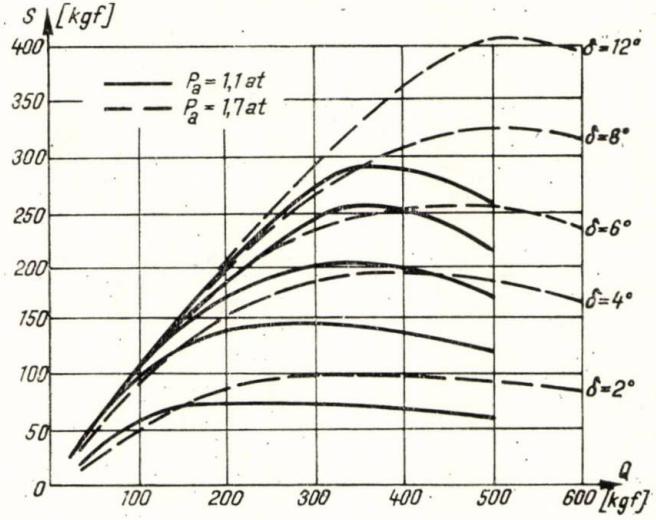


Fig. 7. — Diagrama forță laterală — sarcină pe roată [25].

teristicile și presiunea pneurilor, caracteristicile drumului, viteza autovehiculului, repartiția greutății pe punți. Experimental se obișnuiește să se ridice diagrama forței laterale S în funcție de sarcina pe roată Q pentru diferite unghiuri de derivă δ (fig. 7), diagramă care se preferă liniarizată în cazul calculelor numerice. Această liniarizare duce, în fond, la limitarea pentru unghiuri mici de deviație și bracare.

Aceste constatări calitative sînt necesar să fie introduse cantitativ în legea de transmitere care trebuie realizată de către trapezul de direcție. Problema este cu atît mai dificilă, cu cît localizarea zonei de viraj Z depinde de o serie de factori independenți de direcție și de autovehicul, factori cu acțiune variabilă în timpul circulației. De aceea au apărut mai multe *propuneri* privind condiția cinematică $\theta_i = f(\theta_e)$, care trebuie asigurată de către trapezul de direcție. Propunerile se dau în comparație cu bracarea paralelă $\theta_i = \theta_e$ [14] și cu bracarea Ackermann (curba 5, respectiv 1 din fig. 8):

— recomandarea Gough-Shearer [21]: unghiuri de derivă egale a roților din față în poziție bracată, reprezentată prin curba 2 (fig. 8);

— recomandarea Fiala [18]: forțe de frecare egale la roțile din față, reprezentată prin curba *3* (forță laterală/greut. roată = const);

— recomandarea Hasselgruber [22]: puteri de frecare egale la roțile directoare, reprezentată prin curba *4*.

Se vede că, în timp ce Gough-Fiala propun ca legea de transmitere să fie mai apropiată de cea liniară decît condiția geometrică statică a lui Ackermann, Hasselgruber propune o lege care să accentueze bracajul

roții din interiorul curbei în raport cu roata exterioară. Această dispersare, cauzată de faptul că este imposibil ca direcția să fie ideală pentru orice condiții de circulație, drum și pneuri, duce în mod inevitabil la concluzia că

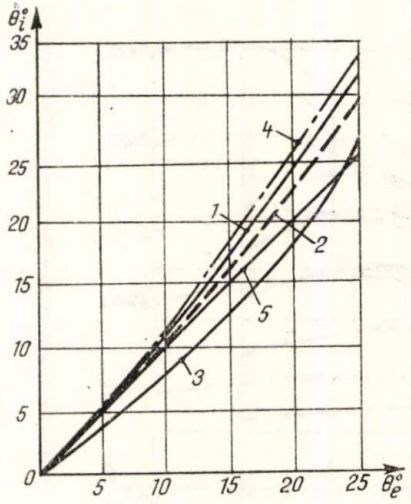


Fig. 8. — Legi de transmitere recomandate pentru trapezul de direcție de către Ackermann (curba *1*) Gough-Shearer (curba *2*), Fiala (curba *3*) Hasselgruber (curba *4*) și bracajele egale(curba *5*) [23].

trebuie făcute compromisuri. Propunerea Gough-Fialo, care se realizează prin micșorarea unghiului φ_0 (fig. 1), este mai convenabilă la vehicule de vi-

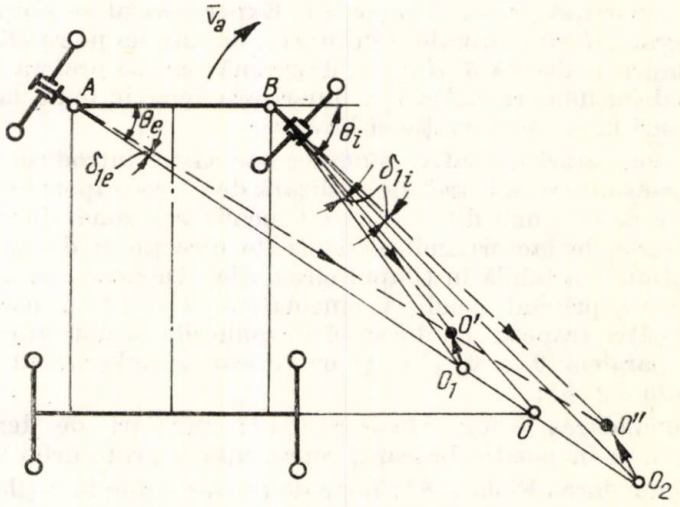


Fig. 9. — Schema deplasării în față a centrului de viraj.

teză, mărind stabilitatea. Propunerea Hasselgruber, care se realizează prin mărirea unghiului φ_0, este convenabilă pentru vehicule de transport, micșorînd uzura pneurilor. Pe de altă parte însă, la valori b/L mici, ceea ce

corespund vehiculelor grele, din relația (1) se deduce că $\theta_i \to \theta_e$, deci bracaje egale, adică o schemă a direcției care înlocuiește trapezul cu un paralelogram.

Încercări de obținere a unei relații matematice pentru legea dinamică a direcției s-au făcut și de către Henker [25] prin ecuația (5), Forkel [19] prin ecuația (6), sau Arelli [3]:

$$\theta_i = C_1 + C_2\theta_e + C_3\theta_e^2, \tag{5}$$

$$\operatorname{ctg}\theta_i = \operatorname{ctg}\theta_e \frac{\operatorname{ctg}\delta - C}{\operatorname{ctg}\delta + C} - 2C\frac{\operatorname{ctg}\delta}{\operatorname{ctg}\delta + C}. \tag{6}$$

Coeficienții $C_1 \cong 0{,}6 \ldots 0{,}7$; $C_2 \cong 0{,}8 \ldots 0{,}9$; $C_3 \cong 0{,}01$; $C = \frac{b}{2L}$; $\delta = \delta_i = \delta_e$ se apreciază după unghiurile de derivă determinate prin experiențe (care trebuie bine supravegheate). Pe de altă parte, este dificilă aprecierea comportării de comandă a direcției pe baza încercărilor de parcurs, deoarece rezultatele nu furnizează o imagine cuprinzătoare cu privire la mișcarea vehiculului în diferite condiții de conducere.

Considerațiile de mai sus permit concluzii importante privind alegerea legii optime pe care trebuie s-o realizeze trapezul de direcție, ținînd seama de comportarea dinamică a vehiculului (prin unghiurile de derivă); se observă (fig. 6) că centrul de viraj $O\delta$ se deplasează înaintea punctului C. Această deplasare arată că la comportarea statică centrul de viraj se poate lua în urma osiei din spate, astfel ca în timpul parcurgerii dinamice a curbei el să se deplaseze spre linia osiei din spate. Considerînd $\delta_2 = 0$ ca urmare a faptului că la marea majoritate a vehiculelor $\delta_2 < \delta_1$ (atît datorită poziției înaintate a metacentrului, cît și faptului că roțile din spate sînt deseori mai rigide), se vede că pentru $\delta_1 > 0$, dacă linia fuzetelor se intersectează în O_1, prin deriva cauciucurilor $O_1 \to O'$ mărind patinarea roților din spate), iar dacă linia fuzetelor se intersectează în O_2, datorită derivei, $O_2 \to O''$, micșorînd patinarea (fig. 9). Deci este necesar ca legea impusă să fie situată între cea a bracajelor egale, $\theta_i = \theta_e$ (paralelogram de direcție), și cea a bracajelor Ackermann, $\theta_i = \operatorname{arc\,ctg}\left(\operatorname{ctg}\theta_e - \frac{b}{L}\right)$, deci în concordanță cu propunerea Gough.

Deoarece relațiile (5) și (6) sînt complicate ca formă, deși nu pot prinde întreaga complexitate a fenomenului, propunem înlocuirea legii Ackermann, printr-o lege care, deși tot atît de simplă, ține seama de deplasarea înainte a centrului de viraj. Legea propusă de autori pentru trapezul de direcție al vehiculelor cu puntea din față directoare este cea dată de relația (7) în cazul că toate roțile sînt indentice și de relația (8) pentru vehicule echipate cu roți duble în spate:

$$\operatorname{ctg}\theta_e - \operatorname{ctg}\theta_i = \frac{b}{1{,}25L}, \tag{7}$$

$$\operatorname{ctg}\theta_e - \operatorname{ctg}\theta_i = \frac{b}{1{,}2L}. \tag{8}$$

Pentru comparație, în figura 10 se trasează legea propusă (7), (8) împreună cu legea Ackermann (1) și legea Gough, conform calculelor din tabela 1, alegînd $\frac{b}{L} = 0{,}54$.

Tabela 1

Condiția virării

θ_e^0	ctg θ_e	ctg θ_i			θ_i^0			
		relația (1)	relația (7)	relația (8)	relația (1)	relația (7)	relația (8)	relația Gough
5°	11,430	10,890	10,990	10,980	5°15′	5°15′	5°15′	6°10′
10°	5,671	5,131	5,239	5,221	11°	10°50′	10°50′	10°20′
15°	3,732	3,192	3,300	3,282	17°20′	16°50′	16°55′	16°20′
20°	2,747	2,207	2,315	2,297	24°10′	23°20′	23°30′	22°45′
25°	2,144	1,604	1,712	1,694	32°	30°20′	30°30′	30°00′
30°	1,732	1,192	1,300	1,282	40°	37°50′	37°50′	37°

După cum se știe, pivoții în jurul cărora se rotesc fuzetele roților directoare nu sînt dispuși verticali, ci *înclinați* cu unghiurile de fugă β_0 și de

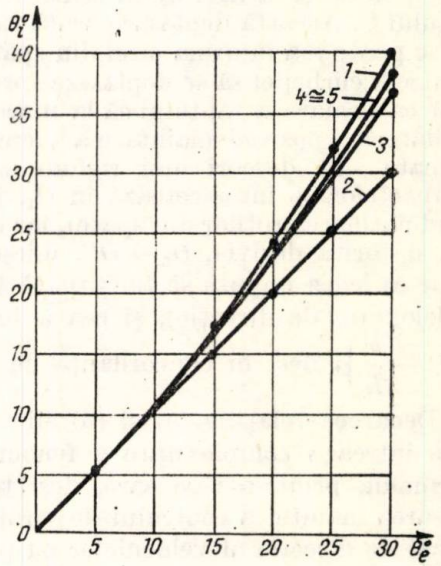


Fig. 10. — Diagramă de comparație între legea propusă de autor (curbele *4* și *5*) și legile Ackermann (curba *1*), Gough-Shearer (curba *3*) și bracaje egale (curba *2*).

înclinare transversală δ_0 (fig. 17). De asemenea, fuzetele care corespund axei roților sînt înclinate înainte și în jos, realizînd unghiurile de cădere α_0 și de convergență δ_0 ale roților. Trebuie precizată influența acestor unghiuri asupra legii impuse. Unghiul de convergență, face ca legea (1) sau (7), (8), $\theta_i = f(\theta_e)$, să se transforme în legea $\theta_i - \gamma_0 = f(\theta_e) + \gamma_0$,

adică $\theta_i = f(\theta_e) + 2\gamma_0$. Această corecție nu este însă necesară, deoarece unghiul γ_0 se alege tocmai pentru anularea jocurilor din articulații, astfel ca în timpul mersului rectiliniu roțile să ruleze paralel. Unghiul de cădere nu modifică proiecția fuzetei în planul orizontal, deci nu are influență asupra legii impuse. Unghiul de fugă schimbă planul de mișcare al trapezului de direcție dintr-unul orizontal în unul înclinat, trapezul rămînînd mecanism plan. Prin rotirea roții în jurul pivotului înclinat cu unghiul de fugă se modifică unghiul de cădere, cinematica mecanismului, ca și legea impusă, nesuferind vreo transformare. Singurul unghi care modifică caracterul de mecanism plan este unghiul de înclinare laterală a pivotului, lucru nesesizat de alți autori. Ca atare, trebuie ca legea impusă să fie comparată cu legea pe care o realizează trapezul de direcție spațial-real și nu cu legea trapezului ipotetic-plan.

2. ANALIZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR DE DIRECȚIE CU TRAPEZ NEDIVIZAT

Din domeniul stabilirii legii de transmitere pe care trebuie s-o realizeze mecanismele de direcție, este necesar studiul posibilităților de realizare a legii impuse. Mecanismul destinat asigurării legii de bracare a roților este, în fond, doar trapezul de direcție. În concordanță cu suspensia vehiculului, mecanismul de direcție poate fi cu o bară transversală (fig. 11),

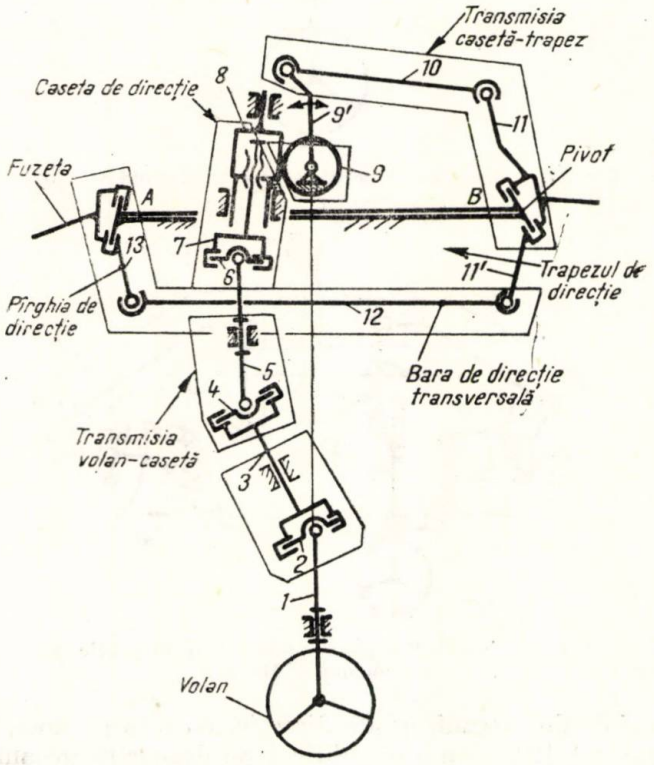


Fig. 11. — Sistemul de direcție al tractorului U—651.

cu două bare transversale şi o pîrghie oscilantă (fig. 12), cu trei bare transversale şi două pîrghii oscilante (fig. 13), cu cremalieră (fig. 14), cum

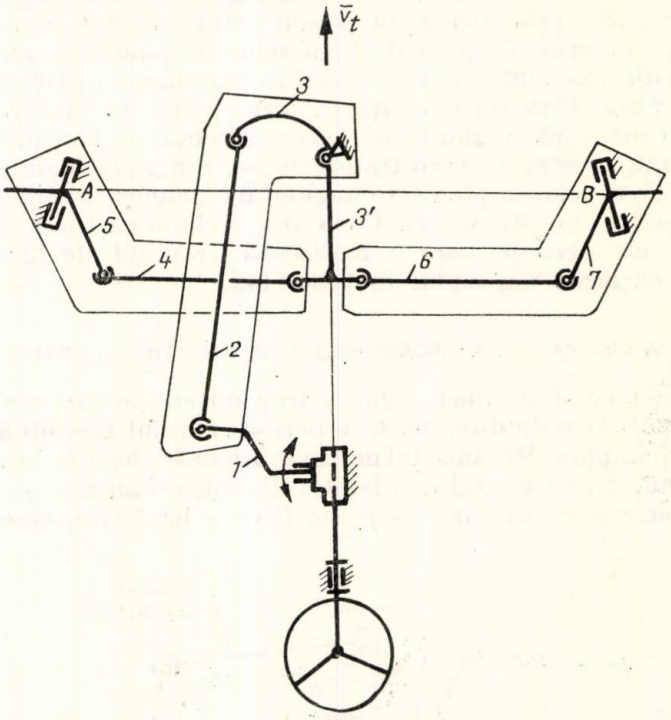


Fig. 12. — Mecanismul de direcţie al tractorului U—400.

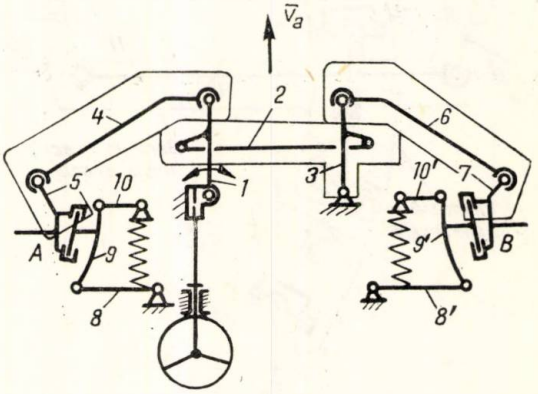


Fig. 13. — Mecanismul de direcţie şi suspensie al automobilului M—21.

şi tipuri speciale de mecanisme de direcţie, ca cele pe două punţi directoare (fig. 15) [1], [2]. Prin linii subţiri s-au despărţit mecanismele reprezentate în grupe cinematice assurice. Se impune stabilirea legii analitice

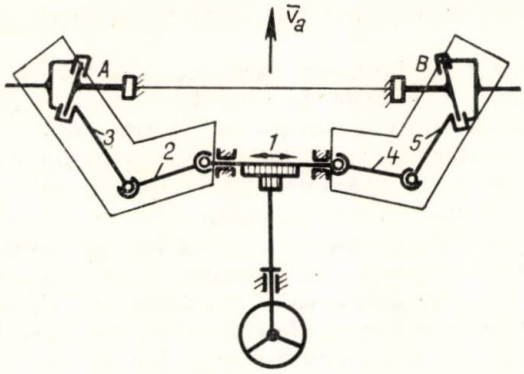


Fig. 14. — Mecanism de direcție cu cremalieră.

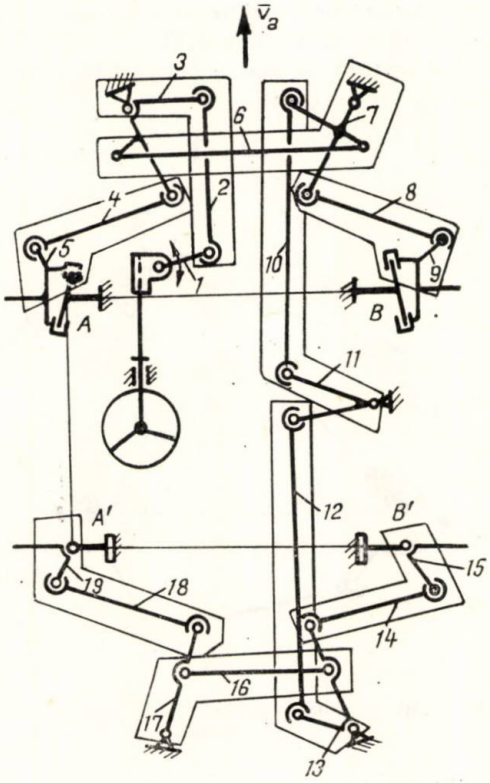


Fig. 15. — Sistem de direcție pe două punți directoare.

a trapezului de direcție cu scopul comparării cu legea impusă (7), (8) și al aprecierii posibilităților de modificare pentru ca suprapunerea lor să fie cît mai exactă.

Trebuie precizat că lucrările care tratează trapezul de direcție ca un mecanism spațial sînt extrem de rare. Astfel lucrările [12], [39], abordează trapezul spațial prin metoda proiecției ortogonale, iar lucrarea [19] utilizează geometria sferică, rezultînd expresii complicate. Lipsește o lucrare care să trateze unitar mecanismele de direcție printr-o metodă care să poată fi extinsă comod la mecanismele de direcție cu mai multe bare transversale. Deziderateie de mai sus considerăm că se îndeplinesc în cele ce urmează. Studiul cinematic al mecanismelor spațiale s-a dezvoltat intens în ultimii ani, dar aplicarea în domeniul construcțiilor de mașini este încă redusă. Se remarcă lucrările [32], [36], care sistematizează metodele de studiu cinematic al mecanismelor și dau indicații privind alegerea lor. Metodele utilizate sînt vectoriale [43], matriceale [31], geometrice [13], pe baza analizei armonice [6], a funcțiilor de transmitere [40] și a sistemelor conjugate [42]. Mecanismul folosit aproape în exclusivitate ca parte componentă a sistemului de direcție este mecanismul patrulater spațial de familia zero în diverse combinații.

De aceea este necesar mai întîi o scurtă prezentare a *mecanismului patrulater spațial* cu două articulații cilindrice (cuple de clasa 5-a) și cu două articulații sferice (cuple de clasa 3-a), care constituie generalizarea

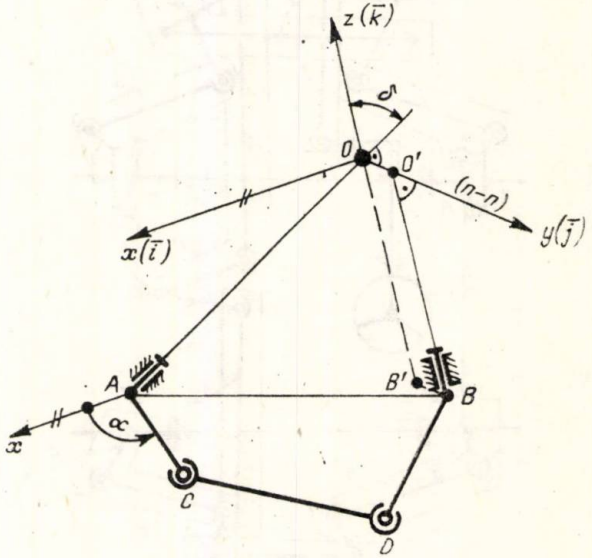


Fig. 16. — Mecanismul patrulater spațial cu articulații cilindrice și sferice.

mecanismului patrulater plan și care se bucură de cîteva proprietăți importante, ca simplitatea construcției, adaptabilitatea geometrică, grad de mobilitate pasiv [24]. Alegerea axelor de coordonate trebuie făcută judicios, pentru ca rezolvarea să fie comodă, relațiile analitice simple și

trecerea la mecanismul plan să fie directă [29]. Astfel este comodă orientarea unei axe de-a lungul articulației cilindrice a unui element, a doua axă după normala comună a articulațiilor cilindrice și a treia corespunzător sistemului triortogonal, originea sistemului fiind la intersecția normalei comune cu axa elementului conducător (fig. 16).

Reprezentarea s-a făcut astfel ca mecanismul să fie cît mai apropiat de trapezul de direcție nedivizat. Analiza cinematică a tuturor schemelor de mecanisme de direcție ar mări mult prezenta lucrare, de aceea lucrarea își propune numai analiza trapezului de direcție nedivizat de la autovehiculele cu suspensie dependentă, restul mecanismelor făcînd obiectul unei alte lucrări. Trapezul de direcție trebuie analizat comparativ, ca meca-

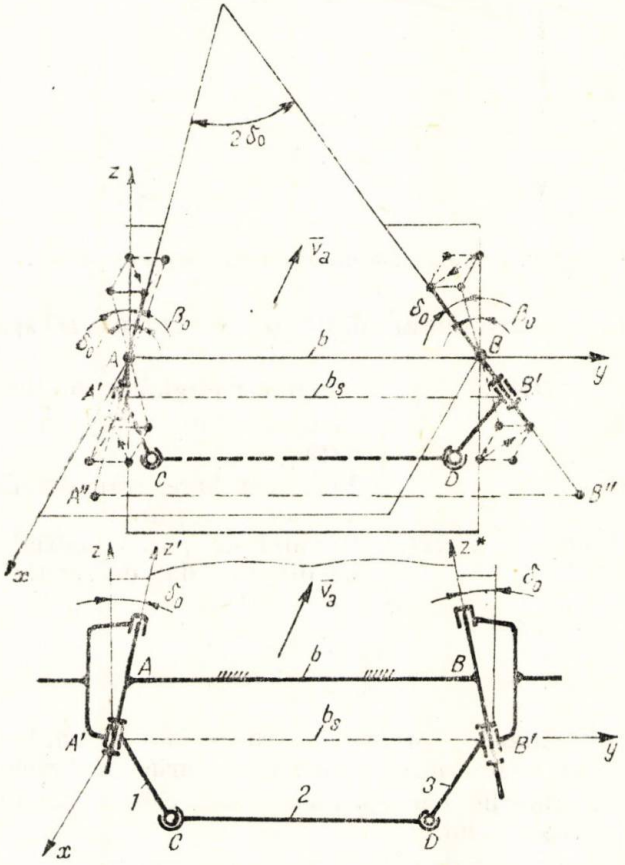


Fig. 17. — Alegerea axelor de coordonate la trapezul de direcție spațial.

nismul spațial și plan, pentru evaluarea diferenței. Axele de coordonate se aleg astfel: axa z verticală, axa x orizontală în lungul axei longitudinale a autovehiculului și axa y orizontală în lungul osiei din fața $\overline{AB}$, transpunerea la trapezul plan fiind directă (fig. 17).

Trapezul de direcție plan (reprezentat ca un mecanism plan) este un patrulater dublu balansier, destul de studiat. Se va face, totuși, analiza sa cinematică pentru a introduce parametrii caracteristici sistemului de

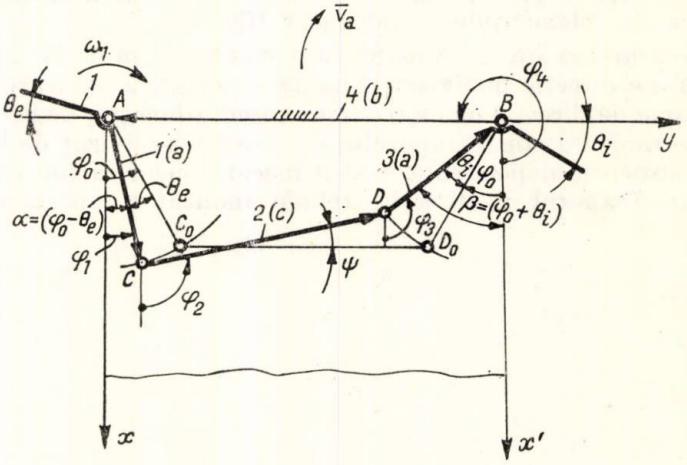


Fig. 18. — Trapezul de direcție nedivizat plan posterior.

direcție și pentru crearea unității dintre trapezul plan și cel spațial (fig. 18) Se va nota:

$a = \overline{AC} = \overline{BD}$ — lungimea pîrghiilor de direcție;

$b = \overline{AB}$ — distanța dintre pivoți, lungimea osiei din față;

$c = \overline{CD}$ — lungimea barei transversale de direcție, $c = b - 2\,a \sin\varphi_0$;

$\varphi_0 = \sphericalangle XAC_0 = \sphericalangle X'BD_0$ — unghiul de poziție inițial al pîrghiilor de direcție, dat de relația

$$\sin\varphi_0 = \frac{b-c}{2a};$$

θ_e, θ_i — unghiurile curente de rotire ale pîrghiilor de direcție dinspre exteriorul și interiorul curbei (unghiurile de bracare);

α, β — unghiurile curente făcute de pîrghiile de direcție cu axă longitudinală a vehiculului.

Se alege ca metodă de studiu cea vectorială, metodă care constă în rezolvarea conturului vectorial închis de către elementele unui ciclu independent, deoarece teoria mecanismelor sferice conduc la expresii complicate [19], iar metoda proiecției ortogonale [12], [39] este neindicată deoarece introduce unghiul de fugă (care nu are nici un rol în cinematica trapezului). Ecuația de poziție a conturului închis este dată de relația

$$\Sigma\bar{l}_i = \bar{l}_1 + \bar{l}_2 + \bar{l}_3 + \bar{l}_4 = 0 = a\bar{u}_1 + c\bar{u}_2 + a\bar{u}_3 + b\bar{u}_4, \qquad (9)$$

unde sînt cunoscute lungimile a, b, c și unghiurile $\varphi_1 = \alpha = \varphi_0 - \theta_i$ (parametru independent), $\varphi_4 = \frac{3\pi}{2}$. Necunoscutele poziționale sînt unghiurile

$$\varphi_2 = \frac{\pi}{2} + \psi, \quad \varphi_3 = \pi - \beta = \pi - (\varphi_0 + \theta_i),$$

cu sensul de măsurare de la axa x pozitivă în sens trigonometric.

Versorii de poziție ai elementelor sînt dați de expresiile

$$\bar{u}_1 = \bar{i}\cos\alpha + \bar{j}\sin\alpha; \quad \bar{u}_2 = -\bar{i}\sin\psi + \bar{j}\cos\psi; \quad \bar{u}_3 = -\bar{i}\cos\beta + \bar{j}\sin\beta;$$
$$\bar{u}_4 = -\bar{j}$$

și ecuația de poziție (9), ridicată la pătrat, devine

$$a^2 + a^2 + b^2 - c^2 + 2a^2\bar{u}_1\bar{u}_3 + 2ab\bar{u}_1\bar{u}_4 + 2ab\bar{u}_3\bar{u}_4 = 0.$$

Produsurile versorilor din ecuație au expresiile

$$\bar{u}_1\bar{u}_3 = -\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta; \quad \bar{u}_1\bar{u}_4 = -\sin\alpha; \quad \bar{u}_3\bar{u}_4 = -\sin\beta,$$

iar ecuația de poziție, în care se introduc notațiile

$$A = 2a^2 + b^2 - c^2 - 2ab\sin\alpha, \; -B = 2a^2\cos\alpha, \; C = 2a(a\sin\alpha - b),$$

devine o ecuație în sin β și cos β:

$$A + B\cdot\cos\beta + C\cdot\sin\beta = 0. \tag{10}$$

Notînd sin $\beta = x$ și cos $\beta = y$, rezultă sistemul

$$Cx - By + A = 0,$$
$$x^2 + y^2 = 1,$$

de unde se deduce poziția pîrghiei 3 dinspre interiorul curbei, adică unghiul β:

$$\cos\beta = y = \cos(\varphi_0 + \theta_i) = -\cos\varphi_3 = \frac{A\cdot B + c\sqrt{B^2 + C^2 - A^2}}{B^2 + C^2}, \tag{11}$$

aceeași relație cu cea din lucrările [34], [43] pentru cazul general și care depinde de parametrii a,b,c ai trapezului $\left(\frac{a}{b} \text{ și } \frac{c}{b}\right)$. Poziția barei transversale 2 rezultă aflînd versorul $\bar{u}_2$:

$$\bar{u}_2 = -\bar{i}\sin\psi + \bar{j}\cos\psi = -\frac{a\bar{u}_1 + a\bar{u}_3 + b\bar{u}_4}{C} =$$

$$-\frac{a}{c}[(\cos\alpha - \cos\beta)\bar{i} + (\sin\alpha + \sin\beta)\bar{j}] + \frac{b}{c}\bar{j},$$

care, prin identificarea coeficienților versorului $\bar{i}$, va da

$$\sin\psi = \frac{a}{c}(\cos\alpha - \cos\beta) = -\cos\varphi_2. \tag{12}$$

Derivînd ecuația de poziție (9) în raport cu parametrul φ_1 și cunoscînd că

$$\frac{d\bar{u}i}{d\varphi_1} = \bar{e}_i \frac{d\varphi_i}{d\varphi_1}, \quad \bar{e}_i \perp \bar{u}_i,$$

rezultă ecuația cinematică

$$a\bar{e}_1 + c\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\bar{e}_2 + a\frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\bar{e}_3 = 0. \tag{13}$$

Înmulțind cu versorul $\bar{u}_2$, deoarece $\bar{u}_2\,\bar{e}_2 = 0$, se deduce ecuația

$$\bar{e}_1\,\bar{u}_2 + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\bar{e}_3\,\bar{u}_2 = 0 = \sin(\varphi_1 - \varphi_2) + \frac{d\varphi_3}{d\varphi_1}\sin(\varphi_3 - \varphi_2),$$

de unde rezultă *raportul de transmitere* dintre pîrghiile de direcție :

$$i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{d\varphi_1}{d\varphi_3} = \frac{\omega_e}{\omega_i} = -\frac{\sin(\varphi_3 - \varphi_2)}{\sin(\varphi_1 - \varphi_2)} = \frac{-\sin\left[\pi - (\varphi_0 + \theta_i) - \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)\right]}{\sin\left[\varphi_0 - \theta_e - \left(\frac{\pi}{2} + \psi\right)\right]} =$$

$$= \frac{\cos(\varphi_0 + \theta_i + \psi)}{\cos(\varphi_0 - \theta_e - \psi)}. \tag{14}$$

Relația (14), întîlnită și în [28], [41], permite o concluzie importantă : raportul de transmitere depinde de lungimea pîrghiilor de direcție și a barei transversale prin intermediul unghiului φ_0 și ψ, adică a rapoartelor $\frac{a}{b}$ și $\frac{c}{b}$, lucru necesitat de unii autori (trapezul a fost posterior).

Dacă trapezul de *direcție este anterior punții* din față, axele sistemului de coordonate se aleg la fel (fig. 19). Pentru aceleași mărimi a, b și φ_0, bara de direcție transversală va avea lungimea c'

$$c' = b + 2a\sin\varphi_0.$$

Modul de rezolvare este același :

$$\varphi_1 = \pi + \alpha,\ \varphi_3 = 2\pi - \beta,\ \varphi_4 = \frac{3\pi}{2},\ \varphi_2 = \frac{\pi}{2} - \psi,$$

$$a\bar{u}_1+c'\bar{u}_2+a\bar{u}_3+b\bar{u}_4=0\Rightarrow 2a^2+b^2-c'+2a^2\bar{u}_1\bar{u}_3+2ab(\bar{u}_1\bar{u}_4+\bar{u}_3\bar{u}_4)=0,$$

$$\bar{u}_1=-\bar{i}\cos\alpha-\bar{j}\sin\alpha,\quad \bar{u}_2=\bar{i}\sin\psi+\bar{j}\cos\psi,\quad \bar{u}_3=\bar{i}\cos\beta-\bar{j}\sin\beta,$$

$$\bar{u}_4=-\bar{j},\quad \bar{u}_1\bar{u}_3=-\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta,\quad \bar{u}_1\bar{u}_4=\sin\alpha,\quad \bar{u}_3\bar{u}_4=\sin\beta,$$

$$\alpha=\varphi_0-\theta_e,\quad \beta=\varphi_0+\theta_i,$$

$$A'=2a^2+b^2-c'^2+2ab\sin\alpha,\quad -B=2a^2\cos\alpha,\quad C'=2a(a\sin\alpha+b),$$

$$\Rightarrow\cos\beta=\cos\varphi_3=\cos(\varphi_0+\theta_i)=\frac{A'B-C'\sqrt{B^2+C'^2-A'^2}}{B^2+C'^2},\qquad(15)$$

$$\sin\psi=\frac{a}{c'}(\cos\alpha-\cos\beta),\qquad(16)$$

$$i_{13}=\frac{\omega_1}{\omega_3}=\frac{\omega_e}{\omega_i}=\frac{d\theta_e}{d\theta_i}=-\frac{\sin(\varphi_3-\varphi_2)}{\sin(\varphi_1-\varphi_2)}=-\frac{\sin\left[2\pi-(\varphi_0+\theta_i)-\frac{\pi}{2}+\psi\right]}{\sin\left[\pi+\varphi_0-\theta_e-\frac{\pi}{2}+\psi\right]}=$$

$$=\frac{\cos(\varphi_0+\theta_i-\psi)}{\cos(\varphi_0-\theta_e+\psi)}.\qquad(17)$$

Relația (17) indică creșterea raportului de transmitere în cazul trapezului așezat anterior punții din față în comparație cu trapezul posterior.

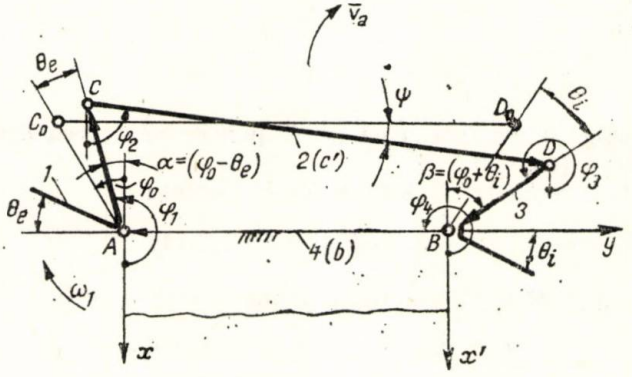


Fig. 19. — Trapezul de direcție plan anterior osiei din față.

Astfel de trapeze plane sînt studiate sub variate aspecte în lucrările [19], [22], [33], [38].

Trapezul de direcție spațial (reprezentat ca un mecanism spațial) este un patrulater dublu balansier. Păstrînd direcțiile longitudinale,

transversale și verticale ale sistemului xyz, noul sistem va avea versorii $\bar{i}$, $\bar{j}$ și $\bar{k}$ după axele x, y', z', obținut prin rotire cu unghiul δ_0 în jurul axei longitudinale x. Astfel noul sistem își păstrează axa longitudinală x, axa z' se înclină cu unghiul δ_0 al pivotului pentru a fi în lungul axei articula-

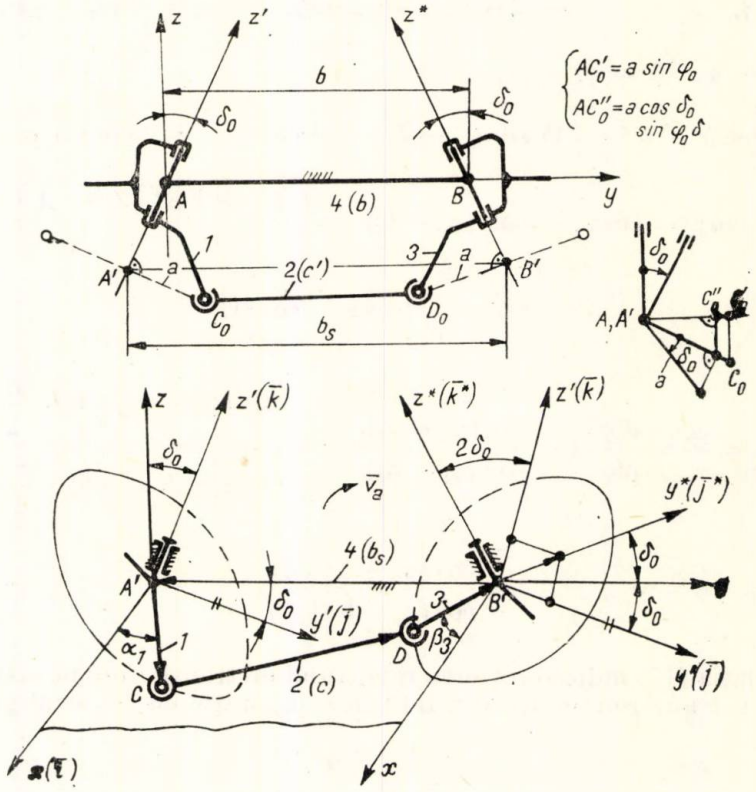


Fig. 20. — Trapezul de direcție spațial posterior.

ției A, iar axa y' se va roti și ea cu δ_0 pentru păstrarea caracterului de triortogonalitate (fig. 20).

Parametrii geometrici se transformă astfel:

$$b \to b_s = b + 2\overline{AA'}.\sin\delta_0$$

(pentru trapez așezat deasupra osiei transversale $b_s = b - 2\,\overline{AA'}\sin\delta_0$);

$$c \to c_s = b_s - 2a\,\sin\varphi_0\cos\delta_0.$$

Dar lungimea c se menține constantă. schimbîndu-se atunci unghiul inițial $\varphi_0 \to \varphi_{0s}$; astfel pentru trapez așezat sub osie avem

$$c = b - 2a\sin\varphi_0 = (b + 2\overline{AA'}\sin\delta_0) - 2a\sin\varphi_{0s}\cos\delta_0 \Rightarrow \sin\varphi_{os} =$$

$$= \frac{\sin\varphi_0}{\cos\delta_0} + \frac{\overline{AA'}}{a}\operatorname{tg}\delta_0.$$

Ecuația de poziție, ecuația conturului poligonal închis, devine.

$$a \cdot \bar{u}_1 + c\bar{u}_2 + a\bar{u}_3 + b_s \bar{u}_4 = 0. \tag{18}$$

Versorii elementelor în sistemul $xy'z'$ (dați de cosinii directori ai unghiurilor α_i, β_i, γ_i) sînt

$\bar{u}_1 = \cos \alpha_1 \bar{i} + \sin \alpha_1 \bar{j}$ — elementul *1* se mișcă în planul $xA'y' \perp Z'$;

$\bar{u}_2 = \cos\alpha_2 \bar{i} + \cos\beta_2 \bar{j} + \cos\gamma_2 \bar{k}$ — elementul *2* se mișcă în spațiul $xy'z'$;

$\bar{u}_3 = -\cos \beta_3 \bar{i} + \sin \beta_3 \bar{j}^*$ — elementul *3* se mișcă în planul $xB'y^* \perp Z^*$;

$\bar{u}_4 = -\cos \delta_0 \bar{j} - \sin \delta_0 \bar{k}$ — elementul *4* este în planul $y'A'Z' \perp x$.

Relațiile dintre versorii sistemului $x\ y'\ z'$ și ai sistemului $x\ y^*z^*$, rotit cu δ_0 în sens invers astfel ca axa z^* să coincidă cu axa articulației B', sînt

$$\bar{i} = \bar{i}^*, \ \bar{j}^* = \bar{j} \cdot \cos 2\delta_0 + \bar{k} \sin 2\delta_0, \ \bar{k}^* = -\bar{j} \sin 2\delta_0 + \bar{k} \cos 2\delta_0$$

și versorul $\bar{u}_3$ se poate scrie

$$\bar{u}_3 = -\cos \beta_3 \bar{i} + \sin \beta_3 \cos 2\delta_0 \bar{j} + \sin\beta_3 \sin 2\delta_0 \bar{k}.$$

Ecuația de poziție (18), ridicată la pătrat, ia forma

$$a^2 + a^2 + b_s^2 - c^2 + 2a^2 \bar{u}_1 \bar{u}_3 + 2ab_s \bar{u}_1 \bar{u}_4 + 2ab_s \bar{u}_3 \bar{u}_4 = 0,$$

unde suma mărimilor cunoscute și produsul versorilor va fi

$$2a^2 + b_s^2 - c^2 + 2ab_s \bar{u}_1 u_4 = 2a^2 + b_s^2 - c^2 - 2ab_s \sin\alpha_1 \cos\delta_0 = A,$$

$$\bar{u}_1 \bar{u}_4 = -\sin\alpha_1 \cos\delta_0; \ \bar{u}_1 \bar{u}_3 = -\cos\alpha_1 \cos\beta_3 + \sin\alpha_1 \sin\beta_3 \cos 2\delta_0,$$

$$\bar{u}_3 \bar{u}_4 = -\sin\beta_3 \cos\delta_0 \cos 2\delta_0 - \sin\beta_3 \sin\delta_0 \sin 2\delta_0 = -\sin \beta_3 \cos\delta_0,$$

$$\Rightarrow A - 2a^2 \cos\alpha_1 \cos\beta_3 + 2a\,(a \sin\alpha_1 \cos 2\delta_0 - b_s \cos\delta_0) \sin\beta_3 = 0.$$

Notînd coeficienții lui $\cos\beta_3$ și $\sin\beta_3$ cu B și C, rezultă ecuația

$$\begin{gathered} -2a^2 \cos\alpha_1 = B, \ 2a\,(a \sin\alpha_1 \cos 2\delta_0 - b_s \cos\delta_0) = C, \\ A + B\cos\beta_3 + C\sin\beta_3 = 0, \end{gathered} \tag{19}$$

aceeași ecuație ca formă cu ecuația (10) a trapezului plan. Va rezulta soluția (20), care dă unghiul de poziție β_3:

$$\cos\beta_3 = \frac{A \cdot B + C\sqrt{B^2 + C^2 A^2}}{B^2 + C^2} = \cos(\varphi_{0s} + \theta_i). \tag{20}$$

Unghiurile de poziție ale elementului 2 rezultă astfel :

$$\bar{u}_2 = \cos\alpha_2\,\bar{i} + \cos\beta_2\,\bar{j} + \cos\gamma_2\,\bar{k} = -\frac{a\bar{u}_1 + a\bar{u}_3 + b_s\bar{u}_4}{c},$$

$$\bar{u}_2 = -\frac{a(\cos\alpha_1\,\bar{i} + \sin\alpha_1\,\bar{j}) + a(-\cos\beta_3\,\bar{i} + \sin\beta_3\cos 2\delta_0\,\bar{j} + \sin\beta_3\sin 2\delta_0\,\bar{k}) + b_s(-\cos\delta_0\,\bar{j} - \sin\delta_0\,\bar{k})}{C},$$

Se deduc relațiile (21), care dau cosinii directori ai versorului $\bar{u}_2$:

$$\cos\alpha_2 = -\frac{a}{c}(\cos\alpha_1 - \cos\beta_3),$$

$$\cos\beta_2 = -\frac{a}{c}(\sin\alpha_1 + \sin\beta_3\cos 2\delta_0) + \frac{b_s}{c}\cos\delta_0, \tag{21}$$

$$\cos\gamma_2 = -\frac{a}{c}\sin\beta_3\sin 2\delta_0 + \frac{b_s}{c}\sin\delta_0.$$

Raportul de transmitere se obține derivînd ecuația (18) în raport cu parametrul independent α_1 :

$$a\frac{d\bar{u}_1}{d\alpha_1} + c\frac{d\bar{u}_2}{d\alpha_1} + a\frac{d\bar{u}_3}{d\alpha_1} = 0. \tag{22}$$

Deoarece $\frac{d\bar{u}_2}{d\alpha_1} \perp \bar{u}_2$, prin înmulțirea ecuației (22) cu versorul $\bar{u}_2$, rezultă

$$a\frac{d\bar{u}_1}{d\alpha_1}\bar{u}_2 + a\frac{d\bar{u}_3}{d\alpha_1}\bar{u}_2 = 0 = \bar{e}_1\bar{u}_2 + \frac{d\bar{u}_3}{d\alpha_1}\bar{u}_2,$$

unde mărimile din ecuație au expresiile

$$\frac{d\bar{u}_3}{d\alpha_1} = (\sin\beta_3\,\bar{i} + \cos\beta_3\cos 2\delta_0\,\bar{j} + \cos\beta_3\sin 2\delta_0\,\bar{k})\frac{d\beta_3}{d\alpha_1};$$

$$\bar{e}_1\bar{u}_2 = -\sin\alpha_1\cos\alpha_2 + \cos\alpha_1\cos\beta_2.$$

Înlocuind, relația ia forma

$$\frac{d\alpha_1}{d\beta_3} = \frac{\omega_1}{\omega_3} = i_{13} = \frac{\cos\alpha_2\sin\beta_3 + \cos\beta_2\cos\beta_3\cos 2\delta_0 + \cos\gamma_2\cos\beta_3\cdot\sin 2\delta_0}{\sin\alpha_1\cos\alpha_2 - \cos\alpha_1\cos\beta_2}, \tag{23}$$

asemănătoare cu cea dată în [34] pentru cazul general. Raportul de transmitere depinde de lunginea pîrghiilor de direcție prin $\frac{a}{b}, \frac{c}{b}, \frac{\overline{AA'}}{b}, \delta_0$. Pentru trapezul plan, $\delta_0 = 0$, $b_s = b$, $\varphi_{0s} = \varphi_0$, $\alpha_1 = \alpha$, $\beta_3 = \beta$, $-B = 2a^2 \cos\alpha$, $A = 2a^2 + b^2 - c^2 - 2ab \sin\alpha$, $C = 2a\,(a\sin\alpha - b)$, găsindu-se relația (11).

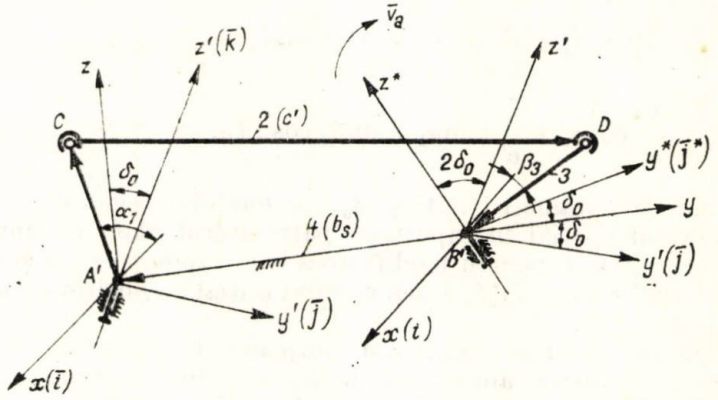


Fig. 21. — Trapezul de direcție spațial anterior.

De asemenea prin particularizare rezultă

$$\cos\alpha_2 = \cos\varphi_2 = -\frac{a}{c}(\cos\alpha - \cos\beta),\quad \beta_2 = \frac{\pi}{2} - \varphi_2,$$

$$i_{13} = \frac{\cos\varphi_2 \cdot \sin\beta + \sin\varphi_2 \cdot \cos\beta}{\sin\alpha \cdot \cos\varphi_2 - \cos\alpha \cdot \sin\varphi_2} = \frac{\sin(\varphi_0 + \theta i + \psi)}{\sin(\varphi_0 - \theta - \psi)}.$$

În cazul *trapezului spațial anterior* (fig. 21), lungimea bielei devine $C_s'' > C'$, dar, păstrîndu-se c', rezultă $\varphi_0 \to \varphi_{0s} = \text{arc sin}\left(\frac{\sin\varphi_0}{\cos\delta_0} - \frac{\overline{AA'}}{a}\,\text{tg}\,\delta_0\right)$. Celelalte mărimi au expresiile

$$\bar{u}_1 = -\cos\alpha_1\,\bar{i} - \sin\alpha_1\,\bar{j};\quad \bar{u}_2 = \cos\alpha_2\,\bar{i} + \cos\beta_2\,\bar{j} + \cos\gamma_2\,\bar{k},$$

$$\bar{u}_4 = -\cos\delta_0\,\bar{j} - \sin\delta_0\,\bar{k},$$

$$\bar{u}_3 = \cos\beta_3\,\bar{i} - \sin\beta_3\,\bar{j}^* = \cos\beta_3\,\bar{i} - \sin\beta_3\cos 2\delta_0\,\bar{j} - \sin\beta_3\sin 2\delta_0\,\bar{k},$$

$$A' = 2a^2 + b_s^2 - c'^2 + 2ab_s \cdot \sin\alpha_1 \cos\delta_0,\quad -B = 2a^2\cos\alpha_1,$$

$$c' = 2a\,(a\sin\alpha_1\cos 2\delta_0 + bs\cos\delta_0).$$

Rezultă

$$\cos\beta_3 = \frac{A'B + C\sqrt{B^2 + C'^2 - A'^2}}{B^2 + C'^2} = \cos(\varphi_{0s} + Q_i), \tag{24}$$

$$\frac{d\alpha_1}{d\beta_3} = i_{13} = \frac{\cos\alpha_2 \cdot \sin\beta_3 + \cos\beta_2 \cos\beta_3 \cos 2\delta_0 + \cos\gamma_2 \cos\beta_3 \sin 2\delta_0}{\cos\alpha_1 \cos\alpha_2 + \sin\alpha_1 \cos\beta_2}, \tag{25}$$

$$\cos\gamma_2 = \frac{b_s}{c'}\sin\delta_0 + \frac{a}{c'}\sin\beta_3 \sin 2\delta_0, \quad \cos\alpha_2 = \frac{a}{c'}(\cos\alpha_1 - \cos\beta_3),$$

$$\cos\beta_2 = \frac{b_s}{c'}\cos\delta_0 + \frac{a}{c'}(\sin\alpha_1 + \sin\beta_3 \cos 2\delta_0). \tag{26}$$

Este evident că parametrii $\overline{AA'}$ şi δ_0 vor modifica legea de transmitere a patrulaterului spaţial în raport cu patrulaterul plan, rămînînd totuşi ca parametri reglabili pentru modificarea legii rapoartele a/b şi c/b, influenţă mare avînd raportul c/b, adică unghiul iniţial de poziţie φ_0 al pîrghiei de direcţie.

Pentru reprezentarea legilor de mişcare ale trapezului de direcţie plan şi spaţial, pentru evaluarea influenţei unghiurilor de montare a pivoţilor şi pentru evaluarea erorilor care se fac prin calcularea trapezului ca un mecanism plan, se execută un *calcul numeric*. Mărimile geometrice ale trapezului corespund autocamionului SR—131, trapezul fiind posterior şi dedesuptul osiei din faţă : $b = 1464$ mm, $c = 1360$ mm, $b_s = 1484$ mm, $\delta_0 = 5°30'$, $\varphi_0 = 16°$, $\overline{AA'} = 100$ mm, $a = 189$ mm. Calculul se va face din cinci în cinci grade.

Pentru trapezul plan se găsesc următorii coeficienţi :

$$A = 2a^2 + b^2 - c^2 - 2ab\sin\alpha = 365 \cdot 10^3 - 552 \cdot 10^3 \cdot \sin\alpha =$$

$$= 71{,}4 \cdot 10^3 (5{,}12 - 7{,}74\sin\alpha),$$

$$-B = 2a^2\cos\alpha = 71{,}4 \cdot 10^3\cos\alpha; \quad C = 2a(a\sin\alpha - b) =$$

$$= 71{,}4 \cdot 10^3 (\sin\alpha - 7{,}74) \Rightarrow \beta, \ \theta_i.$$

Tabela 2 redă rezultatele calculul pentru trapezul plan posterior după relaţia (11). Cu datele din tabelă se trasează diagrama $\theta_i = f(\theta_e)$, care dă legea de transmitere reală a trapezului plan (fig. 22*a*) : $\theta_e = \varphi_0 - \alpha$, $\theta_i = \beta - \varphi_0$.

În cazul trapezului spaţial, coeficienţii sînt următorii :

$$A = 2a^2 + b_s^2 - c^2 - 2ab_s\sin\alpha_1\cos\delta_0 = 431 \cdot 10^3 - 560 \cdot 10^3 \cdot \sin\alpha_1 =$$

$$= 71{,}4 \cdot 10^3 (6{,}02 - 7{,}84\sin\alpha_1),$$

$$-B = 2a^2\cos\alpha_1 = 71{,}4 \cdot 10^3 \cdot \cos\alpha_1; \quad C = 2a(a\sin\alpha_1\cos 2\delta_0 - b_s\cos\delta_0) =$$

$$= 71{,}4 \cdot 10^3 (0{,}982\sin\alpha_1 - 7{,}84),$$

Tabela 2

Trapez plan posterior

θ_e°	α°	$\frac{A}{71{,}4\cdot10^3}$ [mm]	$\frac{-B}{71{,}4\cdot10^3}$ [mm]	$\frac{C}{71{,}4\cdot10^3}$ [mm]	β°	θ_i°	ψ°	i_{13}
0°	16°	2,97	0,962	−7,500	16°	0°	0°	1,00
5°	11°	3,64	0,981	−7,569	20°55′	4°55′	25′	0,95
10°	6°	4,34	0,994	−7,655	26°20′	10°20′	45′	0,89
15°	− 1°	4,98	0,999	−7,742	32°10′	16°10′	1°15′	0,83
20°	− 4°	5,63	0,997	−7,829	38°15′	22°15′	1°55′	0,76
25°	− 9°	6,32	0,987	−7,916	44°55′	28°55′	2°15′	0,68
30°	−14°	7,02	0,970	−8,001	53°30′	37°30′	2°55′	0,53
35°	−19°	7,62	0,945	−8,089	62°	46°	3°35′	0,42

și poziția inițială se determină din relația

$$\sin\varphi_{0s}=\frac{\sin\varphi_0}{\cos\delta_0}+\frac{\overline{AA}'}{a}\operatorname{tg}\delta_0=0{,}326\Rightarrow\varphi_{0s}=19^\circ.$$

Tabela 3 dă rezultatele calculului pentru trapezul spațial, după relația (20). Cu datele din tabela 3 se trasează diagrama $\theta_i=f(\theta_s)$, care dă legea de transmitere reală a trapezului spațial (fig. 22 *b*) : $\alpha_1=\varphi_{0s}-\theta_e$, $\theta_i=\beta_3-\varphi_{0s}$.

Tabela 3

Trapez spațial posterior

θ_e°	$\frac{A}{71{,}4\cdot10^3}$ [mm]	$\frac{-B}{71{,}4\cdot10^3}$ [mm]	$\frac{C}{71{,}4\cdot10^3}$ [mm]	θ_i°	α_2°	β_2°	γ_2°	i_{13}
0°	3,48	0,946	−7,510	0°	90°	5°30	84°30′	1
5°	4,13	0,970	−7,593	5°10′	89°30	4°50′	84°40′	0,93
10°	4,82	0,988	−7,679	10°45′	89°	4°45′	85°50′	0,87
15°	5,49	0,998	−7,761	11°45′	88°30′	4°40′	85°	0,80
20°	6,15	0,999	−7,847	23°40′	87°50	4°50	85°5′	0,72
25°	6,83	0,995	−7,933	30°40′	87°5′	5°	85°10′	0,62
30°	7,53	0,982	−8,017	39°40′	86°	5°30′	85°15′	0,48
35°	8,20	0,961	−8,100	53°40′	—	—	—	0,21

Raportul de transmitere $\omega_e : \omega_i$ se calculează cu relaţia (14), ţinînd cont de egalitatea (12) pentru trapezul plan posterior, iar pentru trapezul spaţial posterior se foloseşte relaţia (23). Rezultatele calculului sînt trecute în tabela 2, respectiv 3, iar reprezentările grafice în diagrama din figura 22 (curbele *f* şi *g*).

Analiza comparativă a datelor din tabelele 2 şi 3, ca şi a curbelor din figura 22, arată că eroarea care se face, considerînd trapezul de direcţie

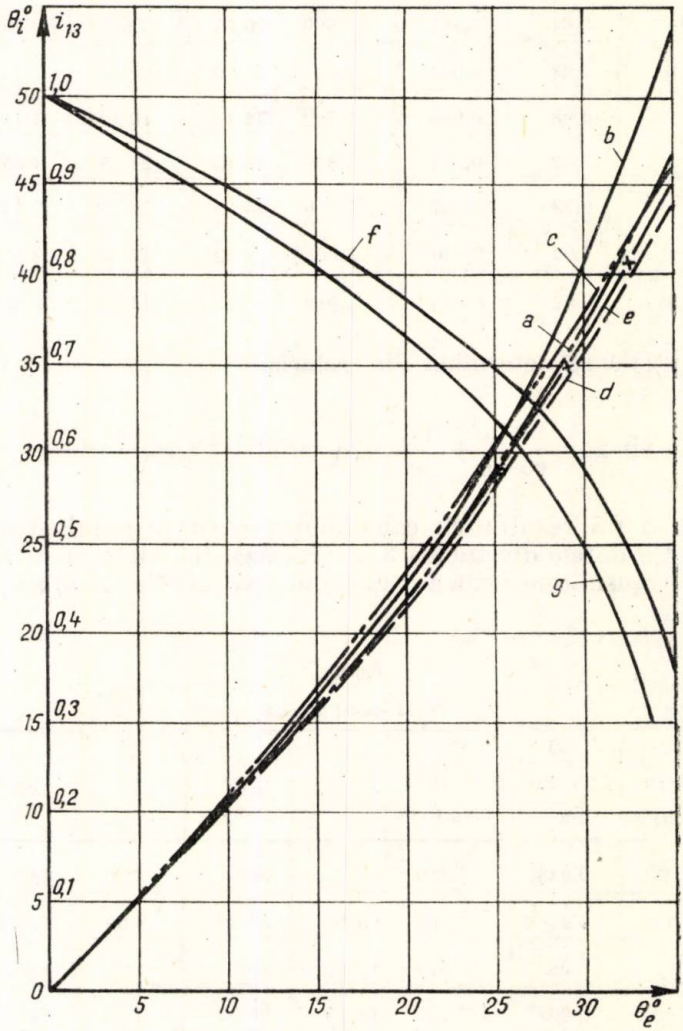


Fig. 22. — Legi de transmitere ale trapezului de direcţie SR—131 : a — $\theta_i = f(\theta_e)$ pentru trapezul plan posterior; b — $\theta_i = f(\theta_e)$ pentru trapezul spaţial posterior; c — Legea de bracare a lui Ackerman : d — $\theta_i = f(\theta_e)$ pentru trapezul plan anterior (variantă) : e — $\theta_i = f(\theta_e)$ pentru trapezul spaţiul anterior (variantă); f — $i_{13} = f(\theta_e)$ pentru trapezul plan; g — $i_{13} = f(\theta_e)$ pentru trapezul spaţial.

cu un mecanism plan, nu este de loc neglijabilă, ceea ce indică necesitatea calculării trapezului ca un mecanism spațial. Desigur, mărimea abaterilor este în funcție și de parametrii constructivi ai mecanismului, putînd fi neglijabilă pentru anumite date concrete. Pentru comparație se dă și condiția geometrică a lui Ackermann (de înscrierea vehiculului în curbă în jurul unui centru unic de viraj) (fig. 22*c*), după tabela 4, conform relației $\operatorname{ctg}\theta_e - \operatorname{ctg}\theta_i = \frac{b}{L}$.

Tabela 4

θ_e	5°	10°	15°	20°	25°	30°	35°
θ_i	5°10′	10°50′	16°55′	23°20′	30°20′	37°30′	45°10′

Analiza graficelor arată că trapezul de direcție spațial al camionului SR—131 asigură o lege de transmitere mai aproape de cea căutată la unghiuri de bracare mici, adică la curbele obișnuite parcurse cu viteză mare, ceea ce constituie un avantaj. În schimb la unghiuri de bracare mari, deci curbe de raze reduse, legea de transmitere se depărtează de cea teoretică impusă. Dacă comparația s-ar face cu legea propusă (7), (8), trapezul plan ar putea fi considerat foarte bun. În realitate, trapezul real spațial se depărtează chiar mai mult decît de condiția statică a lui Ackermann.

Tabela 5

Trapez plan anterior

θ_c^0	$\alpha°$	$\frac{A'}{71{,}4\cdot10^3}$	$\frac{-B}{71{,}4\cdot10^3}$	$\frac{C'}{71{,}4\cdot10^3}$	$\beta°$	θ_i^0
0°	16°	−1,200	0,962	0,036	16°	0°
5°	11°	−1,845	0,981	7,951	21°15′	5°15′
10°	6°	−2,515	0,994	7,865	26°30′	10°30′
15°	1°	−3,199	0,999	7,777	32°30′	16°30′
20°	− 4°	−3,872	0,997	7,690	38°25′	22°25′
25°	− 9°	−4,536	0,988	7,604	44°50′	28°50′
30°	−14°	−5,200	0,970	7,518	51°40′	35°40′
35°	−19°	−5,854	0,945	7,432	59°40′	43°40′

Dacă trapezul de direcție plan ar fi fost anterior punții din față, pentru aceleași mărimi $a, b, \delta_0, \varphi_0, \overline{AA'}$, latura $c' = b + 2a\sin\varphi_0 = 1568$ mm. Coeficienții

$$A' = 2a^2 + b^2 - c'^2 + 2ab\sin\alpha = -245\cdot10^3 + 552\cdot10^3\cdot\sin\alpha =$$

$$= 71{,}4\cdot10^3\,(7{,}74\sin\alpha - 3{,}33);$$

$$-B = 2a^2\cos\alpha = 71{,}4\cdot10^3\cdot\cos\alpha;\ c' = 2a\,(a\sin\alpha + b) =$$

$$= 71{,}4\cdot10^3\,(\sin\alpha + 7{,}74).$$

Calculul relației (15) este făcut în tabela 5, pe baza căreia s-a trasat curba d din figura 23. Dacă trapezul de direcție anterior este tratat ca mecanism spațial: $\theta_e = \varphi_{0s} - \alpha_1$, $\theta_i = \beta_3 - \varphi_{0s}$, rezultă

$$A' = 2a^2 b_s^2 - c'^2 + 2ab_s\sin\alpha_1\cdot\cos\delta_0 = -186\cdot10^3 + 560\cdot10^3\cdot\sin\alpha_1 =$$

$$= 71{,}4\cdot10^3(7{,}84\sin\alpha_1 - 2{,}61),$$

$$-B = 2a^2\cos\alpha_1 = 71{,}4\cdot10^3\cdot\cos\alpha_1;\ C' = 2a\,(a\sin\alpha_1\cdot\cos 2\delta_0 + b_s\cos\delta_0) =$$

$$= 71{,}4\cdot10^3(0{,}982\cdot\sin\alpha_1 + 7{,}84),$$

iar calculul relației (24) este trecut în tabela 6 ($\varphi_{os} \cong 13°$), pe baza căreia s-a trasat curba e din figura 22. Se vede că influența unghiului de înclinare

Tabela 6

Trapez spațial anterior

θ_e^0	α_1^0	$\frac{A'}{71{,}4\cdot10^3}$	$\frac{-B}{71{,}4\cdot10^3}$	$\frac{C'}{71{,}4\cdot10^3}$	β_3^0	θ_i^0
0°	13°	−0,847	0,974	8,061	13°	0°
5°	8°	−1,525	0,990	7,976	18°10′	5°10′
10°	3°	−2,202	0,998	7,890	23°30′	10°30′
15°	− 2°	−2,884	0,999	7,806	29°25′	16°25′
20°	− 7°	−3,565	0,997	7,720	35°20′	22°20′
25°	−12°	−4,240	0,978	7,635	41°45′	28°45′
30°	−17°	−4,890	0,956	7,554	49°	36°
35°	−22°	−5,550	0,927	7,473	56°45′	43°45′

al pivotului în cazul trapezului anterior este mai mică. Rezultă concluzia că numai trapezul anterior punții poate fi tratat ca mecanism plan [19], [39].

Lucrarea nu și-a propus probleme de sinteză a mecanismului, adică alegerea schemei optime capabile să realizeze legea impusă. S-a indicat totuși posibilitatea de variere a diverșilor parametri pentru corectarea legii realizate de trapezul de direcție. Cele două legi, pentru a nu se îndepărta prea mult, trebuie să realizeze o tangentă de ordin superior sau, cel puțin, să se intersecteze. Parametrul principal pentru realizarea acestei suprapuneri rămîne tot unghiul φ_0, modificarea lungimilor pîrghiilor de direcție avînd influență mai redusă. În lucrarea [30] se dau grafice cu funcția $\theta_i = f(\theta_e)$, avînd ca parametru unghiul φ_0, iar lucrarea [11] recomandă rapoartele $\frac{a}{b} = 0{,}14 \div 0{,}16$.

2. CONCLUZII

1. Pe baza studierii fenomenelor de derivă a pneurilor, în lucrare se propun noi legi de transmitere (7), (8) pentru trapezul de direcție, legi care vin să corecteze condiția statică a lui Ackermann.

2. Se impune reprezentarea structurală a mecanismelor de direcție ca mecanisme spațiale pentru a pune bazele calculului cinematic corect.

3. Se evidențiază faptul că numai unghiul de înclinare transversală δ_0 a pivotului dă caracterul de mecanism spațial trapezului de direcție nedivizat.

4. Pe baza relațiilor analitice determinate și a calculelor numerice se trag concluzii utile privind eroarea care se face prin considerarea trapezului de direcție ca un mecanism plan atît în cazul așezării posterioare, cît și în cazul așezării anterioare osiei din față, lucru important. pentru constructorii de vehicule rutiere.

5. Se indică parametrii care pot fi modificați pentru obținerea legii dorite.

Primită la redacție la 6 noiembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. Alexandru, P., *Sistemul de direcție al autovehiculelor pe roți*, referat susținut la catedra TMM Inst. politehnic București, mai 1969.
2. — *Analiza structurală și cinematică a mecanismelor de direcție ale autovehiculelor pe roți.* comunicare la a XII-a sesiune științifică a Inst. politehnic București, mai 1969.
3. Arelli, A, *La sterzatura dei veicoli su route*, ATA, *1* (1968).
4. Beermann, H, *Kursstabilität luftbereifter Fahrzeuge und deren Verhalten bei stütenwindstörung*, ATZ, *6* (1964).
5. Bergman, W., *Grundlagen der Unter und Ubersteurung des Kraftfahrzeuges*, ATZ, 3 (1967).
6. Bogdan, R., Larionescu, D., *Analiza armonică complexă și mecanoelectrică a mecanismelor plane*, București, Edit. Academiei, 1968.
7. Boiseaux, M., *L'automobilie. Calcul des organes*, Paris, Dunod, 1966.
8. Chagette, I., *Technique Automobile*, Paris, Dunod, 1965.
9. Coker, A., *Automobile Engineer's*, Reference book. Londra.

10. KRASICOV, S., ILARIANOV, V., *Uslovie upravleaemosti avtomobilea na povorote*, Avtom. prom., *3* (1969).
11. KURGANOV, A., *Osnovi rasceta şasii traktorov i avtomobillei*, Selhozghiz, 1953.
12. KUZMINSKI, V., *K teorii rulevoi trapeţii traktorov i avtomobillei*, Naucinie trudi, **VIII**, USHA, 1956.
13. DUDIŢĂ, FL, *Existenţa manivelei la mecanismele patrulatere sferice*, St. cerc. med. apl. *2*(1965).
14. EBERAN EBERHORST, *Die Kurven-und Rullstabilität des Kraftfahrzeuges*, ATZ, *9* (1953).
15. ENGELS, H., *Ein Beitrag zur Beurteilung des Eigenlenkverhaltens von Kraftfahrzeugen*, ATZ, *3* (1967).
16. FAJNHAKEN HENRYK, *Tendencje i kierunki kozwoju ukladow kierowiczych*, Biul. inf. tech. prezem. motorycz., *2 — 3* (1968).
17. FALKEVICI, B., *Metodica issledovaniea upravleaenosti avtomobilea pri crivolineinom dvijenii*, Avtom. prom., *10* (1966).
18. FIALA, E., *Kraftkorrigierte Lenkgeometrie*, ATZ, 2 (1959).
19. FORKEL, D., *Ein Beitrag zur Auslegung von Fahrzeuglenkungen*, D KFS, 145 (1961).
20. GHIULAI, C., *Mecanica automobilului*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1965.
21. GOUGH, E., SHEARER, G., *Front Suspension and Tyre wear*, Automotive Divizion, 1956, p. 171.
22. HASSELGRUPER, H., *Lenkgeometrie von vierrädrigen Strassenkraftfahrzeugen Anforderungen und Austführungsmöglichkeiten*, VDI Berichte, *77* (1964).
23. — *Verhalten eines Kraftfahrzeuges bei Kuvvenfahrt*, ATZ, *7* (1965).
24. HARRISBERGER, L., *Mobility Analysis of Tree-Dimensional Tover-Link Mechanism*, ASME publication 64-WA/MB-16.
25. HENKER, E., *Die Auslegung der Lenkgeometrie unter Berüchsichtifung der Reifeneigenschaften*, KFT, *9* (1968).
26. JULIEN, M., *Les paramètres de base de la maniabilité*, SIA, Ingineurs de l'automobile, *10* (1962).
27. KAMM W., *Das Kraftfahrzeug*, Berlin, 1936.
28. LÎSOV, M., *Rulevie upravlenia avtomobilei*, Maşinostroenie, 1964.
29. LEVITSKI, N., POLUHIN, V., *K vîboru odei koordonat i ploskostei proekţii v prostranstvennom cetîrehzvenike*, Maşinovedenie, *6* (1967).
30. LITVINOV, A., ROTENBERG, R., FRUMKIN, A., *Saşii avtomobilea*, Maşghiz, 1963.
31. MANGERON, D., DRĂGAN, C., *Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu patru elemente prin metoda matricială*, St. cerc. mec. apl., *6* (1961).
32. MANOLESCU, N., ERCEANU, I., ANTONESCU, P., *Domeniul de aplicabilitate al metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., *6* (1962).
33. MANOLESCU, N., *Contribution à l'étude cinematique et dynamique de la suspension des bogies au passage de courbes*, Bul. Inst. politehnic Bucureşti, 5 (1966).
34. MAROŞ, D. ORLANDEA, N., *Curs de TMM*, Cluj, 1966.
35. NIŢESCU GH., NĂSTĂSOIU ŞT., POPESCU, S., *Tractoare*, Edit. didactică, pedagogică, Bucureşti, 1968.
36. PELECUDI, CHR., *Bazele analizei mecanismelor*, Edit. academiei, 1967.
37. PETRESCU, N., *Calculul erorilor trapezului de direcţie ICPAT*, Buletin de informare tehnică, iulie — septembrie, 1967.
38. RAMACHANDRA, RAO, *Steering linkage design*, Autom. Engineer, *1* (1968).
39. SALIM EL IMAN, VIRABOV, R., *Rascet rulevoi trapeţii cac prostranstvennogo mehanizma*, Tractorî i selh., *4* (1965).
40. SZEKELY, I., HANDRALUCA, H., *Studiul cinematic al mecanismelor spaţiale cu mai multe grade de mobilitate cu ajutorul funcţiilor de transmitere*, St. cerc. mec. apl. *4* (1968).
41. UNTARU, M., CÎMPEANU, V., SEITZ, N., SOARE, I., *Automobilul*, Edit. didactică şi pedagogică, Bucureşti, 1968.
42. VOINEA, R., ATANASIU, M., *Metode analitice noi în teoria mecanismelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.
43. ZINOVIEV, A., *Pronstranstvennie mehanizmî s niznimi parami*, Moskova, 1952.

COMPORTAREA MECANISMELOR CU CAME LA VITEZE RIDICATE

II. ASUPRA VIBRAȚIILOR LONGITUDINALE ȘI TORSIONALE DIN MECANISMELE CU CAME

de CHR. PELECUDI, I. SAVA, S. CONONOVICI
Institutul politehnic București
Centrul de mecanică a solidelor

Prezenta lucrare reprezintă o continuare a dinamicii mecanismelor cu came rapide, fiind un caz special al acesteia. Se analizează comportarea mecanismelor cu came rapide sub influența simultană a vibrațiilor torsionale și longitudinale. Sistemul de ecuații diferențiale neliniare cu coeficienți variabili care descrie mișcarea sistemului este rezolvat la calculatorul numeric în baza unui program, de asemenea prezentat în lucrare.

Împreună cu deformațiile elastice ale elementelor care execută mișcări rectilinii, parametrii mișcării elementului de reducere sînt influențați și de elasticitatea elementelor cu mișcări de rotație. Deși asupra deplasărilor influența vibrațiilor la torsiune este mai puțin însemnată, asupra vitezelor și derivatelor superioare ea se resimte într-o măsură mult sporită. Într-adevăr, torsiunea arborelui portcamă, impusă de regimul de funcționare, atrage după sine o modificare a mișcării corespunzătoare profilului camei $s(\varphi_r)$, transformînd-o în $s(\varphi_r + q)$. Filtrarea acestei mișcări, efectuată de ansamblul elementelor cu mișcare rectilinie, determină ca parametrii realizați la elementul de reducere să difere de cei admiși inițial, care depind de profilul ales al camei. Diferența dintre parametrii de intrare și cei de răspuns este mai însemnată pentru derivatele superioare ale mișcării elementului executor [4].

În lucrările [5] și [6], Vulifson a studiat separat influența vibrațiilor de torsiune și a celor longitudinale asupra răspunsului sistemului, în baza unui model dinamic căruia, ca urmare a unui sistem de ipoteze simplificatoare, îi corespunde pentru vibrațiile la torsiune o ecuație diferențială liniară cu coeficienți variabili. Soluția obținută pe cale analitică a impus ipoteze suplimentare.

În prezenta lucrare se studiază modul în care parametrii de răspuns, realizați la elementul de reducere, sînt influențați de prezența simultană

a vibrațiilor la torsiune și longitudinale care caracterizează funcționarea reală a mecanismelor cu came rapide. Influențele diverșilor parametri se studiază în baza criteriului de continuitate a mișcării împreună cu limitarea valorilor maxime ale încărcării din cupla superioară, introdus în lucrarea [4].

Rezolvarea sistemului de ecuații diferențiale neliniare de ordinul doi cu coeficienți variabili, inclus în condiția de continuitate, este efectuată pe calculatorul numeric. Programul pentru calculator, prezentat în lucrare, permite aplicarea metodei de analiză dinamică pentru orice caz concret cu model matematic similar.

1. MODELUL DINAMIC

Dacă se consideră drept exemplu de utilizare a unui mecanism cu came tot sistemul distribuției motoarelor cu ardere internă, atunci pentru următorul sistem de ipoteze adoptat :

— elementele lanțului cinematic camă-element de reducere execută aceeași deplasare unidimensională ;

— factorii de amortizare sînt proporționali cu vitezele corespunzătoare ;

— se neglijează forțele de frecare culombiene și pierderile prin frecare ;

— turația camei este constantă ;

— se neglijează elasticitatea în punctul de contact camă-tachet, sistemului mecanic menționat i se poate asocia modelul dinamic din figura 1.

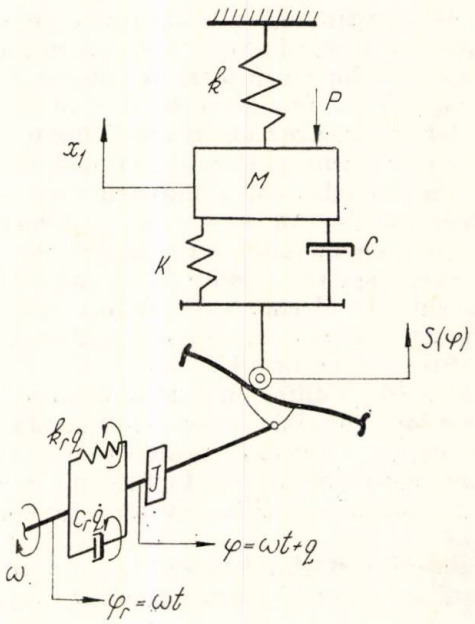


Fig. 1

În privința notațiilor, φ_r, φ, $s(\varphi_r)$, $s(\varphi)$, x_1, q reprezintă unghiul de rotație al arborelui portcamă, același unghi, dar modificat de vibrația torsională, deplasările corespunzătoare unghiurilor φ și φ_r, mișcarea masei M și, respectiv, amplitudinea vibrațiilor torsionale, c și c_r sînt constantele de amortizare, k, K, K_{ac} și k_r constantele resortului de reducere, lanțului cinematic camă-element de reducere și, respectiv, a arborelui port-camă după direcția săgeții și la torsiune, iar M și J masa și momentul de inerție reduse la elementul executor și, respectiv, camă [1].

2. MODELUL MATEMATIC

Aplicînd legea doua a mecanicii, $m_i\, d\dot{x}_i^2/dt^2 = \Sigma F$, modelului dinamic din figura 1 în baza sistemului de ipoteze adoptat, a continuității funcției deplasării și a primelor sale două derivate (vezi relațiile (1) și (2) din [1]) și admițînd pentru simplificare scrierea $s(\varphi_r) \equiv s$, rezultă următorul model matematic:

$$M\ddot{x}_1 = c[(s' + s''q)(\omega + \dot{q}) - \dot{x}_1] - (k + K)x_1 + K(s + s'q),$$

$$J\ddot{q} = -c_r\dot{q} - k_r q - (s' + s''q)(K(s + s'q - x_1) + c[(s' + s''q)(\omega + \dot{q}) - \dot{x}_1)], \tag{24}$$

care în coordonate adimensionale, prin utilizarea relațiilor (3) [1] și ținînd cont de legătura dintre derivatele legii de profilare în raport cu unghiul de rotație al camei φ: $s^{(n)} = s_0 y^{(n)}/t_0^n$, are următoarea formă:

$$X_1'' = \omega_1^2[(y + y'X_3) - X_1] + A_1[(y' + y''X_3)(1 + X_3') - X_1'] - F, \tag{25}$$

$$X_2'' = -B_1X_3' - \omega_r^2X_3 - (y' + y''X_3)\{B_2[(y'y''X_3)(1 + X_3') - X_1'] - A(X_1 - y - y'X_3)\}, \tag{26}$$

unde

$\omega_1^2 = (K + k)t_0^2/M = Kt_0^2/M$ reprezintă frecvența adimensională proprie a vibrațiilor longitudinale,

$\omega_r^2 = k_r t_0^2/J$ — frecvența proprie adimensională a vibrațiilor torsionale,

$A_1 = ct_0/M$ — coeficientul de amortizare adimensional a mișcării de translație a masei M,

$B_1 = c_r t_0/J$ — coeficientul de amortizare adimensional al mișcării de rotație a elementelor reduse la camă,

$F = P_0 t_0^2/Ms_0$ — forța perturbatoare adimensională,

$B_2 = cs_0^2/J\varphi_0\omega_0$ și $A = Ks_0^2/J\,\omega_0^2$ — constante adimensionale.

Prin urmare, mişcarea elementului executor (X_1) este descrisă de un sistem de ecuaţii diferenţiale neliniare de ordinul doi şi cu coeficienţi variabili.

3. CRITERIUL DE APRECIERE AL COMPORTĂRII MECANISMELOR CU CAME RAPIDE

Forma curbei de profilare, gradul de amortizare împreună cu condiţiile de funcţionare conduc la dezvoltarea unei asemenea încărcări a cuplei superioare, încît variaţia ei pe intervalul de lucru poate influenţa continuitatea transmisiei. Cercetarea semnului încărcării din cupla superioară şi a amplitudinii acesteia poate permite analizarea comportării mecanismului cu came la viteze mari de funcţionare.

Condiţia de continutate a mişcării (17) [1] capătă forma

$$P = (y + y'X_3 - X_1) + A_1((1 + X_3')(y' + y''X_3) - X_1')/\omega_1^2. \qquad (27)$$

Se poate constata uşor că, întrucît mărimile X_1, X_1' şi X_3, X_3' se obţin din sistemul de patru ecuaţii format prin asocierea la sistemul (25) şi a aceluia obţinut prin derivarea sa, încărcarea din cupla superioară este o funcţie de forma

$$P = F(y, y', y'', y''', X_1'', X_1''', X_3'', X_3'''), \qquad (28$$

care depinde atît de parametrii de intrare (y), cît şi de aceia de ieşire (X_1). În aceste condiţii, problema analizei influenţei vibraţiilor longitudinale şi de torsiune asupra comportării mecanismelor cu came rapide pentru diverse condiţii de funcţionare se reduce la calculul forţei adimensionale P, căreia i se cercetează semnul şi amplitudinile maxime.

4. CALCULUL ÎNCĂRCĂRII DIN CUPLA SUPERIOARĂ

Calculul numeric al relaţiei (27) este precedat de rezolvarea sistemului (25). Forma complicată a acestui sistem nu-l face propriu unei rezolvări directe prin cvadraturi, iar o soluţie analitică nu se poate obţine decît renunţînd la situaţia reală de neliniaritate, adică ignorînd vibraţiile la torsiune. Chiar în aceste condiţii, studiul comportării nu s-ar putea face decît prin analiza curbelor obţinute prin soluţionările numerice pentru diferitele valori ale constantelor A, A_1, B_1, B_2, ω_1 şi ω_r. De aceea pentru înlăturarea inconvenientelor menţionate s-a recurs la soluţionarea numerică a sistemului (25) nesimplificat, utilizînd în acest sens metoda Runge-Kutta, potrivită pentru calculatoarele numerice.

În privinţa condiţiilor iniţiale, pentru vibraţiile torsionale se admite începerea din repaus a mişcării, în timp ce masa M începe să se deplaseze numai după învingerea forţei rezistente (întrucît frecarea are o foarte mică pondere asupra rezultatelor finale în raport cu rezistenţa tehnologică, nu justifică rezolvarea sistemului (25), neconţinînd pe X_1 şi X_1' pentru

determinarea abscisei x_{0f} care ar corespunde rotirii camei pentru învingerea rezistenţelor la frecare), putîndu-se admite deci următoarele condiţii iniţiale :

$$\begin{aligned} &- \text{pentru } x = 0 : \; X_3 \text{ şi } X_3' = 0 ; \\ &- \text{pentru } x = 0{,}2 : \; X_1 = 0 \text{ şi } X'_1 = 0. \end{aligned} \tag{29}$$

Valorile constantelor modelului se calculează cu relaţiile (26) pentru un sistem concret, bunăoară distribuţia motorului cu ardere internă. În scopul evaluării influenţei acestor constante asupra comportării mecanismelor cu came în general, s-au admis diverse abateri ale parametrilor calculaţi, rezolvîndu-se expresia (27) în baza unui program la calculatorul electronic numeric IBM—360. Se menţionează faptul că programul este astfel alcătuit, încît generalitatea lui depinde numai de ordinul şi de numărul ecuaţiilor din sistem.

PROGRAMUL DE CALCUL AL ÎNCĂRCĂRII DIN CUPLA SUPERIOARĂ

```
      DOUBLE PRECISION A, AL, B1, B2, 01, OR, F, H, K11, K21, K31, K41, K12,
     K22, 1K32, K42, K13, K23, K33. K43, K14, K24, K34, K44, X1, X2, X3, X4, X2D,
     X4D, TA, 2F1, F2, F3, F4, YOL, Y11, Y21, Y02, Y12, Y22, Y03, Y13, Y23, YY01,
     YY11, YY21, 3YYO2, YY12, YY22, YY03, YY13, YY23, Z, F4L
      F1(X2) = X2
      F2(X1, X2, X3, X4, Y, Y1, Y2)= O1*((Y + Y1 *X3)-X1)-F
      F3(X4) = X4
      F4(X1, X2, X3, X4, Y, Y1, Y2) = -OR*X3+ A+(Y1+ Y2*X3) + (X1- Y - Y1*X3)
      F4L(X3) = - OR*X3
      YO1(Z)= Z**4*(35.+ Z*(-84.+Z*(70.-20.*Z)))
      Y11(Z)= Z**3*(14⁹.+ Z*(-420.+ Z*(420.-140.*Z)))
      Y21(Z)= Z**2*(420+ Z*(-1680. + Z*(2100. - 840.*Z)))
      YO3(Z)= (2. - Z)**4*(35.+ (2.-Z)*(-84.+ (2.-Z)*(70. - 20.* (2. -Z))))
      Y13(Z) = (2.- Z)++3+ (- 140.+ (2.- Z)*(420.+ (2.- Z)* (-420. + 140.*(2.
     -Z))))
      Y23(Z)= (2.- Z)**2* (420.+ (2.-Z)*(-1680.+(2.-Z)*(1100.- 840.*(2.- Z))))
      READ (1, 1001) A, A1, B1, B2, O1, OR, F, H, X1O, K2O, X3O, X40
1001  FORMAT(5D14.4)
      WRITE (3, 1011) A, O1, OR, F
1011  FORMAR ('0', 'REZOLVAREA SISTEMULUI'/'O', 'X** = 01. 01((Y + Y + X3)
     -X)-F' 1/'O', 'X3**= - OR.OR. X3+A(Y**Y**.X3)(X-Y - Y*. X3)'/'O,'AVIND'
     5X, 'A= 2' D10.3,2X, 'O1P= ,'D10.3, 2X, 'ORP= 'D10.3,2X 'F= ,'D10.3//'O',3X, 'T,
     3, 12X, 'X', 15X, 'X'*, 12X, 'X**', 13X', X3', 13X, 'X3*', 14X, X3**', 13X, P'4///)
      X1 = X10
      X2 = X20
      X2D = O.DO
      X3 = X30
      X4= X40
      X4D= O.DO
      P = O.DO
      TA = O.DO
```

```
  8 DO  70  I=  1,40
    IF(TA – 1.)10, 1, 1
  1 IF(TA–2.) 30, 80, 80
 10 YYO1 = YO1 (TA)
    YY11 = Y11 (TA)
    YY21 = Y21(TA)
    YYO2 = Y01(TA + 0.5*H)
    YY12= Y11(TA + 0.5*H)
    YY22 = Y21(TA + 0.5*H)
    YY03 = Y01(TA + H)
    YY13 = Y11(TA + H)
    YY23 = Y21(TA + H)
    IF(TA + H – 0.2) 12, 12, 50
 12 K31 = H*F3(X4)
    K41 = H*F4L(X3)
    K32 = H*F3(X4+0,5*K41)
    K42 = H*F4L(X3 + 0.5*K31)
    K33 = H*F3(X4+ 0.5*K42)
    K43 = H*F4L(X3+ 0.5*K32)
    K34 = H*F3(X4 + K43)
    K44 = H*F4L(X3 + K33)
 60 X3 = X3*(K31 + 2.*K32+ 2.*K33 + K34)/6.
      X4 = X4*(K41 + 2.*K42+ 2.*K43 + K44)/6.
    X4D = F4L(X3)
    P = YYO3 + YY13*X3 – X1
    GO TO 69
 30 YYO1 = YO3(TA)
    YY11 = Y13(TA)
    YYO2 = YO3(TA + O.5*H)
    YY12 = Y13(TA + 0.5*H)
    YY22 = Y23(TA + 0.5*H)
    YYO3 = Y03(TA + H)
    YY13 = Y13(TA + H)
    YY23 = Y23(TA + H)
    IF(TA + H – 1.8)50, 50, 12
 50 K11 = H*F1(X2)
    K21 = H*F2(X1, X2, X3, X4, YYO1, YY11, YY21)
    K31 = H*F3(X4)
    K41 = H*F4(X1, X2, X3, X4, YYO1, YY11, YY21)
    K12 = H*F1(X2+ 0.5 + K21)
    K22 = H*F2(X1 + 0.5*K11, X2+0.5*K21, X3 + 0.5* K31, X4+ 0.5*K41, YYO2,
    YY12, 1YY22)
    K32 = H*F3(X4 + 0.5*K41)
    K42 = H*F4(X1 + 0.5*K11, X2 + 0.5*K21, X3 + 0.5*K31, X4+ 0.5*K41,YYO2,
    YY12, 1YY22)
    K13 = H*F1(X2 + 0.5*K22)
    K23 = H*F2(X1+ 0.5K12, X2 + 0.5*K22, X3+ 0.5*K32, X4+ 0.5*K42,YYO2.
    YY12, 1YY22)
    K33 = H*F3 (X4 + 0.5*K42)
```

```
      K43 = H*F4(X1 + 0.5*K12, X2 + 0.5*K22, X3 + 0.5 *K32,X4 + 0.5*K42, YYO2,
     YY12, 1YY22)
      K14 = H*F1(X2 + K23)
      K24 = H*F2(X1+ K13?X2 + K23, X3 + K33, X4 + K43, YYO3, YY13, YY23)
      K34 = H*F3(X4+ K43)
      K44 = H*F4(XI + K13, X2 + K23, X3 + K33, X4 + K43, YYO3, YY13, YY23)
      X1 = X1*(K11+ 2.*K12+ 2*K13+K14)/6.
      X2 = X2*(K21+'' * K22+ 2.*K23+ K24)/6.
      X2D = F2(X1, X2, X3, X4, YYO3, YY13, YY23)
      X3 = X3+ (K31+ 2.*K32+ 2.+ K33*K34)/6.
      X4= X4+ (K41+ 2.*K42+ 2.*K43+ K44)/6.
      X4D= F4(X1, X2, X3, X4, YYO3, YY13, YY23)
      P = YYO3+ YY13*X3-X1
   69 TA = TA + H
   70 CONTINUE
   71 WRITE (3, 1012) TA, X1, X2, X2D, X3, X4, X4D, P
 1012 FORMAT (',F7.4,7(2X,E14.7))
      IF (TA- 2)8, 80, 80
   80 STOP
      END
```

BUDAPESTI MUSZAKI EGYETEM KOZPONTI KONYVTARA 1848

Observație. Funcțiile F2, F4 și expresia lui P corespund cazului fără amortizări. Altfel trebuie adăugați termenii care țin cont de prezența amortizării în sistem conform sistemului (25) și, respectiv, expresiei (27).

Astfel, la utilizarea programului, pentru diverse probleme concrete pot să apară următoarele situații :

— sistemul de ecuații să aibă o formă diferită de (25) ; în acest caz se înlocuiesc cartelele conținînd funcțiile $F2$ și $F4$;

— legea de profilare a camei să fie compusă din diferite curbe racordate ; în această situație se înlocuiesc corespunzător instrucțiunilor Y01—Y23 care în programul prezentat reprezintă un profil polinomial de exponenți 4—5—6—7) și comenzile de decizie IF.

— parametrii de bază ai problemei (constante elastice, de amortizare, turații etc.) să aibă diferite valori ; în această situație, relațiile (26) servesc pentru calcularea datelor problemei concrete și care se trec, conform formatului indicat (1001), în cartelele de date care urmează comenzii END.

Se menționează faptul ca pentru mașină s-au introdus următoarele variabile :

$$X_1 = X1\,;\ X_3 = X3\,;\ y = Y\,;\ A_1 = A1\,;\ B_1 =$$

$$= B1\,;\ B_2 = B2\,;\ \omega_1 = O1\,;\ \omega_r = OR\,;$$

$$X_1'' = X2D\,;\ X_3'' = X4D\,;\ X_1' = X2\,;\ X_3' = X4.$$

În baza rezultatelor obținute s-a putut analiza influența vibrațiilor de torsiune a vibrațiilor proprii și amortizărilor, a prestrîngerii resortului de readucere, a turațiilor motorului, a jocului dintre elementele lanțului cinematic, a înălțimii maxime de ridicare și a legii de profilare a camei.

5. ANALIZA REZULTATELOR

Deoarece procedeul de analiză a comportării mecanismelor cu came în baza sistemului (25) şi a relaţiei (27) este asemănător, spre exemplificare se va reda în continuare numai influenţa vibraţiilor torsionale, a jocurilor dintre elementele lanţului cinematic, a legii de profilare, a amortizărilor şi a turaţiei motorului. Celelalte influenţe menţionate mai sus, împreună cu amănunte, se găsesc în lucrarea [4].

a) *Aportul vibraţiilor la torsiune.* Dacă în sistemul (25) se neglijează vibraţia la torsiune, se obţine modelul matematic corespunzător modelului monomasic, care are forma (20) [1] şi cu ajutorul căruia se pot studia vibraţiile longitudinale din mecanismele cu came. Pentru acest caz condiţia de continuitate are forma cunoscută [1]

$$P = (y - X_1) + A_1(y' - X_1')/\omega_1^2. \tag{30}$$

Soluţiile obţinute prin rezolvarea expresiilor (27) şi (30), păstrînd valorile constantelor comune ambelor expresii, permit evidenţierea aportului vibraţiilor torsionale. Pentru cazul unor came de profil parabolic şi respectiv, polinomial de tipul PRCP [4], care prezintă discontinuităţi în curba acceleraţiei, soluţiile au reprezentarea grafică redată în figura 2, unde sînt trecute şi valorile constantelor sistemului. Curbele *a* corespund expresiei (27), iar curbele *b* expresiei (30).

Prezenţa vibraţiilor torsionale înrăutăţeşte funcţionarea mecanismului prin mărirea riscului de apariţie a discontinuităţii mişcării. Altfel spus, scăderea amplitudinilor maxime ale încărcării din cupla superioară, în prezenţa vibraţiilor torsionale, se face în detrimentul continuităţii lanţului cinematic. Desigur că mărirea flexibilităţii torsionale împreună cu revederea posibilităţilor arcului de readucere poate contribui la îmbunătăţirea funcţionării mecanismelor cu came la viteze mari.

b) *Influenţa jocurilor dintre elementele lanţului cinematic.* Modificarea jocurilor în mecanismele cu came atrage după sine modificarea condiţiilor iniţiale [1]. În afara condiţiilor iniţiale (29), considerînd suplimentar şi situaţiile

$$\text{pentru } x = 0 : X_1 = X_1' = 0 \text{ şi pentru } x = 0{,}35 : X_1' = X_1 = 0,$$

în acelaşi timp conservîndu-le pe acelea corespunzătoare vibraţiilor torsionale şi păstrînd neschimbate valorile restului de parametrii (amortizare, frecvenţe proprii etc.), se obţin soluţiile redate în figura 4 şi care corespund la diferite jocuri în mecanismele cu camă avînd un profil parabolic. Comparaţia dintre cele trei curbe evidenţiază pe deplin înrăutăţirea funcţionării o dată cu creşterea jocurilor dintre elementele lanţului cinematic. Astfel creşterea de 1,75 ori a jocului (0,35 faţă de 0,2) conduce la o creştere a amplitudinilor încărcării din cupla superioară de circa patru ori. Acest lucru atrage după sine accentuarea uzurii camei şi o mişcare destul de haotică a urmăritorului. Anularea jocului dintre elemente îmbunătăţeşte radical comportarea la începutul intervalului, în timp ce la mijlocul său saltul din curba acceleraţiei face să reapară întreruperea continuităţii mişcării.

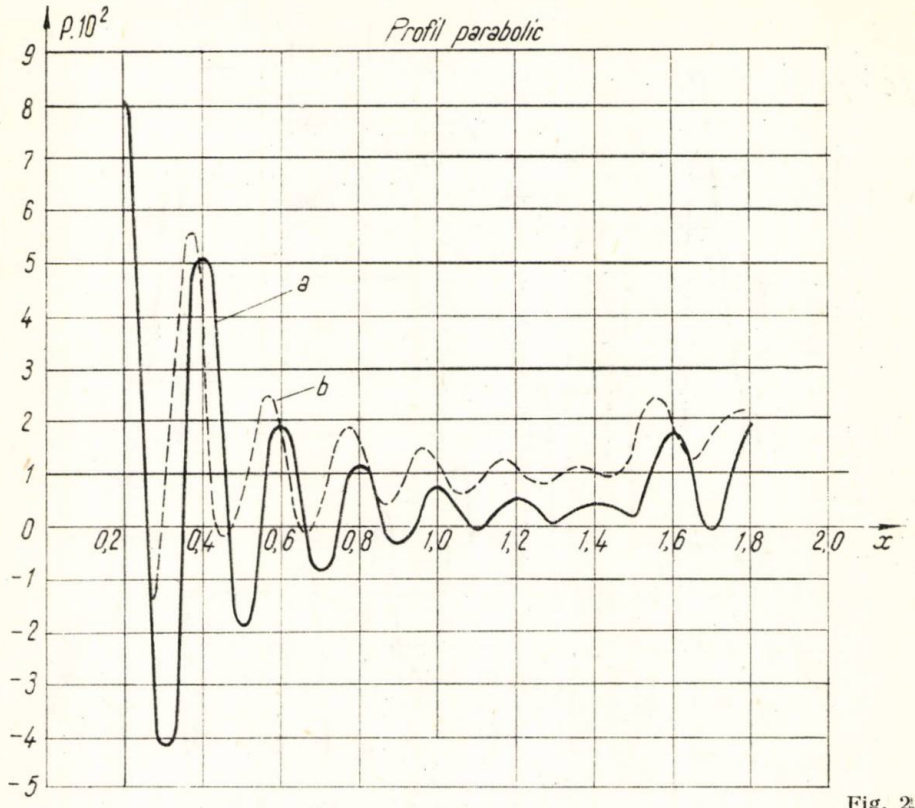


Fig. 2.

a) $A_1 = 6$ $\omega_r^2 = 5$ $B_2 = 0{,}012$ $\omega_1^2 = 10^3$ $A = 2$ $F = 7$ $B_1 = 0{,}125$

b) $A_1 = 6$ $\omega_1^2 = 10^3$ $F = 7$

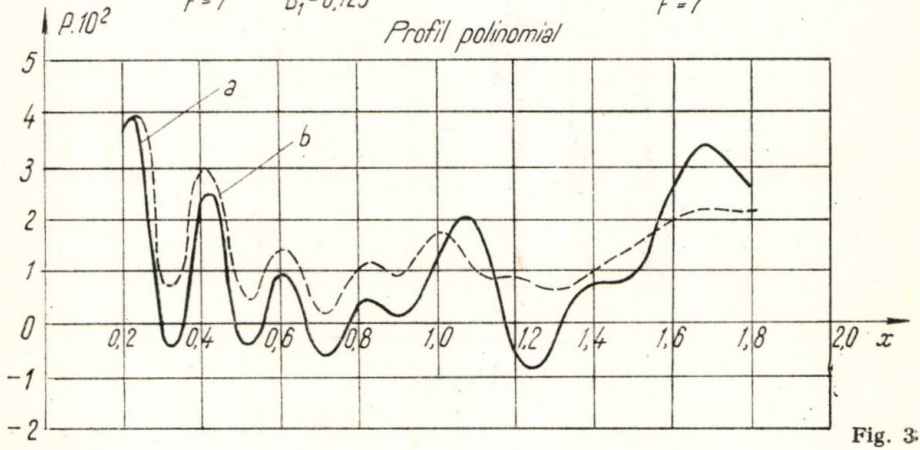


Fig. 3.

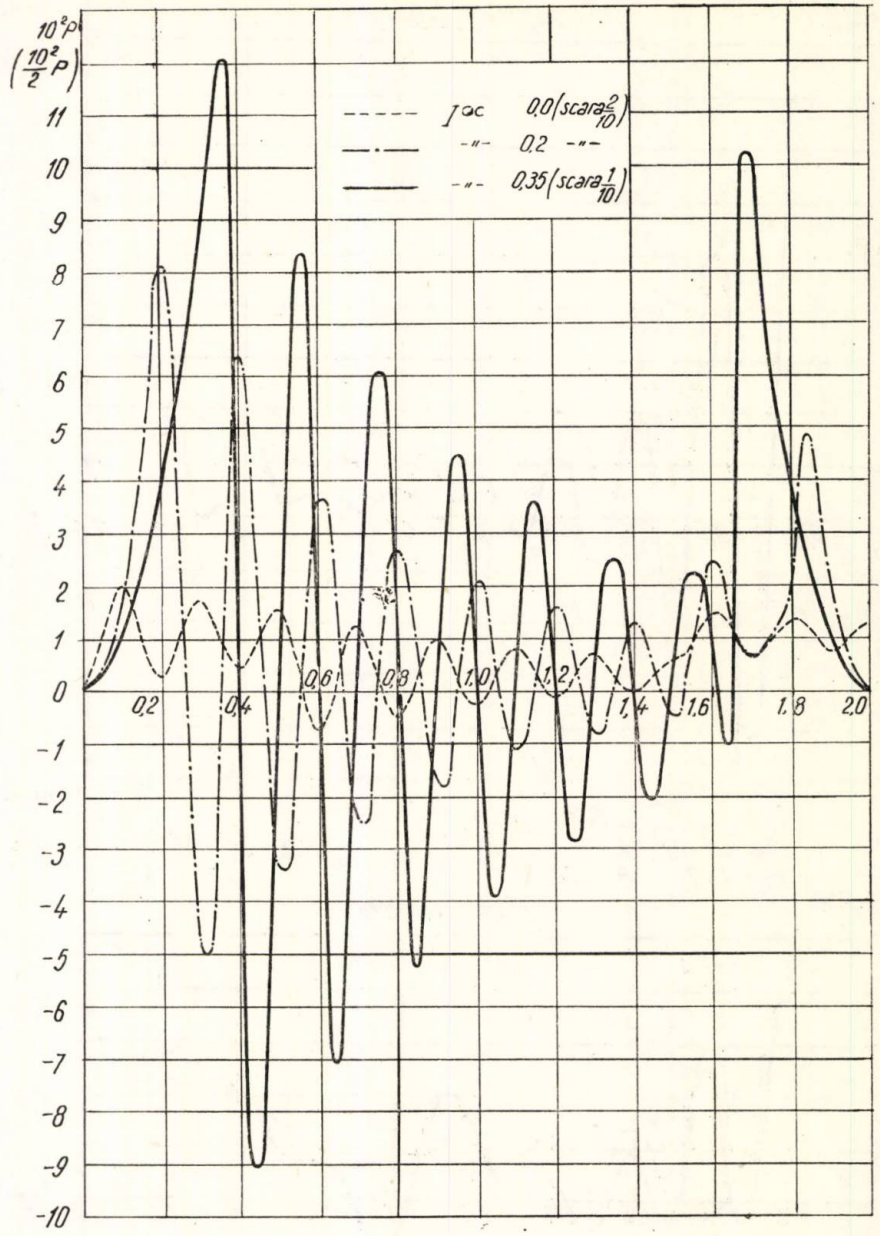

$10^2 p$
$\left(\frac{10^2}{2} p\right)$
11
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-5
-6
-7
-8
-9
-10
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
$\int \alpha c$ 0,0 (scara $\frac{2}{10}$)
-"- 0,2 -"-
-"- 0,35 (scara $\frac{1}{10}$)

Fig. 4

În a doua jumătate a intervalului de coborîre, variația accentuată a curbei accelerației conduce iarăși la creșterea încărcării din cupla superioară, dar în sens pozitiv, care poate atrage după sine perturbații mai accentuate la sfîrșitul coborîrii.

Concluziile teoretice sînt confirmate de cercetările experimentale. Astfel, pentru un profil cu o variație destul de bruscă a accelerației, variația parametrilor cinematici: deplasarea s, viteza v și accelerația a redați în oscilogramele din figura 5, prima cu jocul 0,4 mm, iar a doua cu joc nul, se poate constata că negativarea accelerațiilor pe intervalul ridicării este însoțită de întreruperea continutății mișcării. Același lucru se întîmplă și pentru cazul cînd jocul este nul, dar mult mai puțin accentuat.

Viteza elementului de reducere în momentul reapariției jocului este mult mai mare în comparație cu cazul jocului nul și deci perturbațiile produse de viteza de șoc mare, așa cum se întîmplă pentru cazul mecanismului cu came de la distribuția motoarelor cu ardere internă, vor fi mari și deci dăunătoare.

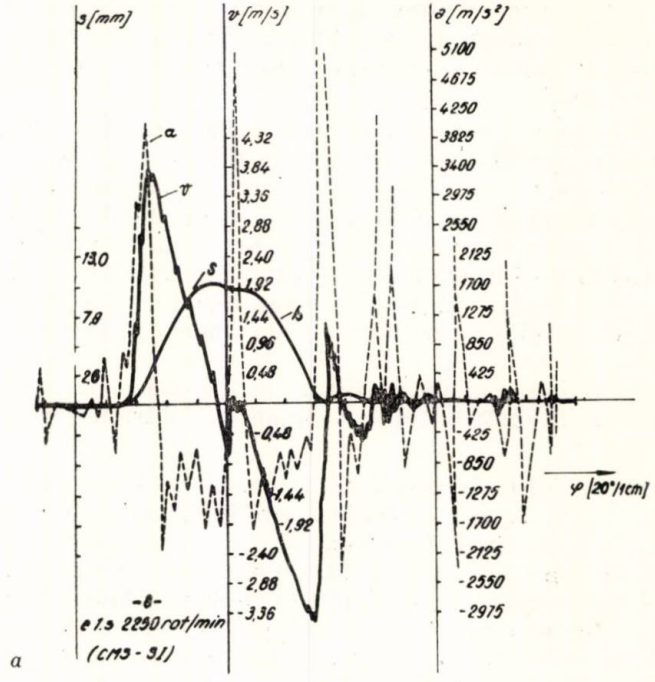
c) *Influența legii de profilare a camelor.* Urmărind comparativ curbele *a* din figurile 2, care corespund profilului parabolic (cu discontinuități în curba accelerației) și, respectiv, polinomial (fără discontinuități în curba accelerației), se poate constata o netă superioritate în comportare a celei de-a doua categorii de profile pentru oricare dintre parametrii care caracterizează comportarea mecanismului (așa după cum rezultă din volumul de calcule neredate în lucrare). Încărcarea din cupla superioară pentru cea de-a doua categorie de profile scade de la dublu la simplu, iar pentru anumite valori ale amortizării probabilitatea discontinuității și a apariției unei perturbații în funcționare se manifestă numai la începutul intervalului de lucru, dispărînd aproape complet pînă la sfîrșitul coborîrii. Perturbațiile inițiale se datoresc prezenței jocului în cuplele cinematice. Desigur că și în acest caz, printr-o corelare a posibilităților resortului cu profilul ales, se poate ajunge la o funcționare îmbunătățită.

d) *Influența turațiilor camei.* Modificarea numărului de turații al camei atrage după sine schimbarea timpului t_0 în care se realizează cursa maximă. Mărirea numărului de turații conduce la o înrăutățire a funcționării atît prin mărirea posibilității de întrerupere a continuității lanțului cinematic, cît și prin sporirea încărcării din cupla superioară, așa după cum se poate vedea urmărind curbele *1* și *2* din figura 6. Observațiile făcute își păstrează valabilitatea pentru ambele tipuri de profile.

e) *Influența amortizării.* Absența completă a amortizării este evidențiată printr-o funcționare defectuoasă pe tot intervalul de lucru, așa după cum se poate vedea urmărind curba *1* din figura 7.

Prezența amortizării și creșterea ei atenuează și reduce sensibil valorile maxime ale forței de contact și în aceeași măsură reduce și discontinuitatea mișcării. În cazul unei amortizări de 0,2 kgs/cm, tendința de discontinuitate se manifestă numai la începutul intervalului de lucru (compară curbele *2* și *3* din figura 7).

Creșterea în aceeași măsură a amortizării vibrațiilor la torsiune influențează în același sens parametrii de ieșire, dar cu o intensitate mult mai scăzută (compară curbele *1*, *2* din figura 8).


s[mm]
v[m/s]
a[m/s²]
5100
4675
4250
3825
3400
2975
2550
2125
1700
1275
850
425
4,32
3,84
3,36
2,88
2,40
1,92
1,44
0,96
0,48
13,0
7,8
2,6
a
v
s
b
φ [20°/1cm]
e 1:s 2250 rot/min
(CMS - 31)
a

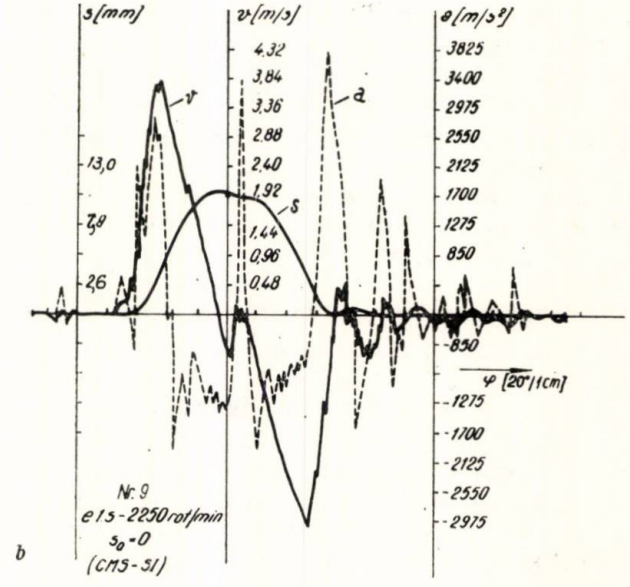

s[mm]
v[m/s]
a[m/s²]
4,32
3,84
3,36
2,88
2,40
1,92
1,44
0,96
0,48
3825
3400
2975
2550
2125
1700
1275
850
13,0
7,8
2,6
v
a
s
φ [20°/1cm]
Nr. 9
e 1:s - 2250 rot/min
s₀ - 0
(CMS - 31)
b

Fig. 5

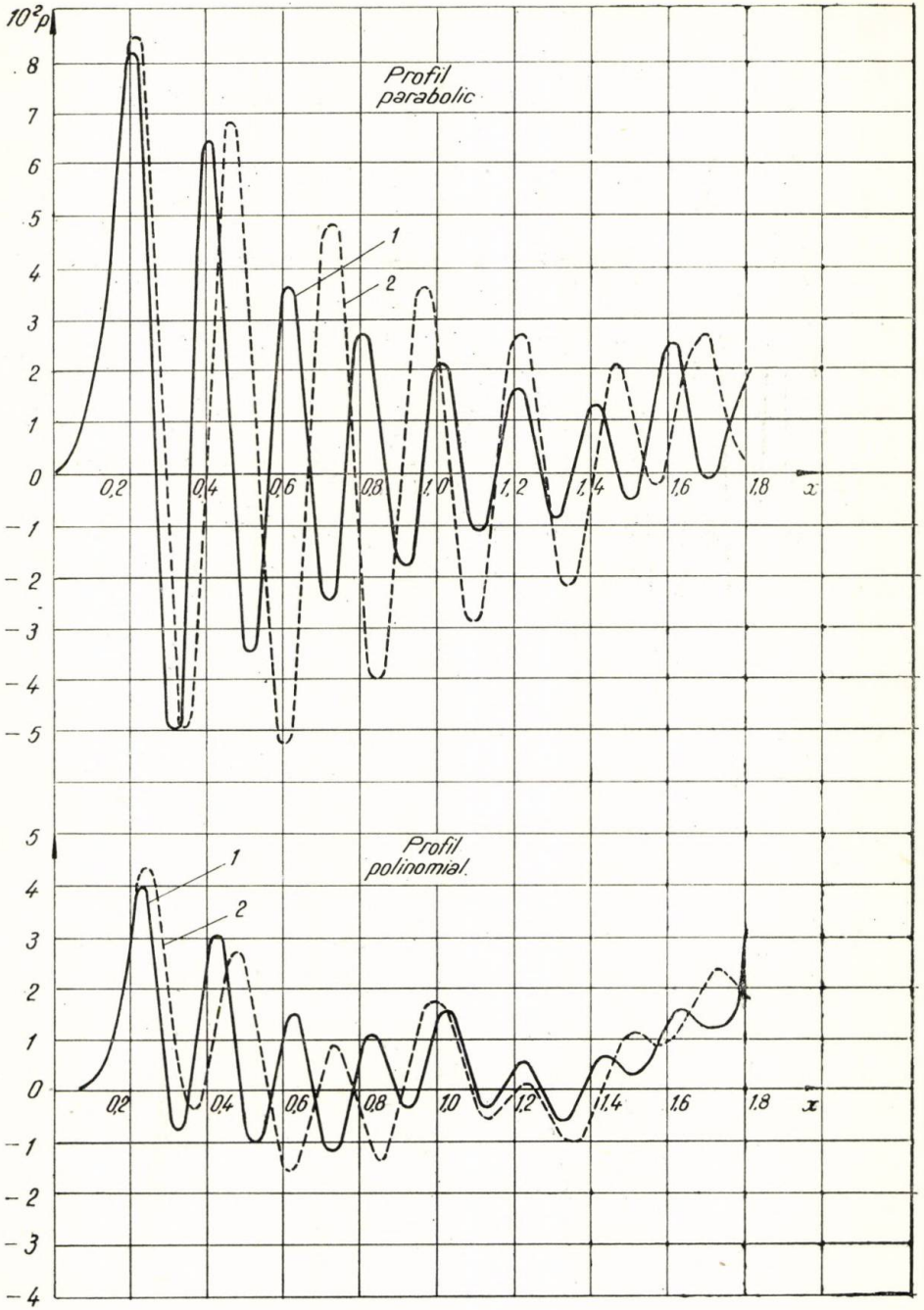

$10^2 p$
Profil parabolic
1
2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
x
Profil polinomial
1
2
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
x

Fig. 6

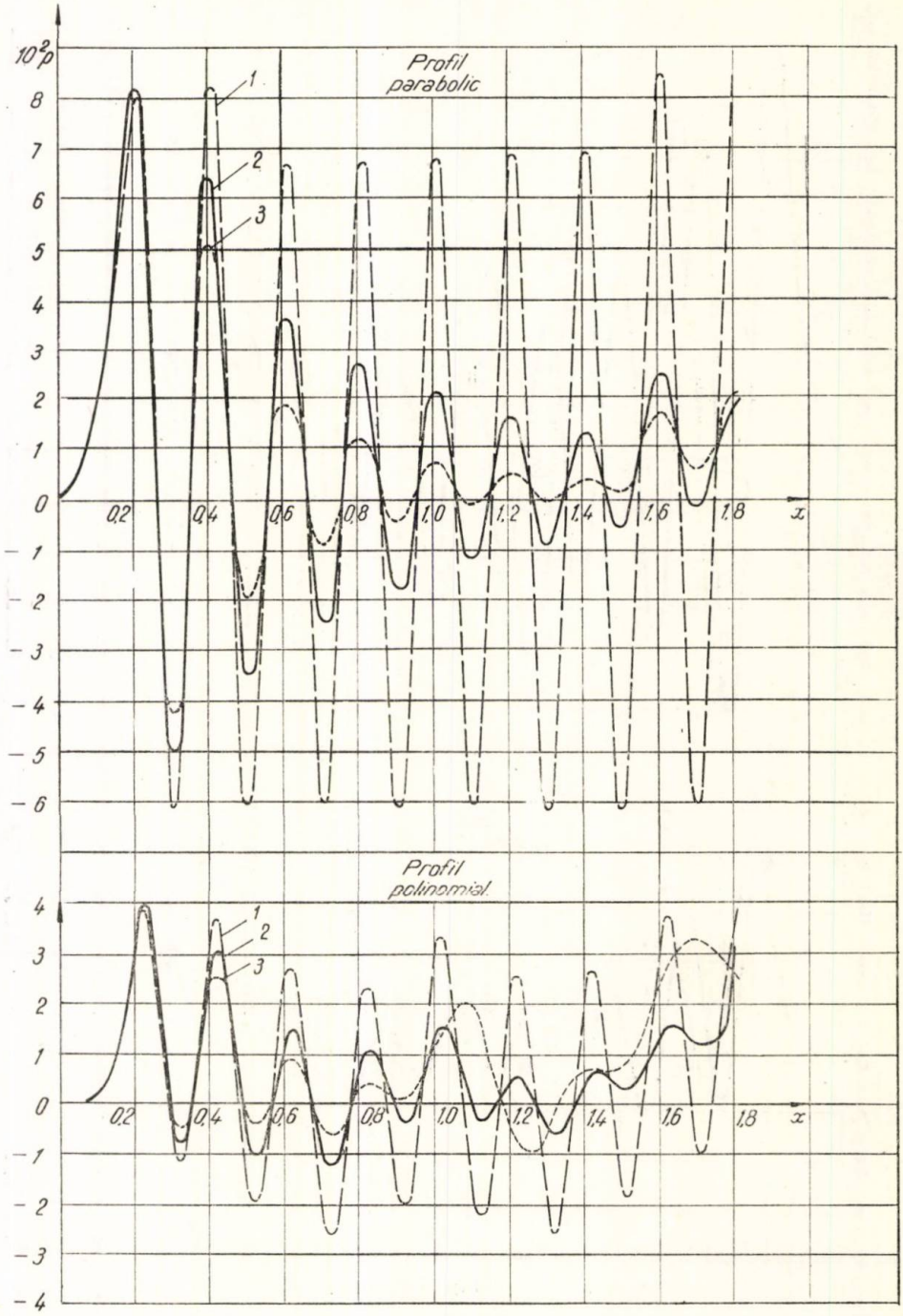

$10^2 p$
Profil parabolic
1
2
3
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
1.2
1.4
1.6
1.8
x
Profil polinomial

Fig. 7

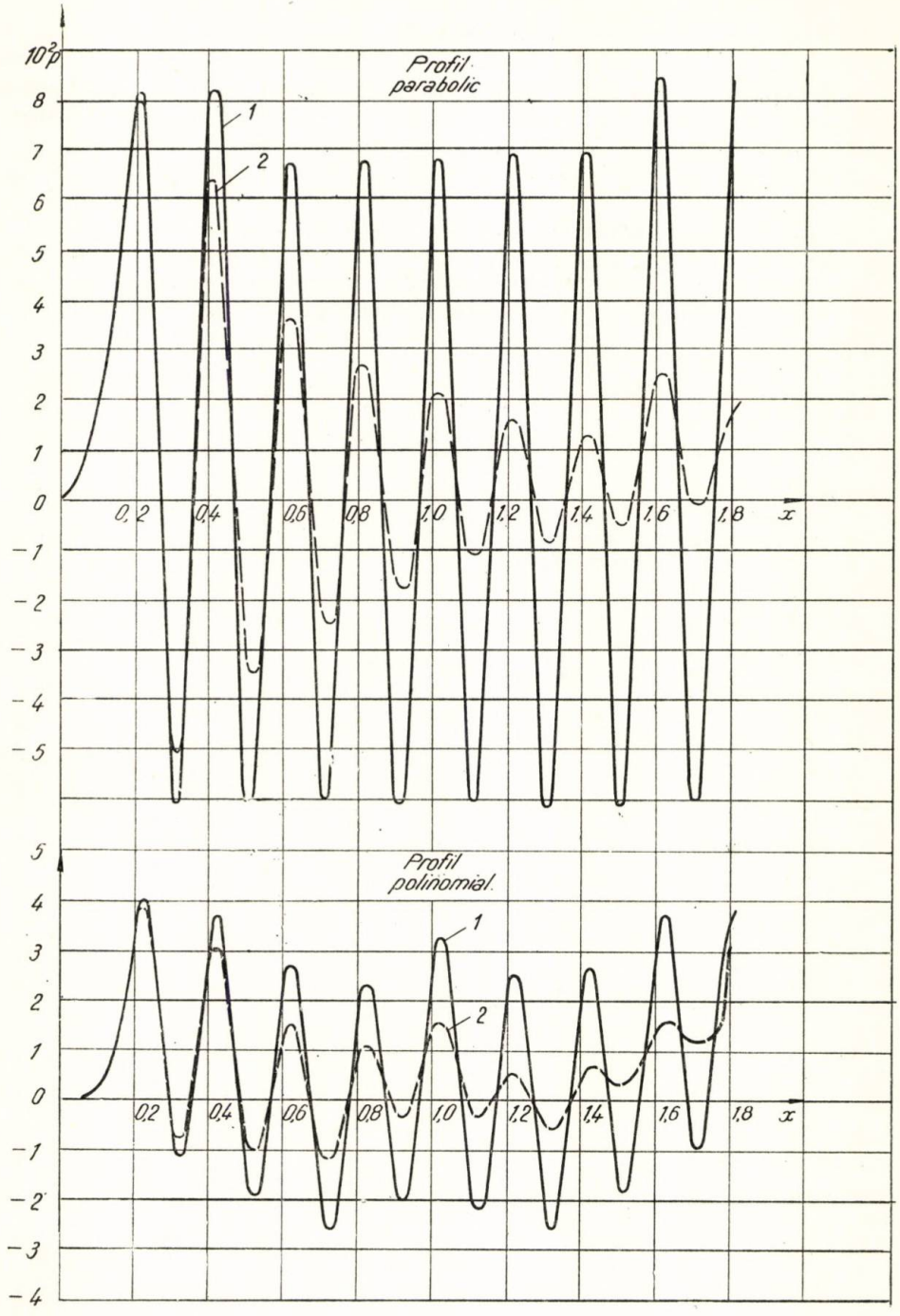

$10^2 p$
Profil parabolic
1
2
8
7
6
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
x
Profil polinomial
1
2
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
x

Fig. 8

6. CONCLUZII

Din volumul de calcule rezultă valori foarte mici ale amplitudinilor vibraţiilor la torsiune, dar vitezele şi în special acceleraţiile cresc simţitor, ceea ce se evidenţiază în condiţia de continuitate (28).

Pentru arbori portcamă rigizi, torsional, în locul sistemului de ecuaţii (25) se poate utiliza ecuaţia (20) din lucrarea [1], care are o formă mult mai simplă şi care descrie cu o precizie suficientă mişcarea elementului executor. Caz contrar, vibraţiile la torsiune nu pot fi neglijate şi, în consecinţă, pentru urmărirea variaţiei încărcării din cupla superioară, se recomandă utilizarea, sistemului de ecuaţii diferenţiale (25).

Primită la redacţie la 6 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. CHR. PELECUDI, I. SAVA, S. CONONOVICI, *Comportarea mecanismelor cu came la viteze, ridicate*, St. cerc. mec. apl. 2 (1971) I, St.
2. — *Studiul experimental al dinamicii mecanismelor cu came*, St. cerc. mec. apl., *3* (1970).
3. I. SAVA, *Stadiul actual în dinamica mecanismelor cu came*, II, St. cerc. mec. apl., *6* (1969)
4. — *Contribuţii la dinamica şi sinteza optimală a mecanismelor cu came*, teză de doctorat, C.M.S. 1969.
5. I. I. VULIFSON, *Dinamica tachetului elastic cu socotirea amortizării*, Sb. TMM, *94 — 95* (1963).
6. — *Ucet vozbujdaemth krutilnth kolebanii privoda pri analize i dinamiceskom sinteze kulacikovomehanizma*, Mehanika maşin, *9 — 10* (1967).

STABILIREA EFORTURILOR UNITARE DIN ECLISELE LANȚURILOR CU ROLE ȘI ZALE SCURTE PRIN METODA FOTOELASTICITĂȚII

de N. N. ANTONESCU
Institutul de Petrol, Ploiești
TH. HUIDU
Universitatea București

Se studiază problema stabilirii eforturilor unitare din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte prin metoda fotoelasticității pentru diverse cazuri de încărcare. Se stabilește o metodă teoretică și experimentală pentru cercetarea acestei probleme. În final se compară valorile obținute prin diverse metode de calcul expuse în literatura de specialitate cu cele stabilite experimental, trăgîndu-se concluzii asupra corectitudinii acestor metode.

1. INTRODUCERE

Transmisiile cu lanțuri cu role și zale scurte sînt foarte mult folosite la viteze și sarcini ridicate, în diverse mașini și utilaje, cum sînt vehicule, mașini și agregate rutiere, de construcții și textile, mașini agricole, mașini de ridicat și transportat, mașini-unelte, instalații miniere, utilaj petrolier ș.a.[1]. Aceste transmisii sînt de diverse tipuri și lucrează la regimuri de încărcare variabile. Durabilitatea lanțurilor (transmisiilor) este determinată fie de distrugerea prin oboseală (cel mai frecvent), fie de uzura elementelor acestora [1].

Clasificarea, construcția, avantajele și dezavantajele, diverse metode de calcul geometric, de precizie, funcțional și de rezistență, precum și alte date despre transmisiile cu lanțuri, sînt prezentate pe larg în diverse lucrări de specialitate [1] — [8]. Lanțurile cu role și zale scurte (STAS 5174—66) sînt compuse din următoarele elemente : eclise exterioare și interioare (la cele multiple și intermediare), bolțuri, bucșe și role. Asamblările cu strîngere dintre eclisele exterioare și bolțuri formează zale exterioare, iar cele dintre eclisele interioare și bucșe formează zale interioare. Legătura dintre zalele exterioare și interioare se realizează prin articulații cu joc între bucșe și bolțuri, formîndu-se astfel lanțul în ansamblu (fig.1). Pentru atenuarea șocurilor produse la angrenarea cu roțile de transmisie, peste bucșe se montează cu joc rolele.

Elementele care determină durabilitatea la oboseală a lanțurilor sînt eclisele [1] — [8]. Practic s-a constatat că scoaterea din funcțiune a lanțurilor din cauza oboselii se datorește în marea majoritate a cazurilor ruperilor ecliselor în dreptul ochiului acestora și numai în puține situații altor cauze (slăbirea ajustajelor cu strîngere, ruperea bolțurilor sau spargerea rolelor). Din această cauză, stabilirea eforturilor unitare din eclise prezintă o mare importanță atît teoretică, cît și practică, deoarece în funcție de valorile acestora se poate face calculul durabilității la oboseală a lanțurilor.

2. NOȚIUNI TEORETICE GENERALE PRIVIND CALCULUL EFORTURILOR UNITARE DIN ECLISELE LANȚURILOR CU ROLE ȘI ZALE SCURTE

Problema stabilirii eforturilor din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte a fost abordată în mai multe lucrări, însă destul de redus și cu ipoteze simplificatoare care viciază rezultatele.

Metoda de calcul cea mai generală și mai completă este expusă în [1]. În celelalte lucrări se folosește încă metoda expusă în [9], bazată pe ipoteza lui Bernhard pentru bare curbe, care dă erori foarte mari la eclisele de lanț (vezi [1]).

Eclisele de lanț sînt supuse la o presiune interioară p (fig. 2*a*), datorită asamblării cu strîngere (presiune de fretare), și o forță exterioară F, variabilă periodic, care este egală cu jumătate din valoarea forțelor din lanț (articulație). Forța F se transmite eclisei printr-o presiune de contact variabilă după o cosinusoidă [1] și poate acționa în lungul axei acestuia (fig. 2*b*) sau sub un unghi ω (fig. 2*c*).

În eclise se produce o stare de tensiuni plană, provenită din suprapunerea a două efecte [1]: strîngerea și forța F.

2.1. Eforturile unitare datorită presiunii de fretare p produse de asamblarea cu strîngere (fig. 3*a*) se calculează cu relațiile lui Lamé [1] pentru tuburi cu pereți groși, cunoscute din teoria elasticității [10], [11]:

$$\sigma_\theta = \frac{a^2 \cdot p}{b^2 - a^2}\left(1 + \frac{b^2}{r^2}\right),$$

$$\sigma_r = \frac{a^2 \cdot p}{b^2 - a^2}\left(1 - \frac{b^2}{r^2}\right), \tag{1}$$

$$\tau_{r\theta} = 0,$$

unde σ_θ și σ_r sînt eforturile unitare după direcția tangentei, respectiv a razei, pentru elementul infinitezimal $dr \cdot d\theta$ centrat de coordonatele r și θ (fig. 2*a*) iar $\tau_{r\theta}$ efortul unitar de forfecare, care este nul.

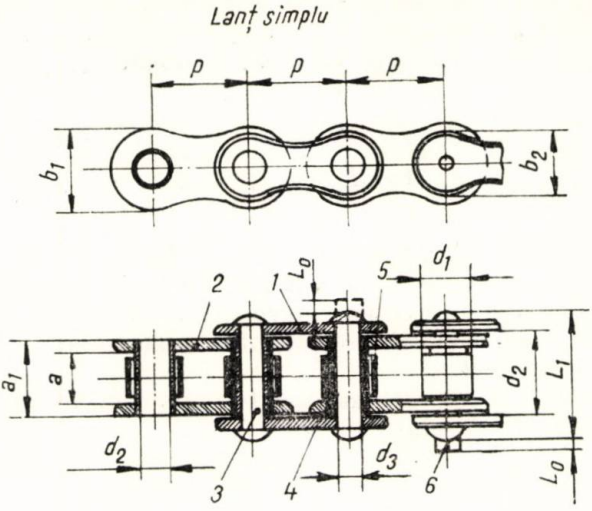


Fig. 1. — Lanț cu role și zale scurte simplu :
1 — eclisă exterioară ; 2 — eclisă interioară ; 3 — bolț ; 4 — bucșă ; 5 — rolă ; 6 — bolț de legătură.

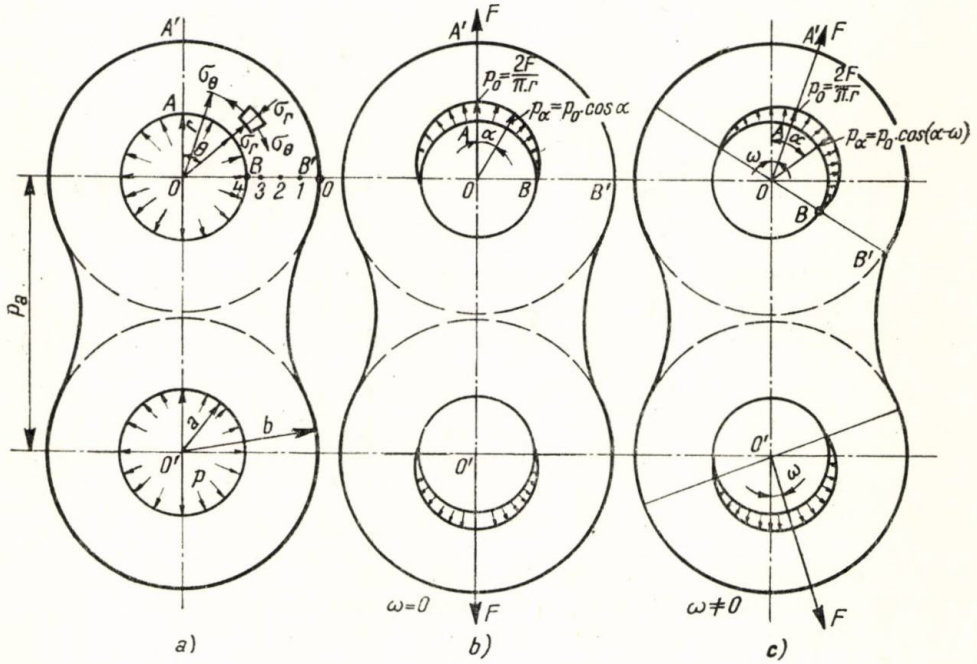


Fig. 2. — Schemele de încărcare și calcul ale eclisei :
a — încărcare cu presiune interioară realizată printr-un ajustaj cu strângere ; *b* — încărcare cu o forță de tracțiune axială ; *c* — încărcare cu o forță de tracțiune care face un unghi ω cu axa eclisei.

Presiunea de fretare se determină în funcție de mărimea strîngerii S, de caracteristicile geometrice ale pieselor conjugate și de caracteristicile fizice ale materialelor acestora cu relația următoare [1]:

$$p = \frac{S}{2 \cdot a} \cdot \frac{1}{\frac{k}{E_1}\left(\frac{1+K_1^2}{1-K_1^2} - \mu_1\right) + \frac{1}{E_2}\left(\frac{1+K_2^2}{1-K_2^2} + \mu_2\right)}, \tag{2}$$

unde

$K_1 = c/a$; $K_2 = a/b$; $k = f(K_1, l)$ și se dă în tabele [11];
c reprezintă raza interioară a bucșei (pentru bolț $c = 0$),
l — lungimea de asamblare (grosimea eclisei);
E_1 și E_2 — modulele de elasticitate pentru materialul bucșei (bolțului), respectiv eclisei;
μ_1 și μ_2 — coeficienții lui Poisson pentru materialele bucșei (bolțului), respectiv eclisei.

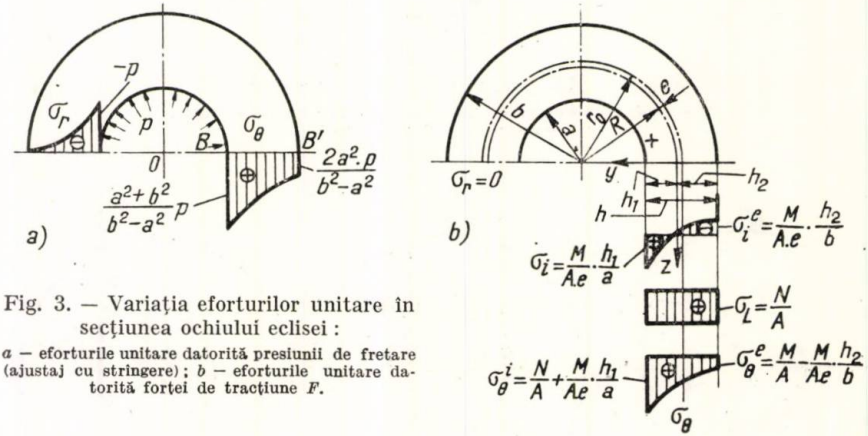


Fig. 3. — Variația eforturilor unitare în secțiunea ochiului eclisei:
a — eforturile unitare datorită presiunii de fretare (ajustaj cu strîngere); *b* — eforturile unitare datorită forței de tracțiune F.

2.2. Eforturile unitare datorate forței F(fig. 3*b*) se calculează cu expresiile cunoscute de la barele curbe [10], [11] deoarece în toate ipotezele actuale de calcul ochiul eclisei se consideră ca fiind o bară curbă:

$$\sigma_\theta = \sigma_t + \sigma_i = \frac{N}{A} + \frac{M}{A \cdot e} \cdot \frac{y}{r},$$

$$\sigma_r = \sigma_{r\theta} = 0, \tag{3}$$

unde

σ_t este efortul unitar dat de forța axială N;
σ_i — efortul unitar dat de momentul încovoietor M;
A — aria secțiunii transversale a ochiului eclisei;
e — excentricitatea (diferența dintre raza centrului de greutate al secțiunii r_0 și raza axei neutre $R = \frac{h}{\ln b/a}$).

În secțiunea periculoasă $B - B'$, valorile eforturilor N și M sînt

$$N = 0{,}5\,F, \qquad M = C \cdot F \cdot r. \tag{4}$$

Valoarea coeficientului C este deosebit de importantă și se stabilește prin diverse ipoteze de calcul. Pentru determinarea lui C, majoritatea lucrărilor actuale folosesc o ipoteză de calcul [9] care nu este corespunzătoare pentru eclisele de lanț. Conform acestei ipoteze, rezultă $C = 0{,}162$ pentru ambele eclise. Valoarea corectă a lui C se determină prin metoda expusă în [1], conform căreia rezultă $C = 0{,}065$ pentru eclisele exterioare și $C = 0{,}075$ pentru cele interioare.

3. PRINCIPIUL STABILIRII EFORTURILOR UNITARE PRIN FOTOELASTICITATE

Pentru stabilirea eforturilor unitare din piese prin fotoelasticitate se execută un model geometric identic sau redus la o anumită scară față de piesa reală, dintr-un material polimer cu proprietăți fotoelastice corespunzătoare. După aceasta se încarcă modelul conform schemei de solicitare reală a piesei studiate și se urmărește într-un fascicul de lumină polarizată, obținîndu-se un spectru de izocromate (fig. 5 și 6). Se știe că, dacă σ_θ și σ_r sînt eforturi unitare principale (așa cum sînt la eclise), ecuația izocromatelor [12], [13] este:

$$|\sigma_1 - \sigma_2| = |\sigma_\theta - \sigma_r| = m \cdot \sigma_0, \tag{5}$$

unde m reprezintă ordinul izocromatelor și σ_0 constanta fotoelastică a modelului.

Din ecuația (5) se pot calcula eforturile unitare principale, punînd anumite condiții de contur. De exemplu, pentru schemele de încărcare ale eclisei (fig. 2), pe conturul exterior ($r = b$) avem $\sigma_r = 0$, pentru orice valoare a unghiului θ în cazul strîngerii (fig. 2*a*) și pentru $\theta = \frac{\pi}{2} + \omega$, respectiv $\theta = -\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)$, în cazul forței F (fig. 2*b* și *c* secțiunea B—B').

Cunoscînd σ_0 iar m reprezentînd ordinul izocromatei pe conturul exterior al modelului (semnificație folosită în toate relațiile următoare), se poate calcula σ_θ pentru $r = b$:

$$\sigma_\theta = m \cdot \sigma_0. \tag{6}$$

Egalînd valoarea lui σ_θ dată de relația (1), pentru $r = b$, cu cea dată de relația (6), rezultă presiunea interioară p pentru încărcarea din strîngere, iar din egalarea lui σ_θ dat de relația (3), pentru $r = b$, cu cea dată de relația (6) rezultă forța F, respectiv N și M în secțiunea $B—B'$.

Pentru presiunea interioară rezultă relația

$$p = \frac{m \cdot \sigma_0 (b^2 - a^2)}{2 \cdot a^2}. \tag{7}$$

Înlocuind valoarea lui p în relațiile (1) pentru $r = a$ (conturul interior), rezultă

$$\sigma_\theta = \frac{m \cdot \sigma_0(b^2 + a^2)}{2 \cdot a^2},$$

$$\sigma_r = -p = -\frac{m \cdot \sigma_0(b^2 - a^2)}{2 \cdot a^2}. \tag{8}$$

În prezenta lucrare s-a urmărit și stabilirea curbelor de variație a eforturilor unitare σ_θ și σ_r pentru orice unghi θ în cazul strîngerii și în secțiunea cea mai solicitată $B-B'$ pentru încărcarea prin strîngere plus tracțiune. Pentru aceasta se consideră că modelul (deci și eclisa) se comportă ca un tub cu pereți groși. Această ipoteză este riguros exactă în cazul solicitării la presiune interioară p produsă de strîngere (fig. 2*a*). De asemenea în cazul solicitării combinate, strîngere (fig. 2*a*) plus tracțiune (fig. 2*b* sau *c*), această ipoteză este satisfăcătoare. În cazul solicitării numai la tracțiune (fig. 2*b* și *c*), această ipoteză nu mai poate fi acceptată pentru stabilirea variației eforturilor în secțiunea periculoasă. Pentru acest ultim caz s-au determinat numai eforturile unitare pe conturul interior (cel mai important pentru dimensionare), respectiv pe cel exterior.

Pentru această ipoteză de calcul, sistemul de ecuații de echilibru se reduce la una singură [10], [11], [14]:

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_r}{\mathrm{d}r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0. \tag{9}$$

Integrînd această ecuație în lungul razei r, în secțiunea considerată (fig. 2*a*) rezultă

$$(\sigma_r)_4 = (\sigma_r)_0 - \int_0^4 \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} \cdot \mathrm{d}r. \tag{10}$$

Ținînd seama și de ecuația (5) și de faptul că $(\sigma_r)_0 = (\sigma_r)_{r=b} = 0$, se obține

$$(\sigma_r)_4 = -\sigma_0 \int_0^4 \frac{m(r)}{r} \cdot \mathrm{d}r. \tag{11}$$

Pentru cele patru puncte i (1, 2, 3 și 4) ale secțiunii $B-B'$ se poate înlocui relația (11) în diferențe finite [13] printr-una din relațiile următoare:

$$(\sigma_r)_i = -(\sigma_r)_{i-1} - \sigma_0 \cdot \frac{\Delta r}{2}\left[\frac{m(r_i)}{r_i} + \frac{m(r_{i-1})}{r_{i-1}}\right], \tag{12}$$

$$(\sigma_r)_i = -(\sigma_r)_{i-1} - \sigma_0 \cdot \Delta r \cdot \frac{m(r_i) + m(r_{i-1})}{r_i + r_{i-1}}. \tag{13}$$

Valoarea efortului unitar σ_θ, conform ecuației izocromatelor (5) și ținînd seama de faptul că $\sigma_0 > \sigma_r$, este

$$(\sigma_\theta)_i = m_i \cdot \sigma_0 + (\sigma_r)_i \tag{14}$$

4. TEHNICA DE EXPERIMENTARE FOLOSITĂ

Determinările s-au făcut pe modele de eclise, interioare și exterioare, pentru lanțul 40 A (STAS 5174—66) cu pasul $p_a = 2\text{-}1/2$ inch, executate la scara 1 : 1, avînd dimensiunile :

— eclisa interioară : $a = 14$ mm și $b = 30$ mm ;

— eclisa exterioară : $a = 10$ mm și $b = 26{,}5$ mm.

Grosimea modelului a fost $g = 7{,}8$ mm pentru ambele eclise în loc de 8 mm, cît este în realitate. De această mică diferență s-a ținut seama și în calculele teoretice pentru compararea rezultatelor cu cele determinate experimental.

Modelele au fost obținute prin prelucrare mecanică fină (pentru a nu se crea tensiuni în timpul execuției) dintr-o placă turnată din Araldit D. Acest material se comportă similar cu oțelul în domeniul elastic, avînd curbe $\sigma = \varepsilon \cdot E$ asemănătoare. Acest material are $E = 24\,000 \ldots 25\,000$ kgf/cm² și $\mu = 0{,}33 \ldots 0{,}38$, iar valoarea benzii pentru modelele încercate (stabilită prin încercări de tarare) este $\sigma_0 = 19$ kgf/cm².

Modelele au fost supuse la următoarele solicitări :

a) presiunea interioară uniformă p, produsă prin asamblări cu strîngere. Pentru eclisa interioară s-au realizat strîngeri $S = 0{,}140$ mm cu bucșe din araldit ($c = 6{,}25$ mm) și $S = 0{,}175$ mm cu bucșe din oțel ($c = 6{,}75$ mm). Pentru eclise exterioare s-au realizat strîngeri $S = 0{,}130$ mm cu bucșe ($c = 5{,}25$ mm) și bolțuri ($c = 0$), ambele din araldit ;

b) solicitarea la tracțiune axială ($\omega = 0$) la forța F(90 și 135 kgf), realizată cu un dispozitiv de tracțiune cu șurub (fig. 4) construit special

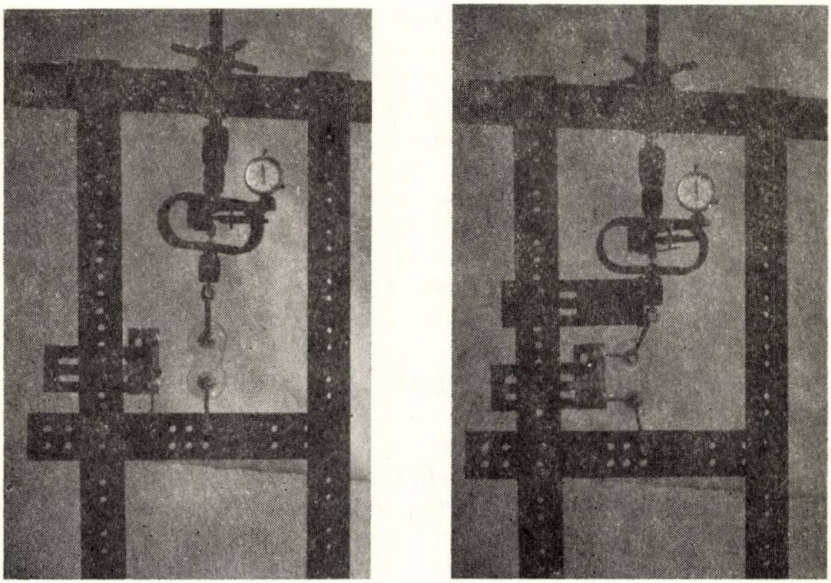


Fig. 4. — Dispozitiv pentru solicitat la tracțiune modelele de eclise :
a — tracțiune axială simplă ; *b* — tracțiune axială din două forțe.

în acest scop. Pentru această încercare s-au folosit bucşe cu jocul $J = 0$, respectiv $J = 1$ mm, pentru a vedea şi efectul acestuia asupra eforturilor unitare din eclisă;

c) solicitarea la acţiunea combinată a presiunii interioare p, dată de strîngere, plus forţă de tracţiune axială F (90 şi 135 kgf). Forţa de tracţiune axială a fost realizată fie direct, fie din rezultanta a două forţe care acţionează pe două direcţii diferite.

Modelele încărcate după una din schemele prezentate mai sus au fost plasate între polaroizii unui aparat de fotoelasticitate cu cîmp mare, după care s-au fotografiat tablourile de izocromate pentru toate variantele studiate. Izoclinele au fost studiate prin observaţii directe, în vederea alegerii metodei de prelucrare a datelor experimentale.

5. REZULTATELE OBŢINUTE EXPERIMENTAL ŞI INTERPRETAREA LOR

5.1. *Încărcarea ecliselor cu o presiune interioară.* Pentru a exemplifica metoda de determinare prin fotoelasticitate a variaţiei eforturilor din eclise, se va prezenta cazul eclisei interioare încărcate cu o presiune p obţinută printr-o asamblare cu strîngere $S = 0{,}140$ mm cu bucşe din araldit.

Determinarea variaţiei eforturilor unitare σ_θ şi σ_r în secţiunea $B-B'$, valabilă în acest caz pentru orice valoare a lui θ, se face folosind relaţiile (12) sau (13) şi (14), tabloul izocromatelor (fig. 5*a*) constatarea experimentală că aceasta reprezintă o secţiune de simetrie mecanică şi izoclina de parametru 0° coincide cu ea.

Curbele de variaţie a eforturilor unitare σ_θ şi σ_r sînt reprezentate în figura 5*b*. Punctele notate prin cruciuliţe sînt calculate cu formulele (12) şi (14) şi date în tabela 1, iar cele notate prin cerculeţe sînt calculate cu formulele (13) şi (14) şi date în tabela 2. De remarcat că prin ambele metode se obţin rezultate foarte apropiate.

Procedînd în mod similar, se obţin diagramele de variaţie pentru toate cazurile studiate (fig. 6). Pentru uşurinţa comparaţiei, în figura 6 s-au reprezentat şi curbele calculate cu relaţiile teoretice (1), aplicate pentru modelele studiate. Din compararea valorilor calculate cu cele determinate experimental (fig. 6) rezultă următoarele:

— pentru toate cazurile studiate, între valorile stabilite experimental şi cele calculate se obţin diferenţe mici (circa 4 — 6%);

— variaţia eforturilor unitare σ_θ şi σ_r stabilite experimental concordă cu cea teoretică (se distribuie pe secţiune după o lege hiperbolică).

Ţinînd seama de aceste constatări, rezultă că ipoteza de calcul folosită pentru ajustajele cu strîngere ale lanţului, tuburi cu pereţi groşi de ungime finită [1] este corectă.

Pentru a se face trecerea de la model la piesele reale, se folosesc relaţii de similitudine [10], [12] pentru eforturile unitare în punctele considerate, cum este

$$\sigma = \sigma_m \cdot \frac{s_d \cdot s_g}{s_F}, \tag{15}$$

unde

σ_m este efortul unitar în punctul considerat al modelului pentru sarcina F_m aplicată acestuia,
σ — efortul unitar în același punct al piesei încărcate cu sarcina F;
s_d — scara modelului (raportul dimensiunilor liniare);
s_g — scara grosimilor;
s_F — scara sarcinilor.

Pentru cazurile prezentate în figura 6 nu este nevoie de aplicat relația (15), deoarece încercările s-au făcut pe modele la scara 1 :1, iar

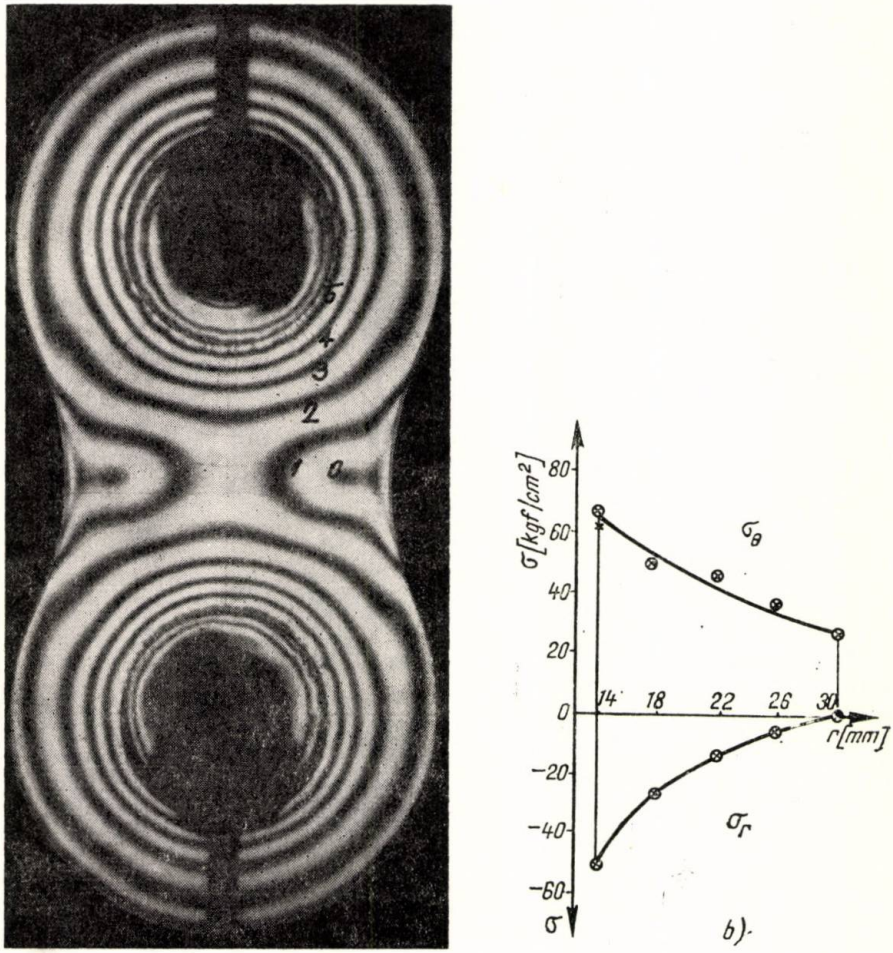


Fig. 5. — Eclisă interioară supusă la o presiune de fretare:
a — tabloul izocromatelor; *b* — diagrama de variație a eforturilor unitare.

aplicarea formulelor teoretice de calcul (1) s-a făcut pentru materialul acestora (araldit D).

5.2. *Încărcarea ecliselor cu o forță de tracțiune F.* Au fost studiate modele de eclise interioare și exterioare supuse la tracțiune axială ($\omega = 0$)

Tabela 1

Pct. i	r_i	m_i	$e_i = \frac{m_i}{r_i}$	$\frac{e_i + e_{i-1}}{2}$	$\frac{e_i + e_{i-1}}{2}\Delta r$	$\frac{e_i + e_{i-1}}{2}\Delta r \cdot \sigma_0$	$\sigma_r = -\sum_{1=0}^{4} \frac{e_i + e_{i-1}}{2}\Delta r \cdot \sigma_0$	$m_i \cdot \sigma_0$	$\sigma_\theta = m_i \cdot \sigma_0 + \sigma_r$
—	*mm*	benzi	mm^{-1}	mm^{-1}	—	kgf/cm²			
0	30	1,4	0,047	—	—	—	—	26,5	26,5
1	26	2,0	0,077	0,062	0,248	4,7	− 4,7	38,0	33,3
2	22	2,8	0,127	0,102	0,408	7,7	−12,4	53,2	40,8
3	18	3,8	0,211	0,169	0,676	12,8	−25,2	72,2	47,0
4	14	6,2	0,443	0,327	0,310	24,8	−50,0	117,9	67,9

Tabela 2

Pct. i	r_i	m_i	$\frac{m_i + m_{i-1}}{2}$	$\frac{r_i + r_{i-1}}{2}$	$\frac{m_i + m_{i-1}}{r_i + r_{i-1}}$	$\frac{m_i + m_{i-1}}{r_i + r_{i-1}}\cdot\Delta r$	$\frac{m_i + m_{i-1}}{r_i + r_{i-1}}\cdot\Delta r \cdot \sigma_0$	$\sigma_r = -\sum_{1=0}^{4} \frac{m_i + m_{i-1}}{r_i + r_{i-1}}\cdot\Delta r \cdot \sigma_0$	$m_i \cdot \sigma_0$	$\sigma_\theta = m_i \cdot \sigma_0 + \sigma_r$
—	mm	benzi		mm	mm^{-1}	—	kgf/cm²			
0	30	1,4	—	—	—	—	—	—	26,5	26,5
1	26	2,0	1,7	28	0,061	0,24	4,6	−4,6	38,0	33,4
2	22	2,8	2,4	24	0,100	0,40	7,6	−12,2	53,2	41,0
3	18	3,8	3,3	20	0.165	0,63	12,5	−24,7	72,2	47,5
4	14	6,2	5,0	16	0,312	1,25	23,7	−48,4	117,9	69,5

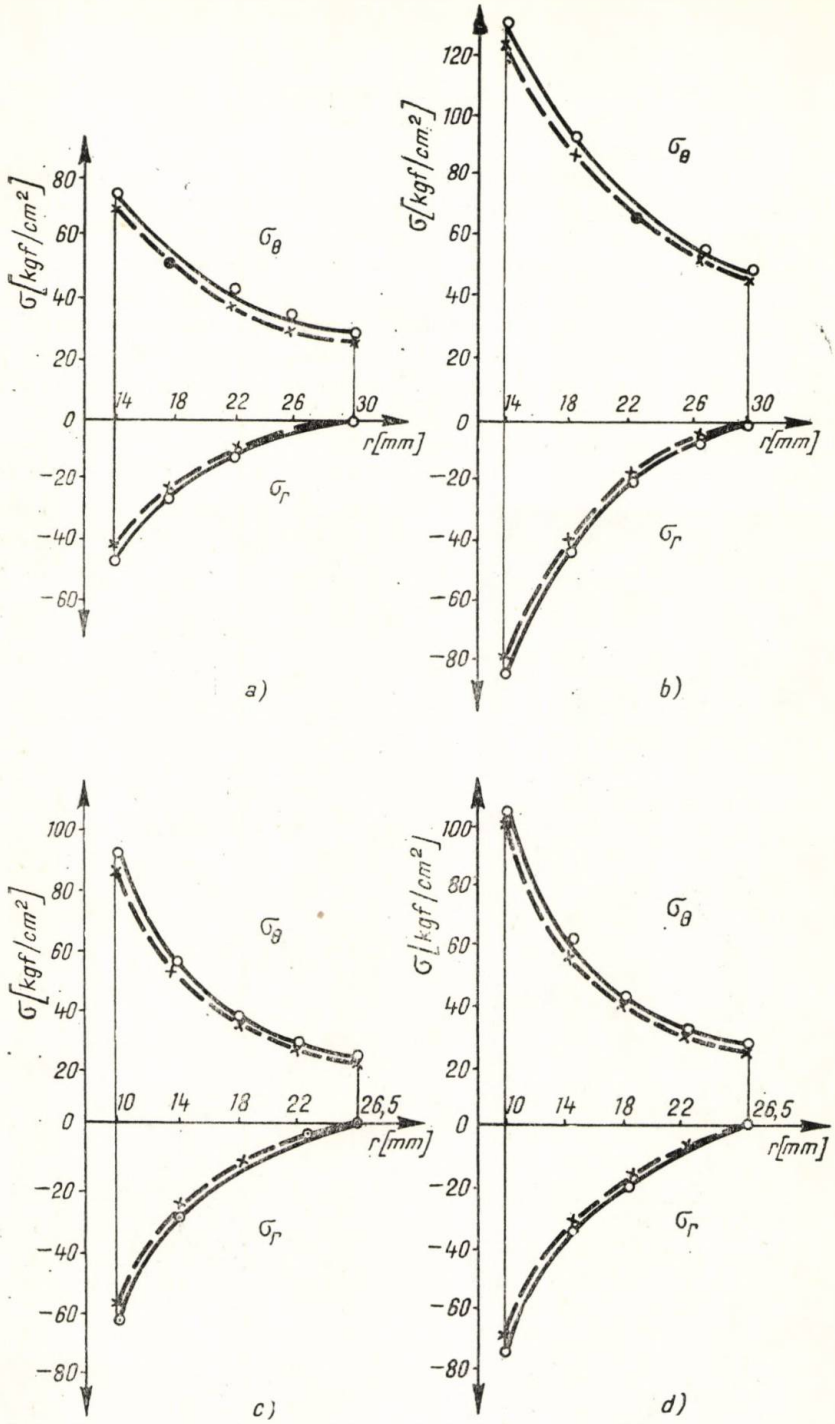


Fig. 6. — Diagramele de variație a eforturilor unitare în secțiunea ochiului ecliselor datorate presiunilor de fretare (ajustaje cu strîngere):

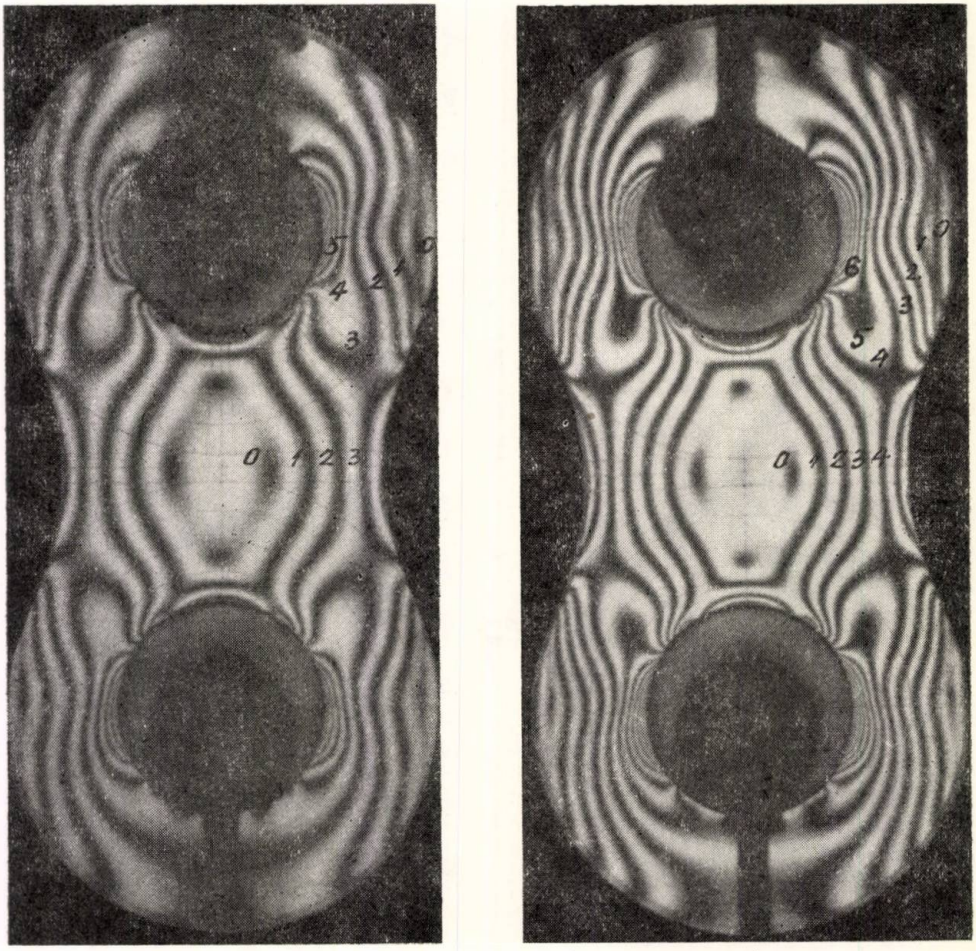
a — eclisă interioară cu bucșe din araldit; *b* — eclisă interioară cu bucșe din oțel; *c* — eclisă exterioară cu bucșe din araldit; *d* — eclisă exterioară cu bolțuri din araldit; *o* — valori determinate experimental prin fotoelasticitate; x — valori calculate teoretic.

la forțele $F_1 = 90$ kgf și $F_2 = 135$ kgf. S-au folosit bucșe cu jocul $J = 0$ mm și, respectiv, $J = 1$ mm. Au fost obținute tablouri de izocromate cum sînt cele din figura 7.

Stabilind valoarea eforturilor unitare σ_θ și σ_r în secțiunea periculoasă $B - B'$ fotoelastic prin ipoteza lui Bernhard [9] și prin ipoteza propusă în [1], rezultă următoarele concluzii mai principale :

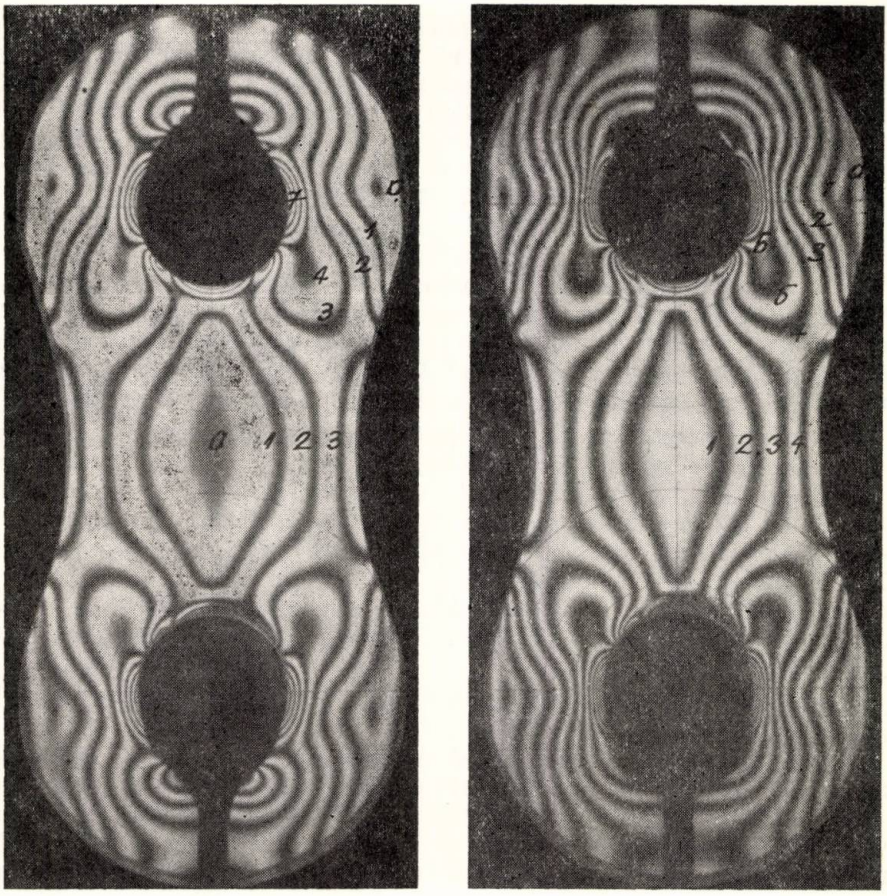
— stabilirea prin fotoelasticitate a eforturilor unitare nu se poate face cu exactitate decît pe conturul exterior ($r = b$) ; pe conturul interior intervin probleme de contact, care duc la apariția eforturilor unitare σ_r (în special cînd jocul este mic, $J = 0$, datorită contracției alezajului pe direcția $B - B'$ sub acțiunea forței F) ceea ce are ca efect modificarea eforturilor unitare σ_θ ;

— metoda de calcul bazată pe ipoteza lui Bernhard [9] nu este corectă pentru eclisele de lanț, deoarece dă erori foarte mari (circa 50 —



a *b*

Fig. 7. — Tablourile izocromatelor pentru eclise supuse la tracțiune axială cu $J = 0$ mm : *a* — eclisă interioară $F_1 = 90$ kgf ; *b* — eclisă interioară $F_2 = 135$ kgf



c *d*

Fig. 7. — Tablourile izocromatelor pentru eclise supuse la tracțiune axială cu $J = 0$ mm: *c* — eclisă exterioară $F_1 = 90$ kgf; *d* — eclisă exterioară $F_2 = 135$ kgf.

— 60% pe conturul interior și —265 % pe cel exterior pentru ambele eclise); această metodă dă erori ceva mai mici pentru cazul cînd jocul este mare ($J = 1$ mm), situație care nu se întîlnește la lanțuri;

— metoda de calcul propusă în [1] dă erori mai mici (circa — 10% — 15% pe conturul interior la ambele eclise și 50% pentru eclisele interioare și 150% pentru eclisele exterioare pe conturul extern); pentru cazul cînd jocul este mai mare ($J = 1$ mm), această ipoteză de calcul dă erori ceva mai mari.

Rezultă că metoda propusă în [1] este mult mai corectă, deoarece pe conturul interior punctul critic la dimensionarea ecliselor dă erori foarte mici.

5.3. *Încărcarea ecliselor cu presiune interioară și forță de tracțiune.* Presiunea interioară uniformă p a fost realizată prin ajustaje cu strîngere pe modele din arabalit D de eclise interioare cu bucșe și eclise exterioare

cu bucşe, respectiv bolţuri. Forţa de tracţiune F(90 şi 135 kgf) a fost realizată cu ajutorul aceluiaşi dispozitiv din figura 4.

Este important de remarcat că pentru această stare de încărcare izoclina din secţiunea $B - B'$ reprezintă o curbă şi nu o dreaptă. Abaterea acestei izocline de la dreaptă nu este prea mare şi deci nu se obţin erori demne de luat în seamă. Ca urmare a acestei observaţii s-a aplicat şi în acest caz metoda de calcul în diverse puncte a eforturilor unitare cu relaţiile (12) sau (13) şi relaţia (14) în secţiunea $B - B'$.

În figura 8 este prezentat tabloul izocromatelor pentru eclisa interioară, iar în figura 9 sînt reprezentate diagramele de variaţie a eforturilor unitare σ_θ şi σ_r în secţiunea periculoasă $B - B'$. Pentru a uşura stabilirea concluziilor corespunzătoare acestei încărcări, în figura 9 au fost reprezentate şi valorile calculate, admiţînd că acestea rezultă din însumarea efectelor presiunii interioare p şi al forţei F. Pentru forţa F, eforturile s-au calculat prin metoda indicată în [1] precum şi prin cea indicată în[9].

În cadrul acestei solicitări a fost studiat şi efectul obţinut atunci cînd forţa de tracţiune axială se realizează ca rezultantă a două componente după direcţii diferite. Pentru aceasta s-a modificat schema de realizare a tracţiunii cu ajutorul unei prinderi laterale (fig. 4) în planul secţiunii $B-B'$. S-au obţinut în acest fel două direcţii după care s-au executat întinderea, şi anume la unghiurile $\alpha_1 = 13°$, respectiv $\alpha_2 = 28°$, faţă de axa longitudinală a eclisei. În figura 10 este prezentată tabela izocromatelor pentru $\alpha_1 = 13°$ şi $F = 90$ kgf precum şi diagramele de variaţie a eforturilor unitare σ_θ şi σ_r.

Analizînd rezultatele obţinute, se desprind următoarele concluzii mai importante :

— secţiunea cea mai periculoasă rămîne tot cea din $B - B'$, ceea ce concordă cu ipotezele de calcul teoretice [1] şi [9];

— valorile calculate prin ipoteza propusă în [1] sînt foarte apropiate de cele obţinute experimental (erorile pe conturul exterior sînt de 15% pentru eclisa interioară şi 0% pentru cea exterioară), în timp ce valorile calculate prin ipoteza propusă în [9] sînt foarte mult diferite de cele experimentale (erorile pe conturul exterior sînt de peste — 250% la eclisa interioară şi peste —140% pentru cea exterioară; rezultă clar că numai ipoteza propusă în [1] este corectă pentru calculul ecliselor de lanţ;

— valorile obţinute prin tracţiune axială simplă, respectiv prin tracţiune axială rezultată din compunerea a două forţe, sînt identice; rezultă că se pot înlocui forţele care solicită eclisă (forţele din articulaţie) cu rezultanta acestora, aşa cum se face în toate ipotezele de calcul folosite pentru eclise;

— suprapunînd efectele presiunii de fretare peste cele date de tracţiune şi comparîndu-se cu cele obţinute pentru cazul acţiunii simultane a acestora, se constată că pentru modelele încercate principiul suprapunerii efectelor nu este riguros valabil; acest lucru se datoreşte probabil deformaţiilor foarte mari suferite de modelele din araldit D, ca şi din alte materiale polare, faţă de piesele similare din oţel;

— efectul forţei F se manifestă prin creşterea efortului unitar σ_θ pe conturul interior ($r = a$), iar pe cel exterior ($r = b$) scade la eclisele interioare şi creşte la cele exterioare, ceea ce concordă cu ipoteza de calcul propusă în [1]. Deşi la încercările separate de tracţiune cu $J = 0$ rezultă

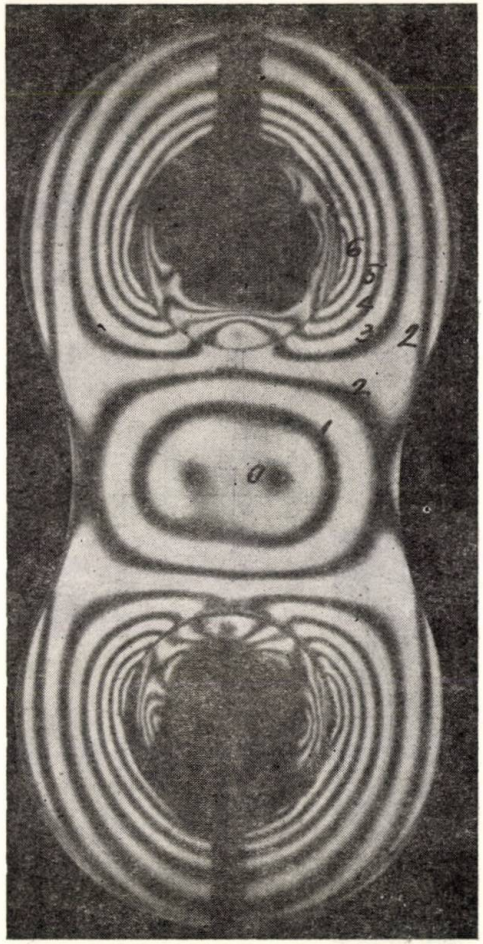


Fig. 8. — Tabloul izocromatelor pentru solicitarea produsă de strîngere şi forţa de tracţiune axială la eclisa interioară ($F = 90$ kgf.).

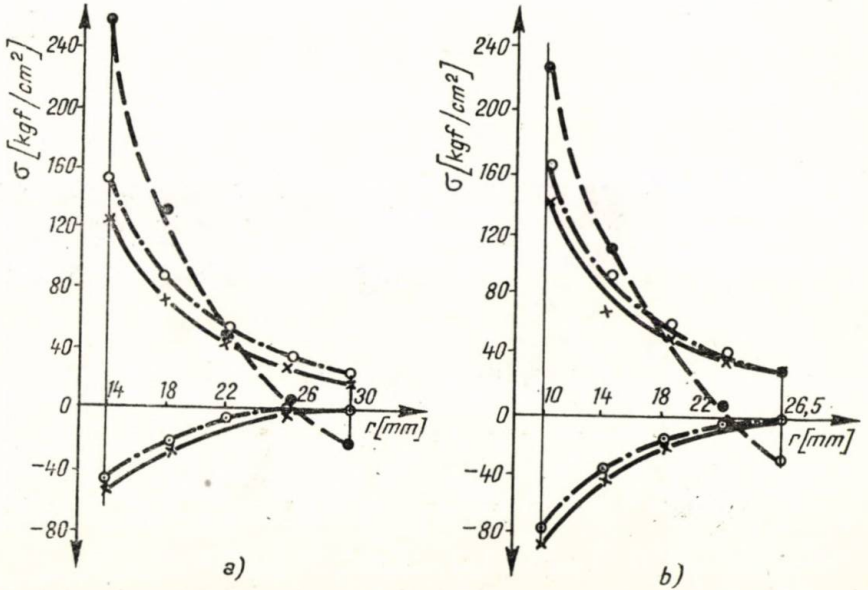
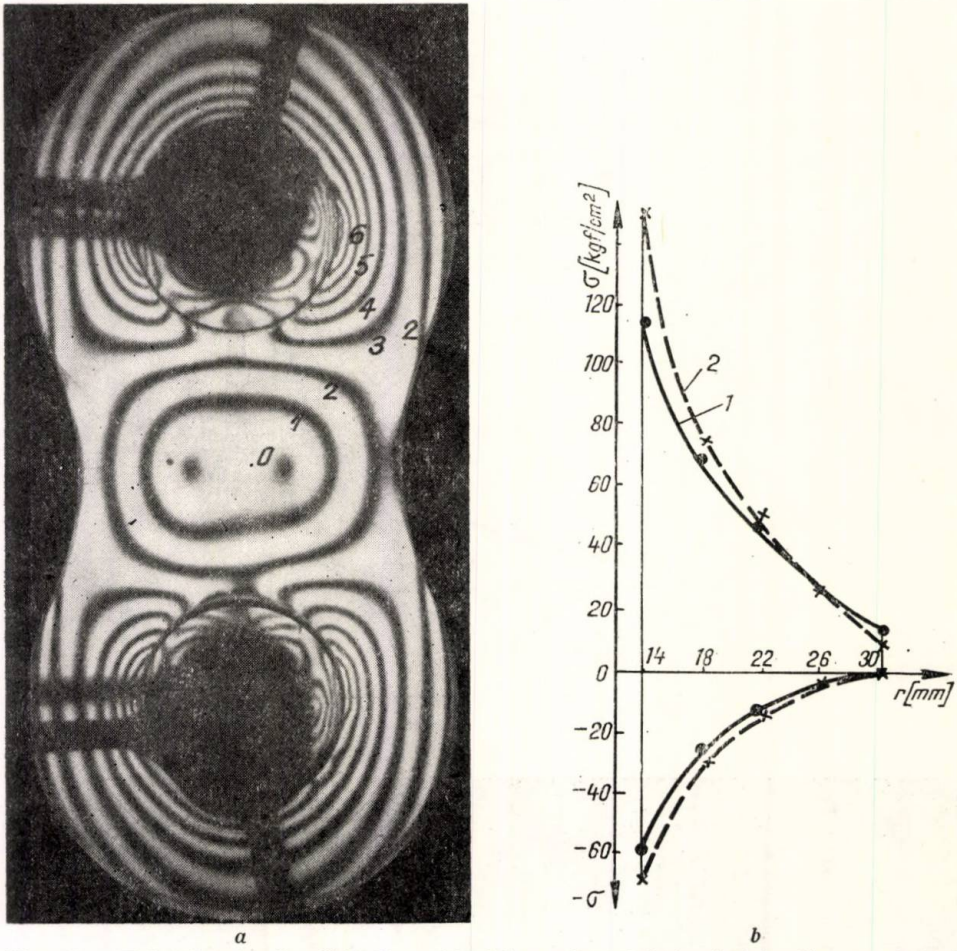


Fig. 9. — Diagramele de variaţie a eforturilor unitare în secţiunea periculoasă $B-B'$ produse de solicitarea combinată strîngere plus tracţiune axială cu forţa $F=90$ kgf : *a* — pentru eclisa interioară cu bucşe din araldit; *b* — pentru eclisa exterioară cu bolţuri din araldit; — valori experimentale; x — valori calculate [1]; • — valori caculate [9].

că ar trebui să scadă și la eclisele exterioare, variațiile efortului σ_0 sînt mai mici decît cele obținute pentru cazul cînd forța F acționează separat;

— pe conturul interior, valoarea lui σ_r în secțiunea $B - B'$ crește cu forța F, spre deosebire de ipotezele de calcul teoretic care admit că σ_r în această secțiune se obține numai din strîngere; acest lucru se explică prin presiunea suplimentară care se produce ca urmare a contracției alezajului eclisei pe o direcție perpendiculară pe cea a forței F.



a *b*

Fig. 10. — Eclisă interioară solicitată combinat la presiune interioară și tracțiune cu forța F axială rezultată din două componente:

a — tabloul izocromatelor pentru $\alpha_1 = 13°$ și $F = 90$ kgf; *b* — diagramele de variație a eforturilor unitare pentru toate unghiurile; • — $F = 90$ kgf; $x - F = 135$ kgf.

6. CONCLUZII

Se poate aprecia că cercetările efectuate sînt utile din punct de vedere teoretic, cît și practic.

Importanța teoretică constă în special prin metoda propusă pentru stabilirea eforturilor unitare din eclisele lanțurilor prin fotoelasticitate,

metodă care poate fi aplicată și la alte piese de formă asemănătoare. De asemenea s-a putut verifica corectitudinea diverselor metode de calcul propuse în literatura de specialitate pentru determinarea eforturilor unitare din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte.

Importanța practică rezultă din concluziile care se desprind în urma cercetării efectuate și în special precizarea metodei celei mai corecte pentru calculul eforturilor din eclisă, a secțiunilor cele mai solicitate și a fluxului de transmitere a forțelor prin eclisă.

Plecînd de la acest studiu, se poate cerceta eventual și influența formei eclisei asupra eforturilor, problemă încă neabordată corespunzător în literatura de specialitate.

În concluzie se consideră că problemele prezentate în această lucrare reușesc să aducă o contribuție originală la cercetarea eforturilor din eclisele lanțurilor cu role și zale scurte.

Primită la redacție la 23 decembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. Antonescu, *Cercetări asupra construcției lanțurilor cu role și zale scurte, folosite la transmisiile instalațiilor de foraj*, teză de doctorat, I.P.G.G., București, 1970.
2. N. G. Rachner, *Stahlgeleskketten und kettontriebe*, Berlin-Gottingen-Heidelberg, Spring-Verlag, 1962.
3. N. V. Vorobiev, *Țepenie peredaci*, Moskva, Mașinostroienia, 1968.
4. N. Zollner, *Kettentriebe*, München, Karl Hanzer-Verlag, 1966.
5. D. Rașeev, N.N. Antonescu, I. Tudor, Buletinul I. P. G. G., București, **14**, 187—204 (1966).
6. I. Minoiu, N. Tatu, *Petrol și gaze*, **3**, 197 — 207 (1969).
7. G. Manea și colab., *Organe de mașini* vol. 2, București, Edit. tehnică, 1958.
8. D. Rașeev, M. Marcu, N. N. Antonescu, I. Tudor, *Cercetări metalurgice 9*, 507—525 (1967).
9. Leher, Ernst, Spannungsverteiberg in konstruktionselementer, V.D.I. Verlag GMBH, Berlin, *7*, (1934).
10. G. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1964.
11. D. S. Ponomarev și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. 1 — 3, București, Edit. tenică, 1960.
12. N. Iosipescu, *Introducere în fotoelasticitate*, București, Edit. tehnică, vol. 1, 1958; vol. 2, 1960.
13. I. W. Delly, F. W. Rilley, *Experimental stress analysis*, New York, McGraw-Hill, Book, Comp., 1965.
14. P. P. Teodorescu, *Probleme plane în teoria elasticității*, vol. I, București, Edit. Academiei, 1961.

COMPATIBILITATEA ROTIRILOR ARTICULAȚIILOR PLASTICE ÎN CALCULUL PLASTIC OPTIM AL STRUCTURILOR CONTINUE DE BETON ARMAT

de VALERIU PETCU
Institutul de cercetări în construcții
și economia construcțiilor (INCERC), București

În lucrare se stabilesc limitările care apar în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat, rezultate din condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice sub acțiunea încărcărilor de calcul. Studiul se referă la structurile continue formate din bare de secțiune constantă solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical, la care articulațiile plastice se formează exclusiv în secțiunile critice solicitate la încovoiere simplă.

1. INTRODUCERE

Capacitatea limitată de deformare plastică a betonului comprimat face ca asigurarea compatibilității rotirilor articulațiilor plastice să constituie una din problemele fundamentale ale aplicării teoriei plastice simple la calculul solicitărilor produse de încărcările de calcul în elementele structurilor static nedeterminate de beton armat.

Prin *compatibilitatea rotirilor articulațiilor plastice* se înțelege proprietatea articulațiilor plastice de a dezvolta în mod efectiv rotirile rezultate din comportarea plastică a structurilor sub acțiunea încărcărilor de calcul.

În cele ce urmează se prezintă condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice și se stabilesc limitările ce decurg din îndeplinirea acesteia pentru structurile continue de beton armat calculate în domeniul plastic pe baza principiului redistribuției optime a momentelor [1], [2]. Se iau în considerație numai structurile formate din bare de secțiune constantă, solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical, la care articulațiile plastice se formează exclusiv în dreptul secțiunilor critice solicitate la încovoiere simplă.

Cazul tipic de structură alcătuită din bare solicitate la încovoiere simplă este cel al grinzii continue pe un număr oarecare de reazeme. La o astfel de grindă, articulațiile plastice se pot forma atît în cîmpuri, cît și pe reazeme.

Încărcările aplicate într-o deschidere de grindă continuă pot avea distribuţii sau puncte de aplicaţie oarecare. În mod obişnuit însă, încărcările distribuite după legi oarecare pe toată lungimea fiecărei deschideri pot fi echivalate în calcul prin încărcări uniform distribuite. Cînd încărcările din fiecare deschidere se aplică concentrat, au aceeaşi mărime şi sînt în număr de două sau mai multe, iar punctele lor de aplicaţie împart deschiderea respectivă în porţiuni de lungimi egale între ele, diagrama momentelor încovoietoare are, din punctul de vedere al mărimii rotirilor articulaţiilor plastice, caracteristici asemănătoare celor pe care le prezintă diagrama de momente produse de încărcările uniform distribuite. De aceea limitările care decurg din îndeplinirea condiţiei de compatibilitate a rotirilor articulaţiilor plastice se stabilesc în acest studiu numai în raport cu încărcările uniform distribuite pe lungimea fiecărei deschideri, rezultatele obţinute rămînînd valabile şi pentru structurile solicitate de încărcări verticale distribuite după legi oarecare sau aplicate concentrat în cel puţin două puncte ale fiecărei deschideri.

În dezvoltările de mai jos, terminologia folosită este cea specifică metodei stărilor-limită.

2. NOTAŢII

Notaţiile folosite în cuprinsul acestui studiu au următoarele semnificaţii:

A_i este aria armăturii întinse din secţiunea critică i;

A'_i — aria armăturii comprimate din secţiunea critică i;

a_i — valoarea absolută a coeficientului de influenţă al momentului elastic produs de încărcările permanente în secţiunea critică i;

b_i — valoarea absolută a coeficientului de influenţă al momentului elastic *maxim* produs de încărcările temporare în secţiunea critică i;

b — lăţimea secţiunilor critice de formă dreptunghiulară sau a inimii secţiunilor critice în formă de T;

b' — lăţimea de calcul a tălpii comprimate la secţiunile critice în formă de T;

d_j — distanţa dintre secţiunea critică j de pe reazemul unei deschideri de grindă şi punctul de anulare a diagramei de momente din deschiderea respectivă;

E_a — modulul de elasticitate al armăturii;

G_n — valoarea nominală a încărcării permanente de referinţă;

G_c — valoarea de calcul a încărcării permanente de referinţă;

G_i — valoarea încărcării permanente de referinţă corespunzătoare formării primei articulaţii plastice în secţiunea critică i;

h_0 — înălţimea utilă a secţiunilor critice dintr-o deschidere;

h_p — grosimea tălpii secţiunilor în formă de T;

i — indice exprimînd numărul de ordine al tuturor secţiunilor critice ale unei structuri continue ($i = j, k$);

j — indice exprimînd numărul de ordine al secțiunilor critice de pe reazemele elementelor care compun o structură continuă;

k — indice exprimînd numărul de ordine al secțiunilor critice din cîmpurile elementelor care compun o structură continuă;

K — modulul de rigiditate al secțiunilor unui element solicitat la încovoiere;

K_i — modulul de rigiditate la încovoiere al secțiunii critice i;

l — lungimea deschiderii de referință;

l_i — lungimea deschiderii care conține secțiunea critică i;

M_{ci} — valoarea absolută a momentului de curgere al secțiunii critice i, egal cu momentul încovoietor corespunzător atingerii limitei de curgere în centrul de greutate al armăturii întinse a acestei secțiuni;

M_{pi} — valoarea absolută a momentului plastic al secțiunii critice i; în calculele practice, momentele plastice reprezintă momentele de rupere ale secțiunilor critice respective;

P_n — valoarea nominală a încărcării temporare de referință;

P_c — valoarea de calcul a încărcării temporare de referință;

P_i — valoarea încărcării temporare de referință, corespunzătoare formării primei articulații plastice în secțiunea critică i,

R_i — rezistența de rupere la compresiune din încovoiere a betonului;

x_{ci} — înălțimea zonei comprimate a secțiunii critice i în momentul atingerii limitei de curgere în armătura întinsă a acestei secțiuni;

x_{pi} — înălțimea zonei comprimate a secțiunii critice i în stadiul ei de rupere;

ε_{or} — deformația specifică de rupere la compresiune din încovoiere a betonului;

ε_{ac} — deformația specifică de curgere a armăturii; în calculele practice, această deformație specifică se ia egală cu raportul $\frac{\sigma_c}{E_a}$;

λ_c, μ_c — coeficienții de supraîncărcare de calcul ai încărcărilor permanente și temporare;

λ_i, μ_i — coeficienții de supraîncărcare ai încărcărilor permanente și temporare, corespunzători formării primei articulații plastice în secțiunea critică i;

θ_i — rotirea articulației plastice din secțiunea critică i sub acțiunea încărcărilor de calcul;

θ_{pi} — capacitatea de rotire a articulației plastice din secțiunea critică i;

σ_c — limita de curgere a armăturii;

ω — coeficientul de formă al diagramei rotirilor specifice plastice de pe lungimea unei articulații plastice;

$$\lambda_c = \frac{G_c}{G_n}; \qquad \lambda_i = \frac{G_i}{G_n},$$

$$\mu_c = \frac{P_c}{P_n}; \qquad \mu_i = \frac{P_i}{P_n},$$

$$H_n = \frac{P_n}{G_n}; \qquad \beta = \frac{b'}{b},$$

$$\xi_{ci} = \frac{x_{ci}}{h_0}; \qquad \xi_{pi} = \frac{x_{pi}}{h_0},$$

$$\alpha_i = \frac{A_i \sigma_c}{b h_0 R_i}; \qquad \alpha_i' = \frac{A_i' \sigma_c}{b h_0 R_i}.$$

3. CONDIȚIA DE COMPATIBILITATE A ROTIRILOR ARTICULAȚIILOR PLASTICE

Compatibilitatea rotirii articulației plastice formate în secțiunea critică i a unei structuri de beton armat se exprimă prin condiția

$$\theta_i \leqslant \theta_{pi}, \tag{1}$$

care impune ca, sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul, rotirea articulației plastice din secțiunea critică i să fie mai mică sau cel mult egală cu capacitatea ei de rotire.

În expunerea ce urmează se stabilesc limitările pe care condiția (1) le introduce în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat și se prezintă mijloacele practice prin care se ține seama de efectul acestor limitări asupra mărimii momentelor plastice din secțiunile critice ale unor astfel de structuri.

4. ARTICULAȚII PLASTICE FORMATE PE REAZEME

Se consideră o grindă continuă de beton armat ale cărei secțiuni critice de pe reazeme au aceeași armare. Grinda este solicitată de încărcări permanente și temporare uniform distribuite, care pot forma toate schemele posibile de încărcare. Dimensionarea grinzii este astfel concepută, încît fiecărei secțiuni critice de pe reazeme îi corespunde o anumită schemă defavorabilă de încărcare, care conduce la formarea primei articulații plastice în secțiunea critică respectivă. Grinda este astfel armată, încît fiecare deschidere a ei se transformă în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul.

În aceste condiții, cea mai mare rotire produsă de încărcările permanente și temporare de calcul într-o articulație plastică formată pe unul dintre reazemele grinzii considerate se obține atunci cînd această grindă are două deschideri egale, iar extremitățile ei sînt simplu rezemate. Această concluzie decurge din faptul că secțiunii critice de pe reazemul central

al unei astfel de grinzi îi corespund valorile cele mai mari posibile ale coeficienților de influență ai momentelor elastice maxime produse de încărcările permanente și temporare și deci cele mai mici valori ale încărcărilor permanente și temporare sub acțiunea cărora se formează prima articulație plastică în această secțiune.

Grinda continuă, cu două deschideri egale, simplu rezemată la extremități, reprezintă, prin urmare, situația cea mai dezavantajoasă din punctul de vedere al mărimii rotirilor pe care încărcările permanente și temporare de calcul, aplicate vertical, le pot produce în articulațiile plastice formate pe reazemele elementelor componente ale structurilor continue de beton armat.

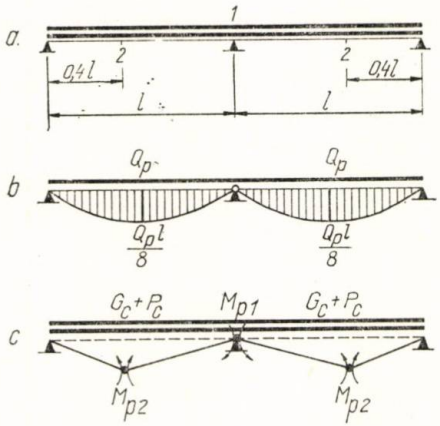


Fig. 1

Schema unei astfel de grinzi este reprezentată în figura 1*a*, în care cu *1* s-a notat secțiunea critică de pe reazemul central și cu *2* secțiunile critice din cîmpuri. Acestea din urmă se consideră situate la o distanță egală cu 0,4 *l* de reazemele marginale.

Pentru secțiunea critică *1*, schema de încărcare cea mai defavorabilă este cea în care atît încărcarea permanentă, cît și cea temporară sînt uniform distribuite pe lungimea ambelor deschideri ale grinzii.

Conform legii de variație a încărcărilor adoptate în cadrul teoriei calculului plastic optim, întîi variază încărcarea temporară de la valoarea nominală la valoarea ei de calcul, încărcarea permanentă rămînînd constantă și egală cu valoarea ei nominală. După aceea se admite creșterea încărcării permanente de la valoarea nominală la valoarea ei de calcul, încărcarea temporară rămînînd constantă și egală cu valoarea ei de calcul [2].

Pentru această lege de variație a încărcărilor, la stabilirea rotirii articulației plastice formate pe reazemul central al grinzii din figura 1*a* se întîlnesc două cazuri, notate cu *A* și *B*, după cum această articulație se formează înainte sau după ce încărcarea temporară atinge valoarea ei de calcul.

Aceste cazuri sînt tratate mai jos, luînd ca încărcări de referință încărcarea permanentă și încărcarea temporară aplicate pe lungimea unei deschideri a grinzii.

Cazul A : prima articulație plastică se formează pe reazemul central al grinzii înainte ca încărcarea temporară să atingă valoarea ei de calcul.

Rotirea articulației plastice este produsă de două încărcări egale, Q_p, aplicate uniform distribuit în cele două deschideri ale grinzii, a căror valoare comună este

$$Q_p = [\lambda_c - 1 + H_n(\mu_c - \mu_1)]\, G_n. \tag{2}$$

În fiecare deschidere, încărcarea Q_p reprezintă diferența dintre suma încărcărilor permanente și temporare de calcul și suma încărcărilor permanente și temporare corespunzătoare formării primei articulații plastice pe reazemul central al grinzii.

Sub acțiunea încărcărilor Q_p, grinda se comportă ca și cum ar avea o articulație obișnuită pe reazemul central. Diagrama de momente produse de încărcările Q_p este reprezentată în figura 1*b*.

Rotirea dezvoltată de articulația plastică de pe reazemul central al grinzii sub acțiunea încărcărilor Q_p este dată de relația

$$\theta_1 = \frac{Q_p l^2}{12K}. \tag{3}$$

Pentru determinarea mărimii modulului K se face observația că diagrama de momente produse de încărcările Q_p este în întregime pozitivă. În consecință, la determinarea rotirii θ_1 trebuie luat în considerație modulul de rigiditate corespunzător momentelor încovoietoare pozitive. Pe de altă parte, condiția de compatibilitate a rotirii articulației plastice din secțiunea critică *1* devine cu atît mai severă, cu cît rotirea θ_1 este mai mare, respectiv cu cît modulul de rigiditate K este mai mic. De aceea acest modul se ia în calcul în mod acoperitor cu valoarea lui minimă, fără a se ține seama de efectul favorabil al betonului întins dintre fisuri. Această valoare corespunde secțiunii critice *2*, ea fiind atinsă atunci cînd această secțiune este solicitată de momentul ei plastic.

În aceste condiții, expresia modulului de rigiditate este

$$K = K_2 = \frac{\eta_2}{\varepsilon_{ac}} M_{p2} h_0, \tag{4}$$

în care

$$\eta_2 = 1 - \frac{x_{p2}}{h_0}. \tag{5}$$

În cazul *A*, momentul plastic al secțiunii critice *1* este

$$M_{p1} = 0{,}125(1 + H_n\mu_1)\, G_n l. \tag{6}$$

Ecuația de echilibru plastic a unei deschideri, în ipoteza transformării acesteia în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul, este (fig. 1*c*)

$$0{,}4M_{p1} + M_{p2} = 0{,}120(\lambda_c + H_n\mu_c)\, G_n l. \tag{7}$$

Făcînd în ecuația (7) substituția indicată de relația (6), pentru momentul M_{p2} se obține expresia

$$M_{p2} = [0{,}12\lambda_c - 0{,}05 + H_n(0{,}12\mu_c - 0{,}05\mu_1]\, G_n l. \tag{8}$$

În mod obișnuit coeficientul η_2 dat de relația (5) are valori cuprinse între 0,5 și 0,9 cînd secțiunea critică *2* este dreptunghiulară și între 0,8 și 0,98 cînd secțiunea critică *2* este în formă de *T*. Aproximațiile făcute la stabilirea expresiei modulului de rigiditate *K* sînt suficient de acoperitoare pentru a permite adoptarea unor valori medii pentru coeficientul η_2, și anume 0,7 cînd secțiunea critică este dreptunghiulară și, respectiv, 0,9 cînd secțiunea critică 2 este în formă de *T*.

Ținînd seama de relațiile (2) (4) și (8) expresia (3) devine

$$\frac{\eta_2}{t}\,\theta_1 = \frac{\lambda_c - 1 + H_n(\mu_c - \mu_1)}{1{,}44\lambda_c - 0{,}6 + H_n(1{,}44\mu_c - 0{,}6\mu_1)}, \tag{9}$$

unde t este un coeficient avînd expresia

$$t = \frac{l}{h_0}\,\varepsilon_{ac}. \tag{10}$$

Luînd în considerație relația (9) și făcînd notația

$$\varphi_1 = \frac{\theta_{p1}}{t}, \tag{11}$$

din condiția (1) se deduce pentru $i = 1$

$$\mu_1 \geqslant \frac{\lambda_c + H_n\mu_c - 1 - \eta_2[1{,}44(\lambda_c + H_n\mu_c) - 0{,}6]\,\varphi_1}{(1 - 0{,}6\eta_2\varphi_1)\, H_n}. \tag{12}$$

Secțiunea critică *1* se găsește în cazul *A* atîta timp cît coeficientul μ_1 dat de inegalitatea (12) satisface condiția suplimentară

$$\mu_1 \leqslant \mu_c. \tag{13}$$

Condiția (12) poate fi extinsă în mod acoperitor la toate secțiunile critice j de pe reazemele elementelor încovoiate simplu ale structurilor continue de beton armat solicitate de încărcări verticale, sub forma

$$\mu_j \geqslant \frac{\lambda_c + H_n\mu_c - 1 - \eta\varphi_j\,[1{,}44(\lambda_c + H_n\mu_c) - 0{,}6]}{H_n(1 - 0{,}6\eta\varphi_j)}, \tag{14}$$

în care

$$\varphi_j = \frac{\theta_{pj}}{t_j} \tag{15}$$

și

$$t_j = \frac{l_j}{h_0}\,\varepsilon_{ac}. \tag{16}$$

În inegalitatea (14), coeficientul η are valoarea 0,7 cînd secțiunile elementelor sînt dreptunghiulare și 0,9 cînd secțiunile elementelor sînt în formă de T.

Secțiunea critică j se găsește în cazul A atît timp cît coeficintul μ_j dat de inegalitatea (14) satisface condiția suplimentară

$$\mu_j \leqslant \mu_c. \tag{17}$$

Momentul plastic al secțiunii critice j se calculează în cazul A cu relația

$$M_{pj} = (a_j + b_j H_n \mu_j)\, G_n l, \tag{18}$$

unde coeficientul μ_j se ia egal cu cea mai mare dintre valorile date de calculul plastic optim și de condiția (14).

Cazul B : prima articulație plastică se formează pe reazemul central al grinzii după ce încărcarea temporară a atins valoarea ei de calcul.

Cele două încărcări uniform distribuite, Q_p, care acționează în deschiderile grinzii din figura 1*b*, au în acest caz următoarea valoare comună :

$$Q_p = (\lambda_c - \lambda_1)\, G_n. \tag{19}$$

Rotirea articulației plastice, θ_1, și mărimea modulului de rigiditate, K, sînt date tot de relațiile (3) și (4).

Momentul plastic al secțiunii critice *1* este în cazul B

$$M_{p1} = 0{,}125(\lambda_1 + H_n \mu_c)\, G_n l. \tag{20}$$

Din ecuația de echilibru plastic (7) se obține

$$M_{p2} = (0{,}12\lambda_c - 0{,}05\lambda_1 + 0{,}07 H_n \mu_c)\, G_n l. \tag{21}$$

Relațiile (4), (10), (19) și (21) permit ca expresia (3) să poată fi scrisă după cum urmează :

$$\frac{\eta_2}{t}\,\theta_1 = \frac{\lambda_c - \lambda_1}{1{,}44\lambda_c - 0{,}6\lambda_1 + 0{,}84 H_n \mu_c}. \tag{22}$$

Luînd în considerație relațiile (11) și (22), din condiția (1) se deduce

$$\lambda_1 \geqslant \frac{\lambda_c - \eta_2(1{,}44\lambda_c + 0{,}84H_n\mu_c)\,\varphi_1}{1 - 0{,}6\eta_2\varphi_1}. \tag{23}$$

Secțiunea critică *1* se găsește în cazul *B* atît timp cît coeficientul λ_1 dat de inegalitatea (23) satisface condiția suplimentară

$$\lambda_1 \geqslant 1. \tag{24}$$

Prin generalizare, condiția (23) devine

$$\lambda_j \geqslant \frac{\lambda_c - \eta\varphi_j(1{,}44\lambda_c + 0{,}84H_n\mu_c)}{1 - 0{,}6\eta\varphi_j}, \tag{25}$$

în care φ_j este dat de relația (15), iar coeficientul η are valoarea 0,7 cînd secțiunile elementelor sînt dreptunghiulare și valoarea 0,9 cînd secțiunile elementelor sînt în formă de *T*.

Secțiunea critică *j* se găsește în cazul *B* atît timp cît coeficientul λ_j dat de inegalitatea (25) satisface condiția suplimentară

$$\lambda_j \geqslant 1. \tag{26}$$

Momentul plastic al secțiunii critice *j* se calculează în cazul *B* cu relația

$$M_{pj} = (a_j\lambda_j + b_jH_n\mu_c)\,G_nl, \tag{27}$$

unde coeficientul λ_j se ia egal cu cea mai mare dintre valorile date de calculul plastic optim și de condiția (25).

5. ARTICULAȚII PLASTICE FORMATE ÎN CÎMPURI

Se consideră o grindă continuă de beton armat, ale cărei secțiuni critice din cîmpuri au aceeași armare. Grinda este solicitată de încărcări permanente și temporare uniform distribuite, care pot forma orice schemă de încărcare. Datorită acestui fapt, este posibil ca fiecărei secțiuni critice din cîmpuri să-i corespundă o anumită schemă defavorabilă de încărcare, care conduce la formarea primei articulații plastice în secțiunea critică respectivă. Grinda este astfel armată, încît fiecare deschidere a ei se transformă în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul.

În aceste condiții, cea mai mare rotire produsă de încărcările permanente și temporare de calcul într-o articulație plastică formată într-unul din cîmpurile grinzii continue considerate se obține atunci cînd grinda

este formată dintr-un număr infinit de deschideri egale, de lungime l, între care sînt intercalate deschideri egale de lungime γl (fig. 2). Mărimea parametrului γ se obține din condiția de maximum a rotirilor articulațiilor plastice formate în cîmpurile grinzii.

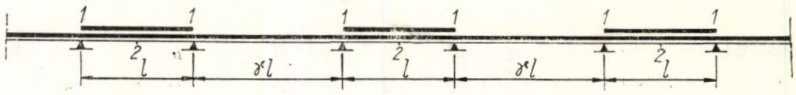


Fig. 2

Schema de încărcare cea mai defavorabilă pentru articulațiile plastice formate în cîmpurile de lungime l este cea în care încărcarea permanentă se aplică pe toată lungimea grinzii, iar încărcarea temporară se aplică numai în deschiderile de lungime l (fig. 2). Pentru o astfel de schemă de încărcare, primele articulații plastice se formează simultan în mijlocul deschiderilor intermediare de lungime l. Această particulari

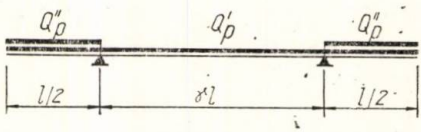


Fig. 3

tate face ca rotirea uneia dintre articulațiile plastice formate în mijlocul unei deschideri intermediare de lungime l să fie egală cu suma rotirilor capetelor libere ale grinzii cu două console, reprezentate în figura 3. Această grindă constituie rezultatul izolării din grinda continuă, reprezentată în figura 2, a porțiunii cuprinse între două articulații plastice consecutive (forțele tăietoare din aceste articulații sînt nule, datorită simetriei pe care o prezintă deformata fiecărei deschideri intermediare de lungime l în raport cu axa perpendiculară pe mijlocul acestor deschideri).

La grinda continuă din figura 2 s-au notat cu *1* secțiunile critice de pe reazemele intermediare și cu *2* secțiunile critice din mijlocul deschiderilor intermediare de lungime l.

Pentru explicitarea condiției (1) se iau ca încărcări de referință încărcarea permanentă și încărcarea temporară care se aplică într-o deschidere de lungime l a grinzii continue.

La stabilirea mărimii rotirii pe care o dezvoltă articulația plastică formată în dreptul unei secțiuni critice *2*, se întîlnesc două cazuri, notate cu *C* și *D*, după cum articulația se formează înainte sau după ce încărcarea temporară atinge valoarea ei de calcul.

Cazul C: *primele articulații plastice se formează simultan în mijlocul deschiderilor de lungime l înainte ca încărcarea temporară să atingă valoarea ei de calcul.*

Rotirile capetelor libere ale grinzii cu console din figura 3*b* sînt produse în acest caz de încărcarea

$$Q'_p = \gamma(\lambda_c - 1)\, G_n, \tag{28}$$

aplicată uniform distribuit pe porțiunea de grindă cuprinsă între reazeme, și de două încărcări egale, avînd valoarea comună

$$Q_p'' = \frac{1}{2}\left[\lambda_c - 1 + H_n(\mu_c - \mu_2)\right] G_n, \tag{29}$$

aplicate uniform distribuit pe cele două console ale grinzii.

Încărcările Q_p' și Q_p'' reprezintă diferențele dintre încărcările de calcul și încărcările corespunzătoare formării simultane a articulațiilor plastice în dreptul secțiunilor critice 2.

Pentru rotirea θ_2 a articulației plastice formate în mijlocul unei deschideri intermediare de lungime l a grinzii continue din figura 2 (a cărei valoare este egală cu suma rotirilor capetelor libere ale grinzii cu console din figura 3), se obține expresia

$$\theta_2 = \frac{(1 + 3\gamma)\left[\lambda_c - 1 + H_n(\mu_c - \mu_2)\right] - 2\gamma^3(\lambda_c - 1)}{24K} G_n l^2. \tag{30}$$

Pentru determinarea mărimii modulului de rigiditate K se face observația că diagrama de momente produse de încărcările Q_p' și Q_p'' este în întregime negativă. Ca urmare, la determinarea rotirii θ_2 trebuie luat în considerație modulul de rigiditate corespunzător momentelor încovoietoare negative. Pe de altă parte, condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice formate în dreptul secțiunilor critice 2 devine cu atît mai severă, cu cît rotirea θ_2 este mai mare, respectiv cu cît modulul de rigiditate K este mai mic. De aceea acest modul se ia în calcul în mod acoperitor cu valoarea lui minimă, fără a se ține seama de efectul favorabil al betonului întins dintre fisuri. Această valoare corespunde secțiunilor critice *1*, ea fiind atinsă atunci cînd aceste secțiuni sînt solicitate de momentul lor plastic.

În aceste condiții, expresia modulului de rigiditate K este

$$K = K_1 = \frac{\eta_1}{\varepsilon_{ac}} M_{p1} h_0, \tag{31}$$

unde

$$\eta_1 = 1 - \frac{x_{p1}}{h_0}. \tag{32}$$

Pentru schema de încărcare din figura 2, momentul plastic al unei secțiuni critice 2 (care este dat de calculul elastic al grinzii continue, întrucît primele articulații plastice apar simultan în toate secțiunile critice 2) are expresia

$$M_{p2} = \frac{(1 + 3\gamma)(1 + H_n\mu_2) - 2\gamma^3}{24(1 + \gamma)} G_n l. \tag{33}$$

Ecuația de echilibru plastic a unei deschideri de lungime l este

$$M_{p1} + M_{p2} = 0{,}125(\lambda_c + H_n\mu_c)\, G_n l. \tag{34}$$

Făcînd în ecuația (34) substituția indicată de relația (33), pentru momentul M_{p1} se obține expresia

$$M_{p1} = \frac{3(1+\gamma)(\lambda_c + H_n\mu_c) - (1+3\gamma)(1+H_n\mu_2) + 2\gamma^3}{24(1+\gamma)} G_n l. \tag{35}$$

Ținînd seama de expresiile (31) și (35), relația (30) devine

$$\eta_1 \frac{\theta_2}{t} = \frac{(1+\gamma)(1+3\gamma)[\lambda_c - 1 + H_n(\mu_c - \mu_2)] - 2\gamma^3(1+\gamma)(\lambda_c - 1)}{3(1+\gamma)(\lambda_c + H_n\mu_c) - (1+3\gamma)(1+H_n\mu_2) + 2\gamma^3}. \tag{36}$$

Pentru determinarea parametrului γ care maximizează rotirea θ_2 se face observația că această rotire este cu atît mai mare, cu cît coeficientul μ_2 este mai mic. Limita inferioară a acestui coeficient este 1.

Făcînd în relația (36) substituția

$$\mu_2 = 1, \tag{37}$$

se obține

$$\eta_1 \frac{\theta_2}{t} = \frac{(1+\gamma)(1+3\gamma)[\lambda_c - 1 + H_n(\mu_c - 1)] - 2\gamma^3(1+\gamma)(\lambda_c - 1)}{3(1+\gamma)(\lambda_c + H_n\mu_c) - (1+3\gamma)(1+H_n) + 2\gamma^3}. \tag{38}$$

Relația (38) este reprezentată grafic în figurile 4 — 8. Ele au fost construite pentru valori ale parametrului H_n îndeplinind condițiile

$$0{,}5 \leqslant H_n \leqslant 2 \tag{39}$$

și pentru următoarele valori ale coeficienților λ_c și μ_c :

$$\begin{cases} \lambda_c = 1{,}1; & \mu_c = 1{,}4, \\ \lambda_c = 1{,}3; & \mu_c = 1{,}3, \\ \lambda_c = 1{,}4; & \mu_c = 1{,}6, \\ \lambda_c = 1{,}5; & \mu_c = 1{,}8, \\ \lambda_c = 1{,}5; & \mu_c = 2{,}2. \end{cases} \tag{40}$$

Aceste perechi de coeficienți de supraîncărcare de calcul corespund în ordine standardului românesc 8000 — 67 [3], noului proiect al standardului românesc 1546 — 50 [4], recomandărilor modificate ale Comitetului european pentru beton [5], codului american ACI 318 — 63 [6] și codului indian IS 456 — 64 [7] pentru calculul elementelor de beton armat.

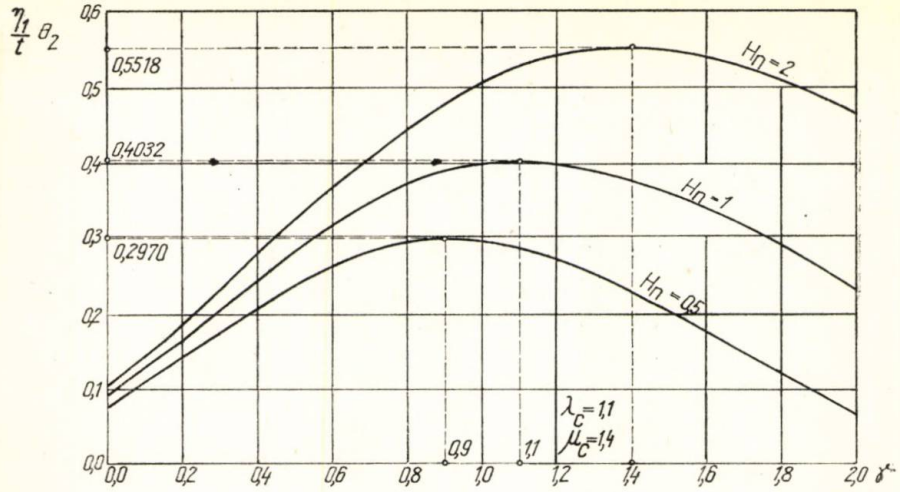


Fig. 4

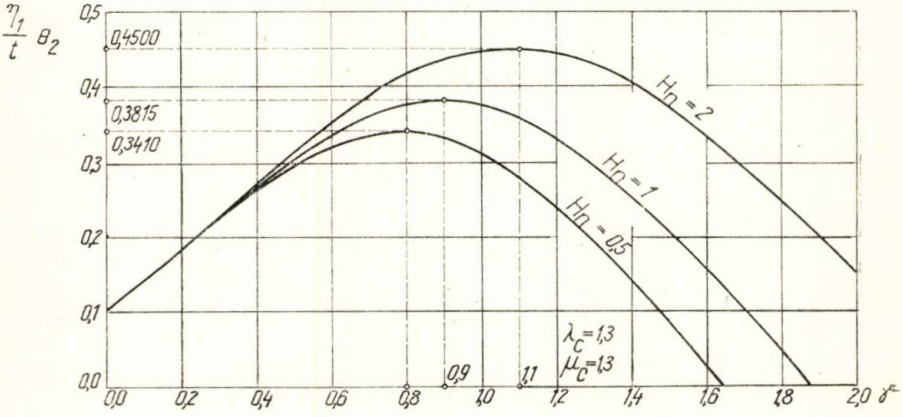


Fig. 5

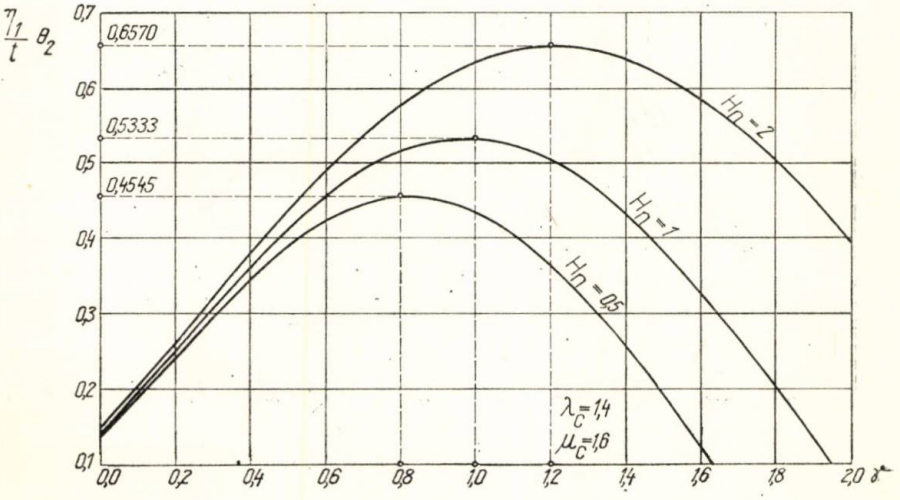


Fig. 6

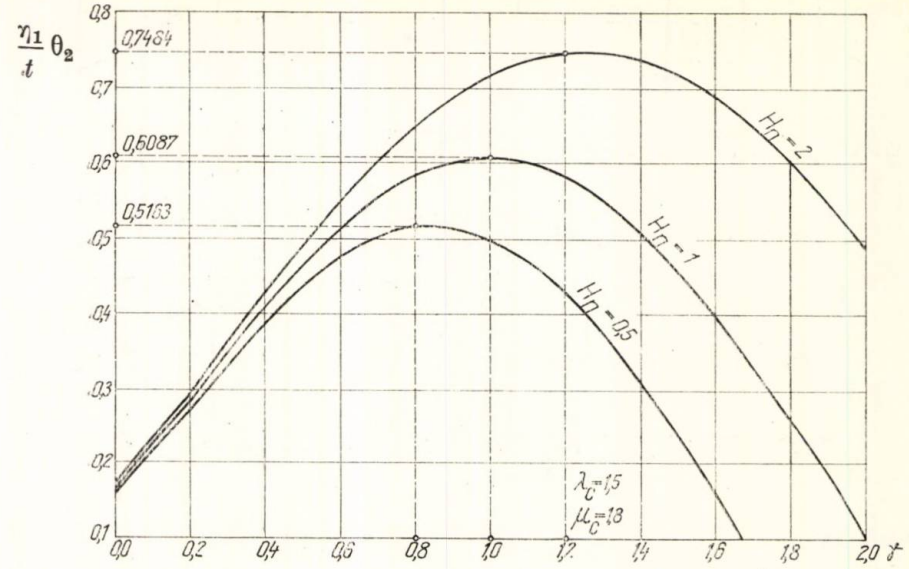

$\frac{\eta_1}{t}\theta_2$
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,7484
0,6087
0,5163
$H_n=2$
$H_n=1$
$H_n=0,5$
$\lambda_c=1,5$
$\mu_c=1,3$
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
γ

Fig. 7

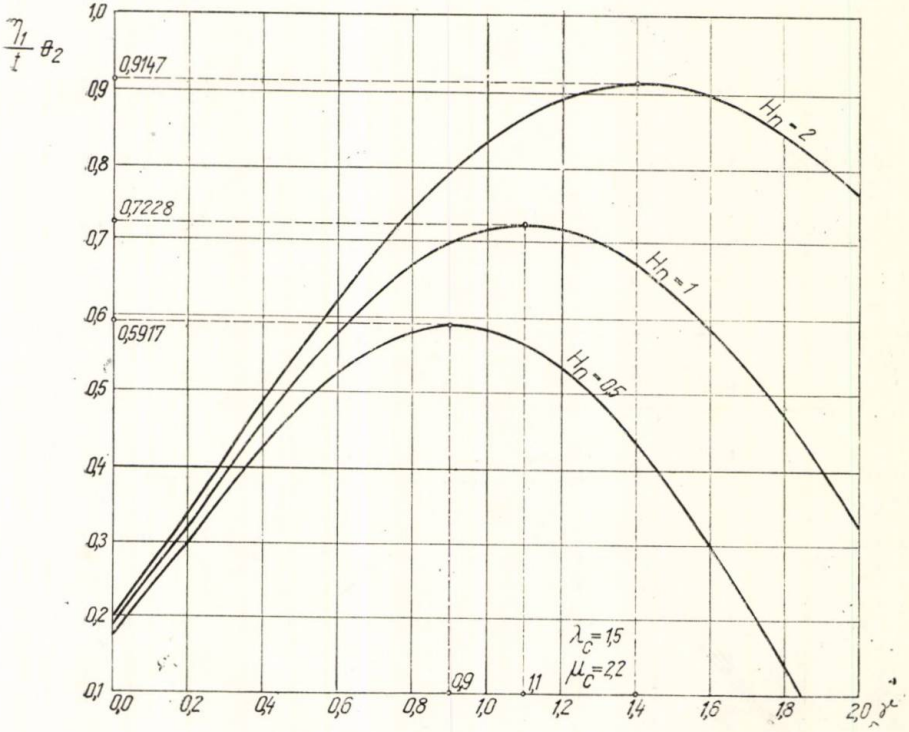

$\frac{\eta_1}{t}\theta_2$
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0,9147
0,7228
0,5917
$H_n=2$
$H_n=1$
$H_n=0,5$
$\lambda_c=1,5$
$\mu_c=2,2$
0,9
1,1
0,0
0,2
0,4
0,6
0,8
1,0
1,2
1,4
1,6
1,8
2,0
γ

Fig. 8

Diagramele din figurile 4 — 8 arată că valorile parametrului γ care maximizează rotirea θ_2 sînt cuprinse între 0,8 și 1,4.

Dacă la determinarea valorilor maxime ale rotirii θ_2 se admit erori în minus pînă la 9,1%, atunci din figurile 4 — 8 rezultă că pentru toate perechile de valori ale coeficienților λ_c și μ_c date de relațiile (40) se poate admite o valoare medie a parametrului γ, și anume

$$\gamma = 1. \tag{41}$$

În această situație, relația (36) devine

$$\eta_1 \frac{\theta_2}{t} = \frac{2(\lambda_c - 1) + 4H_n(\mu_c - \mu_2)}{3\lambda_c - 1 + H_n(3\mu_c - 2\mu_2)}. \tag{42}$$

Întrucît secțiunile critice de pe reazeme sînt întotdeauna dreptunghiulare, pentru coeficientul η_1 se consideră în calcul valoarea medie 0,7.

Cu relația (42) și cu notația

$$\varphi_2 = \frac{\theta_{p2}}{t}, \tag{43}$$

din condiția (1) se obține pentru $i = 2$

$$\mu_2 \geqslant \frac{\lambda_c + 2H_n\mu_c - 1 - \varphi_2(1{,}05\lambda_c + 1{,}05H_n\mu_c - 0{,}35)}{H_n(2 - 0{,}7\varphi_2)}. \tag{44}$$

Secțiunile critice 2 se găsesc în cazul C atît timp cît coeficientul μ_2 dat de inegalitatea (44) satisface condiția suplimentară

$$\mu_2 \leqslant \mu_c. \tag{45}$$

Prin generalizare, condiția (44) devine

$$\mu_k \geqslant \frac{\lambda_c + 2H_n\mu_c - 1 - \varphi_k(1{,}05\lambda_c + 1{,}05H_n\mu_c - 0{,}35)}{H_n(2 - 0{,}7\varphi_k)}, \tag{46}$$

în care

$$\varphi_k = \frac{\theta_{pk}}{t_k} \tag{47}$$

și

$$t_k = \frac{l_k}{h_0}\varepsilon_{ac}. \tag{48}$$

Secţiunea critică k se găseşte în cazul C atît timp cît coeficientul μ_k dat de inegalitatea (46) satisface condiţia suplimentară

$$\mu_k \leqslant \mu_c . \tag{49}$$

Momentul plastic al secţiunii critice k se calculează în cazul C cu relaţia

$$M_{pk} = (a_k + b_k H_n \mu_k) G_n l, \tag{50}$$

unde coeficientul μ_k se ia egal cu cea mai mare dintre valorile date de calculul plastic optim al structurii respective şi de condiţia (46).

Cazul D : primele articulaţii plastice se formează simultan în mijlocul deschiderilor de lungime l după ce încărcarea temporară a atins valoarea ei de calcul.

Pentru $\gamma = 1$, încărcările Q'_p şi Q''_p care produc rotirea capetelor libere ale grinzii cu console din figura 3 au în acest caz următoarele valori :

$$Q'_p = (\lambda_c - \mu_2) G_n \tag{51}$$

şi

$$Q''_p = \frac{1}{2} (\lambda_c - \mu_2) G_n . \tag{52}$$

Expresia rotirii θ_2 este

$$\theta_2 = \frac{\lambda_c - \lambda_2}{12K} G_n l^2, \tag{53}$$

unde modulul de rigiditate K este dat de relaţia (31).

Momentul plastic al secţiunilor critice 2 are expresia

$$M_{p2} = \frac{\lambda_2 + 2H_n \mu_c}{24} G_n l. \tag{54}$$

Din ecuaţia de echilibru plastic (34) se deduce

$$M_{p1} = \frac{3\lambda_c - \lambda_2 + H_n \mu_c}{24} G_n l. \tag{55}$$

Cu expresiile (31) şi (55), relaţia (53) devine

$$\eta_1 \frac{\theta_2}{t} = \frac{2(\lambda_c - \lambda_2)}{3\lambda_c - \lambda_2 + H_n \mu_c}, \tag{56}$$

unde coeficienţii t şi η_1 sînt daţi de relaţiile (10) şi (32).

Considerînd relația (56), notația (43) și valoarea medie $\eta_1 = 0{,}7$, din condiția (1) se obține

$$\lambda_2 \geqslant \frac{\lambda_c - \varphi_2(1{,}05\lambda_c + 0{,}35H_n\mu_c)}{1 - 0{,}35\varphi_2}. \tag{57}$$

Secțiunile critice 2 se găsesc în cazul D atît timp cît coeficientul λ_2, dat de inegalitatea (57), satisface condiția suplimentară

$$\lambda_2 \geqslant 1. \tag{58}$$

Prin generalizare, condiția (57) devine

$$\lambda_k \geqslant \frac{\lambda_c - \varphi_k(1{,}05\lambda_c + 0{,}35H_n\mu_c)}{1 - 0{,}35\varphi_k}, \tag{59}$$

în care φ_k este dat de relația (47).

Secțiunea critică k se găsește în cazul D atît timp cît coeficientul λ_k, dat de inegalitatea (59), satisface condiția suplimentară

$$\lambda_k \geqslant 1. \tag{60}$$

Momentul plastic al secțiunii critice k se calculează în cazul D cu relația

$$M_{pk} = (a_k\lambda_k + b_kH_n\mu_c)\, G_n l, \tag{61}$$

unde coeficientul λ_k se ia egal cu cea mai mare dintre valorile date de calculul plastic optim și de condiția (59).

6. MĂRIMEA COEFICIENTULUI φ_i

Limitările care apar în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat formate din bare, rezultate din condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul aplicate vertical, sînt funcție de coeficientul φ_i dat de relațiile (15) și (47), indicele i referindu-se fie la secțiunile critice de pe reazeme ($i = j$), fie la secțiunile critice din cîmpuri ($i = k$). Mărimea acestui coeficient este funcție de capacitatea de rotire θ_{pi} a articulației plastice formate în dreptul secțiunii critice i.

Cele mai cunoscute procedee de evaluare a rotirilor θ_{pj} pe care le pot dezvolta articulațiile plastice formate pe reazemele elementelor încovoiate ale structurilor de beton armat sînt cele elaborate de W.W.L. Chan [8] și A.L.L. Baker [9]. Un procedeu similar celui aparținînd lui Chan a fost propus de autorul acestei lucrări [10].

În cele ce urmează se utilizează procedeul expus în lucrarea [10] pentru determinarea rotirii θ_{pj}, deoarece, așa cum se va arăta ulterior, el conduce la valori ale acestei rotiri mai mici (deci acoperitoare) decît cele obținute prin aplicarea formulelor lui Chan și Baker.

Capacitatea de rotire a articulației plastice formate pe reazemul unui element încovoiat de beton armat în cuprinsul elementului respectiv are expresia

$$\theta_{pj} = \omega\left(1 - \frac{M_{cj}}{M_{pj}}\right)\left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_{pj}} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1 - \xi_{cj}}\right)\frac{d_j}{h_0}. \tag{62}$$

Coeficientul ω se ia egal cu valoarea 2/3.

Raportul $\frac{M_{cj}}{M_{pj}}$ are valori cuprinse între 0,80 și 0,95. Pentru simplificitate, acest raport se ia egal cu valoarea lui medie 0,875.

Valoarea minimă (deci acoperitoare) a distanței d_j este 0,15 l_j, ea corespunzînd cazului în care momentul plastic al secțiunii critice de pe reazemul j este egal cu momentul plastic al secțiunii critice din cîmpul elementului respectiv.

Deformația specifică de rupere la compresiune din încovoiere a betonului, ε_{br}, se ia egală cu valoarea 0,0035, specificată de recomandările Comitetului european pentru beton [11], ea fiind întotdeauna atinsă atunci cînd axa neutră este situată în interiorul secțiunii critice respective [12].

Deformația specifică de curgere a armăturii, ε_{ac}, se ia egală cu $\frac{\sigma_c}{E_a}$.

Coeficienții ξ_{pj} și ξ_{cj} se calculează admițînd o diagramă parabolică-dreptunghiulară pentru eforturile unitare din zona comprimată a betonului [11], [12], ea constituind o bună aproximare a diagramei reale pe care o formează aceste eforturi unitare.

Ce precizările de mai sus, expresia (62) devine

$$\theta_{pj} = 0{,}0125\left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_{pj}} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1 - \xi_{cj}}\right)\frac{l_j}{h_0}. \tag{63}$$

La grinda continuă cu două deschideri egale încărcată simetric (fig. 1), articulația plastică de pe reazemul central se întinde pe lungimi egale în ambele deschideri. Ca urmare, capacitatea de rotire a acestei articulații este egală cu dublul celei date de relația (63), adică

$$\theta_{pj} = 0{,}025\left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_{pj}} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1 - \xi_{cj}}\right)\frac{l_j}{h_0}. \tag{64}$$

Coeficientul φ_j, dat de relația (15), devine în acest caz

$$\varphi_j = 0{,}025\left(\frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{ac}\xi_{pj}} - \frac{1}{1-\xi_{cj}}\right). \tag{65}$$

Articulațiile plastice formate în cîmpuri au lungimi cel puțin egale cu cele ale articulațiilor plastice formate de ambele părți ale reazemelor elementelor încovoiate de beton armat. Întrucît în prezent nu există date experimentale suficiente pentru stabilirea lungimii articulațiilor plastice din cîmpuri, se consideră în mod acoperitor că această lungime este egală cu cea a articulațiilor plastice formate pe reazeme de ambele părți ale acestora. În consecință, pentru coeficientul φ_k, dat de relația (47), se poate adopta o expresie analogă celei stabilite pentru coeficientul φ_j, și anume

$$\varphi_k = 0{,}025\left(\frac{\varepsilon_{br}}{\varepsilon_{ac}\xi_{pk}} - \frac{1}{1-\xi_{ck}}\right). \tag{66}$$

Tabela 1

Secțiuni critice de formă dreptunghiulară. Coeficientul φ_i

ε_{ac}	α_i'	α_i							
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,0010	0,00	1,377	0,671	0,428	0,305	0,229	0,178	0,139	0,107
	0,05	1,378	0,903	0,669	0,427	0,304	0,229	0,178	0,139
	0,10	—	0,969	0,835	0,668	0,426	0,304	0,229	0,178
	0,15	—	—	0,902	0,808	0,666	0,425	0,303	0,229
	0,20	—	—	—	0,862	0,790	0,665	0,424	0,303
0,0015	0,00	0,908	0,437	0,275	0,192	0,141	0,106	0,079	0,059
	0,05	0,909	0,566	0,413	0,273	0,191	0,140	0,106	0,079
	0,10	—	0,614	0,502	0,401	0,272	0,190	0,140	0,105
	0,15	—	—	0,553	0,468	0,393	0,271	0,189	0,139
	0,20	—	—	—	0,512	0,450	0,389	0,270	0,189
0,0020	0,00	0,674	0,321	0,198	0,136	0,097	0,071	0,050	0,035
	0,05	0,675	0,399	0,278	0,197	0,135	0,096	0,070	0,050
	0,10	—	0,437	0,338	0,259	0,195	0,133	0,095	0,069
	0,15	—	—	0,377	0,307	0,246	0,194	0,132	0,095
	0,20	—	—	—	0,344	0,287	0,238	0,193	0,132

Valorile coeficienților φ_i ($i = j, k$) dați de relațiile (65) și (66) sînt prezentate în tabela 1 pentru secțiunile critice de formă dreptunghiulară și, respectiv, în tabela 2 pentru secțiunile critice în formă de T, cu talpa în zona comprimată.

Tabela 2

Secțiuni critice în formă de T. Coeficientul Φ_i

ε_{ac}	β	α_i							
		0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
0,0010	2	2,791	1,375	0,901	0,667	0,520	0,421	—	—
	4	5,804	2,790	1,867	1,373	1,096	0,898	0,764	0,662
	6	8,721	4,344	2,790	2,099	1,679	1,372	1,174	1,024
	8	10,91	5,804	3,773	2,790	2,209	1,866	1,583	1,372
	10	14,56	7,263	4,831	3,468	2,790	2,331	1,999	1,672
0,0015	2	1,851	0,907	0,590	0,435	0,336	0,270	—	—
	4	3,860	1,851	1,235	0,906	0,721	0,589	0,499	0,431
	6	5,806	2,887	1,851	1,391	1,110	0,906	0,774	0,673
	8	7,264	3,860	2,507	1,851	1,464	1,235	1,046	0,905
	10	9,695	4,833	3,212	2,303	1,851	1,545	1,324	1,157
0,0020	2	1,382	0,673	0,436	0,318	0,244	0,194	—	—
	4	2,889	1,382	0,920	0,673	0,534	0,434	0,367	0,316
	6	4,347	2,159	1,382	1,036	0,826	0,672	0,573	0,498
	8	5,442	2,889	1,873	1,382	1,091	0,920	0,778	0,672
	10	7,265	3,618	2,402	1,721	1,381	1,152	0,986	0,861

Secțiunile critice în formă de T trebuie să fie astfel proporționate, încît valorile coeficienților ξ_{pk} să îndeplinească condiția

$$\xi_{pk} \leqslant \frac{h_p}{h_0} \tag{67}$$

pentru a se asigura atingerea deformației specifice $\varepsilon_{br} = 0{,}0035$ pe toată lățimea de calcul b' a secțiunilor critice de această formă [11], [12].

Cu ajutorul tabelelor 1 și 2 pot fi determinate valorile minime ale coeficienților λ_j, μ_j, λ_k și μ_k, care satisfac condițiile (14), (25), (46) și (59), pentru orice pereche de valori ale coeficienților de supraîncărcare de calcul λ_c și μ_c. Un exemplu în acest sens îl constituie tabelele 3 și 4, întocmite pentru perechea

$$\lambda_c = 1{,}1\,; \qquad \mu_c = 1{,}4, \tag{68}$$

în ipoteza că secțiunile elementelor încovoiate simplu ale structurilor sînt în formă de T ($\gamma_1 = 0{,}9$).

Utilizarea unor astfel de tabele se face folosind interpolarea liniară între cifrele pe care le conțin, cu observația că, ori de cîte ori coeficientul μ_i astfel dedus este mai mic decît μ_c, coeficientul λ_i se ia întotdeauna egal cu unitatea.

Tabela 3

Coeficienții λ_j și μ_j pentru $\lambda_c = 1{,}1$ și $\mu_c = 1{,}4$ ($\eta = 0{,}9$)

ε_{ac} ‰	α_i'	λ_j / μ_j	α_i 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
1,0	0,00	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,065	1,160	1,228	1,291
	0,10	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,065	1,160
	0,20	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,5	0,00	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,017
		μ_j	1,000	1,000	1,134	1,225	1,294	1,375	1,400	1,400
	0,10	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,138	1,225	1,294
	0,20	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,140
2,0	0,00	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,030	1,051
		μ_j	1,000	1,000	1,123	1,234	1,321	1,399	1,400	1,400
	0,10	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,005
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,129	1,239	1,327	1,400
	0,20	λ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_j	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,132	1,240

Tabela 4

Coeficienții λ_k și μ_k pentru $\lambda_c = 1{,}1$ și $\mu_c = 1{,}4$ ($\eta = 0{,}9$)

ε_{ac} ‰	β	λ_k / μ_k	α_i 0,05	0,10	0,15	0,20	0,25	0,30	0,35	0,40
1,0	1	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,041	1,205	1,276	1,316	1,342	1,361	1,387
	4	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,048
	8	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
1,5	1	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,018	1,039
		μ_k	1,000	1,199	1,292	1,335	1,360	1,388	1,400	1,400
	4	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,003	1,100	1,160	1,203
	8	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
2,0	1	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,026	1,048	1,064
		μ_k	1,039	1,332	1,363	1,381	1,398	1,400	1,400	1,400
	4	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,000	1,000	1,040	1,138	1,201	1,241	1,270
	8	λ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
		μ_k	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,041

7. DISCUȚIA REZULTATELOR

Limitările pe care condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul aplicate vertical le introduce în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat trebuie apreciate în raport cu ipotezele, simplificările și coeficienții numerici utilizați la stabilirea lor, după cum urmează.

1. Limitările se referă la structurile continue de beton armat, la care fiecare bară solicitată la încovoiere simplă are secțiunea constantă (barele putînd avea între ele secțiuni diferite), solicitate de încărcări permanente și temporare aplicate vertical, care pot forma orice schemă de încărcare. De asemenea se consideră că structurile sînt astfel concepute, încît comportarea lor plastică se datorează numai formării de articulații plastice în dreptul secțiunilor critice solicitate la încovoiere simplă.

În practică se întîlnesc însă structuri cu o singură deschidere, precum și structuri continue la care încărcările permanente și temporare formează o singură schemă de încărcare. Pentru astfel de structuri, calculul plastic optim conduce la momente plastice egale cu momentele elastice corespunzătoare produse de încărcările permanente și temporare de calcul (respectiv redistribuția plastică a momentelor este nulă). Cu toate acestea, pentru structurile de mai sus poate prezenta avantaje în anumite cazuri redistribuirea plastică a momentelor de pe reazeme. În astfel de situații este necesar de precizat că limitările stabilite în acest studiu sînt pe deplin aplicabile secțiunilor critice de pe reazemele structurilor care fac parte din categoriile menționate.

2. Limitările s-au stabilit pentru două structuri tipice, care oferă cele mai defavorabile condiții din punctul de vedere al mărimii rotirilor articulațiilor plastice din cîmpuri și de pe reazeme. Ele sînt deci acoperitoare pentru toate celelalte structuri de beton armat solicitate în principal la încovoiere.

3. Modulul de rigiditate K a fost luat cu valoarea lui minimă, deci acoperitoare, stabilită în ipoteza defavorabilă a transformării deschiderii respective în mecanism sub acțiunea încărcărilor permanente și temporare de calcul.

4. La stabilirea limitărilor nu s-a luat în considerație efectul favorabil al rigidității la încovoiere a reazemelor celor două grinzi continue care conduc la cele mai mari rotiri ale articulațiilor plastice de pe reazeme și din cîmpuri.

5. Ipotezele acoperitoare luate în considerație justifică admiterea unor valori medii pentru coeficienții η_1 și η_2. Ca urmare, acești coeficienți au fost luați egali cu 0,7 pentru secțiunile critice dreptunghiulare și cu 0,9 pentru secțiunile critice în formă de T.

6. Deformația specifică de rupere la compresiune din încovoiere a betonului a fost luată egală cu 0,0035. Această valoare este acoperitoare, întrucît studii recente au arătat că mărimea deformației specifice de rupere la compresiune din încovoiere a betonului este influențată favorabil de armătura transversală și de panta diagramei de momente pe lungimea articulațiilor plastice [13]—[15].

7. După W. W. L. Chan [8], coeficientul ω și raportul $\frac{M_{ci}}{M_{pi}}$ din relația (62) se iau egale cu 0,2 — 0,3 și, respectiv, 0,6. În consecință, pentru $d_j = 0{,}15\ l_j$, expresia (62) devine

$$\theta_{pj} = (0{,}0120 \div 0{,}0180)\left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_{pj}} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1-\xi_{cj}}\right)\frac{l_j}{h_0}, \tag{69}$$

care conduce la coeficienți φ_j pînă la 57,2 % mai mari decît cei dați în tabelele 1 și 2.

Pe de altă parte, formula semiempirică a lui A. L. L. Baker [9] este

$$\theta_{pj} = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{d_j}{h_0}\right)^{\frac{1}{4}} \left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_{pj}} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1-\xi_{cj}}\right)\frac{l_j}{h_0}, \tag{70}$$

în care k_1, k_2 și k_3 sînt coeficienți care țin seama de tipul armăturii, de efectul forțelor axiale și de rezistența la compresiune a betonului. Pentru secțiunile critice solicitate la încovoiere simplă valorile produsului $k_1 k_2 k_3$ sînt cuprinse între 0,42 și 0,81.

Pentru $d_j = 0{,}15\ l_j$, expresia (70) poate fi scrisă sub forma

$$\theta_{pj} = (0{,}261 \div 0{,}504)\left(\frac{h_0}{l_j}\right)^{\frac{3}{4}} \left(\frac{\varepsilon_{br}}{\xi_{pj}} - \frac{\varepsilon_{ac}}{1-\xi_{cj}}\right)\frac{l_j}{h_0}. \tag{71}$$

Formula de mai sus conduce la coeficienți φ_j cu cel puțin 121 % mai mari decît cei dați în tabelele 1 și 2.

Referitor la formula (70) este important de subliniat buna coincidență dintre rotirile θ_{pj} calculate și cele rezultate din încercări, atît timp cît strivirea betonului în zona cea mai solicitată a unei singure secțiuni critice este considerată ca criteriu de rupere a structurilor de beton armat [16], [17].

Cele de mai sus arată că valorile coeficientului φ_j cuprinse în tabelele 1 și 2 prezintă un anumit grad de siguranță în raport cu cele la care conduc formulele lui Chan și Baker. Acest grad de siguranță apare întotdeauna necesar dacă se are în vedere necesitatea preîntîmpinării eventualului efect nefavorabil al redistribuirii „elastice" a momentelor produse de fisurarea betonului întins anterior intrării armăturii întinse în curgere, precum și efectului nefavorabil al tasării inegale a reazemelor, care nu poate fi estimat în calculele curente.

8. La aplicarea formulei (65) sau la utilizarea tabelei 1 pentru determinarea coeficientului φ_j corespunzător secțiunilor critice de pe reazemele elementelor încovoiate ale structurilor de beton armat, este necesar să se ia întotdeauna în considerație aria armăturii comprimate din aceste secțiuni. La proiectare, această arie se va lua egală cu $\frac{1}{3}$ pînă la $\frac{1}{2}$ din aria armăturii întinse corespunzătoare secțiunii critice din cîmp, în funcție de modul de armare adoptat.

8. EXEMPLU DE CALCUL

Se consideră o grindă continuă de beton armat cu secțiunea constantă simplu rezemată la extremități, avînd trei deschideri egale. Grinda are secțiunea în formă de T și este solicitată de încărcări permanente și temporare aplicate concentrat în fiecare deschidere, punctele de aplicație împărțind deschiderile în cîte patru părți egale. Încărcările permanente sînt egale între ele și se aplică simultan în toate deschiderile grinzii. Încărcările temporare sînt de asemenea egale între ele, dar pot fi aplicate în una, două sau în toate deschiderile, formînd în acest fel toate schemele posibile de încărcare. Secțiunile critice ale grinzii sînt situate în dreptul reazemelor intermediare și în mijlocul fiecărei deschideri, fiind numerotate cu *1*, *2* și *3*.

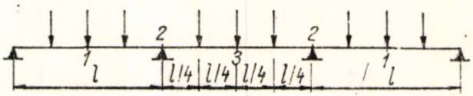


Fig. 9

Schema generală a grinzii este reprezentată în figura 9.

Ca încărcări de referință în funcție de care se exprimă momentele încovoietoare ale secțiunilor critice, se iau încărcarea permanentă și încărcarea temporară aplicate concentrat într-unul din punctele care împart fiecare deschidere în cîte patru părți egale.

Date de calcul :

— lungimea fiecărei deschideri a grinzii, $l = 5{,}60$ m;

— valoarea nominală a încărcării permanente de referință, $G_n = 3$tf;

— valoarea nominală a încărcării temporare de referință, $P_n = 3$tf;

— coeficientul de supraîncărcare de calcul al încărcărilor permanente, $\lambda_c = 1{,}1$;

— coeficientul de supraîncărcare de calcul al încărcărilor temporare, $\mu_c = 1{,}4$;

— lățimea de calcul a tălpii secțiunilor critice din cîmpuri, $b' = 160$ cm;

— grosimea aripilor secțiunilor critice din cîmpuri, $h_p = 8$ cm;

— valoarea de calcul a rezistenței de rupere la compresiune din încovoiere a betonului, $R_i = 100$ kgf/cm^2;

— valoarea de calcul a limitei de curgere a armăturii, $\sigma_c = 2100$ kgf/cm^2;

Expresia generală a momentului plastic optim dintr-o secțiune critică i a grinzii ($i = 1, 2, 3$) este

$$M_{pi} = (a_i \lambda_i + b_i H_n \mu_i) G_n l. \tag{72}$$

Pentru grinda considerată, $H_n = 1$, iar coeficienții a_i și b_i [18] sînt dați în tabela 5.

Tabela 5

Coeficienții de influență a_i și b_i

Secțiunea critică i	a_i	b_i
1	0,313	0,406
2	0,375	0,438
3	0,125	0,313

Calculul plastic optim al grinzii considerate, efectuat pe baza teoriei expuse în lucrarea [2], conduce la următoarele valori ale coeficienților λ_i și μ_i:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 1{,}00; \qquad \mu_1 = 1{,}31, \\ \lambda_2 &= 1{,}00; \qquad \mu_2 = 1{,}00, \\ \lambda_3 &= 1{,}00; \qquad \mu_3 = 1{,}00. \end{aligned} \tag{73}$$

Momentele plastice optime sînt deci următoarele:

$$\begin{aligned} M_{p1} &= 0{,}845\ G_n l = 14{,}20 \text{ tf.m}, \\ M_{p2} &= 0{,}813\ G_n l = 13{,}66 \text{ tf.m}, \\ M_{p3} &= 0{,}438\ G_n l = 7{,}35 \text{ tf.m}. \end{aligned} \tag{74}$$

La dimensionarea structurilor de beton armat calculate în domeniul plastic, momentele de rupere ale secțiunilor critice se iau egale cu momentele plastice respective.

Alegînd dimensiunile 20 × 55 cm pentru inima secțiunilor critice și o înălțime utilă a acestora de 51 cm, prin utilizarea tabelei 41 din anexa II a normativului condiționat [19] se obțin următoarele arii necesare de armătură întinsă:

$$\begin{aligned} A_1 &= 13{,}50 \text{ cm}^2, \\ A_2 &= 15{,}10 \text{ cm}^2, \\ A_3 &= 6{,}94 \text{ cm}^2. \end{aligned} \tag{75}$$

Considerînd că o treime din armătura din cîmp trece peste reazeme, în zona comprimată a secțiunilor critice 2 apare aria de armătură

$$A_2' = \frac{A_3}{3} = 2{,}31 \text{ cm}^2. \tag{76}$$

$\left(\text{dintre } \frac{A_1}{3} \text{ și } \frac{A_3}{3} \text{ s-a luat în mod acoperitor valoarea cea mai mică}\right)$.

Coeficienţii α_i şi α_i' au în acest caz următoarele valori :

$$\alpha_1 = 0{,}278\,; \qquad \alpha_2 = 0{,}311, \qquad \alpha_3 = 0{,}143\,; \qquad \alpha_2' = 0{,}048. \tag{77}$$

Pentru $\varepsilon_{ac} = \frac{\sigma_c}{E_a} = 0{,}0010$ şi $\beta = \frac{b'}{b} = 8$, din tabela 4 se deduc pentru secţiunile critice *1* şi *3* următoarele valori ale coeficienţilor λ_k şi μ_k ;

$$\lambda_1 = 1{,}00\,; \qquad \mu_1 = 1{,}00, \qquad \lambda_3 = 1{,}00\,; \qquad \mu_3 = 1{,}00. \tag{78}$$

Pentru secţiunea critică *2*, din tabela 3 se deduce

$$\lambda_2 = 1{,}00\,; \qquad \mu_2 = 1{,}10. \tag{79}$$

Compararea coeficienţilor de supraîncărcare daţi de calculul plastic optim cu cei rezultaţi din condiţia de compatibilitate a rotirilor articulaţiilor plastice arată că această din urmă condiţie afectează numai secţiunea critică *2*, coeficientul μ_2 trebuind să fie luat cu valoarea 1,10 în loc de 1,00.

În consecinţă noul moment plastic al secţiunii critice *2* va fi

$$M_{p2} = 0{,}857\ G_n l = 14{,}40 \text{ tf.m}, \tag{80}$$

căruia îi corespunde aria de armătură necesară

$$A_2 = 16{,}10 \text{ cm}^2. \tag{81}$$

Observaţie. Teoretic, capacitatea de rotire a articulaţiei plastice corespunzătoare secţiunii critice *2* trebuie verificată din nou, ca urmare a sporirii ariei de armătură întinsă din această secţiune. Practic însă, sporul de armătură este suficient de mic pentru ca o astfel de verificare să nu mai fie necesară.

Observaţia de mai sus are un caracter general, ea aplicîndu-se tuturor secţiunilor critice de beton armat solicitate la încovoiere simplă.

9. CONCLUZII

În lucrare s-au stabilit limitările care apar în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat, rezultate din îndeplinirea condiţiei privind compatibilitatea rotirilor articulaţiilor plastice sub acţiunea încărcărilor permanente şi temporare de calcul. Studiul s-a referit la structurile solicitate de încărcări verticale, a căror comportare plastică se caracterizează prin formarea de articulaţii plastice numai în secţiunile critice solicitate la încovoiere simplă.

Soluționarea practică a problemei compatibilității rotirilor articulațiilor plastice s-a putut face pe o cale aproximativă, dar în același timp acoperitoare, prin tratarea a două grinzi continue ale căror articulații plastice de pe reazeme și din cîmpuri dezvoltă cele mai mari rotiri posibile sub acțiunea încărcărilor de calcul.

Cercetarea efectuată arată că, în calculul plastic optim, condiția de compatibilitate a rotirilor articulațiilor plastice conduce la o limitare inferioară a coeficienților de supraîncărcare μ_i și λ_i. Limitarea se referă la coeficientul μ_i cînd formarea primei articulații plastice în secțiunea critică i are loc înainte ca încărcarea temporară să atingă valoarea ei de calcul. Ea se referă la coeficientul de calcul λ_i cînd formarea primei articulații plastice în secțiunea critică i are loc după ce încărcarea temporară a atins valoarea ei de calcul.

Relațiile (14), (25), (46) și (59) cu care se determină valorile coeficienților μ_i și λ_i își păstrează sensul lor fizic atît timp cît numărătorii lor au valori pozitive. Cînd acești numărători devin negativi, aceasta înseamnă că articulațiile plastice respective au capacități de rotire mult mai mari decît rotirile ce rezultă din calculul plastic optim al structurilor.

Pentru scurtarea timpului afectat proiectării, valorile coeficienților λ_i și μ_i pot fi sistematizați în tabele pentru fiecare pereche de valori ale coeficienților de supraîncărcare de calcul λ_c și μ_c. Un exemplu în acest sens îl constituie tabelele 3 și 4 din cadrul acestei lucrări.

★

Autorul mulțumește matem. Silvia Minea pentru ajutorul prețios acordat la efectuarea calculului automat al coeficienților φ_i, λ_i și μ_i cuprinși în tabelele 1—4.

Primită la redacție la 5 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. Petcu, *Un principiu fundamental în proiectarea structurilor static nedeterminate de beton armat în domeniul plastic*, St. cerc. mec. apl., **12**, 5, 1017 — 1023 (1961).
2. V. Petcu, *Generalizarea teoriei calculului plastic optim al structurilor continue de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **28**, 2, 289 — 308 (1969).
3. * * * *STAS 8000 — 67. Calculul elementelor de beton, beton armat și beton precomprimat. Metoda la stări-limită.*
4. * * * *STAS 1546 — 50. Construcții civile și industriale. Calculul elementelor de beton armat. Prescripții*, proiect de revizuire, INCERC, 1969.
5. * * * *Conclusions techniques de la 12e Session plenière du Comité Européen du Béton*, Lausanne, 22 — 27 Avril, 1968, Bulletin d'information du Comité Européen du Béton, *68*, 94 — 97 (1968).
6. * * * *Building code requirements for reinforced concrete* (ACI 318 — 63) American Concrete Institute, Detroit, 1963.
7. * * * *Indian standard code of practice for plain and reinforced concrete for general building construction* (IS 456 — 1964), Indian Standards Institution, New Delhi, 1967.
8. W. W. L. Chan, *The ultimate strength and deformation of plastic hinges in reinforced concrete frameworks*, Magazine of Concrete Research, **7**, *21*, 121 — 132 (1955).
9. * * * *Ultimate load design of concrete structures*, Proceedings of The Institution of Civil Engineers, *21*, February 1962, 399 — 442.
10. V. Petcu, *Articulația plastică în calculul plastic al structurilor de beton armat*, St. cerc. mec. apl., **14**, *1*, 55 — 69 (1963).
11. * * * *Recommandations pratiques unifiées pour le calcul et l'execution des ouvrages en béton armé*, Comité Européen du Béton, Paris, 1964.

12. H. Rüsch, E. Grasser, P. S. Rao, *Principes du calcul du béton armé sous des états de contraintes monoaxiaux*, Comité Européen du Béton, Bulletin d'information, *36*, 1 —112 (1962).
13. A. L. L. Baker, A. M. N. Amarakone, *Inelastic hyperstatic frames analysis*, Proceedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE — ACI, Volume, **85** — 136 (1965).
14. W. G. Corley, *Rotational capacity of reinforced concrete beams*, Journal of the Structural Division, Proceedings ASCE, **92**, *ST5*, 121 — 146 (1966).
15. A. F. Mattock, *Rotational capacity of hinging regions in reinforced concrete beams*, Proceedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI Volume, 143 — 167 (1965).
16. V. Petcu, G. Stănculescu, *Studiu privind comportarea în domeniul plastic a grinzilor continue armate identic în cîmpuri și pe reazeme cu vergele de oțel PC 52*, INCERC, Ac. 22.1.2. (1968).
17. V. Petcu, G. Stănculescu, U. Pancaldi, *Studiu privind comportarea în domeniul plastic a grinzilor continue armate diferit în cîmpuri și pe reazeme, cu vergele de oțel PC 52*, INCERC, 115 (1969).
18. C. N. Avram, *Grinzi continue*, București, Edit. tehnică, 1965.
19. * * * *Normativ condiționat pentru calculul construcțiilor la stări limită*, vol. 1, partea III, *Calculul și alcătuirea constructivă a elementelor de construcții civile și industriale din beton, beton armat și beton precomprimat* (*P. 8 — 62*). București Edit. tehnică 1963.

ASUPRA VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE ALE ARBORELUI COTIT

de GHEORGHE NIȚESCU și VIRGIL OLARIU
Institutul politehnic Brașov

În lucrare se prezintă ecuațiile matriceale ale vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit, respectiv ale arborelui drept prevăzut cu mai mulți volanți. Se stabilește ecuația caracteristică de gradul $n + 1$ a vibrațiilor de torsiune precum și expresiile coeficienților acesteia. Se studiază amplitudinile vibrațiilor de torsiune, indicîndu-se relațiile de calcul ale lor.

1. CONSIDERAȚII GENERALE

În tehnică se utilizează frecvent organe de mașini care reprezintă arbori drepți de secțiune circulară, pe care sînt montați mai mulți volanți (arborii cutiilor de viteze, arborii mecanismelor de transmisie cu curele etc.).

Pe lîngă arborii drepți, întîlnim de asemenea și arborii cotiți ai motoarelor cu ardere internă. Pentru studiul vibrațiilor de răsucire, arborele cotit se înlocuiește printr-un arbore drept echivalent cu mai mulți volanți, fiecare ambielaj al arborelui fiind înlocuit printr-un volant.

Metoda Holzer-Tolle pentru determinarea pulsațiilor proprii ale vibrațiilor de torsiune ale arborilor cu mai mulți volanți (arbori cotiți de la motoarele omogene în linie), necesită un număr mare de încercări pentru obținerea unor valori exacte.

Metoda Otto-Kraemer permite obținerea directă, fără tatonări, a pulsațiilor proprii atunci cînd numărul total de piese plasate la extremitățile arborelui cotit nu este mai mare ca patru.

În lucrarea [4] s-a generalizat metoda, Otto-Kraemer, dîndu-i-se un aspect grafo-analitic, astfel încît ea poate fi aplicată oricare ar fi numărul de piese cu care este încărcat arborele cotit la extremitățile sale. Tot în lucrarea [4] se indică o nouă metodă pentru determinarea valorilor pulsațiilor proprii ale arborelui cotit, care elimină tatonările în calcule.

În lucrarea [1] se prezintă metoda matriceală pentru studiul vibrațiilor de torsiune ale arborelui drept cu mai mulți volanți, insistîndu-se în special asupra pulsațiilor proprii ale arborelui.

Avînd în vedere claritatea, eleganța și forma condensată a expresiilor obținute prin metoda matriceală, autorii și-au propus să dezvolte și să perfecționeze metoda prezentată în lucrarea [1].

De la început ținem să precizăm că relațiile stabilite în [1] conduc la rezultate corecte numai pentru calculul pulsațiilor proprii de răsucire ale arborelui. În cazul amplitudinilor oscilațiilor de răsucire sînt necesare anumite precizări, fără de care se obțin rezultate eronate.

2. ECUAȚIILE MATRICEALE ALE VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE

Să considerăm un arbore nesimetric, avînd rigiditățile $2K_1$, respectiv $2K_2$ (fig. 1), pe care este montat un volant cu momentul de inerție J. Asupra volantului acționează momentul perturbator periodic $Me^{i\omega t}$, iar la extremitățile arborelui acționează momentele elastice $M_p e^{i\omega t}$, respectiv $M_k e^{i\omega t}$. Unghiul de răsucire din secțiunea care trece prin volant este φ, iar unghiurile de răsucire la extremitățile arborelui sînt φ_p, respectiv φ_k. Un astfel de arbore are trei coordonate generalizate, corespunzînd celor trei parametri variabili : φ, φ_p și φ_k.

Energia cinetică a volantului este,

$$T = \frac{1}{2} J \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}t} \right)^2 = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2,$$

energia potențială a arborelui

$$V = K_1 (\varphi_p - \varphi)^2 + K_2 (\varphi - \varphi_k)^2,$$

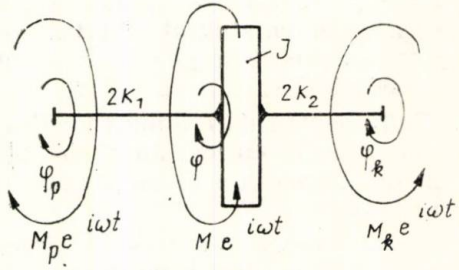


Fig. 1

iar funcția lui Lagrange

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} J \dot{\varphi}^2 - K_1 (\varphi_p - \varphi)^2 - K_2 (\varphi - \varphi_k)^2.$$

Ecuațiile lui Lagrange de genul doi sînt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} = Q_j \quad (j = 1, 2, 3),$$

unde

$$q_1 = \varphi, \quad q_2 = \varphi_p, \quad q_3 = \varphi_k.$$

Se observă că:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = J\dot{\varphi}, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_p} = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k} = 0, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}}\right) = J\ddot{\varphi}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_p}\right) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}_k}\right) = 0, \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = 2K_1(\varphi_p - \varphi) - 2K_2(\varphi - \varphi_k),$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_p} = -2K_1(\varphi_p - \varphi), \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi_k} = 2K_2(\varphi - \varphi_k).$$

Pe de altă parte, lucrul mecanic elementar virtual, corespunzător fiecărui parametru variabil este

$$\delta L = -M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\delta\varphi, \quad \delta L_p = M_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\delta\varphi_p, \quad \delta L_k = -M_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\delta\varphi_k,$$

prin urmare forțele generalizate sînt

$$Q = -M\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad Q_p = M_p\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \quad Q_k = -M_k\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}.$$

Avînd în vedere relațiile de mai sus, ecuațiile lui Lagrange pot fi exprimate prin ecuația matriceală

$$\begin{Vmatrix} -J\ddot{\varphi} + 2K_1(\varphi_p - \varphi) - 2K_2(\varphi - \varphi_k) \\ 2K_1(\varphi_p - \varphi) \\ 2K_2(\varphi - \varphi_k) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M \\ M_p \\ M_k \end{Vmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}. \tag{1}$$

Pentru această ecuație se va căuta o soluție de forma

$$\begin{Vmatrix} \varphi \\ \varphi_p \\ \varphi_k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \lambda \\ \lambda_p \\ \lambda_k \end{Vmatrix} \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}, \tag{2}$$

care, înlocuită în (1), conduce la ecuația matriceală

$$\begin{Vmatrix} \omega^2\lambda J + 2K_1(\lambda_p - \lambda) - 2K_2(\lambda - \lambda_k) \\ 2K_1(\lambda_p - \lambda) \\ 2K_2(\lambda - \lambda_k) \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} M \\ M_p \\ M_k \end{Vmatrix},$$

care poate fi scrisă sub forma

$$\begin{Vmatrix} M \\ M_p \\ M_k \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \omega^2 \lambda J + M_p - M_k \\ 2K_1(\lambda_p - \lambda) \\ 2K_2(\lambda - \lambda_k) \end{Vmatrix}. \tag{3}$$

Din ultima linie a ecuației (3) se obține amplitudinea λ a vibrațiilor de torsiune ale arborelui în secțiunea de fixare a volantului:

$$\lambda = \lambda_k + \frac{M_k}{2K_2}. \tag{4}$$

Înlocuind expresia (4) în ecuația (3), se obține ecuația

$$\begin{Vmatrix} M_p \\ \lambda_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \left(1 - \frac{\omega^2 J}{2K_2}\right) M_k - \omega^2 J \lambda_k + M \\ \frac{1}{2K_2} M_k + \lambda_k + \frac{1}{2K_1} M_p \end{Vmatrix}, \tag{5}$$

care nu mai conține amplitudinea λ.

Înlocuind M_p din linia a doua a ecuației (5) cu expresia dată de prima linie, obținem ecuația

$$\begin{Vmatrix} M_p \\ \lambda_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} \left(1 - \frac{\omega^2 J}{2K_2}\right) M_k - \omega^2 J \lambda_k + M \\ \left(\frac{1}{2K_1} + \frac{1}{2K_2} - \frac{\omega^2 J}{4K_1 K_2}\right) M_k + \left(1 - \frac{\omega^2 J}{2K_1}\right) \lambda_k + \frac{M}{2K_1} \end{Vmatrix},$$

care se poate scrie sub forma

$$\begin{Vmatrix} M_p \\ \lambda_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 - \frac{\omega^2 J}{2K_2}, & -\omega^2 J, & 1 \\ \frac{1}{2K_1} + \frac{1}{2K_2} - \frac{\omega^2 J}{4K_1 K_2}, & 1 - \frac{\omega^2 J}{2K_1}, & \frac{1}{2K_1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M_k \\ \lambda_k \\ M \end{Vmatrix}$$

sau

$$\begin{Vmatrix} M_p \\ \lambda_p \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 - \frac{\omega^2 J}{2K_2}, & -\omega^2 J \\ \frac{1}{2K_1} + \frac{1}{2K_2} - \frac{\omega^2 J}{4K_1 K_2}, & 1 - \frac{\omega^2 J}{2K_1} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M_k \\ \lambda_k \end{Vmatrix} + \begin{Vmatrix} 1 \\ \frac{1}{2K_1} \end{Vmatrix} M. \tag{6}$$

Introducînd notația

$$A = \left\| \begin{matrix} 1 - \dfrac{\omega^2 J}{2K_2}, & -\omega^2 J \\ \dfrac{1}{2K_1} + \dfrac{1}{2K_2} - \dfrac{\omega^2 J}{4K_1 K_2}, & 1 - \dfrac{\omega^2 J}{2K_1} \end{matrix} \right\|, \tag{7}$$

ecuația (6) capătă forma

$$\left\| \begin{matrix} M_p \\ \lambda_p \end{matrix} \right\| = A \left\| \begin{matrix} M_k \\ \lambda_k \end{matrix} \right\| + \left\| \begin{matrix} 1 \\ \dfrac{1}{2K_1} \end{matrix} \right\| M, \tag{8}$$

care reprezintă ecuația matriceală a vibrațiilor de torsiune ale arborelui cu un singur volant.

Pentru $M = 0$, ecuația (8) devine

$$\left\| \begin{matrix} M_p \\ \lambda_p \end{matrix} \right\| = A \left\| \begin{matrix} M_k \\ \lambda_k \end{matrix} \right\|. \tag{9}$$

Dacă arborele este simetric, rigiditățile vor fi egale, $K_1 = K_2 = K$, și matricea (7) primește structura

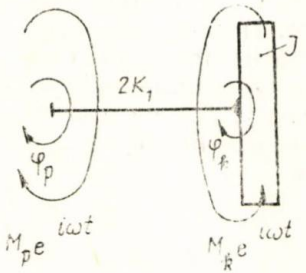


Fig. 2

$$A = A_s = \left\| \begin{matrix} 1 - \dfrac{\omega^2 J}{2K}, & -\omega^2 J \\ \dfrac{1}{2K}\left(2 - \dfrac{\omega^2 J}{2K}\right), & 1 - \dfrac{\omega^2 J}{2K} \end{matrix} \right\|. \tag{10}$$

Pentru arborele nesimetric cu volantul la extremitatea din dreapta (fig. 2), rezultă $1/(2K_2) = 0$, deci matricea (7) se reduce la

$$A = A_r = \left\| \begin{matrix} 1, & -\omega^2 J \\ \dfrac{1}{2K_1}, & 1 - \dfrac{\omega^2 J}{2K_1} \end{matrix} \right\|, \tag{11}$$

iar pentru arborele nesimetric cu volantul la extremitatea din stînga (fig. 3) rezultă $1/(2K_1) = 0$, deci matricea (7) se reduce la

$$A = A_l = \begin{Vmatrix} 1 - \dfrac{\omega^2 J}{2K_2}, & -\omega^2 J \\ \dfrac{1}{2K_2}, & 1 \end{Vmatrix}. \tag{12}$$

Ecuația matriceală a arborelui nesimetric cu volantul la una dintre extremitățile sale corespunde cu expresia (9).

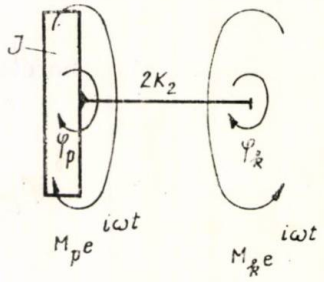


Fig. 3

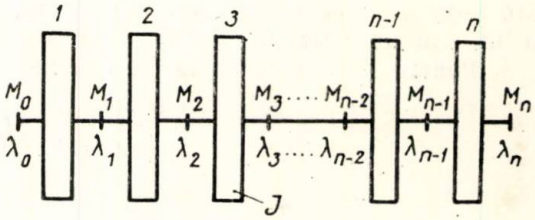


Fig. 4

În cazul unui arbore cu n volanți așezați simetric, avînd fiecare momentul de inerție J (fig. 4), notînd cu λ_0 și λ_n amplitudinile vibrațiilor de torsiune de la extremitățile arborelui și cu $\lambda_1, \lambda_2, \ldots \lambda_{n-1}$ amplitudinile vibrațiilor de torsiune din secțiunile care se află la mijlocul distanței dintre doi volanți consecutivi, iar cu $M_0, M_1, M_2, \ldots, M_n$ momentele de răsucire corespunzătoare amplitudinilor $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, în virtutea ecuației (9) se poate scrie

$$\begin{Vmatrix} M_0 \\ \lambda_0 \end{Vmatrix} = A_s \begin{Vmatrix} M_1 \\ \lambda_1 \end{Vmatrix}, \quad \begin{Vmatrix} M_1 \\ \lambda_1 \end{Vmatrix} = A_s \begin{Vmatrix} M_2 \\ \lambda_2 \end{Vmatrix}, \ldots, \begin{Vmatrix} M_{n-1} \\ \lambda_{n-1} \end{Vmatrix} = A_s \begin{Vmatrix} M_n \\ \lambda_n \end{Vmatrix},$$

de unde prin substituții succesive se obține ecuația matriceală corespunzătoare vibrațiilor de torsiune ale arborelui cu volanți simetric așezați:

$$\begin{Vmatrix} M_0 \\ \lambda_0 \end{Vmatrix} = A_s^n \begin{Vmatrix} M_n \\ \lambda_n \end{Vmatrix}, \tag{13}$$

care pentru $M_0 = M_n = 0$ se reduce la forma

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ \lambda_0 \end{Vmatrix} = A_s^n \begin{Vmatrix} 0 \\ \lambda_n \end{Vmatrix}. \tag{14}$$

Pentru arborele cotit al motoarelor cu ardere internă, modelul arborelui echivalent este reprezentat în figura 5, unde la o extremitate se află un volant corespunzător roții ventilatorului, iar la cealaltă extremitate un volant corespunzător volantului arborelui cotit.

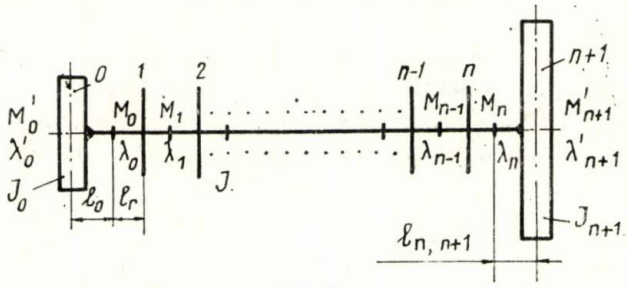


Fig. 5

În virtutea ecuației (9) se obține ecuația matriceală a elementului format din roata ventilatorului, având momentul de inerție J_0 și arborele de lungime l_0 și rigiditate K_0:

$$\left\| \begin{matrix} M'_0 \\ \lambda'_0 \end{matrix} \right\| = A_0 \left\| \begin{matrix} M_0 \\ \lambda_0 \end{matrix} \right\|, \tag{15}$$

în care matricea A_0 are expresia

$$A_0 = \left\| \begin{matrix} 1 - \Omega^2 J_0 C_0, & -\Omega^2 J_0 \\ C_0, & 1 \end{matrix} \right\|, \tag{16}$$

obținută în virtutea formulei (12) prin înlocuirea pulsației ω a arborelui cu un singur volant cu pulsația Ω a arborelui cotit, de asemenea prin înlocuirea rigidității $2K_2$ prin K_0 și introducerea notației $C_0 = 1/K_0$.

Pentru partea omogenă a arborelui echivalent compusă din n volanți identici, având fiecare momentul de inerție J, corespunde ecuația matriceală (13), în care matricea A_s are expresia

$$A_s = \left\| \begin{matrix} 1 - \Omega^2 JC, & -\Omega^2 J \\ C\,(2 - \Omega^2 JC), & 1 - \Omega^2 JC \end{matrix} \right\|, \tag{17}$$

obținută în virtutea relației (10) prin înlocuirea lui ω cu Ω și introducerea notației ($C = 1/(2K)$, rigiditatea $2K$ corespunzînd lungimii reduse l_r.

În virtutea ecuației (9) se obține, de asemenea, și ecuația matriceală a elementului format din volantul arborelui cotit, având momentul de inerție J_{n+1}, și arborele de lungime $l_{n,n+1}$, de rigiditate $K_{n,n+1}$:

$$\left\| \begin{matrix} M_n \\ \lambda_n \end{matrix} \right\| = A_{n+1} \left\| \begin{matrix} M'_{n+1} \\ \lambda'_{n+1} \end{matrix} \right\|, \tag{18}$$

în care matricea A_{n+1} are expresia

$$A_{n+1} = \begin{Vmatrix} 1, & -\Omega^2 J_{n+1} \\ C_{n,n+1}, & 1 - \Omega^2 J_{n+1} C_{n,n+1} \end{Vmatrix}. \tag{19}$$

obținută în virtutea formulei (11) prin înlocuirea lui ω cu Ω, a lui $2K_1$ cu $K_{n,n+1}$ și prin introducerea notației $C_{n,n+1} = 1/K_{n,n+1}$.

Din (15), (13) și (18) se obține ecuația matriceală a vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit al motoarelor cu ardere internă:

$$\begin{Vmatrix} M'_0 \\ \lambda'_0 \end{Vmatrix} = A_0 A_s^n A_{n+1} \begin{Vmatrix} M'_{n+1} \\ \lambda'_{n+1} \end{Vmatrix}, \tag{20}$$

care, pentru $M'_0 = M'_{n+1} = 0$, se reduce la forma

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ \lambda'_0 \end{Vmatrix} = A_0 A_s^n A_{n+1} \begin{Vmatrix} 0 \\ \lambda'_{n+1} \end{Vmatrix} \tag{21}$$

sau

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = A_0 A_s^n A_{n+1} \begin{Vmatrix} 0 \\ \dfrac{\lambda'_{n+1}}{\lambda'_0} \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

Avînd în vedere că A_0, A_s^n și A_{n+1} sînt matrice pătrate cu două linii și două coloane, produsul lor este tot o matrice pătrată cu două linii și două coloane, de forma

$$A_0 A_s^n A_{n+1} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}. \tag{23}$$

Din (22) și (23) rezultă ecuația matriceală a vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit:

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 0 \\ \dfrac{\lambda'_{n+1}}{\lambda'_0} \end{Vmatrix}. \tag{24}$$

3. PULSAȚIILE VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE

Matricea ortogonală A_s exprimată prin relația (17), fiind de tipul 2×2 cu determinantul $+1$, se poate scrie sub forma

$$A_s = \left\| \begin{matrix} \cos\gamma, & -Z\sin\gamma \\ \frac{1}{Z}\sin\gamma, & \cos\gamma \end{matrix} \right\|, \tag{25}$$

în care

$$\cos\gamma = 1 - \Omega^2 J C, \quad Z\sin\gamma = \Omega^2 J, \quad \frac{1}{Z}\sin\gamma = C(2 - \Omega^2 J C). \tag{26}$$

Înlocuind în relațiile (26) expresiile cunoscute

$$\cos\gamma = 1 - 2\sin^2\frac{\gamma}{2}, \quad \sin\gamma = 2\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2},$$

se obține pulsația proprie a arborelui cu mai mulți volanți :

$$\Omega = \sqrt{\frac{2\sin^2(\gamma/2)}{JC}} \tag{27}$$

și relația

$$Z = \frac{1}{C}\operatorname{tg}\frac{\gamma}{2} = \frac{1}{C}\frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}. \tag{28}$$

Introducînd notația

$$x = 2\sin^2(\gamma/2), \tag{29}$$

expresia (27) devine

$$\Omega = \sqrt{\frac{x}{JC}}. \tag{30}$$

În cazul vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit, din ecuația matriceală (24) se obține ecuația caracteristică

$$a_{12} = 0, \tag{31}$$

care servește la determinarea pulsațiilor vibrațiilor de torsiune, deoarece nu conține raportul amplitudinilor unghiulare.

Pentru a obține expresia dezvoltată a termenului a_{12}, matricea A_s^n se va scrie în virtutea expresiei (25) sub forma

$$A_s^n = \left\| \begin{matrix} \cos n\gamma, & -Z \sin n\gamma \\ \frac{1}{Z} \sin n\gamma, & \cos n\gamma \end{matrix} \right\|. \tag{32}$$

Din (23), (16), (32) și (19) se obține

$$a_{12} = -\left[(1 - \Omega^2 J_0 C_0) \cos n\gamma - \frac{\Omega^2 J_0}{Z} \sin n\gamma\right] \Omega^2 J_{n+1} -$$
$$-[(1 - \Omega^2 J_0 C_0) Z \sin n\gamma + \Omega^2 J_0 \cos n\gamma)(1 - \Omega^2 J_{n+1} C_{n,n+1}) \tag{33}$$

și ca urmare, ecuația pulsațiilor (31) devine

$$Z \operatorname{ctg} n\gamma = \frac{Z^2 \left(\Omega^2 C_0 J_0 J_{n+1} C_{n+1} - J_{n+1} C_{n+1} - J_0 C_0 + \frac{1}{\Omega^2}\right) - \Omega^2 J_0 J_{n+1}}{\Omega^2 J_0 J_{n+1} (C_0 + C_{n,n+1}) - J_0 - J_{n+1}}. \tag{34}$$

Avînd în vedere expresia (28), se mai poate scrie

$$Z \operatorname{ctg} n\gamma = \frac{\operatorname{ctg} n\gamma \sin\gamma}{C(1 + \cos\gamma)}. \tag{35}$$

Din (34) și (35) se obține ecuația caracteristică sub forma

$$\operatorname{ctg} n\gamma \sin\gamma = \frac{u}{v}, \tag{36}$$

în care termenii u și v au expresiile

$$u = 1 - u_1 x + u_2 x^2, \quad v = -v_1 + v_2 x, \tag{37}$$

unde

$$u_1 = \frac{J_0 C_0}{JC} + \frac{2J_0 J_{n+1}}{J^2} + \frac{J_{n+1} C_{n,n+1}}{JC},$$
$$u_2 = \frac{J_0 J_{n+1}}{J^2}\left(\frac{C_0 C_{n+1}}{C^2} + 1\right), \quad v_1 = \frac{J_0}{J} + \frac{J_{n+1}}{J}, \tag{38}$$
$$v_2 = \frac{J_0 J_{n+1}}{J^2}\left(\frac{C_0}{C} + \frac{C_{n,n+1}}{C}\right).$$

Expresiile (38) corespund cu cele indicate în lucrarea [1].

Diferitele valori ale variabilei $x = 2\sin^2(\gamma/2)$ se pot determina grafic [1]; cu valorile astfel obținute se stabilesc, în virtutea formulei (30), pulsațiile proprii ale vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit.

Pentru determinarea analitică a pulsațiilor proprii ale vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit, ecuația caracteristică (36) se va scrie sub forma

$$u\frac{\sin n\gamma}{\sin\gamma} = v\cos n\gamma, \tag{39}$$

în care $\sin n\gamma$ și $\cos n\gamma$ au expresiile cunoscute:

$$\begin{aligned}\sin n\gamma &= C_n^1\cos^{n-1}\gamma\sin\gamma - C_n^3\cos^{n-3}\gamma\sin^3\gamma + C_n^5\cos^{n-5}\gamma\sin^5\gamma - \ldots,\\ \cos n\gamma &= \cos^n\gamma - C_n^2\cos^{n-2}\gamma\sin^2\gamma + C_n^4\cos^{n-4}\gamma\sin^4\gamma - \ldots\end{aligned} \tag{40}$$

Din (39), (40), (37), (26) și (30) se obține ecuația caracteristică sub forma

$$\begin{aligned}&w_{-1}\cos^{n+1}\gamma + w_0\cos^n\gamma + w_1\cos^{n-1}\gamma - w_2\cos^{n-2}\gamma - w_3\cos^{n-3}\gamma +\\ &+ w_4\cos^{n-4}\gamma + w_5\cos^{n-5}\gamma - w_6\cos^{n-6}\gamma - w_7\cos^{n-7}\gamma +\\ &+ w_8\cos^{n-8}\gamma + w_9\cos^{n-9}\gamma - w_{10}\cos^{n-10}\gamma -\\ &- w_{11}\cos^{n-11}\gamma + w_{12}\cos^{n-12}\gamma + \ldots = 0,\end{aligned} \tag{41}$$

unde

$$\begin{aligned}w_{-1} &= a_0v_2 + a_1u_2; & w_0 &= a_0(v_1 - v_2) + a_1(u_1 - 2u_2),\\ w_1 &= a_1(1 - u_1 + u_2) - a_2v_2 - a_3u_2; & w_2 &= a_2(v_1 - v_2) + a_3(u_1 - 2u_2),\\ w_3 &= a_3(1 - u_1 + u_2) - a_4v_2 - a_5u_2; & w_4 &= a_4(v_1 - v_2) + a_5(u_1 - 2u_2),\\ w_5 &= a_5(1 - u_1 + u_2) - a_6v_2 - a_7u_2; & w_6 &= a_6(v_1 - v_2) + a_7(u_1 - 2u_2),\\ w_7 &= a_7(1 - u_1 + u_2) - a_8v_2 - a_9u_2; & w_8 &= a_8(v_1 - v_2) + a_9(u_1 - 2u_2),\\ w_9 &= a_9(1 - u_1 + u_2) - a_{10}v_2 - a_{11}u_2; & w_{10} &= a_{10}(v_1 - v_2) + a_{11}(u_1 - 2u_2),\\ w_{11} &= a_{11}(1 - u_1 + u_2) - a_{12}v_2 - \ldots; & w_{12} &= a_{12}(v_1 - v_2) + \ldots\end{aligned}$$

În relațiile de mai sus, termenii $a_0, a_1, a_2, a_3, \ldots$ au expresiile

$$\begin{aligned}a_0 &= 1 + C_n^2 + C_n^4 + C_n^6 + C_n^8 + C_n^{10}C_n^{12} + \ldots,\\ a_1 &= C_n^1 + C_n^3 + C_n^5 + C_n^7 + C_n^9 + C_n^{11} + \ldots,\end{aligned}$$

$$a_2 = C_n^2 + 2C_n^4 + 3C_n^6 + 4C_n^8 + 5C_n^{10} + 6C_n^{12} + \ldots,$$

$$a_3 = C_n^3 + 2C_n^5 + 3C_n^7 + 4C_n^9 + 5C_n^{11} + \ldots,$$

$$a_4 = C_n^4 + 3C_n^6 + 6C_n^8 + 10C_n^{10} + 15C_n^{12} + \ldots,$$

$$a_5 = C_n^5 + 3C_n^7 + 6C_n^9 + 10C_n^{11} + \ldots,$$

$$a_6 = C_n^6 + 4C_n^8 + 10C_n^{10} + 20C_n^{12} + \ldots,$$

$$a_7 = C_n^7 + 4C_n^9 + 10C_n^{11} + \ldots,$$

$$a_8 = C_n^8 + 5C_n^{10} + 15C_n^{12} + \ldots,$$

$$a_9 = C_n^9 + 5C_n^{11} + \ldots,$$

$$a_{10} = C_n^{10} + 6C_n^{12} + \ldots,$$

$$a_{11} = C_n^{11} + \ldots,$$

$$a_{12} = C_n^{12} + \ldots.$$

Rădăcinile ecuației caracteristice (41), determinate la un calculator electric, servesc la stabilirea pulsațiilor proprii ale vibrațiilor de torsiune, utilizînd în acest scop formula

$$\Omega = \sqrt{\frac{1 - \cos\gamma}{JC}}, \tag{42}$$

obținută din prima relație (26).

4. AMPLITUDINILE VIBRAȚIILOR DE TORSIUNE

Dacă se secționează arborele echivalent între volanții j și $j+1$ (fig. 6) și apoi se scrie ecuația matriceală corespunzătoare părții din stînga secțiunii,

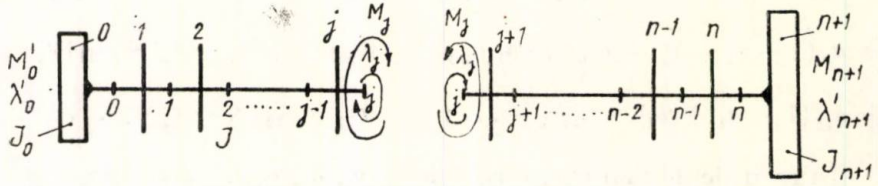


Fig. 6

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ \lambda_0' \end{matrix} \right\| = A_0 A_s^j \left\| \begin{matrix} M_j \\ \lambda_j \end{matrix} \right\| \quad (j = 0,1 \ldots, n), \tag{43}$$

matricele A_0 și A_s^j fiind pătrate, cu cîte două linii și două coloane, produsul lor se va scrie sub forma

$$A_0 A_s^j = \begin{Vmatrix} b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} \\ b_{21}^{(j)} & b_{22}^{(j)} \end{Vmatrix}, \tag{44}$$

iar ecuația (38) devine

$$\begin{Vmatrix} 0 \\ \lambda_0' \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} \\ b_{21}^{(j)} & b_{22}^{(j)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} M_j \\ \lambda_j \end{Vmatrix},$$

din care rezultă relațiile

$$b_{11}^{(j)} M_j + b_{12}^{(j)} \lambda_j = 0, \tag{45}$$

$$b_{21}^{(j)} M_j + b_{22}^{(j)} \lambda_j = \lambda_0'. \tag{46}$$

Din (45) se obține raportul

$$\frac{M_j}{\lambda_j} = -\frac{b_{12}^{(j)}}{b_{11}^{(j)}}, \tag{47}$$

care, înlocuit în (46), conduce la expresia raportului amplitudinilor :

$$\frac{\lambda_j}{\lambda_0'} = \frac{b_{11}^{(j)}}{b_{11}^{(j)} b_{22}^{(j)} - b_{12}^{(j)} b_{21}^{(j)}} \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{48}$$

Din (47) și (48) se stabilește expresia momentului elastic specific în diferitele secțiuni ale arborelui :

$$\frac{M_j}{\lambda_0'} = \frac{b_{12}^{(j)}}{b_{12}^{(j)} b_{21}^{(j)} - b_{11}^{(j)} b_{22}^{(j)}} \qquad (j = 0,1,2, \ldots, n). \tag{49}$$

În virtutea formulei (4) se obțin amplitudinile vibrațiilor de răsucire din secțiunile care trec prin volanții arborelui. Astfel, notînd prin C_j valoarea inversă a rigidității arborelui corespunzătoare lungimilor l_0 și l_r (fig. 5), pentru secțiunile care trec prin volanții $0,1,2, \ldots, n$ amplitudinile vibrațiilor de răsucire sînt

$$\lambda_j' = \lambda_j + M_j C_j \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n). \tag{50}$$

Împărțind această relație prin λ_0' și ținînd seama de (48) și (43), se obține raportul amplitudinilor corespunzătoare secțiunilor care trec prin volanții arborelui :

$$\frac{\lambda_j'}{\lambda_0'} = \frac{b_{11}^{(j)} - b_{12}^{(j)} C_j}{b_{11}^{(j)} b_{22}^{(j)} - b_{12}^{(j)} b_{21}^{(j)}} \qquad (j = 0, 1,2, \ldots, n). \tag{51}$$

Pentru a obține expresiile dezvoltate ale termenelor $b_{11}^{(j)}$, $b_{21}^{(j)}$, $b_{12}^{(j)}$, $b_{22}^{(j)}$, matricea A_s^j se va scrie, în virtutea formulei (25), sub forma

$$A_s^j = \begin{Vmatrix} \cos_j \gamma, & -Z \sin j\gamma \\ \dfrac{1}{Z} \sin j\gamma, & \cos j\gamma \end{Vmatrix}. \tag{52}$$

Din (44), (16) și (52) rezultă apoi

$$\begin{Vmatrix} b_{11}^{(j)} & b_{12}^{(j)} \\ b_{21}^{(j)} & b_{22}^{(j)} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 1 - \Omega^2 J_0 C_0, & -\Omega^2 J_0 \\ C_0 \quad , & 1 \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} \cos j\gamma, & -Z \sin j\gamma \\ \frac{1}{Z} \sin j\gamma, & \cos j\gamma \end{Vmatrix},$$

de unde, avînd în vedere relațiile (28) și (30), stabilim următoarele expresii :

$$b_{11}^{(j)} = \left(1 - \frac{J_0 C_0}{JC} x\right) \cos j\gamma - \frac{J_0}{J} x \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma,$$

$$b_{21}^{(j)} = C_0 \cos j\gamma + C \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma,$$

$$b_{12}^{(j)} = -\frac{1}{C}\left(1 - \frac{J_0 C_0}{JC} x\right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma - \frac{J_0}{JC} x \cos j\gamma, \tag{53}$$

$$b_{22}^{(j)} = -\frac{C_0}{C} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma + \cos j\gamma \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, n).$$

Pentru $j = 0$, expresiile (53) devin

$$b_{11}^{(0)} = 1 - \frac{J_0 C_0}{JC} x, \; b_{21}^{(0)} = C_0, \; b_{12}^{(0)} = -\frac{J_0}{JC} x, \; b_{22}^{(0)} = 1,$$

iar relația (51) se reduce la identitatea $1 \equiv 1$, ceea ce confirmă rigurozitatea matematică a formulelor deduse în prezenta lucrare.

Avînd în vedere că $x = 2 \sin^2 (\gamma/2)$ se cunoaște de la studiul pulsațiilor, din (26) și (30) se obține

$$\gamma = \arccos (1 - x). \tag{54}$$

Prin urmare, pot fi determinate funcțiile tg $(\gamma/2)$, ctg $(\gamma/2)$, sin $j\gamma$, cos$j\gamma$, care intervin în expresiile (53).

Relația (51) nu cuprinde și raportul dintre amplitudinea vibrațiilor de torsiune corespunzătoare volantului $n+1$ și cea corespunzătoare volantului 0, însă acest raport se obține din ecuația matriceală (24) :

$$\frac{\lambda'_{n+1}}{\lambda'_0} = \frac{1}{a_{22}}. \tag{55}$$

Pentru a obține expresia dezvoltată a termenului a_{22}, produsul matriceal (23) se va scrie, în virtutea formulelor (44) și (19), sub forma

$$\begin{Vmatrix} b_{11}^{(n)} & b_{12}^{(n)} \\ b_{21}^{(n)} & b_{22}^{(n)} \end{Vmatrix} \cdot \begin{Vmatrix} 1, & -\Omega^2 J_{n+1} \\ C_{n,n+1}, & 1 - \Omega^2 J_{n+1} C_{n,n+1} \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{Vmatrix}, \tag{56}$$

de unde, avînd în vedere relația (30), rezultă

$$a_{22} = -b_{21}^{(n)} \frac{J_{n+1}}{JC} x + b_{22}^{(n)} \left(1 - \frac{J_{n+1} C_{n,n+1}}{JC}\right). \tag{57}$$

Pentru diferitele valori ale variabilei $x = 2 \sin^2 (\gamma/2)$ se obțin valorile corespunzătoare ale termenilor (53), care servesc apoi la stabilirea rapoartelor amplitudinilor (51) și (55). Cu alte cuvinte, fiecărei valori a variabilei x îi va corespunde o valoare a pulsației și un anumit spectru al amplitudinilor, corespunzător unui mod propriu de vibrație al arborelui cotit.

Conform lucrării [1], cititorul este tentat să aleagă pentru matricea A_0 expresia

$$A_0 = \begin{Vmatrix} 1, & -\Omega^2 J_0 \\ C_0, & -\Omega^2 J_0 C_0 \end{Vmatrix} \tag{58}$$

de forma (19) și nu de forma (16), fapt care conduce, în virtutea formulelor (44), (58), (52), (28) și (30), la expresiile

$$\begin{aligned} b_{11}^{(j)} &= \cos j\gamma - \frac{J_0}{JC} x \sin j\gamma, \\ b_{21}^{(j)} &= C_0 \cos j\gamma + C\left(1 - \frac{J_0 C_0}{JC} x\right) \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma, \\ b_{12}^{(j)} &= -\frac{1}{C} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma - \frac{J_0}{JC} x \cos j\gamma, \\ b_{22}^{(j)} &= -\frac{C_0}{C} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin j\gamma + \left(1 - \frac{J_0 C_0}{JC} x\right) \cos j\gamma, \end{aligned} \tag{59}$$

care diferă sensibil de relațiile corecte (53). Ca urmare se vor obține valori eronate pentru rapoartele amplitudinilor (51) și (55). De altfel se constată ușor că expresiile (59) nu satisfac pentru $j = 0$ raportul (51). Într-adevăr, pentru $j = 0$, din (59) se obține

$$b_{11}^{(0)} = 1, \; b_{21}^{(0)} = C_0, \; b_{12}^{(0)} = -\frac{J_0}{JC} x, \; b_{22}^{(0)} = 1 + \frac{J_0 C_0}{JC} x.$$

Introducînd aceste valori în (51), obținem $1 = 2$, ceea ce este imposibil.

5. APLICAȚIE NUMERICĂ

Pentru exemplificare se consideră arborele cotit al motorului MG—— 120, folosit la locomotivele diesel ce se construiesc la noi în țară pe baza licenței „Ganz", căruia îi corespund mărimile din tabela 1.

Tabela 1

C_0 [Kgfcm]$^{-1}$	$0{,}732 \cdot 10^{-8}$	C [Kgfcm]$^{-1}$	$0{,}431 \cdot 10^{-8}$	$C_{n,n+1}$ [Kgfcn]$^{-1}$	$0{,}82 \cdot 10^{-8}$
J_0 [Kgfs^{2}cm]	5,44	J [Kgfs^{2}cm]	2,843	J_{n+1} [Kgfs^{2}cm]	60

În vederea determinării pulsațiilor proprii de torsiune se notează membrul din stînga ecuației (36) cu y_1, iar cel din dreapta cu y_2:

$$y_1 = \operatorname{ctg} n\gamma \cdot \sin\gamma, \quad y_2 = u/v,$$

apoi se determină grafic punctele de intersecție ale curbelor $y_1 = y_1(x)$ și $y_2 = y_2(x)$.

Pentru domeniile unde se pot intersecta curbele y_1 și y_2, s-a calculat la diferite valori ale lui γ valorile corespunzătoare ale lui y_1 (tabela 2) și y_2 (tabela 3).

Tabela 2

Nr.	γ	$\sin\gamma$	$\operatorname{ctg} n\gamma$	y_1
1	10°	0,17365	0,57735	0,1005
2	11°	0,19081	0,44523	0,0850
3	12°	0,20791	0,32492	0,0675
4	30°20′	0,50503	28,63625	14,45
5	31°	0,51504	9,51436	4,89
6	31°40′	0,52498	5,67128	2,97
7	50°	0,76604	−0,57735	−0,442
8	51°	0,77715	−0,72654	−0,564
9	52°	0,78801	−0,90040	−0,709
10	74°	0,96126	0,10510	0,101
11	75°	0,96593	0,00000	0,000
12	76°	0,97030	−0,10510	−0,101
13	99°	0,98769	0,72654	0,717
14	100°	0,98481	0,57735	0,568
15	101°	0,98163	0,44523	0,436
16	125°	0,81915	1,73205	1,418
17	126°	0,80902	1,37638	1,111
18	127°	0,79864	1,11061	0,887
19	152°	0,46947	4,70463	2,210
20	153°	0,45399	3,07768	1,395
21	154°	0,43837	2,24604	0,985

În prealabil s-au determinat coeficienții (38):

$$u_1 = -123{,}94\,; \quad u_2 = 170\,; \quad v_1 = -22{,}96\,; \quad v_2 = -123{,}94.$$

Tabela 3

Nr.	$\gamma/2$	sin $(\gamma/2)$	x	$v_2\, x$	v	$u_1\, x$	$1 + u_2\, x^2$	u	y_2
1	5°	0,08716	0,01515	2,2	— 20,76	1,88	1,0298	— 0,85	0,0409
2	5°30′	0,09585	0,01835	2,66	— 20,30	2,27	1,0572	— 1,21	0,0598
3	6°	0,10453	0,02185	3,17	— 19,79	2,71	1,0812	— 1,63	0,0825
4	15°10′	0,26163	0,137	19,85	— 3,11	17,00	4,19	— 12,81	4,12
5	15°30′	0,26724	0,143	20,75	— 2,21	17,70	4,47	— 13,23	6,00
6	15°50′	0,27284	0,149	21,60	— 1,36	18,45	4,77	— 13,68	10,05
7	25°	0,42262	0,357	51,80	28,84	44,20	22,65	— 21,55	— 0,745
8	25°30′	0,43051	0,370	53,70	30,74	45,90	24,25	— 21,65	— 0,706
9	26°	0,43837	0,385	55,90	32,94	47,80	26,20	— 21,60	— 0,656
10	37°	0,60182	0,723	104,8	81,84	89,6	89,9	0,3	0,0037
11	37°30′	0,60876	0,742	107,5	84,54	92	94,4	2,4	0,0284
12	38°	0,65166	0,757	109,8	86,84	93,9	98,2	4,3	0,0496
13	49°30′	0,76041	1,152	167	144,04	143	227	84	0,583
14	50°	0,76604	1,171	170	147,04	145,1	234	88,9	0,605
15	50°30′	0,77162	1,188	172,5	149,54	147,1	241	93,9	0,628
16	62°30′	0,88701	1,570	228	205,04	195	420	225	1,097
17	63°	0,89101	1,585	230	207,04	196,5	428	231,5	1,117
18	63°30′	0,89493	1.599	232	209,04	198,5	436	237,5	1,135
19	76°	0,97030	1,882	273	250,04	233,5	604	370,5	1,480
20	76°30′	0,97237	1,887	274	251,04	234	607	373	1,485
21	77°	0,97437	1,895	275	252,04	235	611	376	1,492

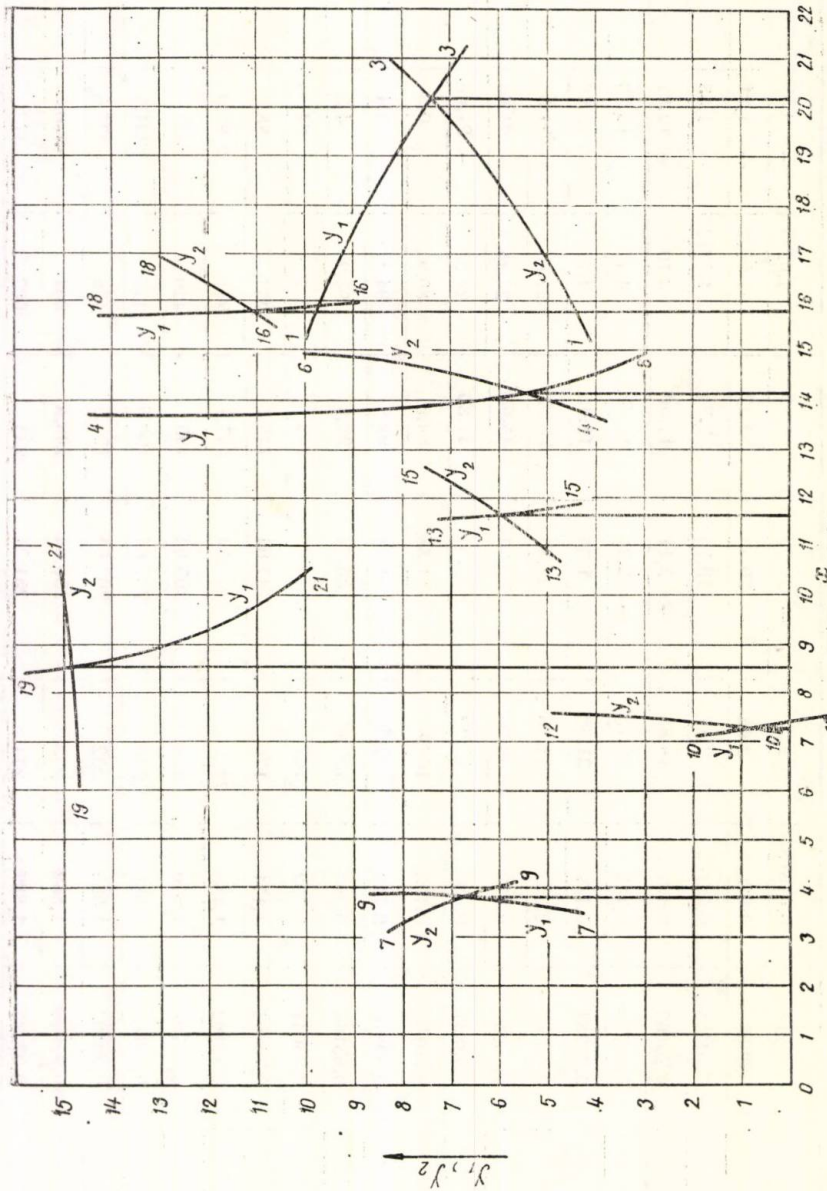


Fig. 7

Cele șapte valori ale lui x corespunzătoare modurilor proprii de vibrație ale arborelui cotit s-au determinat grafic (fig. 7), avînd în vedere valorile din tabele 2 și 3. Apoi s-au stabilit cu formula (30) cele șapte pulsații proprii ale arborelui cotit, indicate în tabela 4.

Tabela 4

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
x	0,0202	0,1415	0,38	0,73	1,165	1,58	1,885
Ω [s^{-1}]	1 275	3 385	5 550	7 690	9 510	11 310	12 350

Raportul amplitudinilor $\lambda'_{n+1}/\lambda'_0$ s-a determinat cu ajutorul formulelor (55), (57) și (53), valorile obținute fiind trecute în tabela 5. Pentru stabilirea diferitelor valori ale lui γ corespunzătoare celor șapte valori ale lui x, s-a utilizat formula (54).

Tabela 5

Nr.	1	2	3	4	5	6	7
y	0,0202	0,1415	0,38	0,73	1,165	1,58	1,885
$\lambda'^{n+1}/\lambda'^{0}_{7}$	−0,2493	0,0943	−0,0762	0,0822	−0,0843	0,323	0,0607

Celelalte rapoarte ale amplitudinilor se pot determina, în funcție de cele șapte valori ale lui x, cu formula (51).

Ca încheiere ținem să precizăm că metoda matriceală prezentată în această lucrare poate fi extinsă la studiul vibrațiilor de torsiune ale oricărui arbore drept prevăzut cu mai mulți volanți.

Primită la redacție la 10 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. J. Kožešnik, *Dynamika Strojů*, Praha, Statni Nekladatel, Technike literatury, 1958.
2. L. Hamburger, Gh. Buzdugan, *Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția de mașini*, București, Edit. tehnică, 1958.
3. I. P. Den Hartog, *Mechanical vibration*, New York — Toronto — Londra, 1968.
4. A. Ripianu, *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*, București, Edit. Academiei, 1969.
5. S. P. Timoshenko, *Téorie des vibrations*, Paris — Liège, 1947.

STUDIUL VIBRAȚIILOR BARAJELOR ÎN ARC CU APLICAȚIE LA CALCULUL SOLICITĂRILOR SEISMICE, FOLOSINDU-SE DETERMINĂRI EXPERIMENTALE PE MODEL

de N. ȚOPA
Institutul de construcții, București

În lucrare se studiază aspectul dinamic al comportării barajelor în arc pe două căi ; folosindu-se matricea reacțiunilor pe sistemul blocat sau folosindu-se matricea deplasărilor pe sistemul liber. Expresiile de calcul sînt deduse atît direct, cît și pe cale matriceală și sînt organizate astfel încît să permită folosirea unor date experimentale.
Studiul solicitării seismice pune în evidență existența a două tipuri de forțe seismice, avînd expresii și particularități distincte.

Calculul solicitărilor seismice la construcțiile civile și industriale are la bază, în cele mai multe dintre țările care se preocupă de aceste lucruri, considerarea comportării dinamice a structurilor, pe baza acestei comportări determinîndu-se forțele seismice. În cazul acestor construcții, cele mai frecvente structuri sînt cele etajate și, din această cauză, în majoritatea normativelor expresiile de calcul sînt alcătuite pentru aceste tipuri de structuri.

În cazul altor tipuri de construcții nu se mai pot folosi aceste expresii de calcul, deoarece comportarea dinamică a lor poate diferi esențial de cele etajate și, în consecință, forțele de inerție care iau naștere pot diferi foarte mult atît ca mărime, cît și ca direcție. Este deci necesară o analiză de la caz la caz.

În cele ce urmează se face analiza comportării dinamice a barajelor în arc și se propune un algoritm de calcul al solicitărilor seismice. Vom examina deocamdată numai cazul vibrațiilor barajului în cazul lacului gol.

Pentru ceea ce urmează vom schematiza structura la o suprafață poliedrică, în secțiunile orizontală și verticală prezentîndu-se în formă poligonală (fig. 1). La nodurile acestui poliedru vom presupune că sînt concentrate masele structurii, una dintre ele reprezentînd deci masa aferentă unui element de suprafață $ds_1\, ds_2$ (fig. 1). Analiza va fi făcută pentru cazul cînd ambele curburi, atît în planul orizontal, cît și în cel vertical, se iau în considerare. Ulterior vom face, după caz, particularizările necesare.

Din cele spuse mai sus rezultă că se neglijează inerția de rotație a maselor. De asemenea vom considera că deformațiile structurii nu sînt influențate de scurtarea sau de lungirea suprafeței mediane, aceasta considerîndu-se deci inextensibilă. Ipoteza este de altfel frecvent folosită atît în cazul studiului sistemelor de bare, cît și a plăcilor plane și curbe.

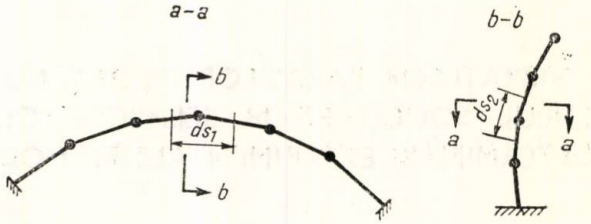


Fig. 1

Vom analiza pe rînd două variante de studiu, care, pentru concizia exprimării, vor fi denumite pe scurt rezolvarea cu ajutorul matricei reacțiunilor și rezolvarea cu ajutorul matricei deplasărilor.

Notațiile folosite la lucrare sînt:

$a, b, \cdots, k, \cdots, l$ — nodurile poliedrului în care sînt plasate masele concentrate ale sistemului;

$m_a, m_b, \cdots, m_k, \cdots$ — masele corespunzătoare;

$Z_1, Z_2, \cdots, Z_j, Z_g, \cdots, Z_n$ — deplasările radiale liniar independente ale maselor (este de observat că acestea nu coincid cu numărul maselor, fiind cu una mai puțin în fiecare rînd orizontal, conform figurii 2, unde s-a arătat numărul minim de penduli care pot bloca sistemul de mase);

I, II, $\cdots, i, \cdots, h, \cdots, n$ — indicii pulsațiilor proprii și a formelor proprii de oscilație;

$\omega_I, \omega_{II}, \cdots, \omega_i, \cdots$ — pulsațiile proprii ale sistemului;

$\delta_a, \delta_b, \cdots, \delta_k, \cdots$ — deplasările elastice totale necunoscute ale maselor pe sistemul fără penduli;

$\delta_{ai}, \delta_{bi}, \cdots, \delta_{ki}, \cdots$ — deplasările elastice totale ale maselor în forma proprie i;

$Z_{1i}, Z_{2i}, \cdots, Z_{ni}$ — valorile Z în forma proprie i;

$\bar{\delta}_{aj}, \bar{\delta}_{bj}, \cdots, \bar{\delta}_{kj}, \cdots$ — deplasările cinematice totale ale maselor corespunzătoare lui $Z_j = 1$, ceilalți parametri Z nuli;

u_k, v_k, w_k — componentele deplasării $\bar{\delta}_k$ după tangentă, normală și verticală cu sensurile din figura 2;

u_{kj}, v_{kj}, w_{kj} — componentele deplasării $\bar{\delta}_{kj}$;

u_{ki}, v_{ki}, w_{ki} — componentele deplasării $\bar{\delta}_{ki}$;

R_j — reacțiunea din pendulul j pentru sistemul blocat cu penduli;

R_{je}, R_{jf} — reacțiunea din pendulul j pe sistemul blocat prevenită din deformarea elastică, respectiv din acțiunea forțelor de inerție;

r_{jg} — reacțiunea din pendulul j pentru $Z_g = 1$, restul deplasărilor Z fiind nule;

$\rho_{j,k}$ $\rho_{jk,v}$ $\rho_{jk,w}$ — reacțiunile din pendulul j pe sistemul blocat cu penduli corespunzătoare unor forțe unitare puse în dreptul masei k după direcțiile u_k, v_k, w_k;

$\bar{F}_k$ — forța totală de inerție corespunzătoare masei k;

$\bar{F}_{ki}$ — forța de inerție a masei k în forma proprie de oscilație i;

F_{ku}, F_{kv}, F_{kw} — componentele forței de inerție $\bar{F}_k$ după direcțiile u, v, w;

$\bar{\Delta}_k$ — deplasarea totală (elastică + rigidă) a masei k;

s_0 — vectorul-deplasare al terenului din acțiunea seismică;

ε — coeficientul de amortizare;

v^*_{jk}, $_uv^*_{jk,v}$ $v^*_{jk,w}$ — deplasările pe direcția j pe sistemul fără penduli cauzate de o forță unitară acționînd pe direcția u_k, v_k, respectiv w_k;

u^*_{kj}, v^*_{kj}, w^*_{kj} — deplasările masei k după direcțiile u,v,w cauzate de o forță unitară acționînd pe direcția j pe sistemul fără penduli;

δ_{jg} — deplasarea pe direcția j cauzată de o forță unitară acționînd pe direcția g pe sistemul fără penduli.

1. DETERMINAREA VIBRAȚIILOR PROPRII CU AJUTORUL MATRICEI REACȚIUNILOR PE SISTEMUL BLOCAT

Considerînd structura redusă la suprafața sa mediană schematizată sub forma poliedrică și avînd masele concentrate în vîrfurile acestui poliedru, să luăm o formă de bază în care orice mișcare a maselor să fie împiedicată (acceptînd, așa cum am spus, inextensibilitatea suprafeței mediane). Aceasta se poate realiza cu ajutorul unor penduli orizontali așezați în plane radiale în dreptul vîrfurilor poliedrului. Este de observat că în fiecare rînd este necesar un număr de penduli cu unul mai puțin decît numărul maselor (fig. 2).

Deplasările radiale liniar independente împiedicate de acești penduli le notăm cu $Z_1, Z_2, \cdots, Z_j, \cdots, Z_g, \cdots, Z_n$. Sistemul are n grade de libertate dinamică.

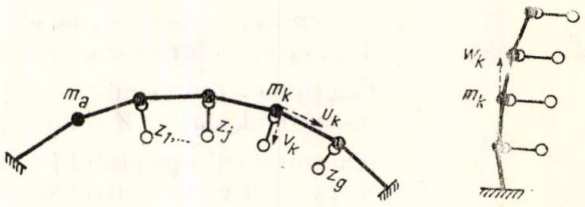


Fig. 2

Pendulii fiind fictivi, este evident că, de fapt, reacțiunile din acești penduli sînt nule. Admițînd forma de bază din figura 2, vom putea să calculăm însă componentele acestei reacțiuni fictive care nu sînt nule.

Vom putea deci scrie

$$R_{je} + R_{jF} = 0, \tag{1}$$

unde R_{je} este reacțiunea din pendul provenită din deformarea elastică, iar R_{jF} reacțiunea din pendul provenită din acțiunea tuturor forțelor de inerție.

Primul termen este

$$R_{je} = \sum_{g=1}^{n} r_{jg} Z_g. \tag{2}$$

În ceea ce privește termenul al doilea din (1), întrucît nu cunoaștem aprioric direcția de acționare a forțelor de inerție, să descompunem fiecare forță de inerție după direcțiile u, v, w din fiecare nod (fig. 2) :

$$\overline{F}_k = \overline{F}_{ku} + \overline{F}_{kv} + \overline{F}_{kw}. \tag{3}$$

Deplasarea nodului k (și deci a masei m_k) este

$$\overline{\delta}_k = \overline{u}_k + \overline{v}_k + \overline{w}_k = \sum_g \overline{\delta}_{kg} Z_g. \tag{4}$$

Se știe însă că

$$\overline{F}_k = - m_k \frac{d^2 \overline{\delta}_k}{dt^2} = m_k \omega^2 \overline{\delta}_k. \tag{5}$$

Așadar, componentele forței de inerție sînt

$$F_{ku} = m_k \omega^2 u_k,$$

$$F_{kv} = m_k \omega^2 v_k, \tag{6}$$

$$F_{kw} = m_k \omega^2 w_k.$$

Putem scrie însă

$$u_k = \sum_g u_{kg} Z_g,$$

$$v_k = \sum_g v_{kg} Z_g, \tag{7}$$

$$w_k = \sum_g w_{kg} Z_g.$$

Reacțiunea R_{jF} din (1) este

$$R_{jF} = \sum_{k=a}^{l} (\rho_{jk,u} F_{ku} + \rho_{jk,v} F_{kv} + \rho_{jk,w} F_{kw}).$$

Observație. Este de remarcat următorul fapt. Sistemul elastic este acționat la noduri cu forțele $\bar{F}_k$. Întrucît tot la noduri avem și pendulii și am neglijat deformabilitatea suprafeței mediane, sistemul se comportă ca avînd noduri fixe, neavînd deformații din încovoiere și momente încovoietoare. În consecință, el se comportă ca fiind articulat în noduri. Deci reacțiunile $\rho_{jk,u}$ $\rho_{jk,v}$, $\rho_{jk,w}$ pot fi calculate ca pe un sistem articulat. Este preferabil pentru aceasta să ne imaginăm că structura se compune dintr-o rețea de arce (orizontale și verticale).

Folosind (6) și (7), după sistematizare obținem

$$R_{jF} = -\omega^2 \sum_{g=1}^{n} M_{jg} Z_g, \tag{8}$$

unde

$$M_{jg} = -\sum_{k=a}^{l} m_k (\rho_{jk,u} u_{kg} + \rho_{jk,v} v_{kg} + \rho_{jk,w} w_{kg}).$$

Se știe însă [1] că, pe baza observației de mai sus, avem

$$\rho_{jk,u} = -u_{kj},$$
$$\rho_{jk,v} = -v_{kj}, \tag{9}$$
$$\rho_{jk,w} = -w_{kj},$$

ceea ce ne dă

$$M_{jg} = \sum_{k=a}^{l} m_k (u_{kj} u_{kg} + v_{kj} v_{kg} + w_{kj} w_{kg}). \tag{10}$$

Relațiile (1), (2), (8) ne dau imediat

$$\sum_{g=1}^{n} (r_{jg} - \omega^2 M_{jg}) Z_g = 0 \qquad (j = 1,2,\cdots, n). \tag{11}$$

Relațiile (11) constituie un sistem de ecuații liniar și omogen, care, pentru evitarea soluției banale, trebuie să îndeplinească condiția ca determinantul să fie nul:

$$\det (r_{jg} - \omega^2 M_{jg}) = 0 \quad (j = 1, 2, \cdots, n; \quad g = 1, 2, \cdots, n). \tag{12}$$

Relația (12) este ecuația pulsațiilor proprii care ne dă rădăcinile ω_i $(i = \text{I}, \text{II}, \cdots i, h, \cdots, n)$. Valorile ω_i, introduse în (11), ne conduc la determinarea formelor proprii de vibrație, definite prin coeficienții Z_{ji} $(j = 1,2,\cdots,n;\ i = \text{I,II},\cdots,n)$, care apoi, cu ajutorul relațiilor (7), ne dau componentele deplasărilor nodurilor în formele proprii (u_{ki}, v_{ki}, w_{ki}), evident cu excepția unui factor nedeterminat.

Între două forme proprii de oscilație i și h este valabilă relația de ortogonalitate

$$\sum_{k=a}^{l} (\overline{F}_{ki}) \cdot (\overline{\delta}_{kh}) = 0.$$

Folosind relațiile (5), (4), se poate scrie

$$\sum_{k=a}^{l} \left(m_k \omega_i^2 \sum_{j=1}^{n} \overline{\delta}_{kj} Z_{ji} \right) \cdot \left(\sum_{g=1}^{n} \overline{\delta}_{kg} Z_{gh} \right) = \omega_i^2 \sum_{j}^{n} \sum_{g}^{n} \left[\sum_{k} m_k \overline{\delta}_{kj} \overline{\delta}_{kg} \right] Z_{ji} Z_{gh} = 0.$$

Deoarece

$$\overline{\delta}_{kj} \cdot \overline{\delta}_{kg} = u_{kj} u_{kg} + v_{kj} v_{kg} + w_{kj} \cdot w_{kg}$$

și folosind (10), expresia finală care exprimă ortogonalitatea dintre două forme proprii de vibrație este

$$\sum_j \sum_g M_{jg} Z_{ji} Z_{gh} = 0 \qquad (i \neq h). \tag{13}$$

Cele stabilite pînă acum se pot pune mai succint sub formă matriceală după cum urmează :

$$F_u = \left\| \begin{matrix} F_{au} \\ F_{bu} \\ \vdots \\ F_{ku} \\ \vdots \\ F_{lu} \end{matrix} \right\|, \quad F_v = \left\| \begin{matrix} F_{av} \\ F_{bv} \\ \vdots \\ F_{kv} \\ \vdots \\ F_{lv} \end{matrix} \right\|, \quad F_w = \left\| \begin{matrix} F_{aw} \\ F_{bw} \\ \vdots \\ F_{kw} \\ \vdots \\ F_{lw} \end{matrix} \right\|. \tag{14}$$

De asemenea

$$U = \left\| \begin{matrix} u_a \\ u_b \\ \vdots \\ u_k \\ \vdots \\ u_l \end{matrix} \right\|, \quad V = \left\| \begin{matrix} v_a \\ v_b \\ \vdots \\ v_k \\ \vdots \\ v_l \end{matrix} \right\|, \quad W = \left\| \begin{matrix} w_a \\ w_b \\ \vdots \\ w_k \\ \vdots \\ w_l \end{matrix} \right\|. \tag{15}$$

Să introducem matricea maselor :

$$m = \left\| \begin{matrix} m_a & 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ 0 & m_b & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & m_k & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & \dots & m_l \end{matrix} \right\|. \tag{16}$$

De asemenea matricele deplasărilor u, v, w sînt

$$u = \left\| \begin{matrix} u_{a1} \dots & u_{a2} \dots & u_{ag} \dots & u_{an} \\ u_{b1} \dots & u_{b2} \dots & u_{bg} \dots & u_{bn} \\ \vdots & & & \\ u_{k1} \dots & u_{k2} \dots & u_{kg} \dots & u_{kn} \\ \vdots & & & \\ u_{l1} \dots & u_{l2} \dots & u_{lg} \dots & u_{ln} \end{matrix} \right\|, \quad v = \left\| \begin{matrix} v_{a1} \dots & v_{ag} \dots & v_{an} \\ \vdots & & \\ v_{k1} \dots & v_{kg} \dots & v_{kn} \\ \vdots & & \\ v_{l1} \dots & v_{lg} \dots & v_{ln} \end{matrix} \right\|, \tag{17}$$

$$w = \begin{Vmatrix} w_{a1} & \dots & w_{ag} & \dots & w_{an} \\ \vdots & & & & \\ w_{k1} & \dots & w_{kg} & \dots & w_{kn} \\ \vdots & & & & \\ w_{l1} & \dots & w_{lg} & \dots & w_{ln} \end{Vmatrix}.$$

Vectorul deplasărilor necunoscute este

$$Z = \begin{Vmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_j \\ \vdots \\ Z_g \\ \vdots \\ Z_n \end{Vmatrix}. \tag{18}$$

Cu acestea, relațiile (7) se pot scrie

$$U = u\,Z \quad V = v\,Z \quad W = w\,Z. \tag{19}$$

Relațiile (6) devin

$$\begin{aligned} F_u &= \omega^2 m U = \omega^2 m u Z, \\ F_v &= \omega^2 m V = \omega^2 m v Z, \\ F_w &= \omega^2 m W = \omega^2 m w Z. \end{aligned} \tag{20}$$

Să introducem acum restul de notații matriceale:
— matricea reacțiunilor (pe sistemul cu penduli):

$$r = \begin{Vmatrix} r_{11} & r_{12} & \dots & r_{1g} & \dots & r_{1n} \\ r_{21} & r_{22} & \dots & r_{2g} & \dots & r_{2n} \\ \vdots & & & & & \\ r_{j1} & r_{j2} & \dots & r_{jg} & \dots & r_{jn} \\ \vdots & & & & & \\ r_{n1} & r_{n2} & \dots & r_{ng} & \dots & r_{nn} \end{Vmatrix}; \tag{21}$$

— matricea deplasărilor (pe sistemul fără penduli):

$$\delta = \begin{Vmatrix} \delta_{11} & \delta_{12} & \dots & \delta_{1g} & \dots & \delta_{1n} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{j1} & \delta_{j2} & \dots & \delta_{jg} & \dots & \delta_{jn} \\ \vdots & & & \vdots & & \vdots \\ \delta_{n1} & \delta_{n2} & \dots & \delta_{ng} & \dots & \delta_{nn} \end{Vmatrix}. \tag{22}$$

După cum se știe

$$r\delta = E, \tag{23}$$

unde E este matricea-unitate:

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \tag{24}$$

și, în consecință, r poate fi dedus din δ prin inversare;

— matricele reacțiunilor:

$$\rho_u = \begin{Vmatrix} \rho_{1a,u} \dots \rho_{1l,u} \\ \vdots \\ \rho_{na,u} \dots \rho_{nl,u} \end{Vmatrix} \quad \rho_v = \begin{Vmatrix} \rho_{1a,v} \dots \rho_{1l,v} \\ \vdots \\ \rho_{na,v} \dots \rho_{nl,v} \end{Vmatrix} \quad \rho_w = \begin{Vmatrix} \rho_{1a,w} \dots \rho_{1l,w} \\ \vdots \\ \rho_{na,w} \dots \rho_{nl,w} \end{Vmatrix}; \tag{25}$$

— vectorii reacțiunilor elastice și din forțele de inerție:

$$R_e = \begin{Vmatrix} R_{1e} \\ R_{2e} \\ \vdots \\ R_{je} \\ \vdots \\ R_{ne} \end{Vmatrix}, \qquad R_F = \begin{Vmatrix} R_{1F} \\ R_{2F} \\ \vdots \\ R_{jF} \\ \vdots \\ R_{nF} \end{Vmatrix}. \tag{26}$$

Relația (1) devine

$$R_e + R_F = 0; \tag{27}$$

iar expresiile (2) capătă forma matriceală

$$R_e = rZ. \tag{28}$$

Expresia lui R_F se deduce astfel:

$$R_F = \rho_u F_u + \rho_v F_v + \rho_w F_w.$$

Folosind (20), expresia R_F devine

$$R_F = \rho_u \omega^2 muZ + \rho_v \omega^2 mvZ + \rho_w \omega^2 mwZ$$

și, folosind (9), putem scrie

$$\rho_u = -\tilde{u}, \quad \rho_v = -\tilde{v}, \quad \rho_w = -\tilde{w}, \tag{29}$$

unde semnul $\sim$ indică transpoziția.

Să introducem matricea

$$M = \begin{Vmatrix} M_{11} & M_{12} \ldots . M_{1n} \\ \vdots & \\ M_{j1} & M_{j2} \ldots . M_{jn} \\ \vdots & \\ M_{n1} & M_{n2} \ldots . M_{nn} \end{Vmatrix} = \tilde{u}mu + \tilde{v}mv + \tilde{w}mw, \tag{30}$$

unde M_{jg} este definit în (10). Cu acestea putem scrie

$$R_F = -\omega^2(\tilde{u}mu + \tilde{v}mv + \tilde{w}mw)\, Z = -\omega^2 MZ. \tag{31}$$

Relația (27), folosind (28) și (31), devine

$$(r - \omega^2 M)\, Z = 0, \tag{32}$$

ceea ce reprezintă sistemul de ecuații (11), care ne conduce la ecuația (12).

Din cele arătate pînă acum se constată deci că procedeul acesta de calcul reclamă cunoașterea natricei reacțiunilor r (21), care se poate deduce din δ (22). La rîndul ei, matricea δ poate fi calculată folosind mijloacele mecanicii construcțiilor, ceea ce constitue însă o operație laborioasă.

Ocolirea acestor impedimente se poate face folosindu-se mărimile δ_{jg} măsurate pe model și transpuse prin similitudine la construcția din natură, operație care reclamă măsurători foarte îngrijite.

În ceea ce privește al doilea termen din paranteza relației (32), acesta reprezintă caracteristici cinematice-inerțiale ale structurii și vom reveni mai tîrziu asupra lor.

2. DETERMINAREA VIBRAȚIILOR PROPRII CU AJUTORUL MATRICEI DEPLASĂRILOR PE SISTEMUL FĂRĂ PENDULI

Între deplasările Z și forțele de inerție, la un moment oarecare al mișcării, există relația

$$Z_j = \sum_{k=a}^{l} v^*_{jk,u} F_{ku} + \sum_{k=a}^{l} v^*_{jk,v} F_{kv} + \sum_{k=a}^{l} v^*_{jk,w} F_{kw}. \tag{33}$$

Folosind (6) și (7), putem scrie

$$Z_j = \omega^2 \sum_g \Big[\sum_k m_k (v^*_{jk,u}\, u_{kg} + v^*_{jk,v}\, v_{kg} + v^*_{jk,w} w_{kg}) \Big] Z_g. \tag{34}$$

Se știe însă că

$$v^*_{jk,u} = u^*_{kj}, \quad v^*_{jk,v} = v^*_{kj}; \quad v^*_{jk,w} = w^*_{kj}. \tag{35}$$

Să notăm

$$M^*_{jg} = \sum_{k=a}^{l} m_k (u^*_{kj}\, u_{kg} + v^*_{kj}\, v_{kg} + w^*_{kj}\, w_{kg}), \tag{36}$$

așadar (34) devine

$$Z_j = \omega^2 \sum_g M^*_{jg} Z_g \qquad (j = 1,2, \ldots, n). \tag{37}$$

Relația (37) se mai poate scrie

$$\sum_g (M^*_{jg} - \lambda \nu_{jg}) Z_g = 0 \qquad (j = 1,2, \ldots, n), \tag{38}$$

unde

$$\lambda = \frac{1}{\omega^2}, \tag{39}$$

$$\begin{aligned} \nu_{jg} &= 0 \text{ pt } j \neq g, \\ \nu_{jg} &= 1 \text{ pt } j = g. \end{aligned} \tag{40}$$

Relațiile (38) reprezintă un sistem de ecuații omogen, care, pentru evitarea soluției banale, conduce la condiția ca determinantul să fie nul:

$$\det (M^*_{jg} - \lambda \nu_{jg}) = 0$$

$$(j = 1,2, \ldots, n;\ g = 1,2, \ldots, n), \tag{41}$$

cu respectarea notațiilor (39) și (40). Ecuația (41) este ecuația pulsațiilor proprii, care ne duce la aceleași valori ale lui ω ca și (12).

Pentru o tratare matriceală, să introducem o serie de notații.

Matricele deplasărilor radiale pe sistemul fără penduli (denumirea este bazată pe (35)) sînt

$$u^* = \begin{Vmatrix} u^*_{a1} & u^*_{a2} & \ldots & u^*_{an} \\ \vdots & & & \\ u^*_{k1} & u^*_{k2} & \ldots & u^*_{kn} \\ \vdots & & & \\ u^*_{l1} & u^*_{l2} & \ldots & u^*_{ln} \end{Vmatrix},$$

$$v^* = \begin{Vmatrix} v^*_{a1} & \ldots & v^*_{an} \\ \vdots & & \\ v^*_{l1} & \ldots & v^*_{ln} \end{Vmatrix}, \qquad w^* = \begin{Vmatrix} w^*_{a1} & \ldots & w^*_{an} \\ \vdots & & \\ w^*_{l1} & \ldots & w^*_{ln} \end{Vmatrix}. \tag{42}$$

Notațiile (42) ne permit să scriem matriceal relațiile (33) folosind și relațiile (35):

$$Z = \tilde{u}^* F_u + \tilde{v}^* F_v + \tilde{w}^* F_w. \tag{43}$$

Relațiile (35) explică folosirea notațiilor u^*, v^*, w^* în comparație cu (17). Relațiile (17) și (42) sînt analoge, cu deosebire că în (17) deplasările se măsoară pe sistemul cu penduli, iar în (42) pe sistemul liber.

Relațiile (20) și (43) ne permit să scriem

$$Z = \omega^2 [\tilde{u}^* m u + \tilde{v}^* m v + \tilde{w}^* m w] Z. \tag{44}$$

Să notăm paranteza cu

$$M^* = \tilde{u}^* m u + \tilde{v}^* m v + \tilde{w}^* m w = \begin{Vmatrix} M_{11}^* & M_{12}^* \dots M_{1n}^* \\ \vdots & \\ M_{j1}^* & M_{j2}^* \dots M_{jn}^* \\ \vdots & \\ M_{n1}^* & M_{n2}^* \dots M_{nn}^* \end{Vmatrix}. \tag{45}$$

Cu acestea, (44) dă

$$(M^* - \lambda E) Z = 0, \tag{46}$$

unde λ e dat de (39) iar E de (24). Sistemul omogen de ecuații (46) ne conduce la ecuația (41).

Examinînd cele două moduri de soluționare concretizate în ecuațiile (12), respectiv (41), se constată că ecuația (12) face apel la matricea r a reacțiunilor pe sistemul blocat, iar ecuația (41) la matricele deplasări pe sistemul liber u^*, v^*, w^* (incluse în M^*). Restul elementelor cuprinse în ecuații sînt de natură cinematică.

Aceste caracteristici ne-au determinat să numim cele două procedee ca fiind rezolvarea cu matricea reacțiunilor, respectiv cu matricea deplasărilor.

Dacă pentru evitarea unui calcul static laborios se vor folosi determinările experimentale pe model, se constată că ecuația (41) necesită un număr mai mare de determinări (elementele matricelor u^*, v^*, w^*), pe cînd ecuația (12) reclamă numai cunoașterea elementelor matricei δ (22), din care se vor deduce însă prin calcul elementele matricei r.

Pe de altă parte, ecuația (41) este mai simplă, mărimea λ fiind așezată pe diagonala determinantului, pe cînd ecuația (12) este mai complicată, mărimea ω^2 fiind prezentă teoretic în toate elementele determinantului.

În concluzie criteriul pentru alegerea a unuia sau a altuia dintre procedeele descrise ar fi : dacă se dispune de un calculator perfecționat, ar fi mai utilă folosirea ecuației (12), încercîndu-se eventual o diagonalizare a matricei (12) și calculînd matricea r prin inversarea matricei δ. Dacă condiția de mai sus nu este satisfăcută, se va merge pe ecuația (41), care nu pune probleme de inversări de matrice, iar ecuația seculară e mai simplă.

3. DETERMINAREA ELEMENTELOR MATRICELOR M ȘI M*

Pentru a putea rezolva problemele concrete, este necesară determinarea elementelor matricelor u,v,w care intră în compunerea matricelor M (30) și M^* (45).

Vom considera, pentru simplificare că raza de curbură în plan vertical este mare în raport cu cea din plan orizontal, astfel încît vom asimila

poligonul schematizat din secțiunea verticală (fig. 1) ca fiind o dreaptă. Aproximarea nu este depărtată de realitate. De altfel, la nevoie, se poate renunța la această aproximare.

Considerînd secțiunile verticale ca fiind aproximativ drepte și avînd direcția verticală, acest lucru este echivalent cu a spune că luăm în considerare numai mișcarea unei mase oarecare m_k în planul orizontal, neglijînd mișcarea elastică în plan vertical ca fiind mult mai mică decît precedenta.

Vom considera că vîrfurile poligonului într-o secțiune orizontală se află pe un arc de cerc.

Pentru ceea ce urmează este cazul să reamintim că relațiile (9), care se bazează strict pe observația de după expresiile (7), sînt valabile numai dacă imaginăm structura ca fiind o rețea de arce poligonale lipsite de rigiditate la torsiune sau, eventual, ca o combinație de plăci plane la care neglijăm torsiunea. Numai în acest caz putem deduce relațiile (9), întrucît putem să determinăm relațiile respective ca pentru mecanismul cu cîte un grad de libertate, deci fără eforturi interioare.

Odată făcute aceste precizări, rămîne să determinăm elementele din u și v (elementele matricei w fiind nule după cum a rezultat de mai sus).

O primă constatare se face observînd că, acceptînd simplificările de mai sus, deplasările u_{kj} și v_{kj} sînt diferite de zero numai dacă k și j sînt pe același arc orizontal (deplasările unui pendul oarecare j nu poate antrena în mișcare decît masele din rîndul orizontal respectiv). Mai mult, deplasarea unui pendul oarecare Z_g de pe un arc nu antrenează toate masele de pe același arc.

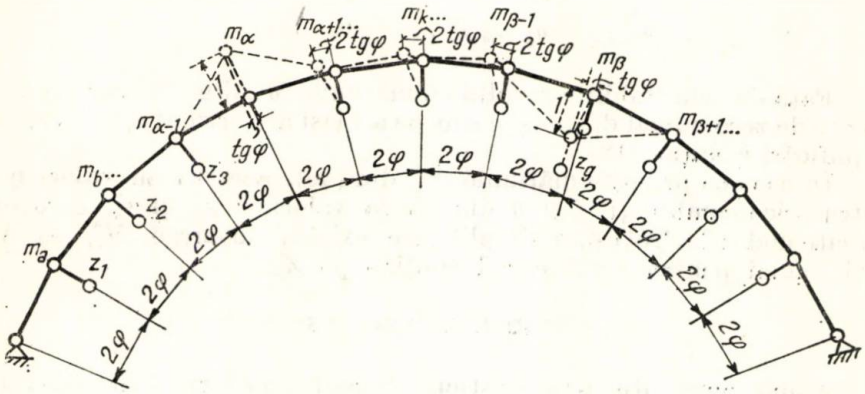


Fig. 3

Pentru determinarea deplasărilor să urmărim figura 3, unde am arătat pendulii care fixează nodurile arcului și deci masele. Se observă că numărul pendulilor este cu unul mai puțin decît numărul maselor. Să notăm cu α vîrful în care lipsește pendulul și cu β vîrful în care se află pendulul Z_g.

Dintr-o analiză simplă a figurii 3 se constată că, dînd o deplasare radială unitară pendulului Z_g, toată zona cuprinsă între α și β se comportă ca un mecanism cu un grad de libertate. Zona centrală (de la $\alpha + 1$ la $\beta - 1$) are o mișcare de solid în rotație în jurul centrului cercului. Comportarea acestui mecanism este antisimetrică în raport cu raza care împarte în două arcul cuprins între α și β. În consecință, deplasările radiale sînt

$$\begin{aligned} v_{aj} &= \ldots = v_{\alpha-2,g} = v_{\alpha-1,g} = 0, \\ v_{\alpha g} &= -1, \\ v_{\alpha+1,g} &= \ldots = v_{\beta-1,g} = 0, \\ v_{\beta g} &= 1, \\ v_{\beta+1,g} &= v_{\beta+2,g} = \ldots = 0. \end{aligned} \tag{47}$$

În ceea ce privește deplasările tangențiale, este relativ ușor de arătat că

$$\begin{aligned} u_{ag} &= \ldots u_{\alpha-2,g} = u_{\alpha-1,g} = 0, \\ u_{\alpha g} &= -\operatorname{tg}\varphi, \\ u_{\alpha+1,g} &= \ldots = u_{\beta-1,g} = -2\operatorname{tg}\varphi, \\ u_{\beta g} &= -\operatorname{tg}\varphi, \\ u_{\beta+1,g} &= u_{\beta+2,g} = \ldots = 0. \end{aligned} \tag{48}$$

Față de cele stabilite rezultă că mărimile M_{jg} din (10) vor avea valori diferite de zero numai dacă j și g sînt pe același arc orizontal, ceea ce aduce simplificări ecuației (12).

În ceea ce privește mărimile M^*_{jg} din (36), acestea au valori nenule pentru orice combinație j și g din cauza valorilor u^*_{kj} și v^*_{kj} care există în toate nodurile. Totuși, o simplificare există, deoarece M^*_{jg} se calculează numai pentru arcul care-l conține pe Z_g.

4. STUDIUL ACȚIUNII SEISMICE

Avînd cunoscute caracteristicile dinamice ale structurii (pulsații proprii, forme proprii de oscilație), să studiem acțiunea seismică asupra unei structuri a cărei schematizare am arătat-o în figura 1.

Prin mișcare seismică vom înțelege mișcarea forțată a terenului, identică în toate punctele de contact a structurii cu terenul, variabilă în timp pe care o notăm vectorial $\bar{s}_0(t)$.

O masă oarecare m_k este supusă deplasării :

$$\bar{\Delta}_k(t) = \bar{s}_0(t) + \bar{\delta}_k(t). \tag{49}$$

Forța de inerție corespunzătoare este

$$\overline{F}_k = - m_k \ddot{\overline{s}}_0(t) - m_k \sum_{g=1}^{n} \overline{\delta}_{kg} \ddot{\overline{Z}}_g$$

sau

$$\overline{F}_k = \overline{S}_{k0} + \overline{F}_{ku} + \overline{F}_{kv} + \overline{F}_{kw}, \tag{50}$$

unde

$$\begin{aligned} S_{k0} &= - m_k \ddot{s}_0, \\ F_{ku} &= - m_k \sum_g u_{kg} \ddot{Z}_g, \\ F_{kv} &= - m_k \sum_g v_{kg} \ddot{Z}_g, \\ F_{kw} &= - m_k \sum_g w_{kg} \ddot{Z}_g. \end{aligned} \tag{51}$$

Referindu-ne la schema din figura 2, vom putea să scriem că reacțiunea dintr-un pendul oarecare j este nulă (pendulul fiind fictiv). Considerăm în calcul și influența amortizării și vom putea calcula componentele reacțiunii pe forma de bază cu nodurile blocate. Avem deci

$$R_{je} + R_{jF} + R_{jA} = 0, \tag{52}$$

unde R_{je} și R_{jF} sînt cei din (1), iar R_{jA} este reacțiunea provenită din forțele de reținere.

Să determinăm expresia lui R_{jF} folosind (51):

$$R_{jF} = \sum_{k=a}^{l} (\rho_{jk,s} S_{k0} + \rho_{jk,u} F_{ku} + \rho_{jk,v} F_{kv} + \rho_{jk,w} F_{kw}) =$$

$$= \sum_{k=a}^{l} \left[- m_k \rho_{jk,s} \ddot{s}_0 - \sum_g m_k (\rho_{jk,u} u_{kg} + \rho_{jk,v} v_{kg} + \rho_{jk,w} w_{kg}) \ddot{Z}_g \right].$$

Să notăm, analog cu (9),

$$\rho_{jk,s} = - s_{kj}, \tag{53}$$

unde s_{kj} este deplasarea masei k pe direcția acțiunii seismice $\overline{s}_0$ cauzate de $Z_j = 1$, celelalte valori Z fiind nule;

$$\sum_{k=a}^{l} m_k s_{kj} = M_{js}. \tag{54}$$

Folosind (9), (10) (53) (54), avem

$$R_{jF} = M_{js} \cdot \ddot{s}_0 + \sum_g M_{jg} \ddot{Z}_g. \tag{55}$$

Forțele de reținere datorită amortizării le considerăm sub forma

$$\overline{A}_k = -2 m_k \varepsilon \dot{\overline{\delta}}_k = -2 m_k \varepsilon (\dot{\overline{u}}_k + \dot{\overline{v}}_k + \dot{\overline{w}}_k) =$$

$$= \overline{A}_{ku} + \overline{A}_{kv} + \overline{A}_{kw}, \tag{56}$$

unde

$$A_{ku} = -2 m_k \varepsilon \dot{u}_k,$$

$$A_{kv} = -2 m_k \varepsilon \dot{v}_k, \tag{57}$$

$$A_{kw} = -2 m_k \varepsilon \dot{w}_k.$$

Reacțiunea datorită acestor forțe aplicate la noduri va fi

$$R_{jA} = \sum_{k=a}^{l} [\rho_{jk,u} A_{ku} + \rho_{jk,v} A_{kv} + \rho_{jk,w} A_{kw}] =$$

$$= -2 \varepsilon \sum_k m_k \sum_g [\rho_{jk,u} u_{kg} + \rho_{jk,v} \cdot v_{kg} + \rho_{jk,w} w_{kg}] \dot{Z}_g.$$

Pe baza notației (10) putem scrie

$$R_{jA} = 2 \varepsilon \sum_g M_{jg} \dot{Z}_g. \tag{58}$$

Astfel relația (52) devine

$$\sum_g r_{jg} Z_g + \sum_g M_{jg} \ddot{Z}_g + 2 \varepsilon \sum_g M_{jg} \dot{Z}_g = -M_{js} \ddot{s}_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, n). \tag{59}$$

Relația (59) constituie un sistem de ecuații diferențiale de ordinul doi. Să determinăm soluția folosind formele proprii de oscilație sub forma

$$Z_g = \sum_{i=I}^{n} Z_{gi} f_i(t) \quad (g = 1, 2, \ldots, n). \tag{60}$$

Relația (59) devine

$$\sum_i f_i \sum_g r_{jg} Z_{gi} + \sum_i \ddot{f}_i \sum_g M_{jg} Z_{gi} + 2 \varepsilon \sum_i \dot{f}_i \sum_g M_{jg} Z_{gi} = -M_{js} \ddot{s}_0. \tag{61}$$

Pentru a simplifica primul termen din (61), să considerăm forma proprie i de oscilație (deci fără existența mișcării perturbatoare). Dacă vom neglija influența lui ε în ceea ce privește forma proprie (ceea ce am și făcut în partea întîi a lucrării), vom avea din (11)

$$\sum_{g} r_{jg} Z_{gi} = \omega_i^2 \sum_{g} M_{jg} Z_{gi}. \tag{62}$$

Venind cu (62) în (61), putem scrie

$$\sum_{i} (\ddot{f}_i + 2\varepsilon \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i) \sum_{g} M_{jg} Z_{gi} = - M_{js} \cdot \ddot{s}_0 \quad (j = 1, 2 \ldots, n). \tag{63}$$

Sistemul de ecuații (63) îl prelucrăm astfel : înmulțim ecuația curentă (j) cu Z_{ji} și facem sumarea termen cu termen pe verticală. Obținem astfel

$$(\ddot{f}_i + 2\varepsilon \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i) \sum_{j} \sum_{g} M_{jg} Z_{gi} Z_{ji} = - \ddot{s}_0 \sum_{j} M_{js} Z_{ji}. \tag{64}$$

Ceilalți termeni realizați după sumare ($h \neq i$) sînt nuli pe baza relației (13).

Relația (64) se mai poate scrie

$$\ddot{f}_i + 2\varepsilon \dot{f}_i + \omega_i^2 f_i = - C_{is} \ddot{s}_0, \tag{65}$$

unde

$$C_{is} = \frac{\sum_{j} M_{js} Z_{ji}}{\sum_{j} \sum_{g} M_{jg} Z_{gi} Z_{ji}}. \tag{66}$$

Relația (65), pentru $i = \text{I, II, } \ldots, n$, reprezintă n ecuații diferențiale cu cîte o necunoscută, formal identică cu cea obținută în cazul cadrelor etajate.

După cum se știe, soluția ecuației (65) poate fi scrisă sub forma

$$f_i(t) = - \frac{1}{\omega_i} C_{is} \int_0^t \ddot{s}_0(\tau)\, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau.$$

Dacă vom introduce notația

$$\int_0^t \ddot{s}_0(\tau)\, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \sin \omega_i (t - \tau)\, d\tau = D(t), \tag{67}$$

vom avea

$$f_i(t) = -\frac{C_{is}}{\omega_i} D(t). \tag{68}$$

Se poate arăta că, neglijînd termenii avînd în factor pe ε, rezultă

$$\begin{aligned} \dot{f}_i(t) &= -C_{is}\int_0^t \ddot{s}_0(\tau)\, e^{-\varepsilon(t-\tau)} \cos\omega_i(t-\tau)\, d\tau, \\ \ddot{f}_i(t) &= -C_{is}\,\ddot{s}_0(t) + \omega_i C_{is} D(t). \end{aligned} \tag{69}$$

Forțele de inerție care se nasc sînt, după expresia (50), următoarele:

$$\overline{F}_k = -m_k \ddot{\overline{s}}_0(t) - m_k \sum_g \overline{\delta}_{kg} \cdot \sum_i Z_{gi} \ddot{f}_i = -m_k \ddot{\overline{s}}_0(t) - m_k \sum_i \delta_{ki} \ddot{f}_i$$

sau, folosind (69),

$$\overline{F}_k = m_k \cdot \ddot{\overline{s}}_0 - m_k \sum_i [-C_{is}\ddot{s}_0 + \omega_i C_{is} D(t)]\,\overline{\delta}_{ki} =$$

$$= m_k\Big[\sum_i C_{is}\ddot{s}_0\,\overline{\delta}_{ki} - \ddot{\overline{s}}_0\Big] - m_k \sum_i \omega_i C_{is} D(t)\cdot\overline{\delta}_{ki}. \tag{70}$$

Studiul acțiunii seismice pe cale matriceală poate fi făcut după cum urmează. Să exprimăm întîi condiția de ortogonalitate (13) sub formă matriceală. Dacă notăm prin F_{ui}, F_{vi}, F_{wi} vectorii (14) corespunzători formei proprii de oscilație i și cu U_h, V_h, W_h vectorii deplasări corespunzători formei proprii h, relația care exprimă ortogonalitatea este

$$\sum_k (\overline{F}_{ki})\,(\overline{\delta}_{kh}) = 0.$$

În notație matriceală, ea devine:

$$\widetilde{U}_h F_{ui} + \widetilde{V}_h F_{vi} + \widetilde{W}_h F_{wi} = 0.$$

Conform (19), avem însă

$$U_h = u Z_h,\quad V_h = v Z_h,\quad W_h = w Z_h,$$

unde Z_h este vectorul (18) pentru forma proprie de oscilație h.

Vom avea

$$\widetilde{U}_h = \widetilde{Z}_h \, \widetilde{u} \text{ etc...}$$

După (20) avem și

$$F_{ui} = \omega_i^2 \, m \, u \, Z_i \text{ etc...},$$

așadar putem scrie

$$\widetilde{Z}_h \, \widetilde{u} \, \omega_i^2 \, m u Z_i + \widetilde{Z}_h \, \widetilde{v} \, \omega_i^2 \, m v Z_i + \widetilde{Z}_h \, \widetilde{w} \, \omega_i^2 \, m w Z_i = 0$$

sau

$$\widetilde{Z}_h (\widetilde{u} \, m \, u + \widetilde{v} \, m \, v + \widetilde{w} \, m \, w) \, Z_i = 0.$$

Folosind (30), vom putea scrie în final

$$\widetilde{Z}_h \, M \, Z_i = 0 \qquad (i \neq h). \tag{7 1}$$

Trecem acum exprimarea matriceală a studiului acțiunii seismice. Relația (50) se transcrie matriceal

$$F = S_0 + F_u + F_v + F_w, \tag{72}$$

unde

$$S_0 = - \, m \, e \, \ddot{s}_0, \tag{73}$$

m fiind definit în (16), iar e fiind vectorul cu l linii :

$$e = \begin{Vmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 1 \end{Vmatrix}, \tag{74}$$

F_u, F_v, F_w fiind deja date în (14).

Putem însă scrie, observînd că F sînt forțe de inerție,

$$\begin{aligned} F_u &= - \, m \, \ddot{U} = - \, m \, u \, \ddot{Z}, \\ F_v &= - \, m \, \ddot{V} = - \, m \, v \, \ddot{Z}, \\ F_w &= - \, m \, \ddot{W} = - \, m \, w \, \ddot{Z}, \end{aligned} \tag{75}$$

u, v, w fiind dați în (17), iar Z în (18).

Reacțiunile datorită forțelor de inerție vor fi

$$R_F = \rho_s S_0 + \rho_u F_u + \rho_v F_v + \rho_w F_w,$$

unde R_F e dat în (26), S_0 în (73), ρ_u, ρ_v, ρ_w în (25), F_u, F_v, F_w în (75), iar ρ_s, îl dăm mai jos:

$$\rho_s = \left\| \begin{matrix} \rho_{1a,s} \cdots \rho_{1k,s} \cdots \rho_{1l,s} \\ \vdots \\ \rho_{na,s} \cdots \cdots \cdots \rho_{nl,s} \end{matrix} \right\|, \tag{76}$$

sensul mărimii $\rho_{jk,s}$ fiind analog cu cele din (25), s fiind direcția acțiunii seismice.

Să introducem și matricea σ:

$$\sigma = \left\| \begin{matrix} s_{a1} & s_{a2} & \cdots & s_{an} \\ \cdot & & & \\ s_{l1} & s_{l2} & \cdots & s_{ln} \end{matrix} \right\|. \tag{77}$$

Se constată ușor că

$$\rho_s = -\tilde{\sigma}, \tag{78}$$

relație analogă cu (29).

Cu acestea să scriem

$$R_F = \tilde{\sigma} m e \ddot{s}_0 + \tilde{u}\, m\, u\, \ddot{\boldsymbol{Z}} + \tilde{v}\, m\, v\, \ddot{\boldsymbol{Z}} + \tilde{w}\, m\, v\, \ddot{\boldsymbol{Z}}.$$

Folosind (30), putem scrie

$$R_F = \ddot{s}_0 M_s + M \ddot{\boldsymbol{Z}}, \tag{79}$$

reprezentînd transcrierea relației (55), unde

$$M_s = \tilde{\sigma} m e = \left\| \begin{matrix} M_{1s} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{js} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ M_{ns} \end{matrix} \right\|, \tag{80}$$

M_{js} fiind dat în (54).

Forțele de reținere se pot scrie după componentele lor

$$A_u = -2\varepsilon m \dot{U} = -2\varepsilon m u \dot{Z},$$

$$A_v = -2\varepsilon m \dot{V} = -2\varepsilon m v \dot{Z}, \tag{81}$$

$$A_w = -2\varepsilon m \dot{W} = -2\varepsilon m w \dot{Z},$$

unde am notat

$$A_u = \left\| \begin{matrix} A_{au} \\ A_{bu} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{lu} \end{matrix} \right\|, \quad A_v = \left\| \begin{matrix} A_{av} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{lv} \end{matrix} \right\|, \quad A_w = \left\| \begin{matrix} A_{aw} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_{lw} \end{matrix} \right\|. \tag{82}$$

Reacțiunile datorite forțelor de reținere sînt

$$R_A = \rho_u A_u + \rho_v A_v + \rho_w A_w =$$

$$= 2\varepsilon (\tilde{u} m u + \tilde{v} m v + \tilde{w} m w) \dot{Z} = 2\varepsilon M \dot{Z}, \tag{83}$$

unde am notat, analog cu (26),

$$R_A = \left\| \begin{matrix} R_{aA} \\ R_{bA} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ R_{lA} \end{matrix} \right\|. \tag{84}$$

Cu acestea, condiția (52) se transcrie

$$R_e + R_F + R_A = 0, \tag{85}$$

unde R_e este dat în (28), R_F în (79), iar R_A în (83).
Făcînd înlocuirile respective, găsim

$$r Z + M \ddot{Z} + 2\varepsilon M \dot{Z} = -\ddot{s}_0 M_s. \tag{86}$$

Pentru sistemul de ecuații diferențiale (86) să încercăm soluția

$$Z = \zeta f, \tag{87}$$

unde

$$f = \begin{Vmatrix} f_{\mathrm{I}} \\ f_{\mathrm{II}} \\ \vdots \\ f_n \end{Vmatrix}, \quad \zeta = \begin{Vmatrix} Z_{1\mathrm{I}} & Z_{1\mathrm{II}} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{2\mathrm{I}} & Z_{2\mathrm{II}} & \dots & Z_{2n} \\ \vdots & & & \\ Z_{n\mathrm{I}} & \dots\dots\dots & & Z_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{88}$$

f_i fiind funcții deocamdată necunoscute și

$$r\,\zeta f + M\,\zeta \ddot{f} + 2\,\varepsilon\, M\,\zeta \dot{f} = -\ddot{s}_0\, M_s.$$

În cazul absenței excitantului exterior s și neglijînd forțele de amortizare ($\varepsilon = 0$), putem deduce din (86) relația pentru o formă proprie i:

$$rZ_i + M\ddot{Z}_i = 0$$

sau

$$rZ_i = \omega_i^2 M Z_i. \tag{89}$$

Pentru $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \dots, n$, relația (89) se poate scrie compact

$$r\zeta = M\zeta^*, \tag{90}$$

unde am notat

$$\zeta^* = \begin{Vmatrix} Z^*_{i\mathrm{I}} & \dots\dots & Z^*_{1n} \\ \vdots & & \\ Z^*_{n\mathrm{I}} & \dots\dots & Z^*_{nn} \end{Vmatrix}, \tag{91}$$

având drept componente

$$Z^*_{ji} = \omega_i^2 Z_{ji}. \tag{92}$$

Relația (86) se scrie în final

$$M\zeta^* f + M\zeta \ddot{f} + 2\varepsilon M\zeta \dot{f} = -\ddot{s}_0 M_s. \tag{93}$$

Pentru a simplifica sistemul (93), să înmulțim această relație la stînga cu $\widetilde{Z}_i$. Scriind termen cu termen, vom avea

$$\widetilde{Z}_i M\zeta^* f = \omega_i^2 \widetilde{Z}_i M Z_i f_i.$$

Relația de sus se explică prin aceea că produsul $Z_i M\zeta^*$ este în final o matrice-linie, având toate elementele nule ca fiind de tipul (71), afară de elementul i, care este $\widetilde{Z}_i M Z_i^*$; produsul $\widetilde{Z}_i M\zeta^* f$ este deci o sumă

cu toți termenii nuli, afară de termenul i, care este cel scris mai sus. Analog avem

$$\widetilde{Z}_i M\zeta\ddot{f} = \widetilde{Z}_i MZ_i\ddot{f}_i,$$

$$\widetilde{Z}_i M\zeta\dot{f} = \widetilde{Z}_i MZ_i\dot{f}_i.$$

Relația (93) se va putea deci scrie

$$\widetilde{Z}_i MZ_i(\ddot{f}_i + 2\varepsilon\dot{f}_i + \omega_i^2 f_i) = -\ddot{s}_0\widetilde{Z}_i M_s$$

sau, observînd că $\widetilde{Z}_i MZ_i$ este o matrice cu un element,

$$\ddot{f} + 2\varepsilon\dot{f} + \omega_i^2 f = -\ddot{s}_0\frac{\widetilde{Z}_i M_s}{\widetilde{Z}_i MZ_i}. \tag{94}$$

Notăm

$$C_{is} = \frac{\widetilde{Z}_i M_s}{\widetilde{Z}_i MZ_i} \tag{95}$$

și observăm că este transcrierea relației (66).

Pentru $i = \mathrm{I}, \mathrm{II}, \ldots$ vom obține n ecuații diferențiale cu cîte o necunoscută și soluțiile corespunzătoare de tip (68).

În cazurile studiate curent de cadre etajate, forțele de inerție se exprimă numai în funcție de integrala Duhamel $D(t)$.

Forma ecuației (70) sugerează faptul că o parte a forței seismice — prima parte din (70) — se bucură de o anumită particularitate, în cazul cadrelor etajate el fiind nul. În cazul nostru, el nu poate fi nul, deoarece termenii din prima paranteză sînt vectori, avînd în general direcții diferite între ei.

Dacă se examinează ansamblul forțelor $\overline{F}_k$ care lucrează pe structură, se poate bănui că, în primul termen al relației (70) apărînd mărimea $\ddot{s}_0$, structura se comportă față de aceste forțe (corespunzătoare primului termen) ca rigidă.

Fie aceste forțe

$$\overline{F}'_k = m_k[\sum_i C_{is}\ddot{s}_0\overline{\delta}_{ki} - \overline{\ddot{s}}_0], \tag{96}$$

pe care să le denumim forțe seismice de translație.

Structura elastică este încărcată la noduri cu aceste forțe. Să vedem ce deformare pot produce aceste forțe.

Pentru facilitarea demonstrației, să folosim principiul deplasărilor virtuale. Întrucît forțele sînt aplicate la noduri, să utilizăm metoda deplasărilor [1], alegîndu-ne ca necunoscute numai grade de libertate. Pentru motive care se vor vedea ulterior nu alegem ca necunoscute deplasările Z considerate pînă acum, ci combinații liniare ale lor (adică grupări de necunoscute).

Vom considera ca necunoscute grupările de necunoscute $Z_1 Z_2 \ldots$ $\ldots Z_i \ldots$ de tipul formelor proprii de oscilaţie. Se ştie că acestea sînt liniare independente.

Notăm aceste necunoscute cu $Z_{\mathrm{I}} Z_{\mathrm{II}} \ldots Z_i \ldots$, desemnate printr-o singură ordonată de referinţă necunoscută, restul fiind date în raport cu aceasta prin forma proprie respectivă.

Dacă exprimăm „echilibrul" sistemului utilizînd o deplasare virtuală $Z_h = 1$ (chiar una dintre necunoscutele considerate), vom putea scrie

$$Z_{\mathrm{I}} L_{h\mathrm{I}} + Z_{\mathrm{II}} L_{h\mathrm{II}} + \ldots + L_h(F') = 0, \tag{97}$$

unde L_{hi} este lucrul mecanic virtual produs de forţele elastice determinate de $Z_i = 1$ parcurgînd deplasările virtuale corespunzătoare lui $Z_h = 1$, iar $L_h(F')$ este lucrul mecanic virtual produs de forţele F' de pe sistem parcurgînd deplasările corespunzătoare care rezultă din $Z_h = 1$.

Lucrul mecanic corespunzător masei m_k este

$$L_h(F'_k) = \bar{\delta}_{kh} m_k [\sum_i C_{is} \ddot{s}_0 \bar{\delta}_{ki} - \ddot{\bar{s}}_0]. \tag{98}$$

Să considerăm primul termen din (98):

$$A = \sum_k \bar{\delta}_{kh} m_k \sum_i C_{is} \ddot{s}_0 \bar{\delta}_{ki} = \ddot{s}_0 \sum_i C_{is} \sum_k m_k \bar{\delta}_{kh}, \bar{\delta}_{ki};$$

dar

$$\sum_k m_k \bar{\delta}_{kh} \cdot \bar{\delta}_{ki} = \sum_k m_k (u_{kh} u_{ki} + v_{kh} v_{ki} + w_{kh} w_{ki}) =$$

$$= \sum_k m_k [\sum_g u_{kg} Z_{gh} \sum_j u_{kj} Z_{ji} + \sum_g v_{kg} Z_{gh} \sum_j v_{kj} Z_{ji} + \sum_g w_{kg} Z_{gh} \sum_j w_{kj} Z_{ji}] =$$

$$= \sum_g \sum_j Z_{gh} Z_{ji} \sum_k m_k (u_{kg} u_{kj} + v_{kg} v_{kj} + w_{kg} w_{kj}) = \sum_g \sum_j M_{jg} Z_{ji} Z_{gh}.$$

Conform (13), pentru $i \neq h$ avem

$$\sum_g \sum_j M_{jg} Z_{ji} Z_{gh} = 0,$$

astfel, că din suma $\sum_i$ va rămîne un singur termen, şi anume cel pentru care $i = h$. Aşadar,

$$A = \ddot{s}_0 \cdot C_{hs} \sum_g \sum_j M_{jg} Z_{jh} Z_{gh}$$

și, apelînd la (66), vom avea

$$A = \ddot{s}_0 \frac{\sum_g M_{gs} Z_{gh}}{\sum_j \sum_g M_{jg} Z_{gh} Z_{jh}} \sum_j \sum_g M_{jg} Z_{jh} Z_{gh} = \ddot{s}_0 \sum_g M_{gs} Z_{gh}.$$

Cel de-al doilea termen al relației (98) este

$$B = - \sum_k \overline{\delta}_{kh} \ddot{\overline{s}}_0 m_k = - \sum_k \sum_g \overline{\delta}_{kg} \cdot Z_{gh} m_k \ddot{\overline{s}}_0 =$$

$$= - \sum_g Z_{gh} \sum_k m_k (\overline{\delta}_{kg} \cdot \ddot{\overline{s}}_0).$$

Produsul scalar din paranteză se poate scrie

$$\overline{\delta}_{kg} \cdot \ddot{\overline{s}}_0 = s_{kg} \cdot \ddot{s}_0,$$

unde s_{kg} este definit în (53). Vom putea deci scrie

$$B = - \ddot{s}_0 \sum_g Z_{gh} \sum_k m_k s_{kg}.$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Folosind (54), vom scrie

$$B = - \ddot{s}_0 \sum_g M_{gs} \cdot Z_{gh}$$

și în final vom avea

$$L_h(F') = A + B = 0. \tag{99}$$

Pentru $h = \text{I}, \text{II}, \ldots, i \ldots, h, \ldots$, vom obține n relații de tipul (99), care definește un sistem de ecuații omogen în $Z_{\text{I}}\ Z_{\text{II}} \ldots Z_i \ldots$, cu soluția

$$Z_{\text{I}} = Z_{\text{II}} = \ldots = Z_i = \ldots = 0. \tag{100}$$

Relația (100) arată că structura elastică nu este deformabilă sub acțiunea forțelor F'. Structura se comportă cu un rigid, ceea ce justifică denumirea dată anterior forțelor F' ca forțe de translație (în care accelerația seismică apare direct).

În ceea ce privește partea a doua a forțelor $\overline{F}_k$ din (70), constatăm că există analogie între această forță și cele care apar în structurile etajate. Utilizînd în loc de funcția $D(t)$ spectrul vitezei și spectrul accelerației [2], [3], vom avea

$$S_{vi} = \max |D(t)| = f(T_i),$$

$$S_{ai} = \omega_i \cdot S_{vi}. \tag{101}$$

Cu acestea putem scrie expresia forței seismice S_k:

$$\overline{F}_k'' = \overline{S}_k = m_k \cdot k_s g \sum_i \frac{S_{ai}}{k_s g} C_{is} \overline{\delta}_{ki} = k_s \sum_i \beta_i \overline{\eta}_{ki} Q_k, \tag{102}$$

unde

k_s este raportul dintre accelerația seismică și accelerația gravității;

$\beta_i = \frac{S_{ai}}{k_s g} = f(T_i)$ coeficientul care ține seama de caracteristicile elastice ale structurii prin perioadă și care reprezintă modificarea accelerației terestre, datorite elasticității structurii;

$$\overline{\eta}_{ki} = C_{is} \cdot \overline{\delta}_{ki} = \frac{\sum_j M_{js} Z_{ji}}{\sum_g \sum_j M_{jg} Z_{gi} Z_{ji}} \overline{\delta}_{ki}. \tag{103}$$

Se constată că $\overline{\eta}_{ki}$ este un vector care ține seama de corelația dintre direcția cutremurului și mișcarea posibilă a masei m_k, vector care definește direcția forței $\overline{S}_{ki}$. În fine,

$$Q_k = m_k g$$

este sarcina gravitațională a masei m_k.

Din cele expuse pînă acum se constată deci că există două tipuri de sarcini seismice, pe care le-am notat cu F_k' și $F_k'' = S_k$. Primele nu conduc la apariția unor deformații ale structurii (și deci nici la momente încovoietoare). Ele determină numai forțe axiale. Celelalte sînt sarcini seismice de tip obișnuit care țin seama de elasticitatea structurii, cu deosebirea față de cazul obișnuit că au direcții variabile de la masă la masă și de la o formă proprie la alta, direcție care este rezumată în (103) pentru o formă proprie de oscilație.

Așa cum am convenit mai înainte, dacă nu se ține seama de curbura structurii în plan vertical, atunci nu vor exista componente ale forțelor S_k decît în plan orizontal.

La determinarea solicitărilor seismice se va ține seama atît de forțele S_k cît și de forțele F_k' (care dau forțe axiale).

5. CONCLUZII

1. Aspectul dinamic al comportării barajelor în arc poate fi studiat fie cu matricea reacțiunilor, fie cu cea a deplasărilor. Elementele necesare rezolvărilor propuse — ecuațiile (12) și (41) — se pot calcula pe cale statică obișnuită. Dacă se folosesc determinările experimentale (pentru evitarea calculului static), aceasta se face în mod diferențiat la cele două procedee.

Folosirea matricei reacțiunilor care conduce la ecuația (12) reclamă cunoașterea matricei r, care poate fi dedusă prin inversarea matricei δ, aceasta din urmă fiind determinată experimental. În acest caz, ecuația frecventelor (12) este ceva mai complicată.

Folosirea matricei deplasărilor care conduce la ecuația (41) reclamă cunoașterea matricelor u^*, v^*, w^*, deci un număr mai mare de determinări experimentale, dar nu mai reclamă inversarea acestor matrice, iar ecuația (41) este de un tip mai simplu.

2. Studiul solicitărilor seismice efectuat conduce la evidențierea a două tipuri de forțe seismice, concretizate în (96) și (102). Primele, denumite aici forțe seismice de translație, nu determină deformări ale structurii și nici momente încovoietoare, ci numai forțe axiale. Ele sînt proporționale direct cu intensitatea accelerației seismice. Celelalte sînt forțe seismice de tip obișnuit (depinzînd de elasticitatea structurii) și sînt proporționale cu accelerația modificată $\omega_i \, D(t) \, C_{is}$ sau cu spectrul S_a.

Spre deosebire de cazul obișnuit, forțele seismice de ambele tipuri au direcții oarecare și de aceea ambele expresii (96) și (102) au alcătuirea vectorială.

Forțele seismice de translație (96) nu pot fi neglijate aprioric, deoarece sînt direct proporționale cu accelerația seismică $\ddot{s}_0$ și conduc la apariția de forțe axiale, care pot fi de ambele semne.

3. În studiul acțiunii seismice s-a presupus aici că vectorul $\bar{s}_0$ este oarecare, ceea ce dă posibilitatea de studiu al acțiunii seismice pentru orice direcție a mișcării (chiar și verticală dacă se cunosc caracteristicile acestei mișcări).

Pentru cazul obișnuit cînd mișcarea este orizontală, se propune ca direcția acestui vector să fie considerată în cel puțin două direcții în lungul văii și perpendicular pe aceasta.

4. Studiul este întocmit pentru cazul cînd mișcarea terenului poate fi reprezentată printr-o lege $\bar{s}_0(t)$ unică pentru toate punctele de contact ale structurii cu terenul. În cazul cînd se apreciază că mișcările diverselor puncte nu pot fi descrise de aceeași lege, problema trebuie reconsiderată.

5. Rezultatele studiului se pot aplica identic la orice tip de placă curbă dacă se pot determina într-un fel oarecare (teoretic sau experimental) elementele matricelor care intră în expresiile de calcul.

Primită la redacție la 26 decembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*, vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
2 A. Beleș, M. Ifrim, *Elemente de seismologie inginerească* București, Edit. tehnică, 1962.
3. N. Țopa, *Acțiunea seismică asupra cadrelor plane de formă oarecare, avînd mase concentrate la noduri*, St. cerc. mec. apl., **27**, 3 (1968).

CONTRIBUȚII LA STUDIUL MECANISMULUI APARIȚIEI ERORILOR DE PRELUCRARE LA FREZAREA ȘI RECTIFICAREA DE ÎNALTĂ PRECIZIE A SUPRAFEȚELOR PLANE CU SCULE CILINDRICE (DISC)

de P. DODOC
Institutul politehnic București

În lucrare se explică mecanismul apariției erorilor de prelucrare la frezarea și rectificarea suprafețelor plane cu scule cilindrice și disc, se prezintă o metodă originală de determinare a profilului suprafeței prelucrate și se indică mijloacele practice prin care se poate mări precizia de prelucrare prin procedeele menționate

Procedeele de frezare și rectificare se folosesc frecvent în construcția de mașini și aparate. Folosirea lor corectă permite realizarea unor suprafețe de calitate superioară la un preț de cost scăzut și cu productivitate ridicată. Uneori procedeul este singurul care poate fi folosit. Așa, de exemplu, se poate menționa folosirea rectificării pentru prelucrarea materialelor dure (oțelul călit, carburile metalice etc.).

Ambele procedee, dar mai ales rectificarea, prezintă o importanță deosebită pentru industria de mașini-unelte de înaltă precizie și industria de aparate de măsurat, unde, spre exemplu, precizia necesară a ghidajelor este extrem de ridicată, iar obținerea ei este influențată de numeroși factori. În lucrarea de față autorul își propune să analizeze mecanismul apariției erorilor de prelucrare și să evidențieze influența diferiților parametri asupra acestor erori.

Procedeele de prelucrare menționate au elemente esențiale comune, ceea ce permite studierea lor simultană. Astfel, atît la frezare, cît și la rectificare, scula are o mișcare de rotație în jurul unei axe, asigurînd prin aceasta viteza de așchiere:

$$v = \frac{\pi \cdot d_s \cdot n_s}{1000.60} \text{ [m/s]}, \tag{1}$$

unde $d_s = 2r_s$ reprezintă diametrul sculei în [mm], iar n_s turația în [min^{-1}] sau [rot/min].

Pentru ca aşchierea să aibă loc, este necesară o viteză de avans v_w, care poate fi obţinută fie prin deplasarea mesei, fie prin deplasarea axei de rotaţie a sculei pe o traiectorie rectilinie, paralelă la profilul de referinţă Δ_R (fig. 1 *a* şi *b*).

După cum cele două viteze se scad sau se adună în punctul de contact dintre piesă şi sculă, se spune că prelucrarea are loc „în contra avansului" (fig. 1 *a*) sau respectiv, „în sensul avansului" (fig. 1 *b*).

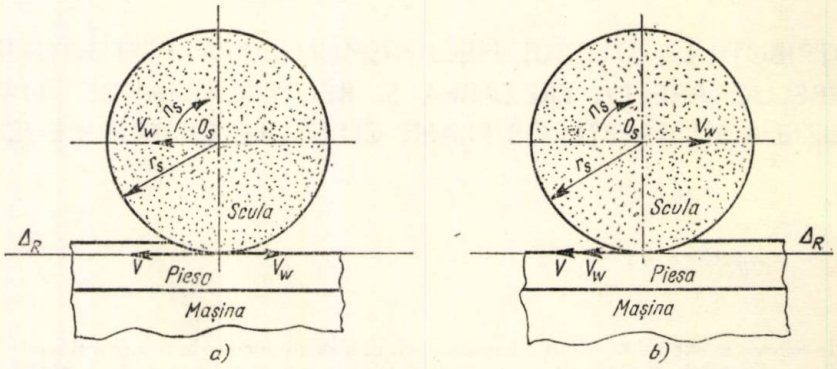


Fig. 1]

Din punctul de vedere al traiectoriei pe care o descrie un dinte al frezei (sau o granulă a pietrei de rectificat), este indiferent dacă mişcarea de avans este efectuată de către sculă sau de către piesă. Important de menţionat este faptul că, în timp ce scula se roteşte o dată în jurul axei sale o_s, axa sau piesa se deplasează cu mărimea

$$s_n = z \cdot s_z, \tag{2}$$

care reprezintă avansul pe rotaţie. După cum se cunoaşte, z reprezintă numărul de dinţi ai frezei (z_f) sau numărul de granule de pe periferia discului abraziv (z_g), iar s_z şi s_g avansul pe un dinte, respectiv pe o granulă.

Admiţînd spre exemplu, că discul de rectificat D (sau freza F) este legat solidar cu discul D_1, avînd aceeaşi axă de rotaţie, de rază r_s, respectiv r_r, este evident că deplasarea s_n corespunde unei rulări complete a discului D_1 pe dreapta Δ_r, situată la distanţa $r_s - r_r$ faţă de profilul de referinţă şi paralelă cu acesta (fig. 2). Se poate deci scrie

$$s_n = 2\pi r_r. \tag{3}$$

Fiind vorba aici de însumarea a două mişcări continue, se poate admite că cercul de rază r_r numit ruletă, rulează pe dreapta Δ_r, fiecare punct de pe cerc descriind cicloide normale cu baza dată de relaţia (3). După cum se cunoaşte, orice punct al discului $D(F)$ situat exterior dreptei Δ_r va descrie o cicloidă alungită, pe cînd un punct situat interior dreptei Δ_r, adică cercului de rază r_r, va descrie o cicloidă scurtată. În ambele situaţii, baza ciclidelor este dată de relaţia (3).

Din ecuația (3) se poate scoate raza cercului de rulare :

$$r_r = \frac{s_n}{2\pi} = \frac{z \cdot s_z}{2\pi}. \tag{4}$$

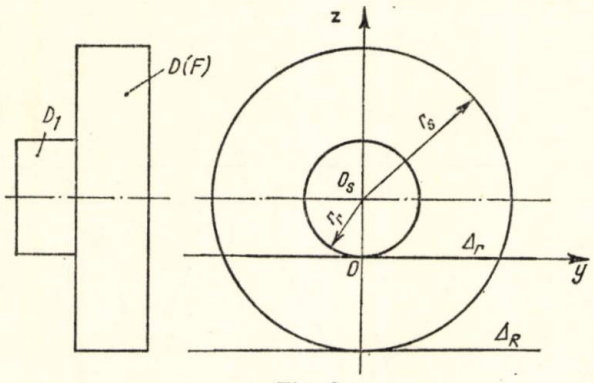


Fig. 2

Raportul razelor va fi

$$\lambda = \frac{\rho_s}{r_r} = \frac{r_s}{s_n} \cdot 2\pi = \frac{2\pi r_s}{z \cdot s_z}. \tag{5}$$

Expresia (4) arată că raza cercului de rulare este limitată de avansul pe rotație. Deoarece productivitatea crește cu avansul s_n, rezultă că o rază r_r mare este avantajoasă.

Funcția de sensul avansului, trochoida va avea maximul pe piesă sau opus acesteia.

Figura 3*a* arată, de exemplu, traiectoriile descrise de cei patru dinți ai unei freze cu $r_s = 30$ mm, cînd frezarea se face în contra avansului cu $s_n = 120$ mm/rot. La frezarea (ori rectificarea) în sensul avansului (fig.3*b*), trochoidele au maximele (punctele A) situate opus piesei. În ambele cazuri rezultă $r_r = s_n/2\pi = 120/2\pi = 19{,}1$, iar $\lambda = r_s/r_r = 30/19{,}1 = 1{,}57$.

Se observă că toate trochoidele au maximele (A) și minimele (B) situate pe drepte Δ paralele cu Δ_r, respectiv cu profilul de referință Δ_R. Același lucru se vede și în figura 4, unde curbele C_{01} și C_{05} reprezintă traiectoriile dinților 1 și 5 defazate cu π în cazul cînd axa de rotație O_s descrie o traiectorie rectilinie paralelă cu profilul de referință Δ_R.

Din figurile 3 și 4 rezultă că profilul suprafeței prelucrate este determinat de arce de trochoidă. Pasul rugoprofilului este

$$p = \frac{s_n}{z}, \tag{6}$$

iar înălţimea acestuia, adică rugozitatea, depinde de numărul de dinţi z şi de s_n, adică de pasul p, şi de razele de curbură în punctele de contact dintre piesă şi sculă:

$$r_A = -\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} \cdot r_r, \tag{7}$$

$$r_B = +\frac{(1-\lambda)^2}{\lambda} \cdot r_r. \tag{7'}$$

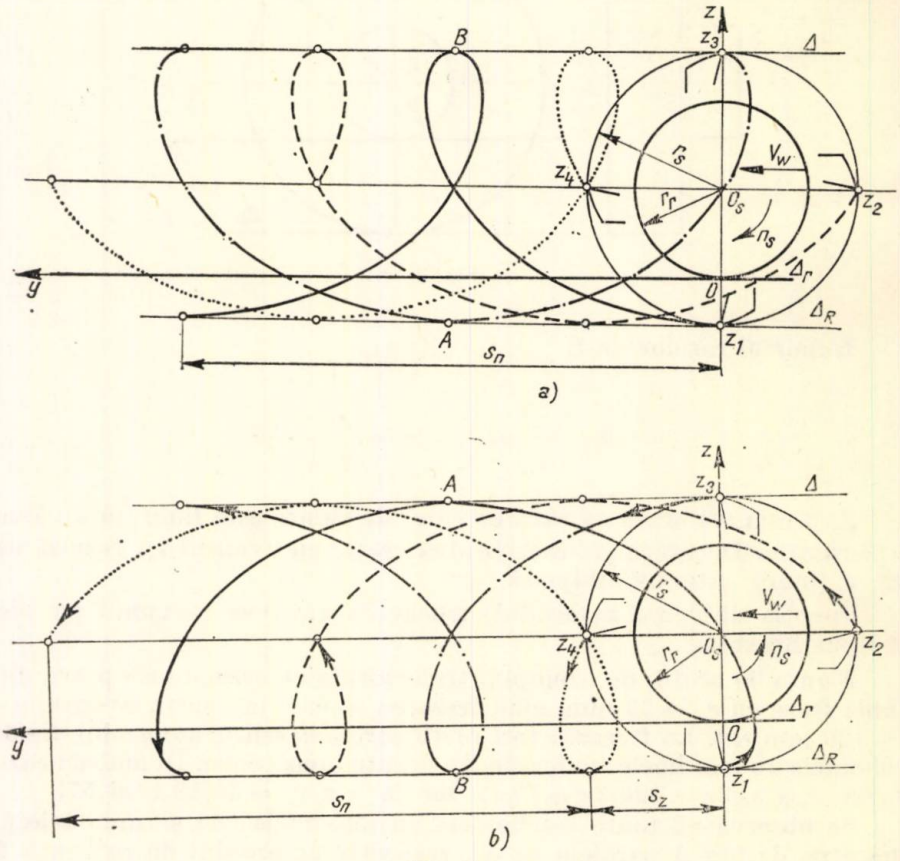


Fig. 3

Aplicînd relaţiile (7) în cazul figurii 4 pentru $r_r = \frac{s_n}{2\pi} = \frac{80}{2\pi} =$ $= 12{,}73$mm; $r_s = 50$ mm şi $\lambda = \frac{r_s}{r_r} = 3{,}93$ se obţine

$$r_A = -\,78{,}8 \text{ mm}$$

şi

$$r_B = +28{,}2 \text{ mm}.$$

Aceste valori corespund construcţiei grafice şi arată că în cazul prelucrării contra avansului, caz în care procesul de aşchiere decurge fără şocuri, rugozitatea este mai mică. Pentru acest mod de prelucrare se recomandă aşadar scule la care razele r_A şi r_B sînt mari.

Din relaţiile (7) rezultă că razele sînt cu atît mai mari, cu cît λ şi r_r au valori mai mari.

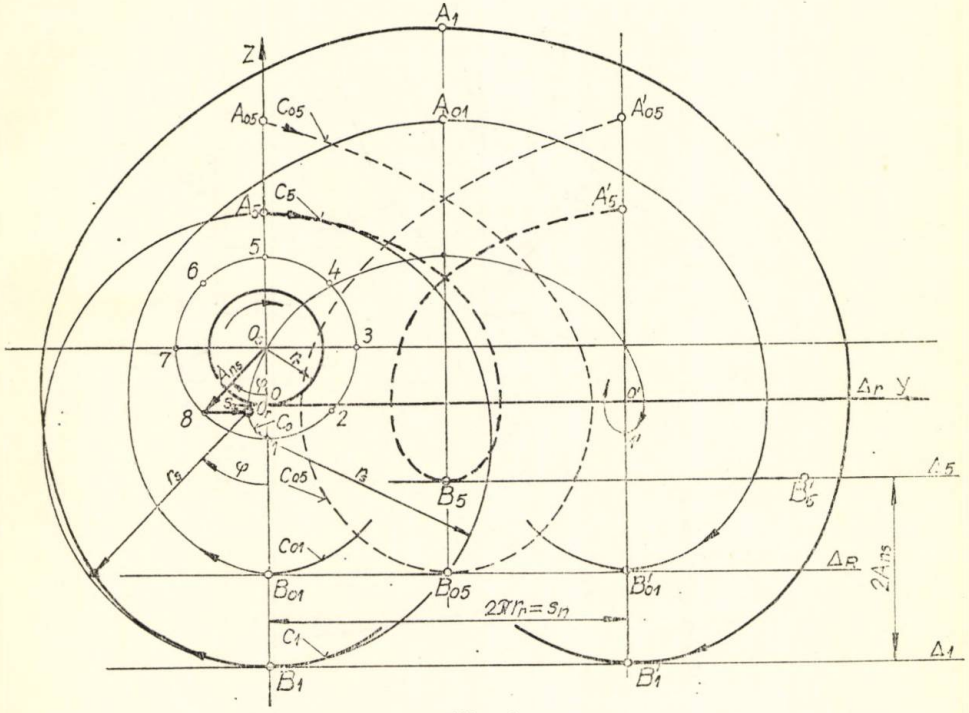


Fig. 4

Deoarece raza r_r este limitată de avansul pe rotaţie, rămîne ca singură soluţie mărirea razei sculei. Influenţa razei r_s asupra rugozităţii se vede şi în figura 5.

Mărirea diametrului sculei înseamnă însă nu numai scumpirea acesteia, ci şi mărirea masei m a sistemului în rotaţie. Ca urmare, are loc micşorarea frecvenţei proprii şi a preciziei de prelucrare prin mărirea dezechilibrării, deci a forţei centrifuge generatoare de vibraţii.

Înainte de a studia efectul vibraţiilor asupra preciziei de prelucrare, trebuie menţionat faptul că coordonatele punctelor maxime şi minime prezintă interes practic important.

În cazurile de mai sus, aceste coordonate sînt date de următoarele expresii :

$$Y_A = (2k+1)\,\pi r_r,$$
$$Z_A = (1+\lambda)\,\pi r_r \tag{8}$$

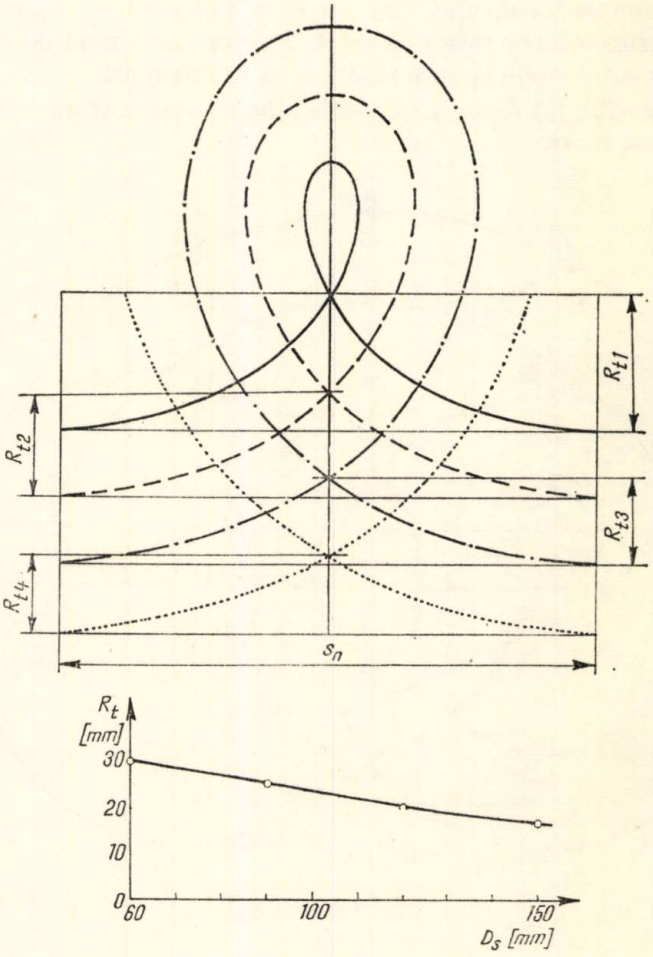


Fig. 5

şi

$$Y_B = 2k\pi r_r,$$
$$Z_B = (1-\lambda)\,r_r. \tag{8'}$$

Aplicînd relaţiile (8) în cazul din figura 4, se obţine

$$Y_A = \pi r_r = \frac{s_n}{2} = 40 \text{ mm},$$

$$Z_A = (1 + \lambda)\, r_r = r_r + r_r\lambda = \frac{s_n}{2\pi} + \frac{s_n}{2\pi} \cdot \frac{2\pi r_s}{s_n} = r_r + r_s =$$

$$= 12{,}73 + 50 = 62{,}73 \text{ mm},$$

$$Y_B = 0,$$

$$Z_B = (1 - \lambda)\, r_r = r_r - r_r\lambda = r_r - r_s = 12{,}73 - 50 = -37{,}27 \text{ mm}.$$

Raportul razelor este $\lambda = \frac{r_s}{r_r} = \frac{50}{12{,}73} = 3{,}93$.

Traiectoria descrisă de oricare dinte al sculei poate fi determinată cu ecuaţiile parametrice

$$Y = r_r(\varphi - \lambda \sin \varphi)$$

şi (9)

$$Z = r_r(1 - \lambda \cos\varphi),$$

unde φ este unghiul de rotire a sculei în jurul axei sale de rotaţie O_r.

Traiectoriile dinţilor sculei pot fi determinate rapid dacă se foloseşte metoda următoare. Se reprezintă mai întîi dreapta de referinţă Δ_R şi apoi cercul de rază r_s, tangent la această dreaptă. Cunoscînd avansul s_n şi numărul de dinţi z, se determină avansul pe dinte cu relaţia (2). Admiţînd că la timpul $t = 0$ unghiul de rotire al frezei este $\varphi = 0$, respectiv avansul $s_z = 0$, este evident că la o rotire $\delta = \frac{2\pi}{z}$ corespunde o deplasare a piesei (sau a sculei) egală cu avansul pe dinte s_z. Pentru o rotire completă $\varphi = z\delta = 2\pi$, deplasarea este $s_n = z \cdot s_z$. Asociind fiecărui vector r_s rotit cu unghiul de $\varphi_k = k\delta$ avansul corespunzător $+ks_z$ sau $-ks_z$, se obţine punctul dorit P_k al traiectoriei dintelui (fig. 4 şi 6).

După cum s-a menţionat deja, datorită forţei centrifuge axul sculei se va deforma, iar axa sa de rotaţie va descrie o traiectorie circulară de amplitudine A_{ns} şi de frecvenţă $f_{ns} = \frac{n_s}{60}$ *Hz* dacă sistemul este izotrop din punct de vedere dinamic.

Dacă se consideră acelaşi avans pe rotaţie s_n, traiectoriile dinţilor sculei vor fi şi în acest caz trochoide cu baza dată de relaţia (3), adică pasul rugoprofilului se menţine constant.

Datorită însă faptului că axa de rotaţie se deplasează pe un cerc de rază A_{ns}, raportul amplitudinilor λ se va modifica corespunzător poziţiei axei de rotaţie, deoarece razele r_r şi ρ_s se măsoară de la centrul cercului de rulare O_s. Astfel, pentru o amplitudine $A_{ns} = 20$ mm, în figura

4 se obțin pentru aceleași date ca mai sus următoarele ordonate ale maximelor și minimelor :

a) *pentru dintele numărul 1 (curba* C_1) :

$$Z_{A1} = (1 + \lambda)\, r_r = (r_r + r_r\lambda) = \left(r_r + \frac{\rho_s r_r}{r_r}\right) = (r_r + \rho_s),$$

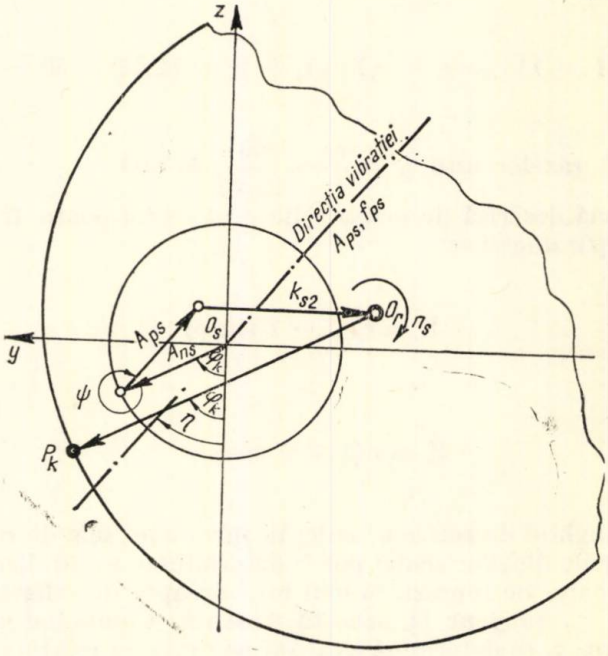


Fig. 6

$$Z_{A1} = (r_r + r_s + A_{ns}) = (12{,}73 + 50 + 20) = 82{,}73 \text{ mm}$$

și

$$Z_{B1} = (1 - \lambda)\, r_r = + r_r - \rho_s = + r_r - r_s - A_{ns} = 12{,}73 - 50 - 20,$$

$$Z_{B1} = - 57{,}27 \text{ mm};$$

b) *pentru dintele numărul 5, defazat cu* π (*curba* C_5) :

$$Z_{A5} = r_r(1 + \lambda) = \left(r_r + \frac{r_s - A_{ns}}{r_r} \cdot r_r\right),$$

$$Z_{A5} = + r_r + r_s - A_{ns} = + 12{,}73 + 50 - 20 = + 42{,}73 \text{ mm}$$

și

$$Z_{B5} = r_r(1 - \lambda) = (r_r - r_s + A_{ns}) = (12{,}73 - 50 + 20) = - 17{,}27 \text{ mm}.$$

Făcînd diferenţele ordonatelor minime şi maxime pentru cele două puncte, rezultă

$$\Delta Z_A = Z_{A1} - Z_{A5} = (r_r + r_s + A_{ns}) - (+ r_r + r_s - A_{ns}) =$$

$$= + r_r + r_s + A_{ns} - r_r - r_s + A_{ns} = + 2A_{ns}. \qquad (10)$$

Pentru minime rezultă

$$Z_B = - 2A_{ns}. \qquad (10)$$

Indiferent dacă prelucrarea se efectuează în sensul sau contra avansului, pasul rugoprofilului va fi $p = \frac{s_n}{z}$, dar mărimea rugozităţii este influenţată în mod hotărîtor de diferenţa ordonatelor $\Delta Z = 2A_{ns}$.

În afară de aceasta, profilul piesei rezultă din arce de trochoidă ca o suprafaţă cioplită. Raportul razelor de curbură în punctele B_1 şi B_5 din figura 4 este

$$\lambda_{AB} = \frac{\lambda_A}{\lambda_B} = \frac{97{,}3}{9{,}93} \approx 10.$$

Pentru a micşora rugozitatea, trebuie micşorată amplitudinea vibraţiei forţate A_{ns}, mărită raza r_s a sculei şi micşorată greutatea sculei.

Pentru a construi traiectoria unui dinte, se procedează exact după metoda descrisă mai sus, cu precizarea că vectorii $\vec{r}_s$ şi $\vec{A}_{ns}$ au acelaşi unghi de rotire (sînt paraleli), dar au puncte de aplicaţie diferite. În figura 4 curba C_0 reprezintă traiectoria axei de rotaţie a piesei în timpul unei rotaţii. Ea poate fi determinată cu ecuaţiile (9), unde $\lambda = \frac{A_{ns}}{r_r}$, sau din însumarea vectorilor A_{ns} şi s_z pentru diferite poziţii φ.

Cercetările efectuate de autor au arătat că un arbore în rotaţie nu are axa de rotaţie fixă, ci ea se deplasează pe o traiectorie care a fost numită trochoidă de vibraţii. Această trochoidă rezultă din compunerea unei vibraţii circulare forţate de frecvenţă $f_{ns} = \frac{n}{60}$ Hz şi de amplitudine A_{ns} şi din mai multe vibraţii proprii, ale căror vectori-amplitudini se rotesc în jurul vîrfului vectorului A_{ns} ori sînt orientaţi de-a lungul unei direcţii (fig. 6).

Determinarea poziţiei p_k a unui dinte pentru o rotire a sculei cu unghiul φ_k se face astfel: se determină mai întîi poziţia momentană a axei de rotaţie prin însumarea vectorilor $\vec{A}_{ns} + \vec{A}_{ps} + \vec{k}s_z$ apoi din punctul o_r se trasează vectorul $\overrightarrow{O_r P_k} = \vec{r}_s$ paralel cu direcţia vectorului amplitudine $\vec{A}_{ns}$. Cu această metodă grafică se poate construi traiectoria

unui dinte pentru orice traiectorie a axei de rotaţie.

Astfel, figura 7 reprezintă traiectoriile a doi dinţi defazaţi cu π pentru următorii parametrii : $r_r = 12{,}73$ mm ; $z = 8$; $s_z = 10$ mm ; $s_n = 80$ mm/rot, $r_s = 50$ mm ; $A_{ps}/A_{ns} = 1/2$; $m_{fs} = f_{ps}/f_{ns} = 2$.

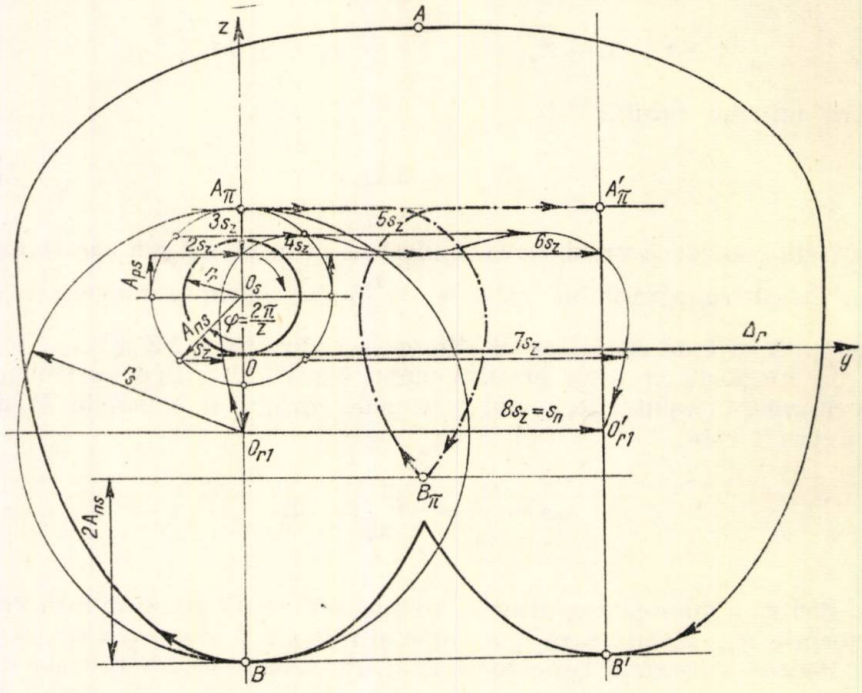


Fig. 7

Pentru găsirea ordonatelor maxime şi minime se folosesc relaţiile (8) :

$$Z_{1A} = r_r + \rho_s = r_r + (r_s + A_{ns} - A_{ps}) = 12{,}73 + 50 + 20 - 10 =$$

$$= 72{,}73 \text{ mm},$$

$$Z_{1B} = r_r - \rho_s = r_r - (r_s + A_{ns} + A_{ps}) = 12{,}73 - 50 - 20 - 10 =$$

$$= -67{,}27 \text{ mm},$$

$$Z_{\pi A} = r_n + \rho_s = r_r + (r_s - A_{ns} - A_{ps}) = 12{,}73 + 50 - 20 - 10 =$$

$$= 32{,}73 \text{ mm},$$

$$Z_{\pi B} = r_r - \rho_s = r_r - (r_s + A_{ps} - A_{ns}) = 12{,}73 - 50 - 10 + 20 =$$

$$= -27{,}27 \text{ mm},$$

$$\Delta Z_A = Z_{1A} - Z_{\pi A} = +2A_{ns} = 40 \text{ mm},$$

$$\Delta Z_B = Z_{1B} - Z_{\pi B} = -2A_{ns} = -40 \text{ mm}.$$

Razele în punctele de maxim şi de minim sînt

$$r_{1A} = -\frac{(1+\lambda)^2}{\lambda} r_s = -\frac{\left(1+\frac{\rho_s}{r_r}\right)^2}{\frac{\rho_s}{r_r}} \cdot r_r = -\frac{(1+4{,}7)^2}{4{,}7} \cdot 12{,}73,$$

$$r_{1A} = -88 \text{ mm}$$

şi

$$r_{1B} = \frac{3{,}7^2}{4{,}7} \cdot 12{,}73 = \frac{13{,}7}{4{,}7} \cdot 12{,}73 = 37{,}2 \text{ mm}.$$

Aceste date corespund cu construcţia grafică obţinută cu metoda descrisă mai sus.

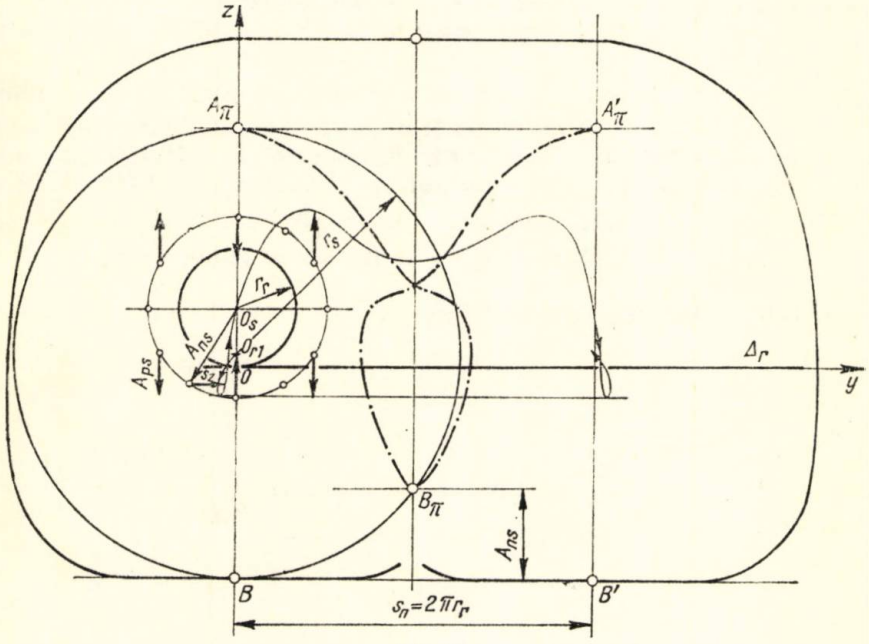


Fig. 8

Figura (8) reprezintă traiectoriile a doi dinţi defazaţi cu π pentru următoarele date:

$m_{fs} = 3$; $m_{As} = A_{ps}/A_{ns} = 1/2$; $A_{ns} = 20$ mm; $A_{ps} = 10$ mm;

$r_s = 50$ mm; $s_n = 80$ mm; $z = 12$; $s_z = 6{,}6$ mm/dinte.

Din figurile (7) și (8) rezultă că vibrațiile influențează nu numai precizia de prelucrare (precizia de formă, de poziție, dimensională și rugozitatea), ci cauzează viteze de așchiere variabile, unghiuri de așezare și de degajare variabile, precum și adîncime variabilă sau avans variabil (dacă direcția de vibrare este paralelă cu direcția mișcării de avans).

Din figura (8) rezultă că așchierea are loc în condiții mai bune atunci cînd vectorii $\vec{A}_{ns}$ și $\vec{A}_{ps}$ sînt defazați cu π. În practică nu se poate conta pe o astfel de situație.

CONCLUZII

În urma studierii mai aprofundate a proceselor de rectificare și frezare plană de finisare cu ajutorul unei metode originale de determinare rapidă și exactă a traiectoriei dintelui sculei, s-a stabilit că pentru a obține o precizie mare trebuie ca:

— raportul $\lambda = \frac{2\pi r_s}{s_n} = \frac{2\pi r_s}{z s_z}$ să fie cît se poate de mare;

— raza sculei să fie cît se poate de mare, condiție care duce la transformarea mașinilor de rectificare cu discuri abrazive în mașini de rectificat cu bandă abrazivă, bandă care la locul de contact dintre piesă și sculă are raza $r_s = \infty$;

— numărul de dinți ai sculei și avansul pe rotație să fie mare;

— masa sculei să fie cît se poate de mică, condiție care duce la modificarea constructivă a sculelor abrazive, modificare ce prezintă o serie de avantaje privind precizia de prelucrare și economia de material abraziv;

— scula și întregul sistem în rotație să fie echilibrat dinamic;

— sistemul sculă-piesă-mașină să fie cît se poate de rigid.

Primită la redacție la 24 septembrie 1970

ELEMENTE DE AMPLIFICARE CU FLUID

de P. V. MARINESCU
Institutul Politehnic Bucureşti

Ultimii ani au consacrat definitiv utilizarea amplificatoarelor cu fluid în sistemele de comandă şi de control, precum şi în circuitele logice, dînd naştere la un nou domeniu, denumit fluidica. Lucrarea face o prezentare succintă a acestor tipuri de amplificatoare, indicînd principiul de funcţionare şi principalele performanţe care caracterizează utilizarea lor în diferite circuite fluidice cu scopul de a se obţine o imagine de ansamblu asupra posibilităţilor pe care le oferă această nouă tehnică a amplificării cu ajutorul fluidelor.

1. INTRODUCERE

Ultimul deceniu a dus la apariţia unor noi dispozitive care pot îndeplini funcţiile tuburilor electronice şi ale tranzistorilor, avînd largi posibilităţi de utilizare în diferite circuite pneumatice de automatizare şi de control. Datorită folosirii drept sursă de alimentare energia unui fluid, de preferinţă aer, aceste dispozitive se deosebesc de cele electronice prin natura fenomenelor ce se produc în timpul funcţionării lor şi de cele pneumatice prin absenţa părţilor mobile. După natura fluidului de lucru şi a materialului de fabricaţie, dispozitivele cu fluid pot funcţiona în medii radiante şi la temperaturi înalte şi joase, fiind insensibile la şocuri şi la vibraţii. Absenţa părţilor mecanice în mişcare le oferă o înaltă siguranţă în funcţionare, cu păstrarea îndelungată a performanţelor. Producţia de serie, preţul de cost scăzut şi interschimbabilitatea fac ca aceste dispozitive să-şi cîştige astăzi un larg cîmp de aplicabilitate în toate domeniile ştiinţei şi tehnicii.

Fenomenele aerodinamice care stau la baza funcţionării dispozitivelor cu fluid au fost cunoscute şi studiate cu mult timp înainte, fiind în strînsă legătură cu progresele cerute de dezvoltarea rapidă a aviaţiei, însă folosirea lor în dispozitive îşi are începutul în 1959, cînd R. E. Bowles, W. M. Horton şi R. W. Warren de la laboratoarele Harry Diamond au studiat şi au pus în evidenţă pentru prima dată deficienţele existente în diferite sisteme de energie, care le limitează folosirea în anumite scopuri.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 3, 1971, P. 733—750

Astfel sistemele cu circuite electronice sînt sensibile la factorii externi de temperatură, radiații, șocuri și vibrații. Sistemele hidraulice și pneumatice pot funcționa fără apariția unor modificări ai parametrilor în funcție de factorii externi, dar au o viteză de lucru scăzută. Ca rezultat al cercetărilor duse cu scopul de a găsi sisteme noi în care deficiențele amintite să fie înlăturate sau minimalizate, au apărut primele dispozitive cu fluid. În martie 1960 s-a anunțat public realizarea de către Horton a amplificatorului proporțional bazat pe interacțiunea jeturilor și a amplificatorului bazat pe efectul Coandă, realizat de către Bowles și Warren.

Dispozitivele cu fluid utilizează fenomene ce se produc la scurgerea gazelor pe suprafața corpurilor, la scurgerea jeturilor libere în vecinătatea unor pereți, la interacțiunea jeturilor fluide, la tranziția scurgerii laminare în turbulente, însă existența unor granițe solide și scara redusă la care se produc fenomenele amintite necesită ca studierea lor să se facă pe principii noi, în care rezultatele experimentale să aibă un rol preponderent.

În scurgerea unui fluid pe suprafața unui corp apare așa-numitul strat-limită, în care viteza variază de la zero la valoarea dată de mișcarea exterioară. Gradientul de presiune variază longitudinal și transversal în vecinătatea conturului corpului, pînă cînd apare desprinderea stratului-limită. Punctul de desprindere poate fi deplasat prin procedee de sucțiune sau de suflaj, obținîndu-se astfel posibilitatea de control a stratului-limită. Problema controlului scurgerii într-un difuzor Prandtl cu ieșirea evazată a fost pusă în evidență de către Prandtl încă din 1904. Fluidul ieșind din difuzor își păstrează scurgerea inițială, în afară de cazul unei sucțiuni laterale de o parte și de alta a pereților divergenți.

Un alt fenomen cunoscut din perioada anilor 1930—1932 și denumit efect Coandă, după numele inventatorului și omului de știință H. Coandă, constă din atașarea în anumite condiții a unui jet liber la un perete aflat în imediata lui apropiere. Jetul, ieșit dintr-un orificiu cu raport lungime-lățime mare, antrenează aerul înconjurător din vecinătatea lui. Existența unui perete solid de o parte a jetului provoacă o asimetrie în alimentarea cu fluid din mediul înconjurător și o depresiune care explică atașarea jetului. Fenomenul de atașare poate fi controlat prin procedee geometrice sau cu ajutorul unui jet auxiliar transversal pe jetul principal în apropierea orificiului de ieșire.

Contactul a doi sau mai mulți curenți plani produce o modificare a graniței fluide și o nouă distribuție a vitezelor și a presiunilor. Primul dispozitiv bazat pe interacțiune fluidică a fost inventat de către Tesla în 1916 și denumit diodă Tesla. Pentru o configurație aleasă (fig. 1), în

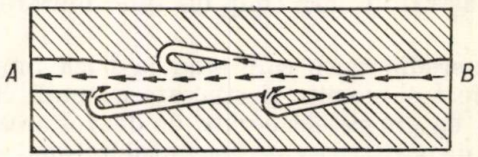


Fig. 1

scurgerea de la A la B rezistența dispozitivului este minimă, iar de la B la A rezistența este maximă. Prin rezistență se înțelege căderea de presiune provocată de dispozitiv ca rezultat al scurgerii.

Un alt fenomen cunoscut încă de la începutul acestui secol şi utilizat astăzi în dispozitivele cu fluid constă în tranziţia scurgerii laminare în scurgere turbulentă produsă în anumite condiţii, care pot fi cuprinse într-un parametru adimensional denumit număr Reynolds. De la un anumit număr Reynolds sau printr-o perturbare exterioară, scurgerea devine turbulentă, avînd ca rezultat modificarea naturii scurgerii.

2. PERFORMANŢELE AMPLIFICATOARELOR CU FLUID

Un amplificator cu fluid reprezintă ansamblul de canale şi de conducte prin care se scurge un fluid de înaltă energie a cărui trecere este comandată de un jet de fluid de mică intensitate. În termeni aerodinamici, un amplificator cu fluid este sediul interacţiunii unui jet principal cu un jet de comandă de mică intensitate. Scurgerea în interiorul dispozitivului apare sub forma unor jeturi fluide, care păstrează întrucîtva proprietăţile jeturilor libere.

Un amplificator cu fluid are cel puţin două intrări şi o ieşire. O intrare introduce fluidul de lucru, denumit jet principal sau jet de alimentare, iar cealaltă intrare introduce jetul de comandă. Sub acţiunea unei mărimi variabile la intrare, amplificatorul furnizează o mărime de ieşire funcţie de mărimea de intrare. Mărimile de intrare şi de ieşire sînt denumite în sensul cel mai larg semnale. Semnalul de ieşire reproduce semnalul de la intrare la un nivel energetic superior. Schema-bloc a unui amplificator cu fluid este arătată în figura 2. La un astfel de amplificator intere-

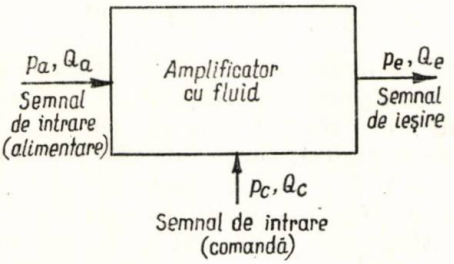


Fig. 2

sează relaţiile dintre mărimile de intrare şi de ieşire, care pot fi exprimate matematic sau obţinute experimental. Odată caracteristicile de funcţionare stabilite, amplificatorul poate fi conectat în diferite circuite similare cu cele electronice.

La un amplificator digital (denumit închis-deschis, *on-off*), semnalul la ieşire variază între valori discrete în funcţie de mărimea semnalului de comandă. Acest amplificator este denumit adesea element logic, deoarece poate îndeplini funcţii logice. În cazul amplificatoarelor proporţionale sau analogice, semnalul de ieşire variază continuu în funcţie de mărimea semnalului de comandă. La baza funcţionării lor stă interacţiunea jeturilor.

Nu există posibilitatea de a se obține un amplificator cu fluid care să fie ideal pentru toate aplicațiile, deoarece există caracteristici distincte care afectează selecționarea amplificatorului pentru anumite utilizări. Principalii parametri caracteristici care determină performanțele unui amplificator cu fluid sînt : factorul de amplificare ; răspunsul în frecvență și timpul de răspuns ; sensibilitatea la sarcină ; liniaritatea ; histerezisul ; eficiența ; siguranța în funcționare.

2.1. *Factorul de amplificare.* Prin factor de amplificare se înțelege mărimea amplificării semnalului de comandă. Amplificarea poate fi de debit, presiune, putere și impuls și se definește în mod diferit pentru amplificatoarele digitale și proporționale. Pentru amplificatorul proporțional, factorul de amplificare reprezintă raportul dintre variația semnalului la ieșire și variația corespunzătoare semnalului de comandă. Rezultă astfel că factorul de amplificare este numeric egal cu panta curbei care reprezintă această variație într-un domeniu de liniaritate. Factorul de amplificare este unul dintre parametrii importanți, reprezentînd de cele mai multe ori scopul pentru care a fost proiectat elementul.

Amplificarea de debit, de presiune și de putere nu este în general optimă pentru același element și de aceea proiectarea se face diferențiat, pentru a obține o valoare maximă pentru unul din factorii de amplificare menționați.

Mărimea factorului de amplificare reprezintă și o bună indicație asupra celorlalte caracteristici. Astfel, pentru amplificatoarele digitale, o amplificare înaltă arată deseori o scădere a stabilității și a timpului de răspuns. Pentru aceste elemente, o mărime uzuală în aprecierea performanțelor este reprezentată prin numărul de dispozitive identice care pot fi comutate de către un singur element (*fan-out*).

2.2. *Răspunsul în frecvență și timpul de răspuns.* Pentru amplificatoarele proporționale, răspunsul în frecvență se definește ca fiind frecvența la care semnalul de ieșire întîrzie față de semnalul de comandă cu 45°. Pentru un amplificator digital, timpul de răspuns (de comutație) se definește ca fiind intervalul de timp care începe cînd semnalul de comandă atinge 50 % din valoarea finală și se sfîrșește cînd semnalul de ieșire atinge 50 % din valoarea sa maximă. Mai simplu, timpul de răspuns reprezintă timpul dintre aplicarea semnalului la intrare și variația corespunzătoare la ieșire. Timpul de răspuns este funcție de viteza sunetului și depinde de forma și de dimensiunile elementului, precum și de caracteristicile jetului de alimentare și de comandă referitoare la presiune, debit și putere. Un timp de răspuns scurt înseamnă viteze mari de scurgere și deci o funcționare la presiuni ridicate, ceea ce uneori nu este indicat.

2.3. *Raportul semnal-zgomot.* Raportul semnal-zgomot reprezintă raportul dintre amplitudinea maximă a semnalului la ieșire și amplitudinea maximă a zgomotului propriu introdus de element în timpul funcționării. Este necesar ca acest raport să fie maxim, pentru că existența zgomotului perturbează funcționarea etajelor următoare în care este amplificat alături de semnalul util. Raportul semnal-zgomot nu este așa de important pentru amplificatoarele digitale cît este pentru amplificatoarele proporționale.

În amplificatoarele digitale, mărimea de ieşire variază între valori discrete într-un domeniu de toleranţă. Atît timp cît zgomotul suprapus peste semnalul de ieşire nu depăşeşte anumite limite de toleranţă, amplificatorul digital poate fi relativ generator de zgomot, putînd funcţiona totuşi corect. Totuşi trebuie să se evite ca în amplificatoarele digitale să apară comutarea de către un semnal de comandă produs de zgomot. În amplificatoarele proporţionale, zgomotul suprapus peste semnalul de comandă provoacă distorsiuni ale semnalului util de la ieşire şi prin aceasta o dereglare în întreg lanţul de amplificare.

2.4. *Sensibilitatea la sarcină.* Sensibilitatea la sarcină indică măsura în care sînt afectate performanţele elementului prin modificarea condiţiilor de scurgere în aval. Sensibilitate mare la sarcină indică o nestabilitate în funcţionarea elementului. Pentru a micşora această sensibilitate, elementele se proiectează cu canale de ventilaţie deschise în atmosferă. S-a constatat că elementele de amplificare digitale cu timp de răspuns scăzut au o mai mică stabilitate. O stabilitate bună face elementul insensibil la zgomot şi la condiţiile scurgerii din aval, dar implică un semnal de comandă mărit pentru a produce comutarea.

Sensibilitatea la sarcină este strîns legată de posibilităţile montării în serie a amplificatoarelor. Ieşirea montajului în cascadă se aplică la comanda amplificatoarelor de putere, cînd procesele necesită amplificări în faze succesive. Uneori montajul în cascadă este folosit în amplificatoarele digitale pentru rezolvarea problemelor de interconexiune. Cînd amplificarea nu este o problemă de prim ordin, montarea în cascadă este mai puţin dorită, deoarece necesită o suplimentare a consumului de energie pentru amplificatoarele adiţionale. În cazul amplificatoarelor proporţionale montate în cascadă, este necesară reglarea presiunii de alimentare pentru ca saturaţia să se producă simultan. Dacă două amplificatoare saturează în acelaşi timp, atunci se realizează liniaritatea amplificării într-un domeniu larg.

O altă problemă care apare la interconexiunea în cascadă a elementelor constă în necesitatea egalizării impedanţei de ieşire şi de intrare a amplificatoarelor. Dacă impedanţa de ieşire a amplificatorului care produce comanda este egală cu impedanţa de intrare a amplificatorului comandat, atunci se produce un transfer maxim de putere.

2.5. *Liniaritatea.* Este o mărime caracteristică pentru amplificatoarele proporţionale şi se referă la abaterea de la o linie dreaptă a curbei care reprezintă amplificarea. O bună liniaritate indică lipsa deformării semnalului de comandă care se regăseşte la ieşire la un nivel energetic superior.

2.6. *Histerezisul.* Este un parametru important care se referă la capacitatea elementului de a memora, fiind o măsură a stabilităţii lui. În elementele digitale, el reprezintă raportul dintre semnalul de comandă care poate schimba comutarea anterioară şi presiunea sau debitul de alimentare.

2.7. *Eficiența.* Acest parametru se referă în mod uzual la procentul din presiunea jetului principal, recuperată la ieșire. Pierderile de energie disipate prin producerea turbulenței, căldurii și a zgomotului sînt inevitabile în timpul funcționării elementului. Eficiența se apreciază prin presiunea recuperată, care reprezintă procentual raportul dintre presiunea totală obținută la ieșire și presiunea totală a jetului de alimentare.

2.8. *Siguranța în funcționare.* Siguranța în funcționare este un parametru care se referă la buna comportare a elementului, cu păstrarea îndelungată a performanțelor pentru care a fost proiectat. Siguranța în funcționare depinde de materialul din care este făcut elementul și este asigurată în mare măsură de lipsa părților în mișcare.

3. AMPLIFICATOARE DIGITALE CU FLUID

3.1. *Amplificatorul cu atașare la perete.* Acest amplificator lucrează după principiul atașării la perete a jetului de alimentare și este realizat prin închiderea ermetică a unor canale cu o configurație optimă pentru producerea de fenomene aerodinamice.

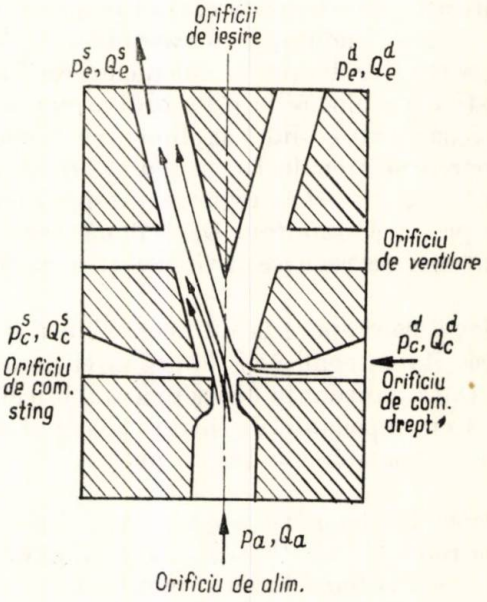


Fig. 3

În figura 3 se arată geometria tipică a unui astfel de amplificator. Funcționarea lui necesită existența unor canale de alimentare, de ieșire și de comandă în care se produce transformarea energiei potențiale a fluidului în energie cinetică. Elementul are o configurație simetrică și plană și o adîncime a canalelor suficient de mare.

În absența unui semnal de comandă, jetul de alimentare se scurge prin canale spre orificiile de ieșire, fără a avea vreo preferință. Pentru o ușoară asimetrie, provocată, de exemplu, prin obturarea unuia dintre cele două canale de comandă, jetul va adera la peretele alăturat de partea obturată.

Atașarea la perete determină existența între jet și perete a unei zone de vîrtejuri de presiune redusă. Aplicînd un jet de comandă la orificiul de partea căruia este atașat jetul de alimentare, interacțiunea celor două jeturi comută jetul principal către peretele opus. Cercetările experimentale au arătat existența a trei faze în cadrul procesului de comutare. În prima fază crește zona de vîrtejuri sub acțiunea jetului de comandă, pînă cînd devine suficient de mare pentru ca jetul să se detașeze de perete, în a doua fază jetul trece dintr-o poziție într-alta, deplasîndu-se către celălalt perete, iar în faza treia zona de vîrtejuri nou formată se resoarbe pînă la stabilirea jetului principal în noua sa poziție. Înlăturînd semnalul de comandă, jetul va rămîne în această nouă poziție. Elementul are două poziții de funcționare stabilă, rămînînd cu jetul atașat la peretele drept sau stîng, după cum s-a aplicat anterior un semnal de comandă stîng sau drept. O asimetrie în construcția elementului face ca acesta să devină monostabil. În acest caz, jetul revine la poziția inițială după înlăturarea semnalului de comandă. Configurația canalelor și a zonei de interacțiune au o influență hotărîtoare asupra caracteristicilor statice și performanțelor dispozitivului.

Caracteristicile statice stabilesc legătura dintre debit și presiune în dreptul orificiilor de comandă, de ieșire și de alimentare. Cele trei tipuri de caracteristici statice ale amplificatorului cu atașare la perete sînt:

— caracteristica de comandă, $Q_c = f(p_c)$,
— caracteristica de ieșire, $Q_e = f(p_e)$,
— caracteristica de alimentare, $Q_a = f(p_a)$.

Aceste trei caracteristici sînt deosebit de importante, deoarece fixează poziția punctului de funcționare în diferite circuite fluidice. În figura 4*a* este arătată variația debitului cu presiunea în dreptul orificiului de comandă. Atașarea jetului la unul dintre pereți este însoțită de o variație bruscă a presiunii, debitul rămînînd aproximativ constant, după care urmează o creștere simultană a presiunii și debitului. Scăzînd apoi presiunea, debitul scade după o variație dată de porțiunea a doua a curbei caracteristice.

Caracteristica de ieșire stabilește legătura dintre debit și presiune în dreptul orificiului de ieșire (fig. 4*b*).

Deoarece ambele curbe caracteristice, de comandă și de ieșire, sînt determinate de mărimea presiunii de alimentare, este necesar ca aceasta să aibă o valoare care să fixeze un regim de funcționare optim din punctul de vedere al utilizării practice a elementului. În figura 4*c* este dată caracteristica de alimentare, care reprezintă curba de variație a debitului cu presiunea în dreptul orificiului de alimentare.

Performanțele amplificatorului cu atașare la perete se obțin în funcție de forma și de dimensiunile elementului, în strînsă legătură cu nivelul mărimilor fizice de la intrare. Pentru o lărgime a canalelor de 0,25 mm

și o presiune de alimentare sub 3,5 at, rezultă un timp de răspuns de 0,005 — 0,0005 s și un răspuns în frecvență de 100 — 1 000 Hz. Funcționarea cu viteză sporită necesită creșterea presiunii de alimentare și duce la ridicarea consumului elementului. Răspunsul în frecvență de cîteva sute de

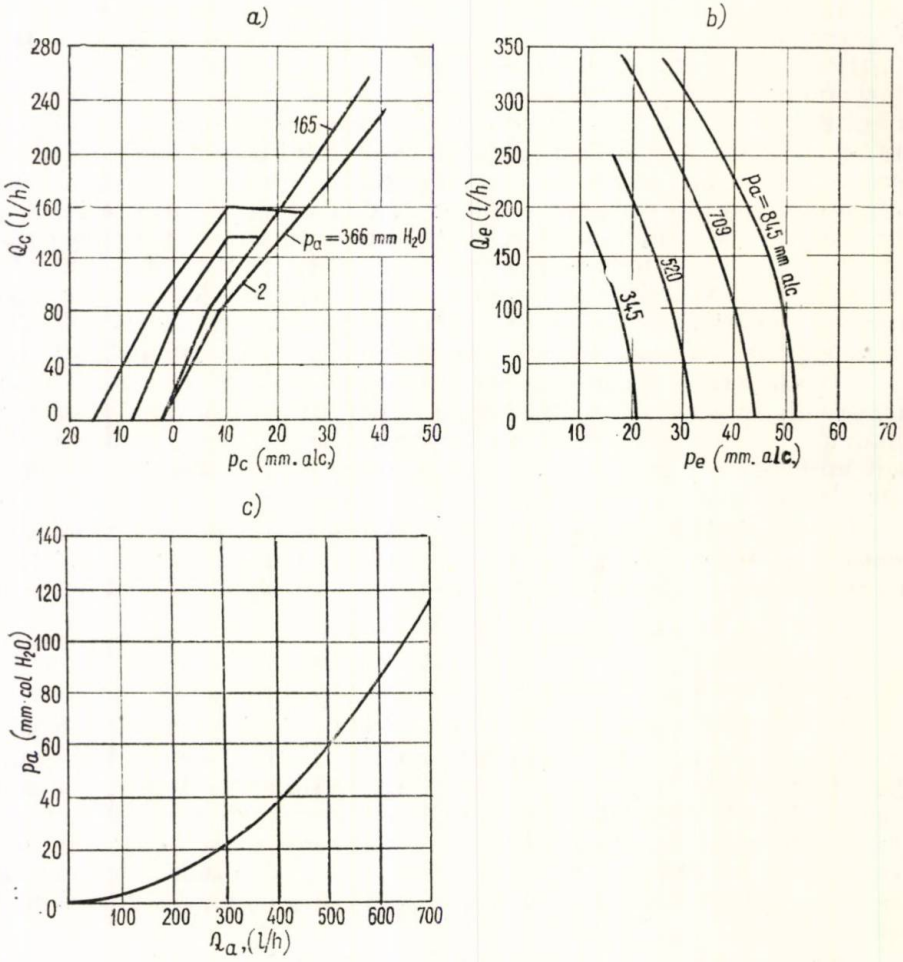


Fig. 4

herți este suficient într-o serie de aplicații industriale. Sensibilitatea la sarcină, care poate produce în anumite condiții comutarea jetului, poate fi înlăturată sau micșorată printr-o proiectare corespunzătoare, prevăzîndu-se elementului orificii de ventilare în atmosferă. Această măsură provoacă însă o scădere a eficienței și a numărului de elemente comutate de către un singur element.

Amplificatorul cu atașare la perete poate fi folosit ca oscilator prin utilizarea unor canale de întoarcere, care realizează efectul de reacție

similar cu cel din circuitele cu tuburi electronice (fig. 5). Semnalul cules de la unul dintre orificiile de ieşire este întors la orificiul de comandă, rezultînd comutarea jetului. Apoi semnalul captat de cealaltă buclă de întoarcere acţionează ca un semnal de comandă, producînd readucerea

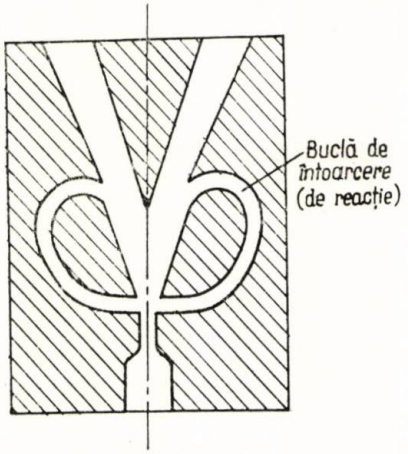


Fig. 5

jetului în poziţia sa iniţială. Procesul continuă, producîndu-se oscilaţii ale jetului la ieşire cu o frecvenţă care depinde de geometria şi de mărimea buclei de întoarcere. În funcţie de micşorarea sau de lungirea buclei de întoarcere, frecvenţa va creşte sau va descreşte.

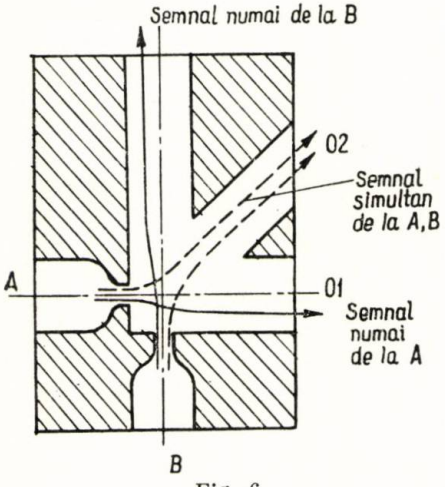


Fig. 6

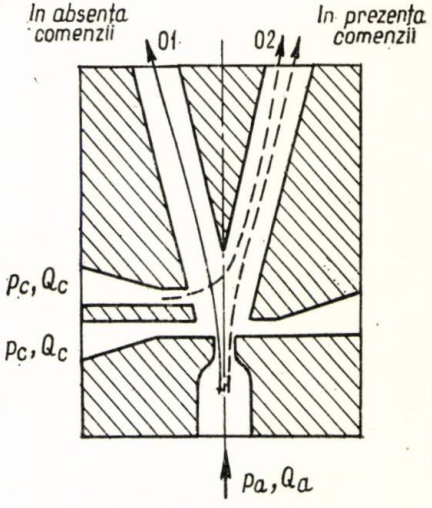


Fig. 7

Amplificatoarele digitale cu ataşare la perete a jetului pot avea o utilizare deosebită în circuitele logice. În figura 6 se poate vedea elementul logic „SI". Pentru a se obţine la ieşirea 02 un semnal, trebuie să se aplice simultan semnale în canalele *A* şi *B*. În figura 7 se arată elementul logic

„SAU—NICI". Acesta furnizează semnal la ieşirea 02 dacă cel puţin unul dintre orificiile de comandă primeşte semnal. Pentru realizarea acestei funcţii logice trebuie ca ambele orificii de comandă să se găsească de aceeaşi parte a unui element monostabil. Proiectarea asimetrică permite ataşarea jetului de partea orificiilor de comandă în absenţa unei comenzi. Dacă la unul sau la ambele orificii de comandă se aplică un semnal, jetul va fi deflectat la peretele opus. Acest element este de asemenea denumit „NICI", deoarece, dacă nu se aplică un semnal de comandă, jetul de alimentare rămîne ataşat de partea peretelui cu orificiile de comandă, poziţie în care funcţionarea lui este stabilă.

3.2. *Amplificatorul cu turbulenţă.* Funcţionarea amplificatorului cu turbulenţă, inventat de Auger şi apoi pus în comerţ de firma „Howie-Corporation", se bazează pe tranziţia unui jet laminar în turbulent. În figura 8 se arată un asemenea amplificator construit cu ajutorul a două tuburi coaxiale, avînd în spaţiul dintre ele tuburile de comandă. Jetul de alimentare este introdus prin conducta de alimentare din care se scurge laminar. Atunci cînd se aplică un semnal de comandă, scurgerea laminară devine turbulentă şi fluidul colectat la ieşire este micşorat.

În figura 9 se arată variaţia presiunii la ieşire cu presiunea de alimentare. Se observă existenţa unui domeniu de liniaritate a caracteristicii, utilă în cazul interconectării în circuite fluidice.

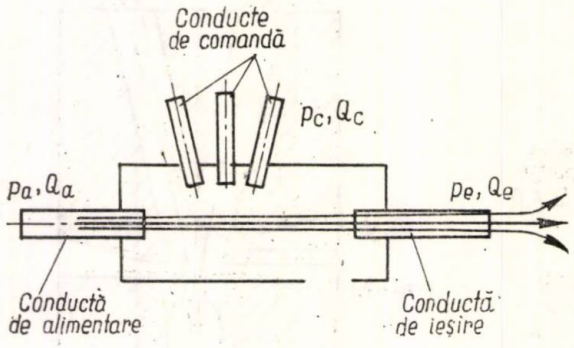


Fig. 8

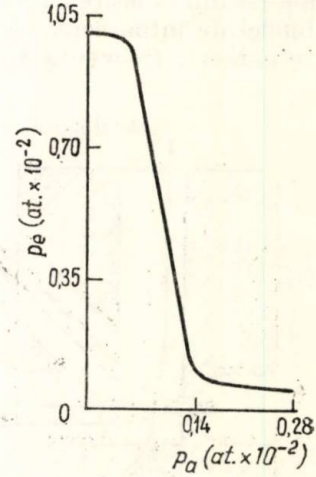


Fig. 9

Unul dintre principalele avantaje ale amplificatorului cu turbulenţă este acela al funcţionării în bune condiţii şi în cazul inadaptării la sarcină, rezultînd o mare posibilitate de interconexiune cu alte dispozitive fluidice. Timpul de răspuns este scăzut, de aproximativ 0,003 s. Acest timp poate fi micşorat prin creşterea numărului Reynolds, rămînînd însă de ordinul a 2—6 ms necesare restabilirii scurgerii laminare după tranziţia turbulentă.

Amplificatorul cu turbulență funcționează la presiuni scăzute de ordinul sutimilor dintr-o atmosferă. Presiunea recuperată la ieșire depinde de menținerea scurgerii laminare în jetul de alimentare, de starea suprafeței interioare a conductelor și de precizia alinierii lor. Sub condiții normale și pentru un amplificator standard s-a obținut o presiune recuperată de aproximativ 30%. Pentru a se obține performanțe bune la ieșire, trebuie ca variația presiunii de alimentare să nu depășească 25% din valoarea ei nominală.

Amplificatorul cu turbulență funcționează ca element logic „NICI", avînd două stări. La ieșire se obține un semnal maxim atunci cînd nu se aplică semnal în conductele de comandă. Toate funcțiile logice pot fi modelate cu ajutorul amplificatorului cu turbulență.

3.3. *Amplificatorul Edgetone.* Acest tip de amplificator (fig. 10) a fost conceput și dezvoltat de către firma „Sperry Utah Co." Funcționarea lui se bazează pe un fenomen dinamic, denumit efect de muchie. Jetul de alimentare, în anumite condiții, oscilează între vîrful divizorului și muchia din apropierea lui, asigurîndu-se o scurgere stabilă la unul

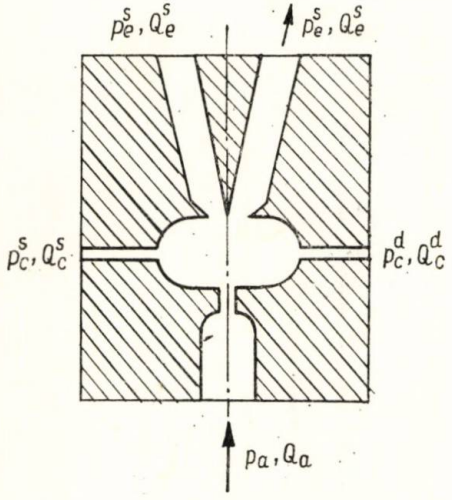


Fig. 10

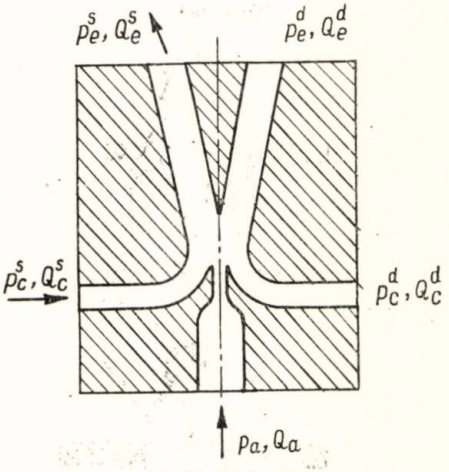


Fig. 11

dintre orificiile de ieșire. Din cauza oscilației inițiale a jetului este necesar un semnal de mică intensitate pentru producerea comutării către celălalt canal de ieșire. Atît timp cît nu există un semnal de comandă, jetul rămîne în noua poziție, continuînd să oscileze între vîrful divizorului și muchie. Timpul de comutare la acest tip de amplificator este scăzut, fiind de ordinul a 0,1 ms.

3.4. *Amplificatorul cu inducție.* Acest amplificator, dezvoltat de către firma „Honeywell", folosește comanda stratului-limită pentru comutarea jetului de alimentare la unul dintre pereți. Deoarece presiunea este scăzută lîngă perete la scurgerea unui jet de comandă, jetul de alimentare aderă la acel perete (fig. 11), poziție în care scurgerea rămîne stabilă. La

acest tip de amplificator, jetul de alimentare rămîne ataşat la peretele de partea căruia se aplică jetul de comandă.

3.5. *Amplificatorul cu jet focalizat.* Acest amplificator (fig. 12) a fost realizat de către firma „Sperry Utah Co.". Forma simetrică permite o fabricare relativ uşoară faţă de dispozitivele plane. Principiul de funcţionare se bazează pe proprietatea jetului circular de a focaliza, putînd fi captat la interiorul unui separator al scurgerii. Prin aplicarea unui jet de comandă, jetul de alimentare este deviat către exteriorul separatorului de scurgere.

Curba variaţiei debitului la ieşire cu presiunea este prezentată în figura 13. Secţiunile foarte mici ale conductelor permit obţinerea unui timp de răspuns scăzut, cuprins între 0,3 şi 0,6 ms pentru diametre variind între 0,1 şi 0,2 mm. Cu toate aceste diametre mici, dipozitivul funcţionează cu debite de alimentare ridicate. Pentru un amplificator experimental

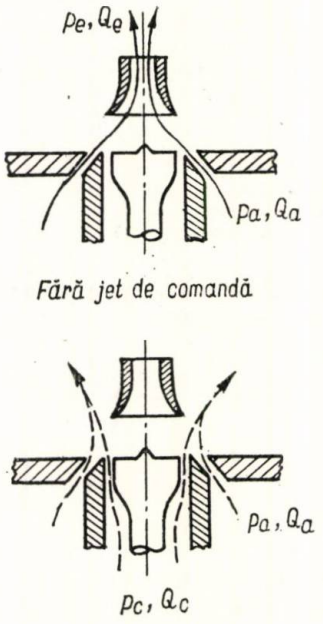


Fig. 12

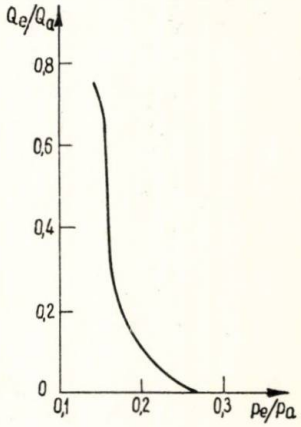


Fig. 13

alimentat la o presiune de 0,21 kgf/cm², debitul minim a fost de aproximativ 1 000 l/h. Domeniul presiunilor în care funcţionează acest amplificator este cuprins între 0,20 şi 1,0 at.

Amplificatorul poate fi folosit ca element logic „NICI". Construcţia sa s-a dovedit foarte bună în ceea ce priveşte izolarea acustică şi de asemenea în ceea ce priveşte uşurinţa de adaptare în diferite circuite fluidice.

4. AMPLIFICATOARE PROPORȚIONALE CU FLUID

4.1. *Amplificatorul cu interacțiune a jeturilor.* Conceput și experimentat de către W. M. Horton, amplificatorul cu interacțiune a jeturilor (fig. 14) funcționează pe principiul devierii unui jet principal de către un jet auxiliar de comandă. Aparent asemănător amplificatorului cu atașare

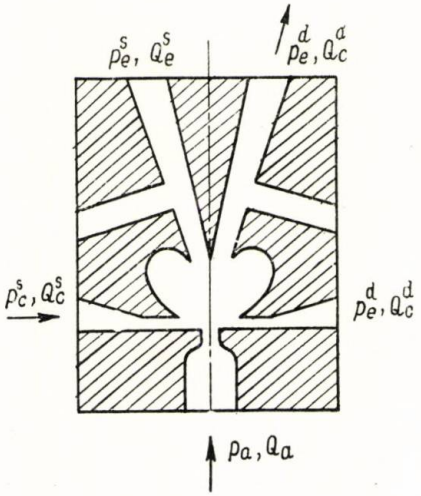


Fig. 14

la perete, acest tip de amplificator diferă de acesta prin forma zonei de interacțiune, care are o influență hotărîtoare în producerea fenomenelor aerodinamice. Prin deplasarea peretelui lateral departe de zona de interacțiune, nu se mai produce atașarea jetului la perete. În lipsa jetului de comandă, jetul de alimentare se scurge prin cele două orificii de ieșire. Aplicînd un semnal de comandă, rezultă un jet deflectat față de axa de simetrie și, prin urmare, se produce o creștere de debit la unul dintre cele două orificii de ieșire.

În anumite limite se poate face o analogie între amplificatorul proporțional și cel cu tuburi electronice, cînd și într-un caz și în altul se urmărește obținerea amplificării unei mărimi de joasă intensitate. Diferența constă însă în natura fenomenelor care apar ca rezultat al suportului energetic pe care se bazează funcționarea acestor elemente. Tuburile electronice folosesc energia cinetică a unui flux de electroni, iar elementele de amplificare cu fluid utilizează energia cinetică a unui jet de gaz.

Calitățile amplificatorului cu interacțiunea jeturilor rezultă parțial din curbele lui caracteristice, care îi determină performanțele în diferite condiții de funcționare.

Pentru amplificatorul proporțional se determină cinci tipuri de caracteristici statice, și anume (fig. 15 *a* — *e*):

— caracteristica de ieșire $Q_e = f(p_e)$;
— caracteristica de transfer $Q_e = f(p_c)$;

— caracteristica de comandă $Q_c = f(p_c)$;
— caracteristica de alimentare $Q_a = f(p_a)$;
— caracteristica de presiune $p_e = f(p_c)$.

Curbele $Q_e = f(p_e)$ şi $Q_e = f(p_c)$ se pot deduce reciproc dacă una dintre ele este dată.

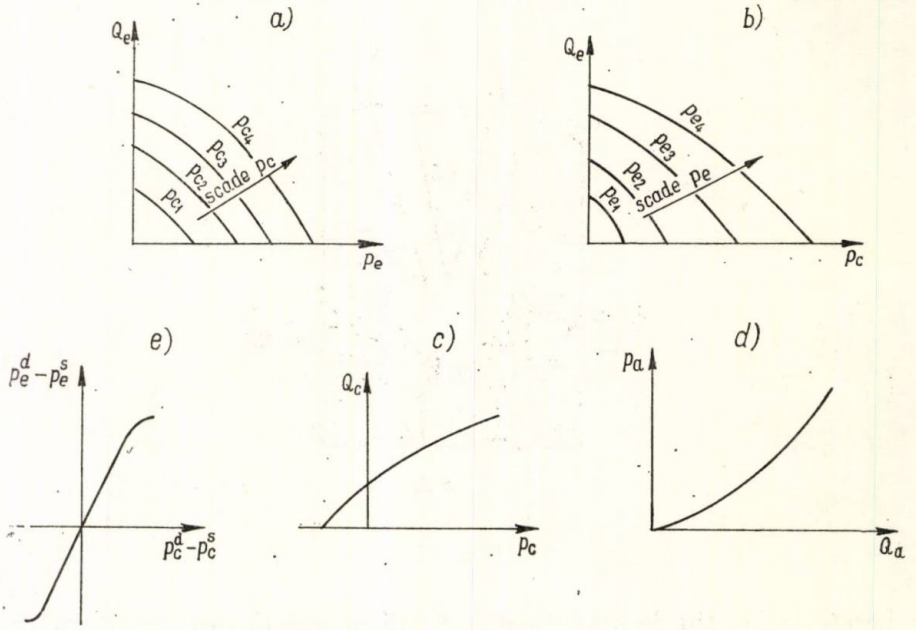


Fig. 15

Comportarea faţă de variaţiile de debit şi presiune la care elementul este supus poate fi caracterizată prin trei coeficienţi de bază:

— factorul de amplificare μ;
— conductanţa β;
— transconductanţa α.

Factorul de amplificare se referă la amplificarea de presiune, de debit şi de putere şi se defineşte în cazul amplificării în presiune prin raportul $\mu = (\partial p_e / \partial p_c)_{Q_e = \text{const.}}$

Conductanţa şi transconductanţa se definesc respectiv prin rapoartele $\beta = -(\partial Q_e / \partial p_e)_{p_c = \text{const.}}$ şi $\alpha = -(\partial Q_e / \partial p_c)_{p_e = \text{const.}}$.

Performanţele amplificatorului cu interacţiunea jeturilor sînt strîns legate de dimensiunile elementului şi de mărimile fizice de la intrare referitoare la presiune şi debit. Pentru o lărgime a canalelor de alimentare de 0,5 mm şi o presiune $p_a = 0{,}35$ at s-a obţinut de către firma „Corning Glass" o amplificare în presiune de 6, o presiune recuperată de 55% şi un răspuns în frecvenţă de peste 1 000 Hz.

Amplificatorul cu interacţiune a jeturilor îşi găseşte utilitatea în circuite pneumatice cu scopul de a reprezenta funcţii analogice şi în sistemele de comandă şi de control al presiunii şi temperaturii.

4.2. *Amplificatorul cu vîrtej.* Configurația tipică a unui dispozitiv de amplificare cu vîrtej este arătată în figura 16. Denumirea lui provine de la mișcarea pe care o are fluidul în interiorul elementului. Fără semnal

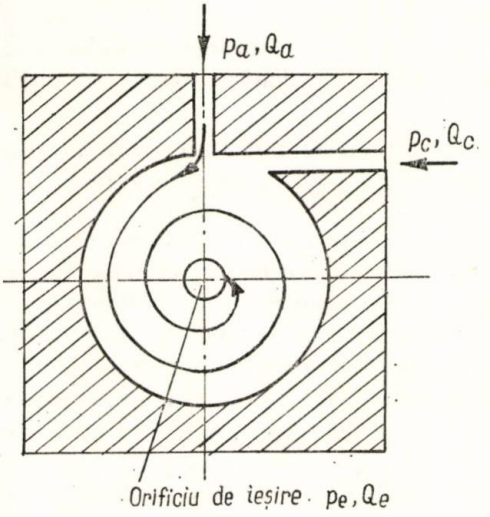


Fig. 16

de comandă, jetul de alimentare se scurge radial spre orificiul de ieșire plasat central, în care caz căderea de presiune este minimă. Prin introducerea jetului de comandă prin canalul plasat tangențial la camera de interacțiune de formă cilindrică, scurgerea are loc după o traiectorie în spirală, ceea ce produce o creștere a căderii de presiune.

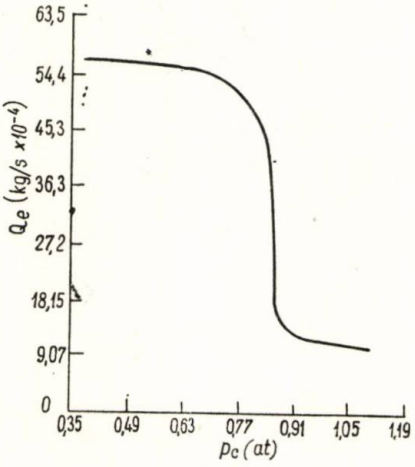


Fig. 17

Variația debitului la ieșire cu presiunea de comandă este dată în figura 17. Se observă o scădere a debitului cu creșterea presiunii de comandă. Performanțele elementelor de acest tip indică o amplificare în

debit şi putere de 200, respectiv 280, în cazul funcţionării la temperatură normală şi o amplificare în presiune cuprinsă între 150 şi 200. Sub condiţii speciale s-a obţinut o amplificare în presiune de aproximativ 7 000. Performanţele amplificatorului sînt sensibile la modificările parametrilor geometrici. Mărimea camerei de interacţiune influenţează asupra timpului de răspuns a amplificatorului, pentru care s-au obţinut valori cuprinse între 0,01 şi 0,0065 s.

Amplificatoarele cu vîrtej pot funcţiona în diferite sisteme de comandă şi de control, precum şi în circuite logice.

4.3. *Amplificatorul cu impact transversal.* Acest tip de amplificator a fost realizat de către firma „Johnson Service Company". În figura 18 se arată construcţia acestui amplificator. Dispozitivul este prevăzut cu două conducte de alimentare, prin care se scurg în sens contrar jeturi de diferite intensităţi. Prin interacţiunea lor rezultă o suprafaţă de impact şi un semnal util în conducta de ieşire, a cărui intensitate depinde de poziţia suprafeţei de impact şi deci de nivelul energetic al celor două jeturi. Cu cît unul dintre jeturi este mai puternic, cu atît suprafaţa de impact se va forma la o distanţă mai mare de secţiunea lui de ieşire. Un jet de comandă introdus perpendicular pe direcţia de scurgere a unuia din jeturile de alimentare îi reduce intensitatea şi prin aceasta deplasează poziţia suprafeţei de impact, micşorînd nivelul semnalului de ieşire. Curba presiunii la ieşire cu presiunea de comandă pentru acest tip de amplificator este dată în figura 19. Pentru o serie de dispozitive experimentate

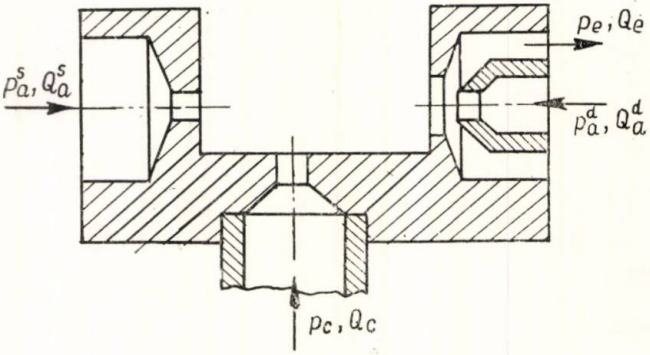


Fig. 18

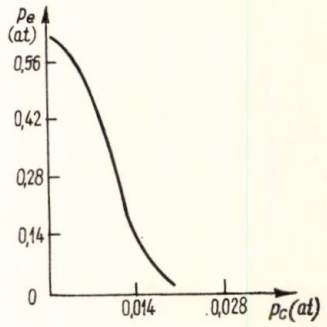


Fig. 19

s-a obţinut o amplificare în debit cuprinsă între 5 şi 30 cu sarcină la ieşire şi o amplificare în presiune cuprinsă între 20 şi 100 în absenţa sarcinii. Pentru 2 şi 4 elemente montate în serie s-a obţinut o amplificare în presiune de 300 şi respectiv 12 000.

4.4. *Amplificatorul cu impact direct.* Amplificatorul cu impact direct a fost conceput de către firma „Johnson Service Co.". Spre deosebire de

amplificatorul cu impact transversal (fig. 20), semnalul de comandă este introdus printr-o conductă concentrică cu aceea a unuia dintre jeturile de alimentare. Se obține astfel o micșorare a secțiunii de trecere a jetului

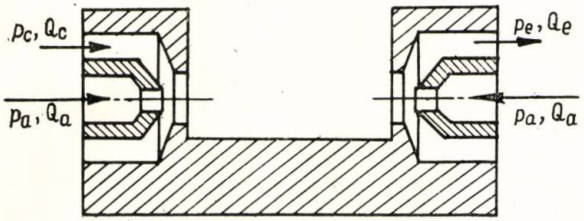


Fig. 20

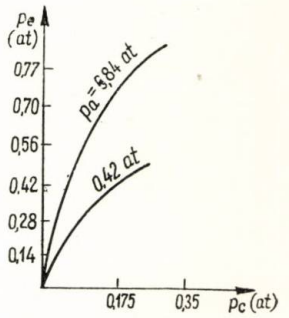


Fig. 21

de alimentare și o deplasare a suprafeței de impact în aval, rezultînd astfel la ieșire o creștere a semnalului util. Curba variației presiunii la ieșire cu presiunea de comandă este arătată în figura 21. Pentru acest tip de amplificator s-a obținut o amplificare maximă în presiune de aproximativ 200, iar pentru două elemente montate în serie de 8 000.

4.5. *Amplificatorul cu cot și picior dublu.* Acest amplificator a fost dezvoltat de către „Giannini Controls Corporation". Funcționarea lui se bazează pe desprinderea stratului-limită de-a lungul peretelui inferior al unui cot, datorită forțelor centrifuge. La ieșirea din cot, profilul de viteze se modifică, rezultînd o creștere a vitezelor în secțiunea de trecere a fluidului. Prin introducerea unui jet de comandă prin canalul plasat în apropierea punctului de desprindere se provoacă deplasarea acestuia în direcția opusă curentului. În acest mod se obține un control al stratului-limită, cu posibilitatea de deplasare a punctului de desprindere și deci o deviere a debitului total spre extremitatea canalului curbat. Elementul de amplificare cu cot și picior dublu (fig. 22) se obține dintr-un cot, la care se adaugă două canale de ieșire, un canal pasiv și un perete divizor. Dispozitivul este astfel conceput, încît jetul de alimentare să se scurgă în egală măsură prin cot și prin canalul pasiv, iar la ieșire prin canalul 02. Prin aplicarea unui jet de comandă, jetul de alimentare se distribuie proporțional între cele două canale de ieșire.

În apropierea orificiului de comandă se adaugă un perete divizor cu rolul de a îmbunătăți scurgerea jetului de alimentare. Peretele divizor influențează asupra amplificării, deoarece există două tendințe, și anume una de atașare și cealaltă de desprindere, datorită forțelor centrifuge.

În figura 23 este dată curba $Q_e = f(Q_c)$ raportată la mărimea jetului de alimentare Q_a.

Din datele publicate asupra performanţelor acestui tip de amplificator rezultă o amplificare în debit, presiune şi putere în condiţiile funcţionării statice de 300, 3 şi respectiv 500. S-a observat că amplificarea scade cu frecvenţa de lucru şi de aceea aplicaţiile practice cu acest tip de element trebuie să fie cuprinse în domeniul frecvenţelor joase.

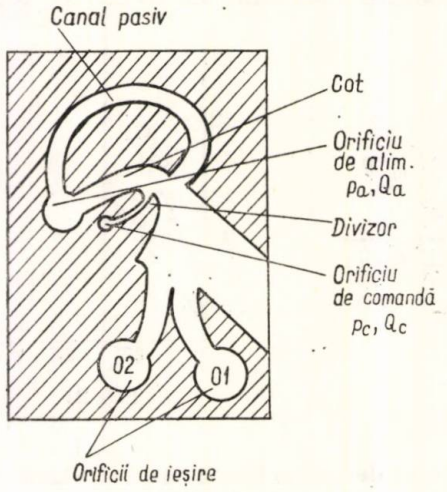


Fig. 22

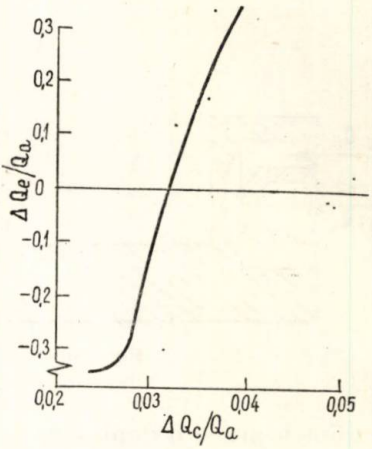


Fig. 23

Primită la redacţie la 28 noiembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. E. F. Humphrey, D. H. Tarumoto, *Fluidics, Fluid Amplifier Associates*, Boston, Mass., 1965.
2. R. W. Warren, S. I. Peperone, *Fluid Amplification-Basic Principles*, TR 1039, august, 1962.
3. P. Marinescu, V. Toma, Şt. Săvulescu, *Cercetări experimentale asupra elementelor de amplificare cu fluid de tip bistabil*, St. cerc. mec. apl., **28**, 6 (1969).
4. P. V. Marinescu, *Caracteristicile statice ale amplificatorului proporţional cu interacţiunea jeturilor*, Automatica şi electronica, 3 (1970).

RECENZIE

D. TUTUNARU, *Mecanisme plane rectiliniare şi inversoare*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1969, 304 p.

Tema tratată de autor sub titlul de mai sus este actuală şi foarte necesară în toate sectoarele industriei, în proiectare şi în construcţie. Pe lîngă faptul că prezintă unele rezultate clasice într-o formă nouă, lucrarea cuprinde şi cercetările valoroase ale autorului în domeniul realizării de noi mecanisme utile producţiei. Mecanismele prezentate sînt însoţite de demonstraţii şi de justificări teoretice, ceea ce face ca lucrarea să constituie o adevărată legătură între tehnică şi ştiinţă, punînd la dispoziţia proiectanţilor şi a constructorilor, ca şi celor din exploatare, suportul ştiinţific pentru proiectarea, construirea şi studiul sistemelor mecanice necesare creşterii productivităţii muncii şi ridicării calităţii produselor.

Materialul lucrării este desfăşurat în două părţi : a) elemente de structură şi cinematică a mecanismelor plane şi b) elemente de analiză şi sinteză a mecanismelor plane. În prima parte se face o introducere privind structura mecanismelor plane, în care trebuie subliniată îndeosebi acceptarea cuplelor multiple compuse din elemente înlănţuite şi o analiză critică a diverselor clasificări ale mecanismelor. Se continuă cu mişcarea plană a corpului material, redîndu-se atît teoria centroidelor cu noţiunile, problemele şi caracteristicile sale, cît şi unele realizări practice, printre care subliniem formarea mecanismelor prin metoda originală a translaţiei circulare. Sînt expuse problemele şi rezolvările mişcărilor relative, făcîndu-se o distincţie netă, dar foarte utilă în practică, pentru determinările vitezelor şi acceleraţiilor în mecanismele cu articulaţii şi în mecanismele cu cuple de translaţie sau cu cuple superioare.

Pentru trasarea centroidelor trebuie evidenţiată realizarea de centroidografe, care, în cele mai multe cazuri, se obţin prin adăugarea la mecanismul iniţial al unei diade TRT (aspect 4) redusă, astfel încît cupla de rotaţie să corespundă chiar cu centrul instantaneu al vitezelor. Prima parte se încheie cu capitolul de pantografe şi de inversoare, în care sînt redate diferite mecanisme cu o largă şi importantă utilizare în tehnică pentru reproducerea curbelor, pentru transmiterea mişcărilor de rotaţie, pentru realizarea dreptelor paralele, pentru transformarea cercurilor şi dreptelor şi pentru ghidare rectiliniară.

În partea a doua sînt tratate mai întîi curbele de bielă cu proprietăţile lor, construcţiile razelor de curbură, construirea profilelor camelor printr-o curbă generatoare şi formarea diverselor mecanisme cu şase elemente împreună cu calculul lor analitic. Dar această parte se remarcă în special prin numeroasele exemple de mecanisme utile în practică, atît clasice, cît şi noi inventate, ca elipsografe pentru trasarea diverselor curbe, pentru realizarea de relaţii matematice, pentru construcţia profilelor aerodinamice etc.

În prezent, materialul lucrării completează în bune condiţii lucrările pentru studenţi şi monografiile apărute în teoria mecanismelor şi maşinilor. Lucrarea va permite specialiştilor, dotaţi cu spirit inventiv, să creeze noi mecanisme şi instalaţii-dispozitive pentru necesităţile procesului de automatizare, folosind principiile fundamentale ale metodelor de construcţie.

Chr. Pelecudi

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI
1948
KÖNYVTÁRA

F 2557

4

TOMUL 30

1 9 7 1

STUDII ŞI CERCETĂRI DE

MECANICĂ APLICATĂ

EDITURA ACADEMIEI REPUBLICII SOCIALISTE ROMÂNIA

Comitetul de redacție

Acad. E. CARAFOLI, *redactor responsabil*,
Acad. D. DUMITRESCU, *redactor responsabil adjunct*,
Prof. I. ANTON, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CONSTANTIN AVRAM, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Acad. ȘTEFAN BĂLAN,
Prof. GH. MANEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. CR. MATEESCU, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Ing. N. PATRAULEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. N. TIPEI, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU VOINEA, membru corespondent al Academiei Republicii Socialiste România,
Prof. RADU C. BOGDAN,
Conf. DAN PAVELESCU,
Prof. T. OROVEANU, *secretar de redacție*.

În țară abonamentele se primesc la oficiile poștale, agențiile poștale, factorii poștali și difuzorii de presă din întreprinderi și instituții. Comenzile de abonamente din străinătate se primesc la Întreprinderea de comerț exterior „Libri", căsuța poștală 134 — 135 (Calea Victoriei 126), București, România, sau la reprezentanții săi din străinătate.

Manuscrisele, cărțile și revistele pentru schimb, precum și orice corespondență, se trimit pe adresa Comitetului de redacție al revistei.

REVISTA APARE DE 6 ORI PE AN

Redacția : București,

Str. Const. Mille nr. 15, tel. 13.83.26

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 30, nr. 4 1971

SUMAR

STUDII

Pag.

IOAN ANTON, Influenţa parametrilor geometrici şi cinematici asupra caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale turbinelor axiale. II 755

C. TEODORESCU-ŢINTEA, Consideraţii teoretice asupra curgerii prin ajutajele cu reţele depresive 773

P. BRĂDEANU, ELISABETA BALOGH, Stratul-limită disipativ pe corpuri ale căror suprafeţe au temperatură variabilă (Soluţii automodelate) 799

ŞT. N. SĂVULESCU, N. APOSTOLESCU, Soluţii numerice în curgerea tranziţională şi turbulentă prin conducte şi canale 811

T. OROVEANU, Asupra injecţiei fluidelor calde în zăcămintele de petrol. II. 823

NICOLAE MOŞU, Determinarea pulsaţiilor proprii torsionale ale arborilor cotiţi . . . 833

N. POSEA, S. MURGULESCU, Asupra amortizării vibraţiilor la oscilaţii după formele proprii 851

I. SAVA, S. CONONOVICI, Asupra vibraţiilor de încovoiere ale tachetului în funcţionarea mecanismelor cu came 869

CHR. PELECUDI, G. M. GIUROVICI, Precizia determinării poziţiilor în mecanismele plane mono şi bicontururi 881

PĂUN ANTONESCU, Contribuţii la sinteza cinematică a mecanismelor plane cu patru elemente 915

VIRGIL BOGDAN, Asupra stărilor de eforturi unitare şi de deformaţii dintr-un disc axial-simetric în mişcare de rotaţie 925

MAGDALENA POSEA, O metodă exactă pentru calculul ondulării circumferenţiale a flanşelor 935

V. IONUŢ, L. MORAR, Aspecte ale corectării abaterilor de formă la honuirea bucşelor cu pereţi subţiri 955

GHERMAN DRĂGHICI, SERGIU T. CHIRIACESCU, Calculul durabilităţii sculei şi regimului de aşchiere folosind programarea matematică 975

GH. VASILCA, S. MOLDOVAN, V. RASZILLIER, N. DUCA, Influenţa neomogenităţilor structurale ale materialului asupra apariţiei fenomenului de oboseală în mişcarea de rostogolire 1001

RECENZII 1013

St. cerc. mec. apl., tom. 30, nr. 4, p. 753—1014, 1971

1989

BME KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
F
2557
FOLYÓIRAT OSZTÁLY

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM
KÖZPONTI
1848
KÖNYVTÁRA

Budapesti Műszaki Egyetem
Központi Könyvtára
Folyóiratcsere
527/1972

INFLUENȚA PARAMETRILOR GEOMETRICI ȘI CINEMATICI ASUPRA CARACTERISTICILOR ENERGETICE ȘI CAVITAȚIONALE ALE TURBINELOR AXIALE. II

de IOAN ANTON
Institutul politehnic Timișoara

Se prezintă noi relații pentru studiul coeficientului de cavitație al turbinei, în funcție de coeficientul vitezei tangențiale periferice, de coeficientul de deviație al curentului prin rețele de profile și de coeficientul de presiune minimă de pe paletă. Se analizează influența diferiților parametri asupra coeficientului de cavitație de la butuc și periferie. Valorile obținute cu aceste relații sînt în deplină concordanță cu rezultatele experimentale.

1. INTRODUCERE

În ultimul timp, o dată cu creșterea turației turbinelor și cu reducerea cheltuielilor prin realizarea unei înălțimi de aspirație ridicate, o importanță deosebită capătă în construcția și exploatarea turbinelor comportarea acestora la cavitație. Această comportare este caracterizată prin coeficienții de cavitație ai turbinei σ_T și ai instalației σ_{inst}.

Acești coeficienți sînt determinați experimental în laborator pe model și în natură pe turbina prototip. Pe baza rezultatelor experimentale sînt oferite relații statistice sau tabele ale acestor coeficienți pentru diferite turații specifice. În această lucrare se vor oferi relații pentru calculul coeficienților de cavitație și se va analiza influența diferiților parametri asupra acestora.

2. COEFICIENȚI DE CAVITAȚIE

Într-o lucrare anterioară [1], coeficientul de cavitație al turbinei la o rază oarecare r a fost exprimat sub forma

$$\sigma_{T_r} = k_{p\max 2r}\,\frac{w_{2r}^2}{2gH} + \eta_{lta}\frac{v_{2r}^2}{2gH} - k_{ur}\frac{u_{2r}^2}{2gH} \pm \frac{a_M D}{H}, \qquad (1)$$

iar coeficientul de cavitaţie al instalaţiei sau coeficientul lui Thoma [2] este

$$\sigma_{inst} = \frac{A - A_t \mp hs}{H}. \tag{2}$$

În cazul turbinelor Kaplan verticale, $k_{ur} = \left(\frac{u_{Mr}}{u_r}\right)^2 - 1 \cong 0$ şi $\frac{a_M D}{H} \cong 0$, iar σ_{T_r} este

$$\sigma_{T_r} = k_{p\max 2r} \frac{w_{2r}^2}{2gH} + \eta_{ta} \frac{v_{2r}^2}{2gH}. \tag{3}$$

Dacă se exprimă acest coeficient în funcţie de coeficienţii de bază şi de coeficienţii derivaţi definiţi în prima parte a lucrării, se obţine pentru raza $r\left(\delta_r = \frac{r}{R}\right)$

$$\sigma_{T_r} = \left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\delta_r^2} \cdot \frac{1}{\delta_{u_r}^2} \left\{ k_{p\max 2r} \left[1 + \delta_{u_r}^2 \left(\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_r \right)^2 \right] + \eta_{ta} (1 + k_r^2 \delta_{u_r}^2 \right\}. \tag{4}$$

Astfel, coeficientul de cavitaţie este exprimat în funcţie de:

— coeficientul vitezei tangenţiale periferice:

$$k_{u_R} = \frac{1{,}06\, n_s^{*3/5}}{\eta_T^{1/3}};$$

— coeficientul de deviaţie al curentului la trecerea prin reţea:

$$\delta_{u_r} = \frac{\Delta v_{u_r}}{v_{m_r}} = \frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2} \cdot \frac{1 - \nu^2}{\varphi_s} \cdot \frac{1}{\delta_r}; \tag{5}$$

— coeficientul de presiune minimă pe profil $k_{P_{\max 2r}} = \left(\frac{w_{2\max}}{w_{2r}}\right)^2 - 1$;

— randamentul hidraulic η_h şi randamentul tubului de aspiraţie η_{ta};

— coeficientul de torsionare $k_r = \frac{v_{3u_r}}{\Delta v_{u_r}}$ al curentului la ieşire din rotor.

Deoarece pericolul apariţiei cavitaţiei la maşinile axiale verticale este la periferia paletei sau la butuc, se va urmări analiza coeficienţilor

σ_{T_e} (periferie) și σ_{T_i} (butuc):

$$\sigma_{T_e} = \left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\delta_{u_e}^2} \left\{ k_{p_{\max 2e}} \left[1 + \delta_{u_e}^2 \left(\frac{1}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_e \right)^2 \right] + \eta_{ta} (1 + k_e^2 \delta_{r_e}^2) \right\}, \quad (6)$$

$$\sigma_{T_i} = \left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\delta_{u_i}^2} \left\{ k_{p_{\max 2i}} \left[1 + \delta_{u_i}^2 \left(\frac{\nu^2}{\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}} - k_i \right)^2 \right] + \eta_{ta} (1 + k_i^2 \delta_{u_i}^2) \right\}, \quad (7)$$

unde $\nu = \frac{d}{D}$ este diametrul relativ al butucului.

Se observă că acești coeficienți de cavitație sînt exprimați în funcție de coeficienții care au stat la baza exprimării elementelor geometrice, cinematice și unghiulare ale rotorului turbinei Kaplan. În expresia coeficienților de cavitație mai intervine ca parametru principal coeficientul de presiune minimă pe paletă.

2.1. *Coeficientul de presiune minimă pe paletă.* Acest coeficient, denumit și sensibilitate la cavitație al profilului [3], [4], se exprimă sub forma $k_{p_{\max T}} = k_{p_{\max 2r}} = \left(\frac{w_{\max}}{w_2}\right)^2 - 1$, preluată de la profilele singulare sau dispuse în rețea. Numachi [5]—[7] exprimă acest coeficient atît, pentru profilul singular, cît și pentru rețea sub forma $k_{p_{\max \infty}} = \left(\frac{v_{\max}}{v_\infty}\right)^2 - 1$, iar alții îl exprimă în raport cu viteza de la intrare $k_{p_{\max 1}} = \left(\frac{w_{\max}}{w_1}\right)^2 - 1$. Toate aceste exprimări fac ca valorile coeficientului presiunii minime să varieze de la cercetător la cercetător, ceea ce este cauza unor confuzii și erori de calcul.

În figura 1 este reprezentată variația acestui coeficient cu incidența pentru profilul singular Clark Y 8, studiat experimental [7] și teoretic [4].

Comportarea unor profile în rețea pe baza cercetărilor din tunelul hidrodinamic, efectuate de Numachi [5], [6], este redată în figura 2.

Variația cu debitul a coeficientului de presiune minimă pe paleta unei turbine axiale este redată în figura 3 conform cercetărilor lui Kviatkovski [8]. Din cele trei figuri rezultă că legea de variație a acestui coeficient pentru profilul singular, pentru profilul dispus în rețea de turbină și pentru rotorul mașinii axiale este aceeași. Chiar și valorile obținute sînt destul de apropiate.

În funcționarea optimă a mașinilor axiale din punct de vedere cavitațional se impune realizarea unor valori cît mai scăzute pentru coeficientul $k_{p_{\max}}$ și curbele $k_{p_{\max}} = f(\alpha)$ sau $k_{p_{\max}} = f(Q)$ să fie cît mai plate

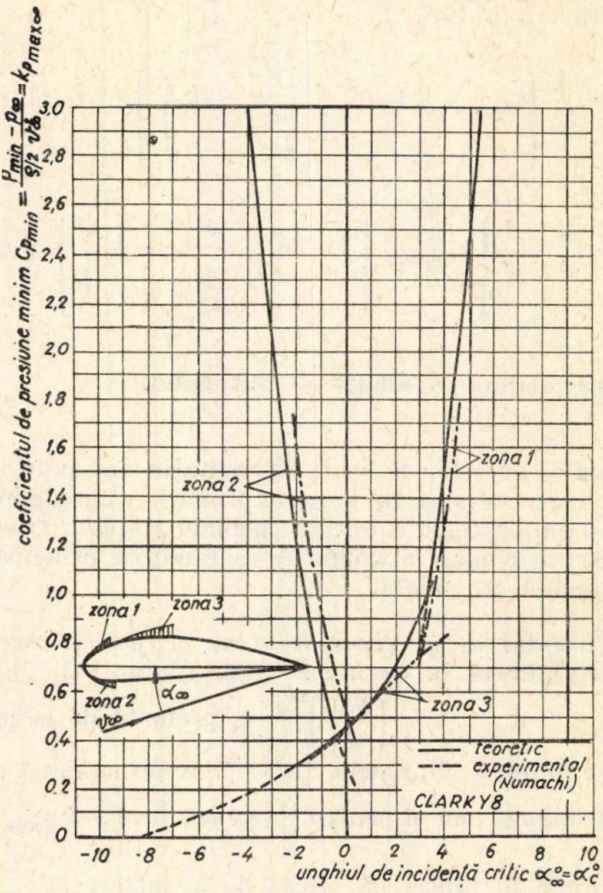

coeficientul de presiune minim $C_{p_{min}} = \frac{p_{min} - p_\infty}{\rho/2\, \vartheta_\infty^2} = k_{p\,max\,\infty}$
zona 1
zona 2
zona 3
α_∞
ϑ_∞
teoretic
experimental (Numachi)
CLARKY8
unghiul de incidență critic $\alpha_\infty^\circ = \alpha_c^\circ$

Fig. 1

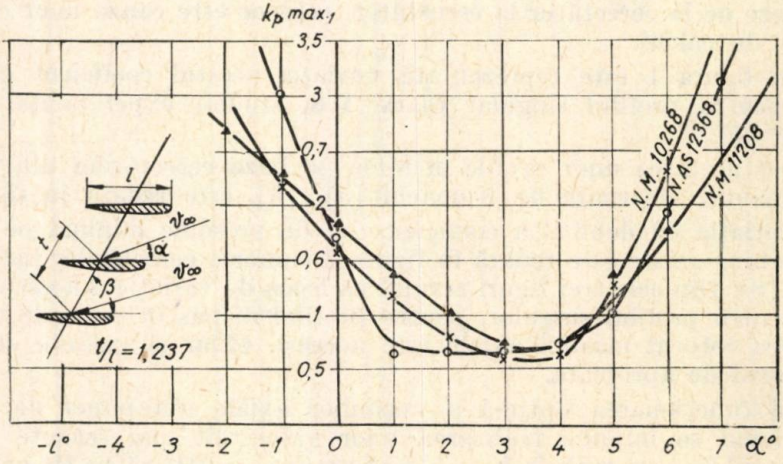

$k_p\,max_{-1}$
N.M. 10268
N.AS 12368
N.M. 11208
l
t
ϑ_∞
α
β
$t/l = 1,237$
α°

Fig. 2

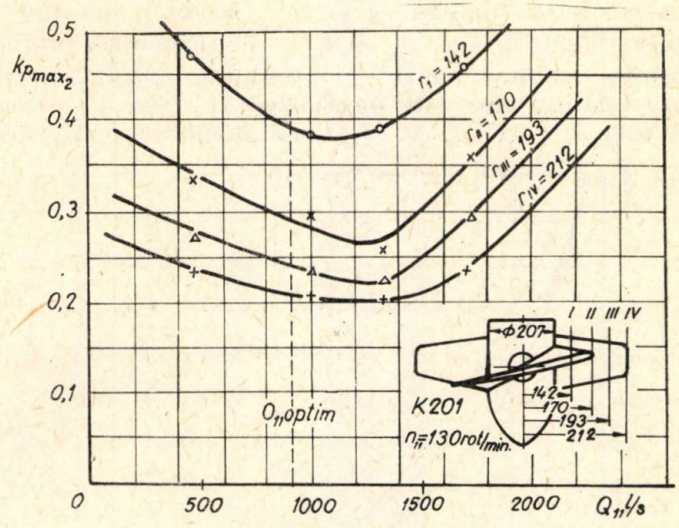


Fig. 3

[1]. Expresii matematice care să ne permită calculul exact al valorilor acestui coeficient și al influenței geometriei profilului respectiv al rețelei asupra acestuia nu există în literatură.

Etinberg [9], [10], folosind unele rezultate teoretice și experimentale, oferă o relație semiempirică care permite calculul coeficientului $k_{p_{max}}$ corespunzător apariției cavitației în zona 3 (fig. 1).

Expresia stabilită de Etinberg este

$$k_{p_{max2r}} = \frac{1}{4}\left(C_a \frac{l}{t}\right)_r \left(\frac{t}{l}\right)_r^2 + \frac{\Delta_r - 0{,}03}{\left(\frac{t}{l}\right)_r}. \tag{8}$$

Dar, cum în prima parte a prezentei lucrări s-a stabilit

$$\left(C_{a_r} \frac{l}{t}\right)_r \cong 2\delta_{u_r} \cdot \sin\beta_{\infty r}, \tag{9}$$

rezultă

$$k_{p_{max2r}} = \frac{1}{4}\left(\frac{t}{l}\right)^2 2\delta_{u_r} \sin\beta_{\infty_r} + \frac{\Delta_r - 0{,}03}{\left(\frac{t}{l}\right)_r} \tag{10}$$

sau

$$k_{p_{max2r}} = \frac{1}{4}\left(\frac{t}{l}\right)_r^2 \cdot 2\delta_{u_r} \frac{1}{\sqrt{1 + \delta_{u_r}^2 \left[\frac{\delta_r^2}{\frac{\eta_{lh}}{2k_{u_R}^2}} - k_r - \frac{1}{2}\right]^2}} + \frac{\Delta r - 0{,}03}{\left(\frac{t}{l}\right)_r}. \tag{11}$$

Din aceste relații rezultă că și $k_{p_{max}}$ poate fi exprimat în funcție de coeficienții principali, k_{u_R}, δ_{u_R} și k_r, și de geometria profilelor și rețelei, Δr, grosimea maximă relativă a profilului, și $(t/l)_r$, desimea rețelei.

În baza analizei efectuate de Susko [11] (fig. 4), pentru Δ se va admite la butuc $\Delta_i = 0{,}15$ și $\Delta_i = 0{,}11$, iar la periferie $\Delta_e = 0{,}04$.

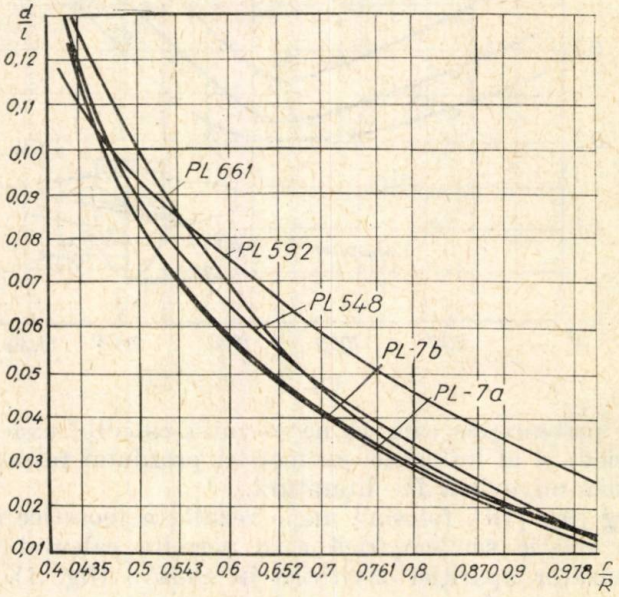


Fig. 4

În acest caz, coeficientul de presiune minimă se va scrie

$$k_{p_{max2i}} = \frac{1}{4}\left(C_{a_r}\frac{l}{t}\right)_i\left(\frac{t}{l}\right)_i^2 + \frac{0{,}12}{\left(\frac{t}{l}\right)_i}, \tag{12}$$

$$k_{p_{max2i}} = \frac{1}{4}\left(C_{a_r}\frac{l}{t}\right)_i\left(\frac{t}{l}\right)_i^2 + \frac{0{,}08}{\left(\frac{t}{l}\right)_i}, \tag{12'}$$

$$k_{p_{max2i}} = \frac{1}{4}\left(C_{a_r}\frac{l}{t}\right)_i\left(\frac{t}{l}\right)_i^2 + \frac{0{,}01}{\left(\frac{t}{l}\right)_i}. \tag{12''}$$

În vederea discuției acestor relații și a valorilor coeficientului de presiune minimă, se va admite, ca și în prima parte a acestei lucrări variația cu turația specifică a desimii rețelei și două variante pentru $\delta_{u_i} = f(n_s)$, respectiv pentru $\nu = f(n_s^*)$, astfel:

$$\delta_{u_{i_I}} = -0{,}314\, n_s^* + 1{,}9735, \tag{13}$$

$$\delta_{u_{i_{II}}} = -0{,}23225\, n_s^* + 1{,}61818. \tag{13'}$$

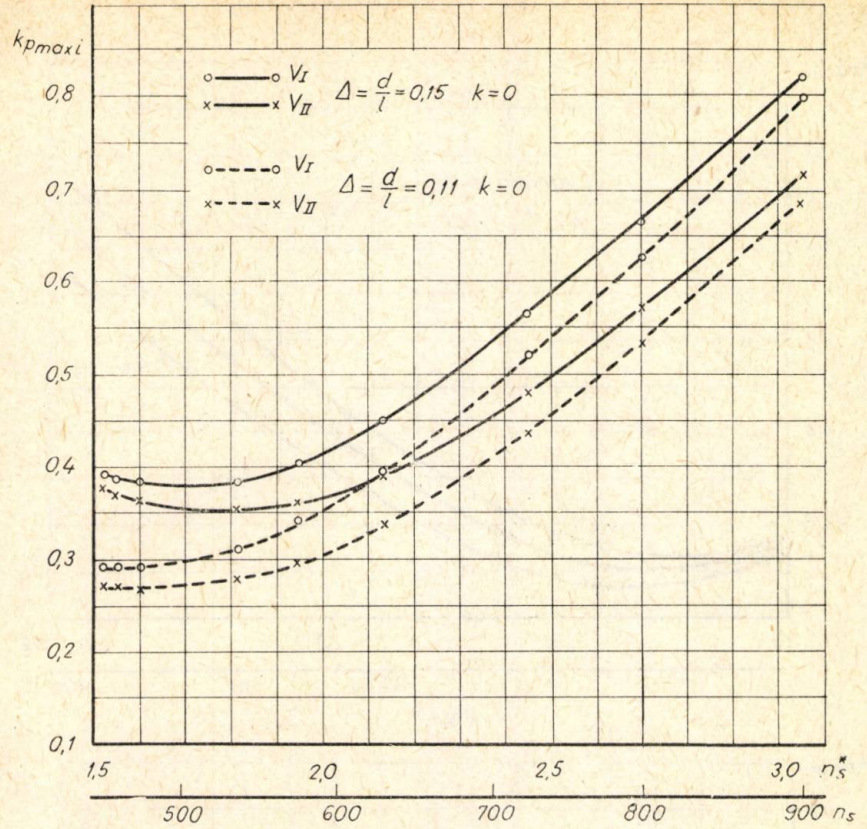

kpmaxi
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
VI
VII
Δ = d/l = 0,15 k = 0
VI
VII
Δ = d/l = 0,11 k = 0
1,5
2,0
2,5
3,0
n*s
500
600
700
800
900
ns

Fig. 5

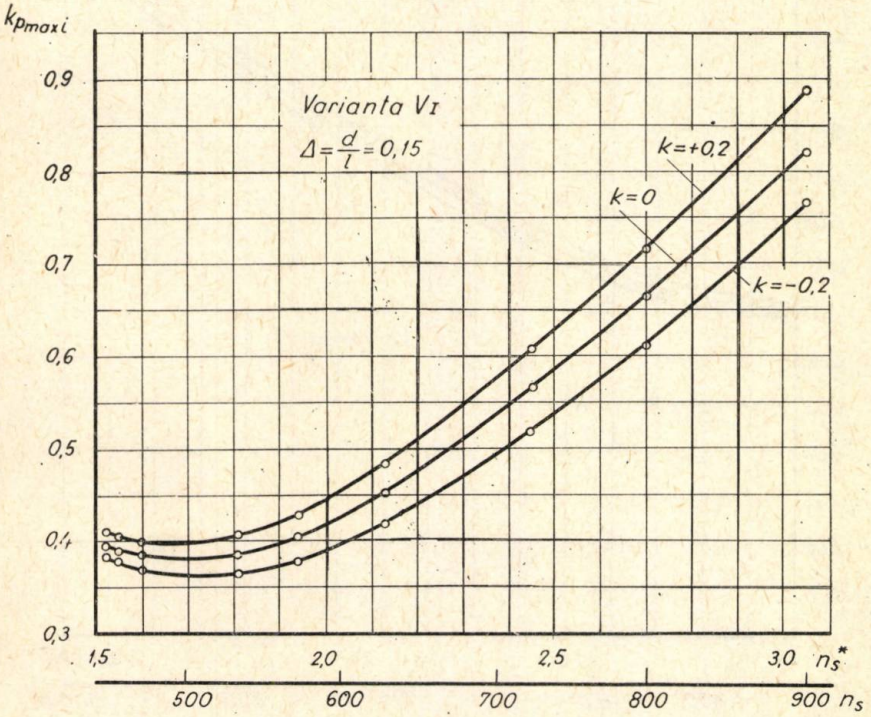

kpmaxi
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
Varianta VI
Δ = d/l = 0,15
k=+0,2
k=0
k=-0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n*s
500
600
700
800
900
ns

Fig. 6

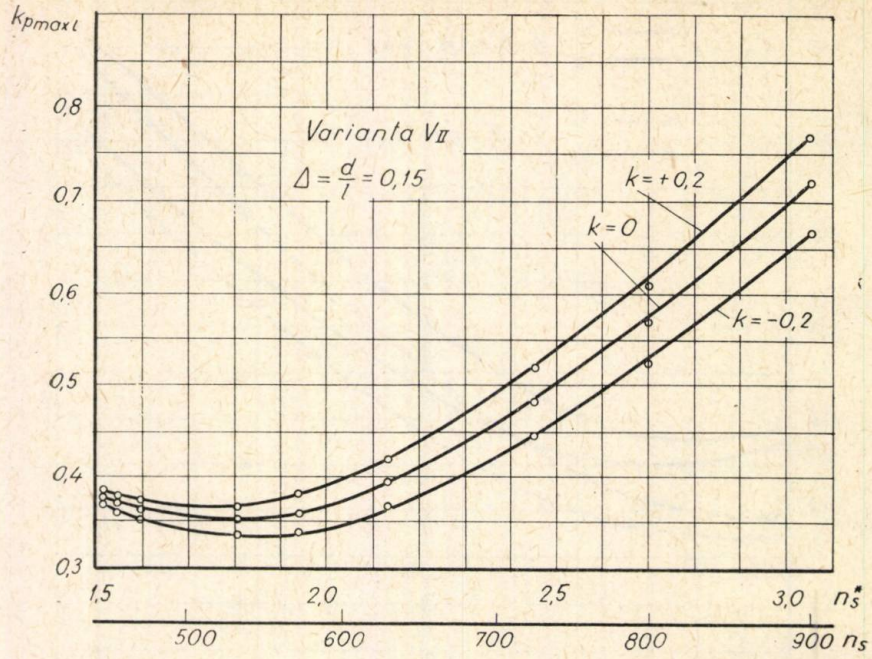

kpmaxt
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
Varianta VII
Δ = d/l = 0,15
k = +0,2
k = 0
k = −0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n*s
500
600
700
800
900
ns

Fig. 7

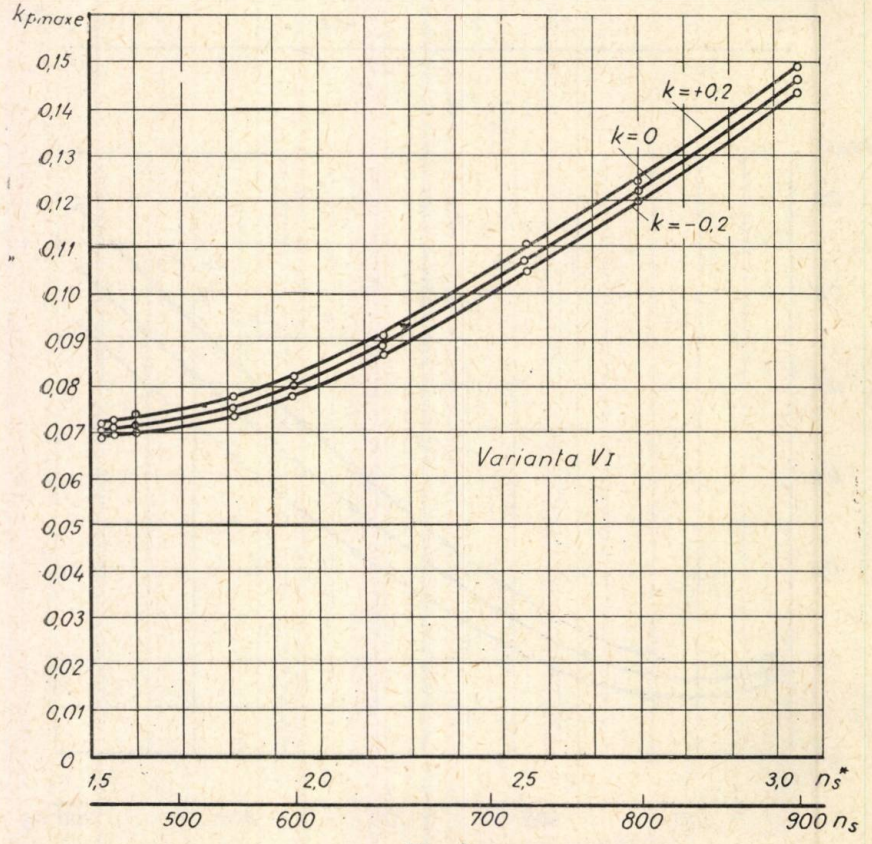

kpmaxe
0,15
0,14
0,13
0,12
0,11
0,10
0,09
0,08
0,07
0,06
0,05
0,04
0,03
0,02
0,01
0
k = +0,2
k = 0
k = −0,2
Varianta VI
1,5
2,0
2,5
3,0
n*s
500
600
700
800
900
ns

Fig. 8

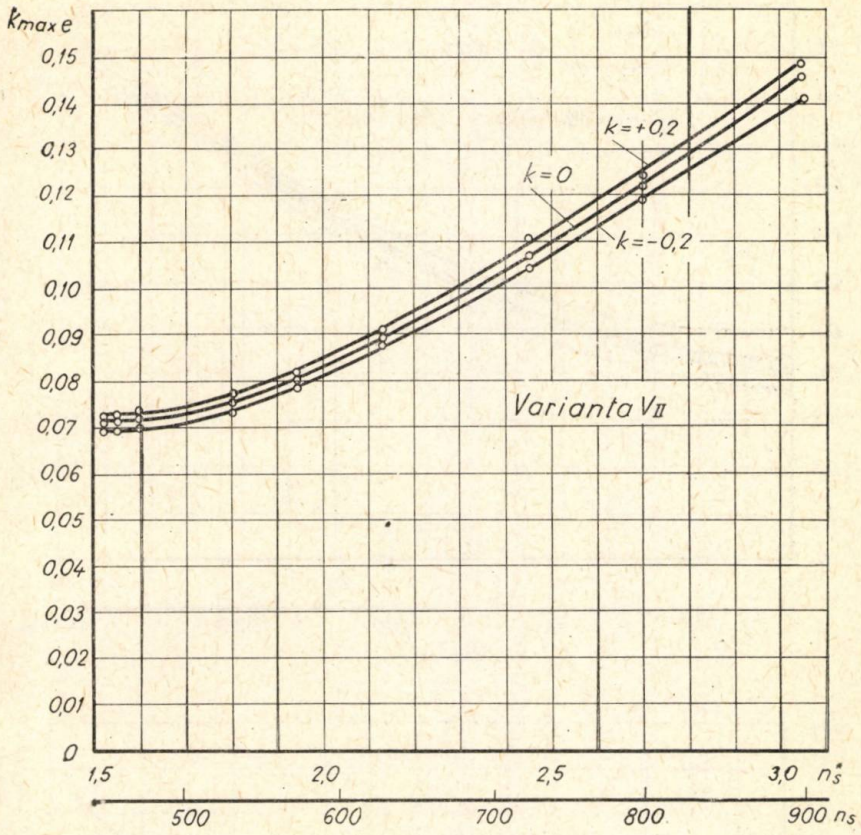


Fig. 9

Din figura 5 rezultă că o îngroşare a profilului de lîngă butuc şi o subţiere a diametrului butucului (V_{II}) provoacă o majorare a coeficientului de presiune minimă $k_{p_{max2i}}$. Acest coeficient creşte cu turaţia specifică.

Torsionarea pozitivă a curentului de la ieşire din rotor conduce de asemenea la creşterea acestui coeficient lîngă butuc în cazul celor două variante admise (fig. 6 şi 7).

Coeficientul $k_{p_{max2e}}$ creşte cu torsionarea pozitivă a curentului la ieşire din rotor şi cu turaţia specifică pentru ambele variante. Influenţa torsionării curentului asupra acestui coeficient pentru reţeaua periferică este neesenţială. De asemenea, diametrul butucului influenţează relativ puţin valorile acestui coeficient (fig. 8 şi 9).

2.2. *Influenţa grosimii profilului şi a torsionării curentului asupra coeficientului de cavitaţie la butuc.* Grosimea maximă relativă Δi, după cum rezultă din figura 10, influenţează coeficienţii de cavitaţie în ambele variante V_I şi V_{II}, în sensul majorării lor, atunci cînd profilele sînt mai groase.

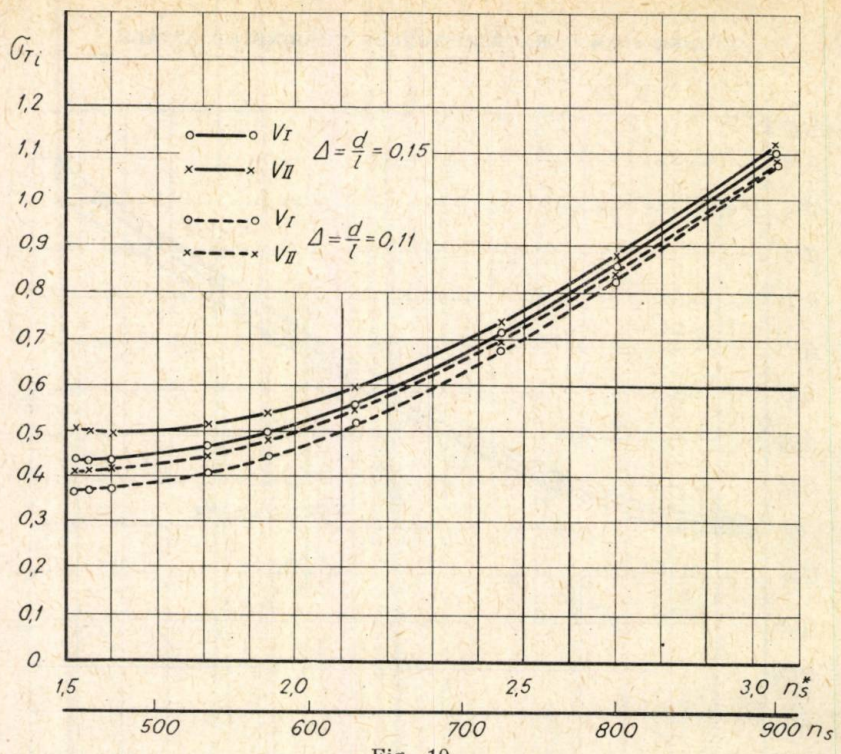

σ_{Ti}
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
VI
VII
$\Delta = \frac{d}{l} = 0,15$
VI
VII
$\Delta = \frac{d}{l} = 0,11$
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 10

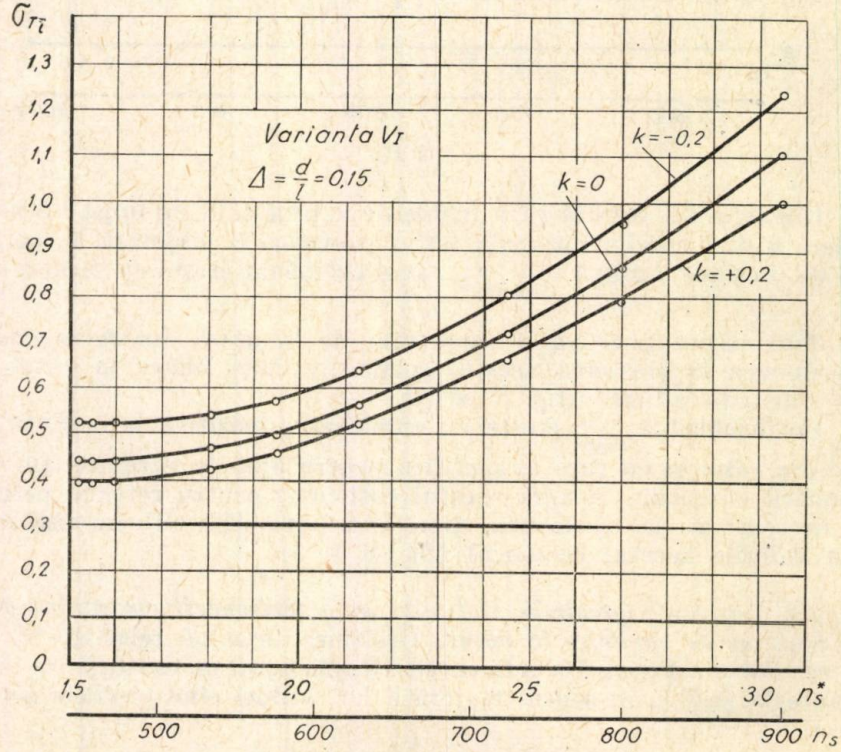

σ_{Ti}
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Varianta VI
$\Delta = \frac{d}{l} = 0,15$
k = -0,2
k = 0
k = +0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 11

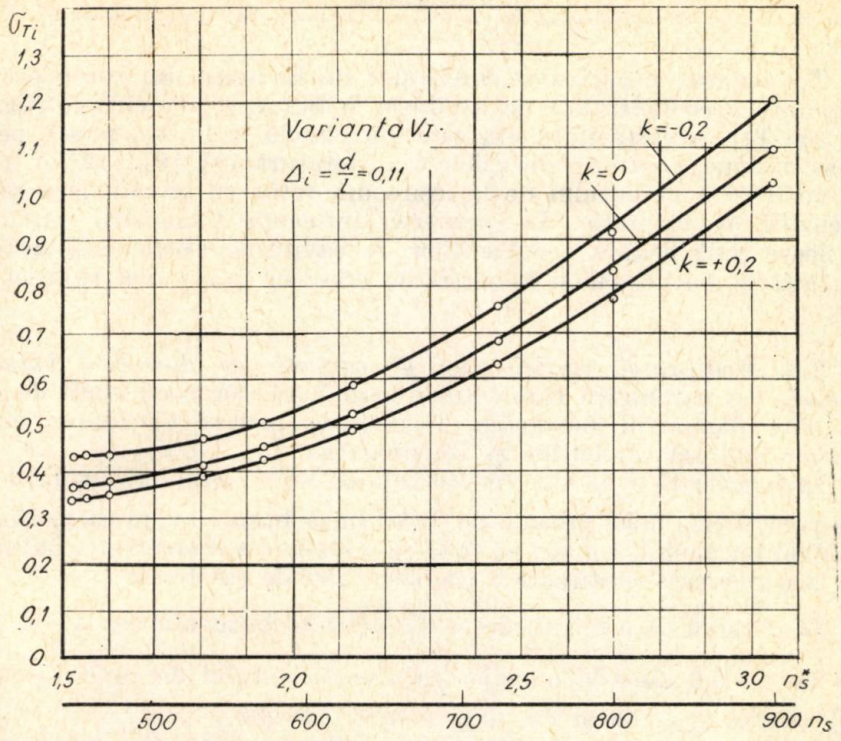

σ_{Ti}
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Varianta VI
$\Delta_i = \frac{d}{l} = 0,11$
k=-0,2
k=0
k=+0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 12

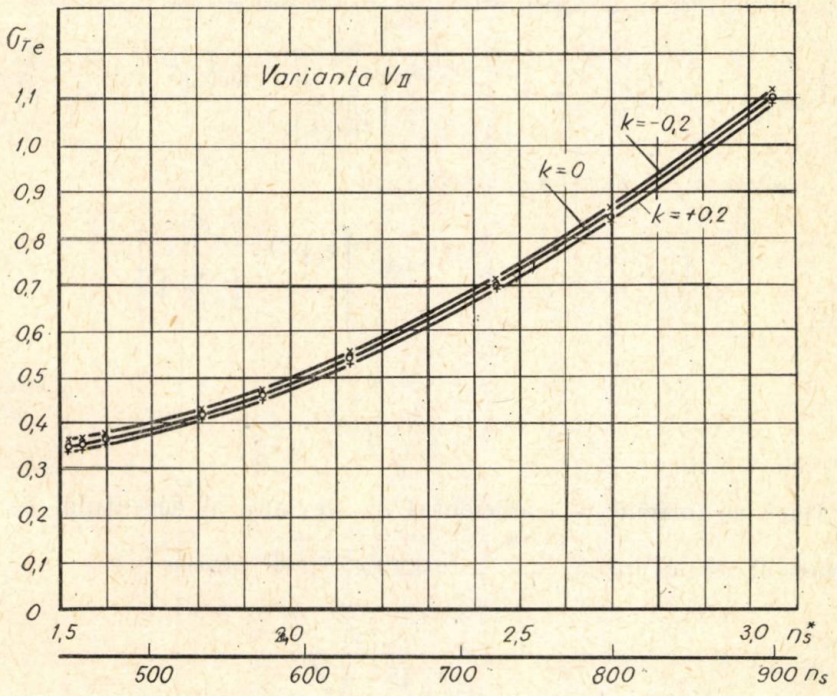

σ_{Te}
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Varianta VII
k=-0,2
k=0
k=+0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 13

Torsionarea negativă a curentului de la ieşire din rotor produce o majorare a coeficienţilor de cavitaţie la butuc şi la periferie (fig. 11, 12, 13 şi 14). Această influenţă este apreciabilă la butuc, motiv pentru care se impune, contrar indicaţiilor din literatură [8], [9], [12], o torsionare pozitivă a curentului de la ieşire din rotor cu scopul de a reduce coeficienţii de cavitaţie. La periferie, influenţa torsionării curentului este neesenţială asupra coeficienţilor de cavitaţie. Coeficienţii de cavitaţie, atît la butuc, cît şi la periferie, cresc cu majorarea turaţiei specifice.

2.3. *Modificarea coeficienţilor de cavitaţie cu diametrul butucului rotorului.* Un parametru care influenţează hotărîtor coeficienţii de cavitaţie este diametrul butucului. Cercetările pentru elucidarea acestei probleme sînt relativ puţine şi nesistematice [9], [12].

În figurile 15 şi 16 sînt redate valorile lui σ_{T_i} la diferite turaţii specifice pentru cele două grosimi de profil lîngă butuc, avînd ca parametru diametrul butucului. De aici se vede că o scădere a diametrului butucului duce la o reducere simţitoare a coeficientului de cavitaţie.

Se observă că o modificare a diametrului butucului de la $\nu = \frac{d}{D} = 0{,}3$ la $\nu = 0{,}6$ duce la o majorare a coeficientului de cavitaţie σ_{T_i} cu 104% pentru $n_s = 450$ şi cu 30% pentru $n_s = 900$.

Pentru a analiza mai îndeaproape influenţa butucului asupra coeficientului de cavitaţie σ_{T_i}, scriem expresia acestuia în ipoteza torsionării nule a curentului de la ieşire din rotor $k_i = 0$ sub forma următoare:

$$\sigma_{T_i} = \left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\delta_{u_i}^2} \cdot k_{p_{\max 2i}} \left[1 + \nu^4 \cdot \frac{\delta_{u_i}^2}{\left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2}\right] + \eta_{ta}\left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\delta_{u_i}^2} \cdot \quad (14)$$

Dacă se scrie $\sigma_{T_i} = \sigma_{T_1} + \sigma_{T_2}$, avem

$$\sigma_{T_1} = \left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\delta_{u_i}^2} \cdot k_{p_{\max 2i}} \left[1 + \nu^4 \cdot \frac{\delta_{u_i}^2}{\left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}^2}\right)^2}\right], \quad (15)$$

iar

$$\sigma_{T_2} = \eta_{ta}\left(\frac{\eta_h}{2k_{u_R}}\right)^2 \cdot \frac{1}{\nu^2} \cdot \frac{1}{\delta_{u_i}^2} \cdot \quad (16)$$

Dacă se înlocuieşte coeficientul de deviaţie al curentului δ_{u_i} prin coeficientul de debit $\varphi_s = \frac{k_{v_{ms}}}{k_{u_R}} = 0{,}22\, n_s^{*1'5}$, se obţine

$$\sigma_{T_2} = \eta_{ta} \cdot k_{u_R}^2 \cdot \frac{\varphi_s^2}{(1-\nu^2)^2}, \quad (17)$$

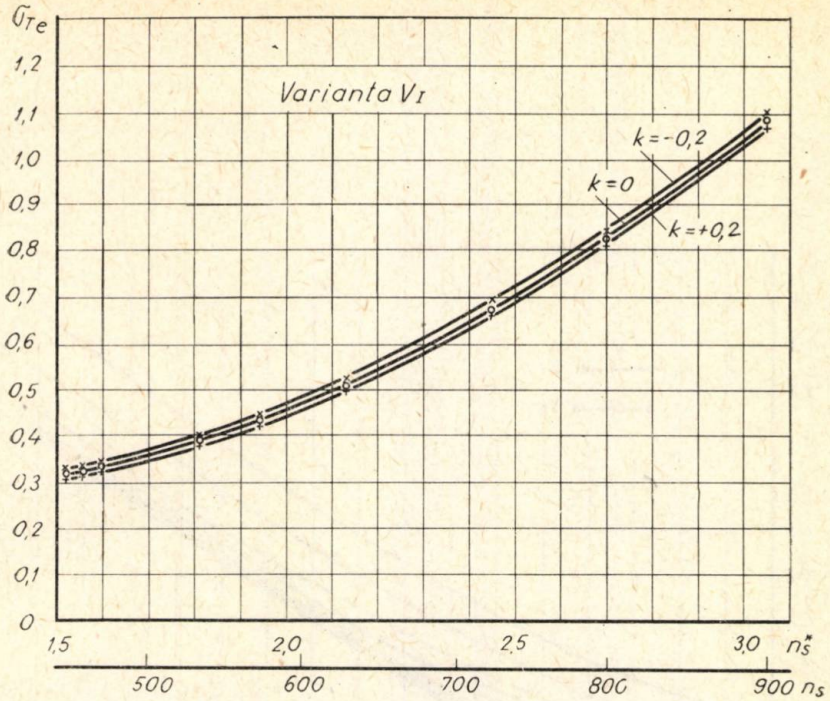

σ_{Te}
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
Varianta V_I
k = -0,2
k = 0
k = +0,2
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 14

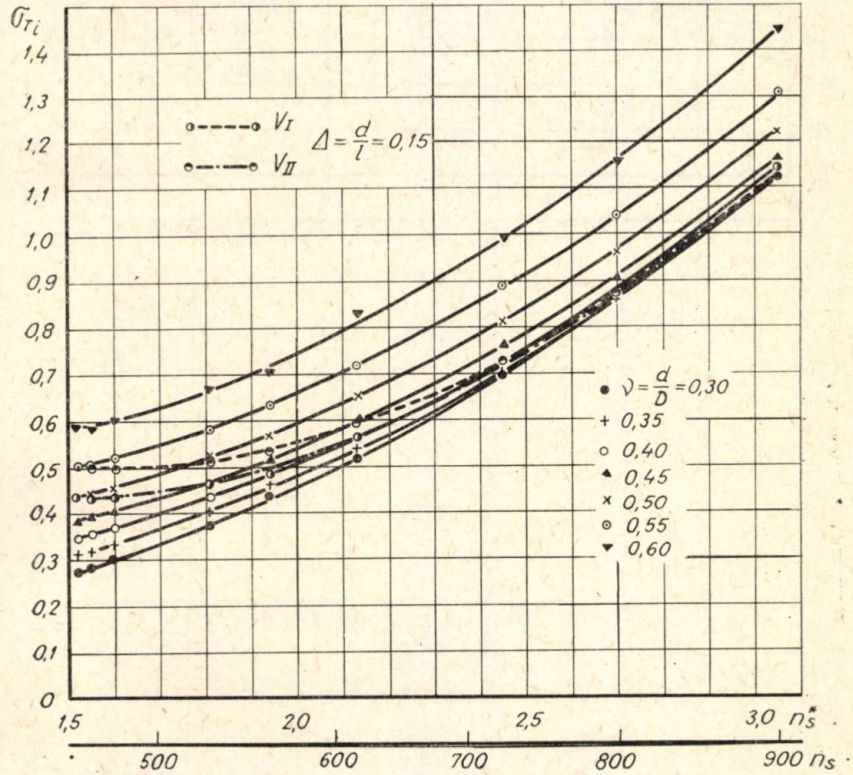

σ_{Ti}
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
V_I
V_{II}
$\Delta = \frac{d}{l} = 0,15$
$\nu = \frac{d}{D} = 0,30$
0,35
0,40
0,45
0,50
0,55
0,60
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 15

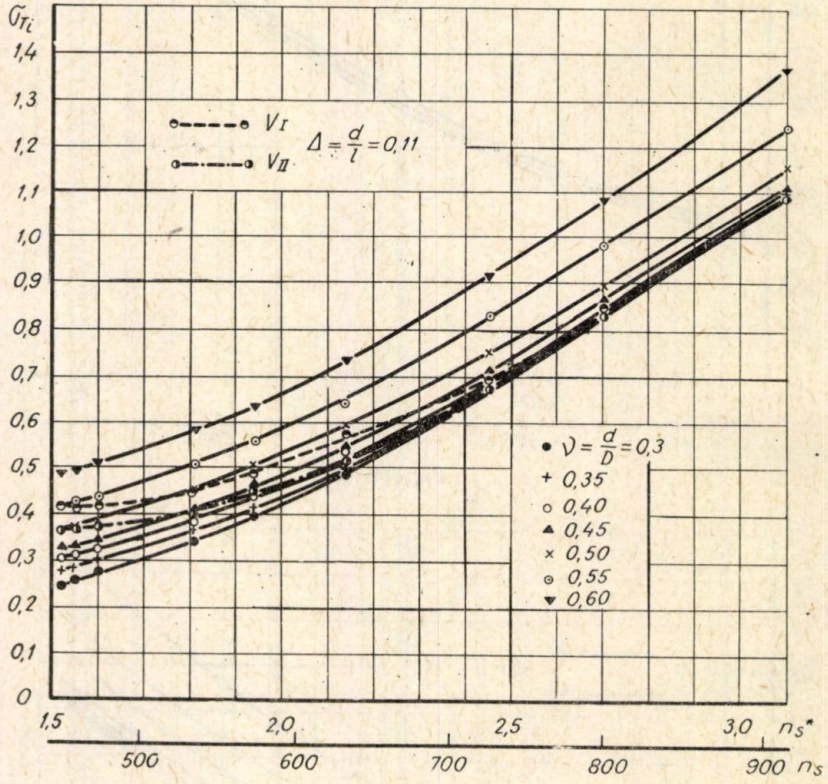

σ_{T_i}
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
V_I
V_{II}
$\Delta = \frac{d}{l} = 0,11$
$\nu = \frac{d}{D} = 0,3$
0,35
0,40
0,45
0,50
0,55
0,60
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s

Fig. 16

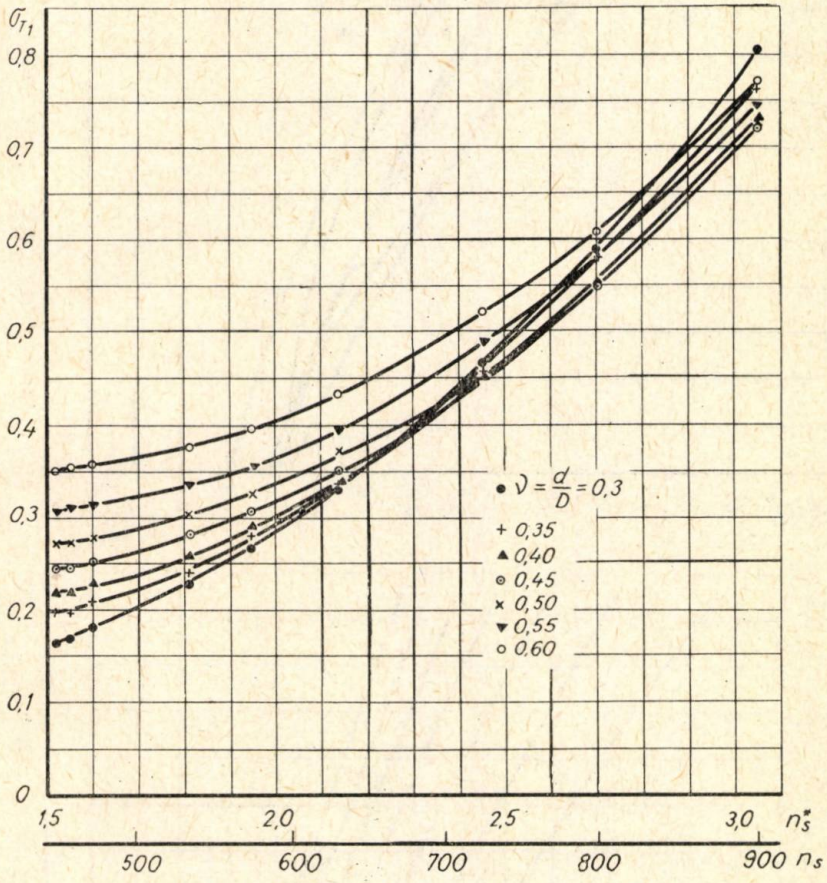

σ_{T1}
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900
n_s
$\nu = \frac{d}{D} = 0,3$
+ 0,35
▲ 0,40
⊙ 0,45
× 0,50
▼ 0,55
○ 0,60

Fig. 17

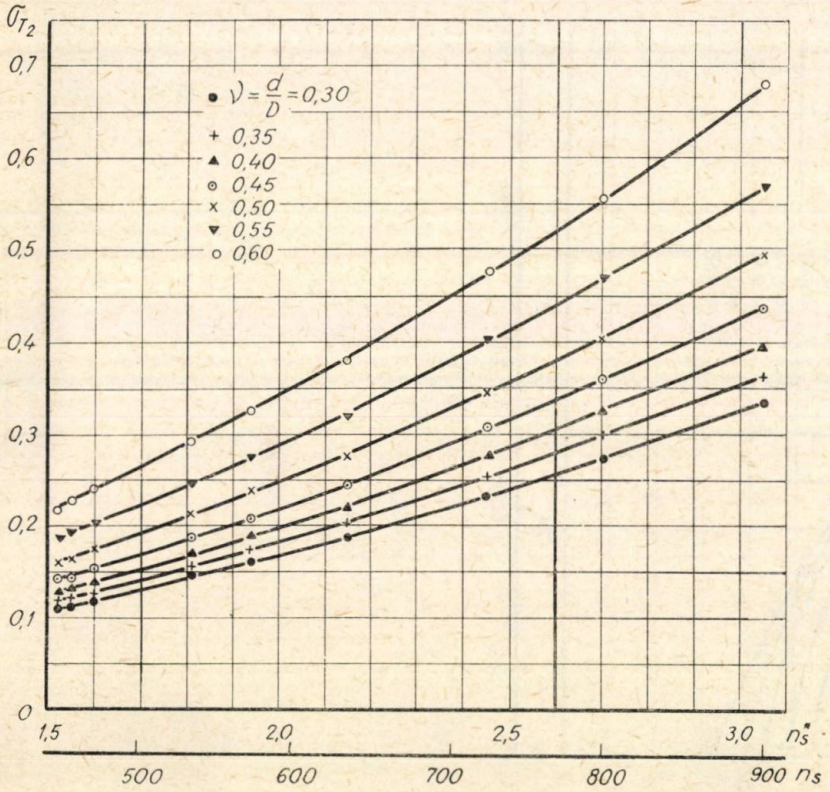

σ_{T_2}
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
$\nu = \frac{d}{D} = 0{,}30$
0,35
0,40
0,45
0,50
0,55
0,60
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900 n_s

Fig. 18

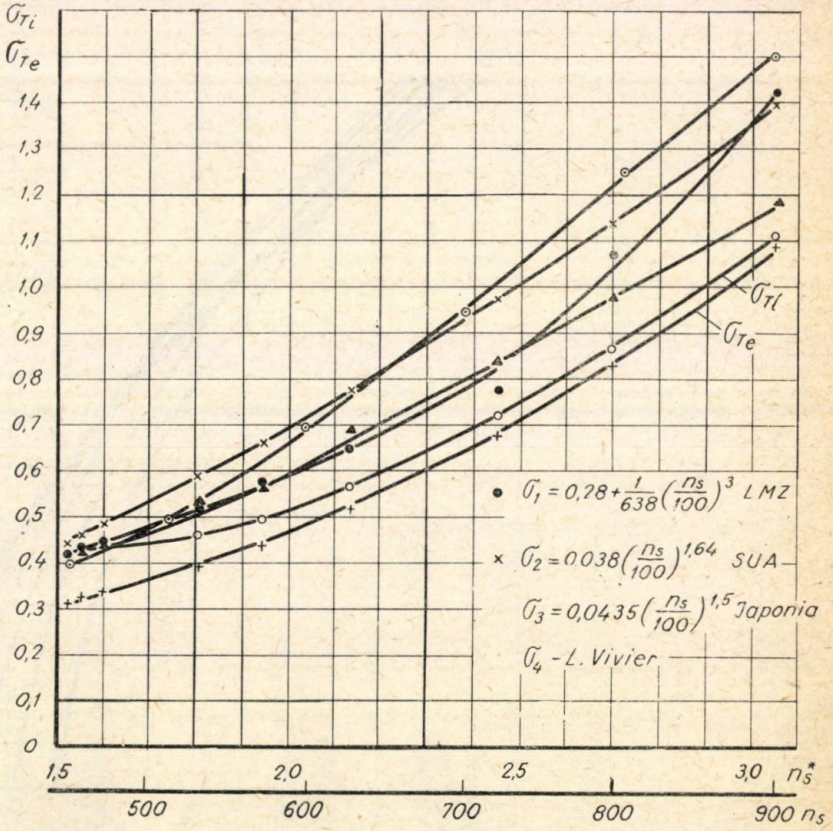

σ_{Ti}
σ_{Te}
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0,9
0,8
0,7
0,6
0,5
0,4
0,3
0,2
0,1
0
σ_{Ti}
σ_{Te}
$\sigma_1 = 0{,}28 + \frac{1}{638}\left(\frac{n_s}{100}\right)^3$ LMZ
$\sigma_2 = 0{,}038\left(\frac{n_s}{100}\right)^{1{,}64}$ SUA
$\sigma_3 = 0{,}0435\left(\frac{n_s}{100}\right)^{1{,}5}$ Japonia
σ_4 - L. Vivier
1,5
2,0
2,5
3,0
n_s^*
500
600
700
800
900 n_s

Fig. 19

unde σ_{T_1} este coeficientul de cavitație de lîngă butuc, determinat în primul rînd de presiunea minimă de pe profil și de diametrul butucului (fig. 17). Influența butucului este dominantă la turații specifice mici, respectiv la căderi H mari.

Coeficientul σ_{T_2} este determinat numai de diametrul butucului pentru o turație specifică dată. Procentual creșterea lui cu majorarea diametrului butucului este aceeași la turațiile specifice joase, cît și la cele ridicate (fig. 18).

Pentru a verifica valabilitatea acestor rezultate, în figura 19 s-au reprezentat variațiile coeficienților de cavitație σ_{T_i} și σ_{T_e} pentru varianta V_I (valorile scăzute ale diametrului butucului) și fără torsionarea curentului la ieșirea din rotor. În aceeași figură s-au reprezentat și valorile coeficienților de cavitație globali (ai turbinei) obținute în urma analizei statistice ale unor rezultate experimentale din laborator sau din centrală oferite de LMZ [13], de normele S.U.A. [14], de L. Vivier [15] și de S. Fukasu [16].

Se remarcă faptul deosebit de important că valorile lui σ_{T_i} și σ_{T_e} calculate cu relațiile (6), (7), cresc cu turația specifică aproape după aceeași lege ca și valorile stabilite experimental. Valorile obținute în prezenta lucrare sînt inferioare celor indicate de literatură, ceea ce confirmă justețea alegerii coeficientului de deviație al curentului, respectiv al diametrului butucului în varianta V_I.

De asemenea mai rezultă că $\sigma_{T_i} > \sigma_{T_e}$. Diferența $\Delta\sigma_{T_{ie}} = \sigma_{T_i} - \sigma_{T_e}$ este mai mare la turații specifice joase, deci la căderi mari. Acest rezultat justifică sesizarea vizuală a bulelor cavitaționale, de multe ori în primul rînd lîngă butuc și pe urmă la periferie [17]. Desigur, nu este vorba aici de cavitația de rost care își face apariția mult înaintea cavitației de pe paletă, ci de cavitația care apare în zona 3 (fig. 1) pe profil sau pe paletă [3] — [5].

3. CONCLUZII

1. Coeficientul de cavitație al turbinei axiale poate fi exprimat la raza r în funcție de coeficientul vitezei tangențiale periferice k_{u_R}, de coeficientul de deviație δ_{u_i} al curentului (sau diametrul butucului), de coeficientul de presiune minimă $k_{p_{\max}}$ ca parametrii principali și de alți parametrii secundari.

2. Relația stabilită pentru σ_T indică sensul modificării diferiților parametri în vederea obținerii unor coeficienți de cavitație cu valori cît mai scăzute și a unor curbe de cavitație cît mai plate.

3. La baza studiilor viitoare, care vizează îmbunătățirea caracteristicilor de cavitație ale turbinelor Kaplan, trebuie să stea o cunoaștere profundă a sensibilității la cavitație a profilelor funcționînd în rețea :

$$k_{p_{\max}} = f\left(\alpha, \Delta, \frac{t}{l}, \beta_s\right),$$

cunoaștere care se obține numai în urma unor ample studii teoretice și experimentale asupra profilelor dispuse în rețea de turbină și pompă.

Primită la redacție la 28 noiembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. I. Anton, *Curbe caracteristice de cavitație la mașinile hidraulice* (Turbine și pompe), comunicările Conferinței de mașini hidraulice, Timișoara, septembrie 1964.
2. D. Thoma, *Die Kavitation bei Wasserturbinen*, Wasserkraft Jahrbuch, München, 1924.
3. I. Anton, O. Popa, *The determination of sensitivity to Cavitation of a Cascade of hydrofoils of arbitrary Shape. Problems of Fluid-Flow Machines*, Jubilee edition commemorating forty years of scientific activity of professor Robert Szewalski, Warszawa, 1968.
4. — *Asupra caracteristicilor de cavitație ale unui profil izolat*, St. cerc. și. tehnice, Baza Timișoara, **X**, *2* (1963).
5. F. Numachi, *Cavitation Tests on Hydrofoils Designed for Accelerating Flow Cascade Report 4, Three Profiles Designed for High Head Kaplan Turbine*, Trans ASME Journal of basic engineering, Sept. 1969.
6. F. Numachi, S. Abe, I. Chida, *Cavitation Tests on Hydrofoiles Profiles, Suitable for Arrangement in Cascade* (Rep. 3 a, Rep. 4), Rep. Inst. High. Sp. Mech. Tohoku Univ. Japan, vol. 3, 1953.
7. F. Numachi, K. Tsunoda, I. Chida, *Cavitation Tests on Clark Y Profiles of Several Thickness Ratios*, Rep. Inst. High. Sp. Mech. Tohoku Univ., vol. 8, 1957.
8. V. S. Kviatkovski, *Rabocii proțess osevoi ghidroturbini*, I, II, Tr. VIGM XIV, XV, Maşgiz, 1951—1952.
9. I. E. Etinberg, *Teoria i rasciot protocinoi ciasti povorotnolopastnih gidroturbin*, Mașinostroenie, Moskva-Leningrad, 1965.
10. — *Issledovanie kavitaționnih harakteristik povorotnolopastnih rabocih koles rascetnim putem*, Energomașinostroenie, *12*, 6—9 (1959).
11. A. E. Susko, *O vibore rascetnih parametrov pri proektirovanii nizkonapornih osevih gidroturbin*, Akad. Nauk Ukrainskoi SSR Trudî Laboratorii gidravliceskih mașin, Kiev, *11* (1964).
12. G. A. Svinarev, *Visokonapornie povorotnolopastnie gidroturbini osevogo tipa*, Kiev, 1964.
13. * * * *Leningradskii metalliceskii zavod, Nomenklatura krupnih vertikalnih povorotnolopastnih i radialno-osevih gidroturbin*, 1962.
14. * * * *Design Standards no. 6 Turbines and Pumpes*, United States Department of the Interior Bureau of Reclamation Commissioner's Office Denver Colorado, 1960.
15. L. Vivier, *Turbines hydrauliques et leur régulation*, Paris, Edit. Albin Michel, 1966, 72, 79 și 84.
16. S. Fukasu, N. Yokoi, *Developments in Kaplan Turbine and Diagonal Flow Turbine for Higher Head Cavitation and Hydraulic Machinery*, ed. by F. Numachi, Proc. IAHR Sendai Japan, Sept. 1962.
17. * * * *Naucino-issledovatelskie rabotî gidroproekta*, Gosenergoizdat, 1961, p. 70—72.

CONSIDERAȚII TEORETICE ASUPRA CURGERII PRIN AJUTAJELE CU REȚELE DEPRESIVE

de C. TEODORESCU-ȚINTEA
INCREST

În lucrare este definit un nou principiu funcțional în teoria ajutajelor cu gaze, bazat pe utilizarea așa-numitelor rețele depresive, concepute și realizate de autor. După prezentarea principalelor caracteristici geometrice și funcționale ale ajutajelor cu rețele depresive, se analizează cantitativ evoluția gazelor în aceste ajutaje și se stabilesc relațiile de calcul ale parametrilor specifici.

Cercetarea sistematică și îndelungată a efectului Coandă a făcut posibilă definirea unui nou principiu funcțional în teoria ajutajelor cu gaze, concretizat în realizarea așa-numitelor *rețele Coandă-Teodorescu* (8), (9), denumite de noi *rețele depresive* (6).

În ultimii ani, aceste rețele au fost construite în numeroase variante, a căror aplicare practică formează obiectul mai multor invenții românești (1), (6), (7).

Pînă în prezent, rețelele depresive și-au găsit o largă utilizare în industria românească, fiind folosite pentru atenuarea zgomotelor gazodinamice generate de evacuarea și purja gazelor, aerului și aburului în atmosferă la bancurile de încercat turbomotoare de avion (10), la fabricile de oxigen, la termocentrale etc.

Utilizarea rețelelor depresive în domeniul turbinelor cu gaze a condus la realizarea *turbinei cu palete depresive* (2), (6), ale cărei caracteristici deosebite conferă acesteia largi perspective de utilizare atît în construcția instalațiilor de forță ale instalațiilor industriale, cît și în alte domenii.

De asemenea se întrevăd perspective largi de folosire a ajutajelor cu rețele depresive în tehnica ventilației, cu aplicații în special la halele și încăperile industriale, precum și în domeniul dispozitivelor de distribuție dirijată a curenților de aer.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 773 I 798

1. DEFINIȚII. CARACTERISTICI GEOMETRICE ȘI FUNCȚIONALE

Numim rețea depresivă succesiunea de ajutaje elementare (fante) și voleți Coandă dispuși adiacent secțiunii de ieșire a ajutajelor elementare (fig. 1).

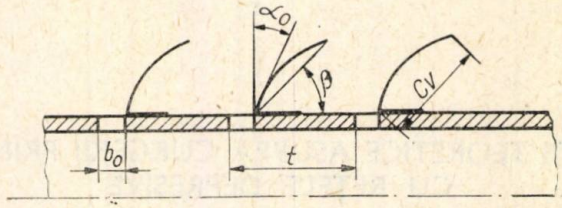


Fig. 1. — Principalele caracteristici geometrice ale rețelei depresive.

Oricărei rețele depresive îi sînt proprii următoarele mărimi geometrice caracteristice :

— pasul rețelei (t) ;
— deschiderea fantei (b_0) ;
— profilul voletului ;
— incidența inițială a voletului (α_0) ;
— unghiul de așezare a voletului în rețea (β).

După modul de dispunere a fantelor și voleților în raport cu suprafața laterală a ajutajului, rețelele depresive pot fi plane (dreptunghiulare sau radiale), toroidale și inelare (fig. 2*a*, *b*, *c*, *d*).

Numim ajutaj cu rețele depresive ajutajul a cărui secțiune de ieșire constă dintr-una sau din mai multe rețele depresive.

După modul de dispunere a fantelor în raport cu axa ajutajului, acesta poate fi cu fante longitudinale, fante transversale, fante oblice (fig. 3) etc. După forma rețelelor depresive, ajutajul poate fi cu rețele plane, inelare și toroidale.

Examinînd curgerea printr-un ajutaj cu rețele depresive, se constată că valoarea vitezei la ieșirea din fante poate fi, în funcție de forma ajutajului, variabilă sau constantă în lungul acestuia. Vom distinge deci ajutaje cu distribuție variabilă a vitezelor și ajutaje cu distribuție uniformă a vitezelor la ieșirea din fante. Indiferent de tipul ajutajului, pentru o dispunere convenabilă a rețelelor și o profilare corespunzătoare a voleților, ajutajul, cu rețele depresive, posedă trei proprietăți importante :

— este sediul unor forțe a căror rezultantă după direcția axială sau tangențială poate atinge o valoare aproape egală cu aceea a forței de impuls a curentului care traversează ajutajul ;

— diminuează presiunea statică a curentului de gaze la intrarea în ajutaj ;

— realizează atenuarea zgomotului generat de curentul de gaze sau a celui provenit din amontele ajutajului prin intermediul conductei de racord.

Prima dintre aceste proprietăți a permis realizarea turbinei cu palete depresive [6] și a reversorului de impuls gazodinamic [7]. A doua

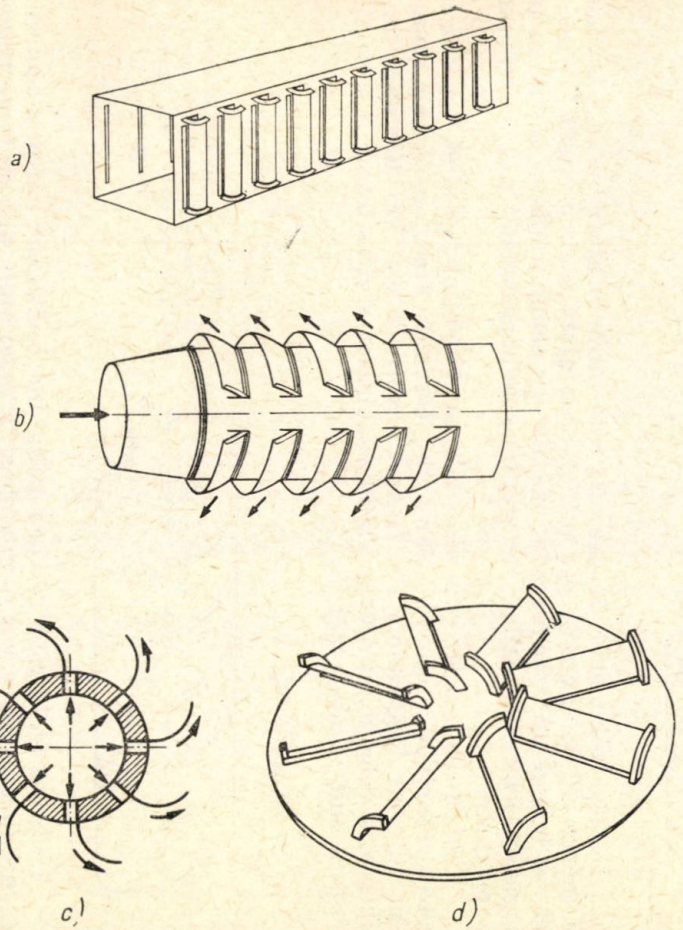


Fig. 2. — Diverse tipuri de rețele depresive : *a* — rețea plană ; *b* — rețea toroidală ; *c* — rețea inelară ; *d* — rețea radială.

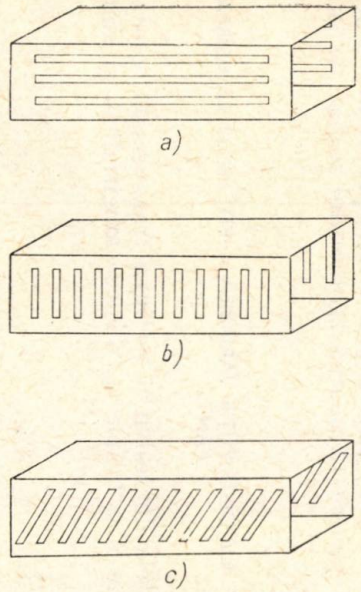


Fig. 3. — Diverse tipuri de ajutaje cu rețele depresive : — cu fante longitudinale ; — cu fante transversale ; — cu fante oblice.

proprietate a permis realizarea unor dispozitive depresoare cu ajutorul cărora se obţine concomitent cu atenuarea zgomotului, accelerarea curgerii în canalele prevăzute cu astfel de dispozitive. A treia proprietate a permis realizarea dispozitivelor pentru atenuarea zgomotului radiat de sursele gazodinamice.

2. CURGEREA PRIN AJUTAJUL CU DISTRIBUŢIE VARIABILĂ A VITEZELOR LA IEŞIREA DIN FANTE

Fie ajutajul cu reţele depresive şi secţiune transversală constantă, avînd z fante de lungime L şi lăţime b_0, dispuse longitudinal şi uniform distanţate (fig. 4).

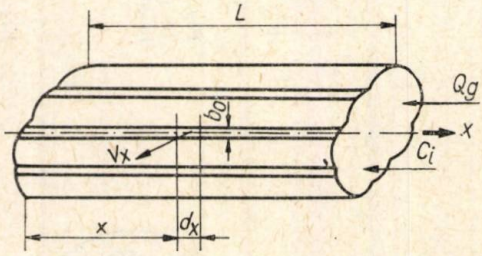


Fig. 4. — Schemă auxiliară pentru studiul curgerii prin ajutajul cu fante longitudinale.

Debitul volumetric de gaze Q_g care intră în ajutaj prin secţiunea de intrare F_i cu viteza C_i iese prin fantele ajutajului cu viteza V_x, variabilă în lungul acestora; gradul maxim de neuniformitate a vitezei în lungul fantelor este definit de mărimea adimensională γ_{max}, exprimată în procente.

Cercetările noastre experimentale au evidenţiat faptul că sub aspect global repartiţia presiunii statice în secţiunile transversale ale ajutajelor cu fante longitudinale şi fante transversale este similară dacă lungimea L a celor două ajutaje, lăţimea fantelor şi aria totală a secţiunii acestora sînt identice (fig. 5).

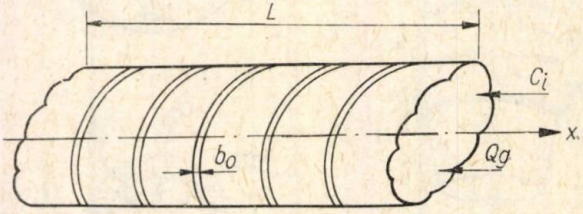


Fig. 5. — Schemă auxiliară pentru studiul curgerii prin ajutajul cu fante transversale.

De aceea concluziile ce vor rezulta din analiza curgerii prin ajutajul cu fante longitudinale vor fi valabile şi în cazul ajutajului cu fante transversale cu parametri geometrici echivalenţi:

$$L_t = L_l; \quad b_{0t} = b_{0l}; \quad F_{it} = F_{il},$$
$$\Sigma_1^n f_t = \Sigma_1^z f_l, \tag{1}$$

unde

n reprezintă numărul fantelor transversale,
z — numărul fantelor longitudinale,
f — aria unei fante,
t, l — indici referitori la tipul fantelor (transversale, longitudinale).

Revenind la figura 4, fixăm origina axelor de coordonate în centrul secțiunii transversale de la extremitatea aval a ajutajului și considerăm sensul pozitiv al abscisei către secțiunea de intrare a ajutajului.

Fie în ajutaj o secțiune transversală de abscisă x și alta de abscisă $x+\mathrm{d}x$. Micșorarea debitului de fluid în interiorul ajutajului de la secțiunea $x+\mathrm{d}x$ pînă la secțiunea x este, evident, egală cu debitul care iese prin porțiunea de fante situată între aceste secțiuni.

Notînd viteza fluidului în secțiunea x cu C_x, iar în secțiunea $x+\mathrm{d}x$ cu $C_x + \mathrm{d}C_x$ și viteza normală la fante între cele două secțiuni cu V_x, se poate scrie

$$(C_x + \mathrm{d}C_x) F + C_x \cdot F + V_x \cdot z \cdot b_0 \cdot \mathrm{d}x,$$

de unde

$$F \cdot \mathrm{d}C_x = V_x \cdot z \cdot b_0 \cdot \mathrm{d}x$$

sau

$$C'_x = \frac{z \cdot b_0}{F} V_x. \tag{2}$$

Viteza gazelor la ieșirea din fante în secțiune x se determină cu formula

$$V_x = \mu \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta P_x}, \tag{3}$$

în care

ρ este densitatea gazelor,
ΔP_x — excedentul (față de presiunea din exteriorul ajutajului) presiunii statice în interiorul ajutajului în secțiunea x,
μ — coeficientul de debit al fantelor :

$$\mu = \varphi \cdot \varepsilon, \tag{4}$$

iar

φ — coeficientul pierderii de viteză;
ε — coeficientul de contracție a jeturilor care ies din fante.

Scriind ecuația lui Bernoulli în secțiunea x și o secțiune situată la extremitatea închisă ($x=0$) a ajutajului și explicitînd valoarea presiunii excedentare ΔP_x, se obține

$$\Delta P_x = \Delta P_0 - \frac{\rho C_x^2}{2} + \Delta P_{fr}, \tag{5}$$

unde

ΔP_0 reprezintă presiunea statică excedentară în interiorul ajutajului la extremitatea închisă,

ΔP_{fr} — pierderile de presiune prin frecare în porțiunea situată între extremitatea închisă a ajutajului și secțiunea x.

Valoarea pierderilor prin frecare se determină cu ajutorul relației

$$\Delta P_{fr} = \frac{\lambda}{d_{ec}} \cdot \frac{\rho}{2} \int_0^x C_x^2 \, \mathrm{d}x, \tag{6}$$

în care

λ este coeficientul rezistenței de frecare,

d_{ec} — diametrul echivalent al ajutajului.

Considerînd formulele (2), (3), (5) și (6), se poate scrie

$$C_x' = \mu \frac{z \cdot b_0}{F} \sqrt{\frac{2}{\rho} \Delta P_0 - C_x^2 + \frac{\lambda}{d_{ec}} \int_0^x C_x^2 \, \mathrm{d}x} \, .$$

Ridicînd la pătrat în ambele părți și derivînd, obținem următoarea ecuație diferențială:

$$C_x'' \cdot C_x' + \mu \frac{z^2 \cdot b_0^2}{F^2} C_x' \cdot C_x - \mu^2 \frac{z^2 \cdot b_0^2}{F^2} \cdot \frac{\lambda}{2 d_{ec}} C_x^2 = 0. \tag{7}$$

Introducînd notațiile

$$\overline{C}_x = \frac{C_x}{C_i}; \quad \overline{x} = \frac{x}{L},$$

rezultă

$$C_x = C_i \cdot \overline{C}_x; \quad x = L \cdot \overline{x},$$

$$C_x' = \frac{\mathrm{d}C_x}{\mathrm{d}x} = \frac{C_i}{L} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{C}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} = \frac{C_i}{L} \cdot \overline{C}_x',$$

$$C_x'' = \frac{\mathrm{d}C_x'}{\mathrm{d}x} = \frac{C_i}{L^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\overline{C}_x}{\mathrm{d}\overline{x}} = \frac{C_i}{L} \cdot \overline{C}_x'',$$

iar ecuația (7) devine

$$\overline{C}_x'' \cdot \overline{C}_x' + p \cdot \overline{C}_x' \cdot \overline{C}_x + q \overline{C}_x^2 = 0, \tag{8}$$

unde

$$p = \mu^2 \overline{f}^2; \quad q = -0{,}5 \, \mu^2 \overline{f}^2 \cdot \lambda \cdot \overline{L} \tag{9}$$

și

$$\bar{f} = \frac{z \cdot f}{F} = \frac{z \cdot b_0 \cdot L}{F}; \quad \bar{L} = \frac{L}{d_{ec}}.$$

În continuare vom numi mărimea adimensională $\bar{f}$ parametrul fantelor, iar mărimea adimensională $\bar{L}$ parametrul ajutajului.

Să admitem că prin rezolvarea ecuației (8) se obține pentru viteza relativă $\bar{C}_x$ expresia

$$\bar{C}_x = \psi(p, q, x). \tag{10}$$

În acest caz, viteza relativă de curgere a gazelor prin fante rezultă

$$\bar{V}_x = \frac{V_x}{V_{med}} = \frac{F \cdot C'_x}{V_{med} \cdot z \cdot b_0} = \frac{F \cdot C_i}{V_{med} \cdot z \cdot b_0 \cdot L} \bar{C}'_x = \bar{C}'_x, \tag{11}$$

unde V_{med} este viteza medie a gazelor prin întreaga secțiune a fantelor.

Urmărind variația vitezei relative a gazelor în lungul fantelor, distingem două secțiuni, situate, respectiv, la distanțele $x=h$ și $x=j>h$ de extremitate aval a ajutajului, în care abaterile vitezei analizate față de unitate sînt maxime:

$$\begin{aligned} \gamma_{max \cdot i} &= 100\ (\bar{V}_h - 1), \\ \gamma_{max \cdot j} &= 100\ (1 - \bar{V}_j). \end{aligned} \tag{12}$$

În scopul determinării lățimii necesare a fantelor se dă apriori așa-numita abatere de calcul, definită de relația

$$\gamma_{calc} = 100 \left(\frac{V_{max}}{V_{med}} - 1 \right). \tag{13}$$

Din ecuația de debit rezultă

$$b_0 = \frac{Q_g}{L \cdot z \cdot V_{med}}$$

sau

$$b_0 = \frac{(1 + 0{,}01\ \gamma_{calc})\ Q_g}{L \cdot z \cdot V_{max}}. \tag{14}$$

Presiunea totală excedentară la intrarea în ajutaj este

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \frac{\rho}{2} C_i^2.$$

Presiunea statică excedentară în aceeaşi secţiune rezultă din formula (3) şi este egală cu

$$\Delta P_i = \frac{\rho \cdot V_i^2}{2\mu^2}$$

şi, prin urmare,

$$\Delta P_i^* = \frac{\rho}{2} C_i^2 \left(\frac{V_i^2}{\mu^2 \cdot C_i^2} + 1 \right)$$

sau

$$\Delta P_i^* = \zeta \frac{\rho}{2} C_i^2, \tag{15}$$

unde ζ reprezintă coeficientul contrapresiunii la intrarea în ajutaj.

Deoarece

$$C_i = \frac{Q_g}{F_i} = \frac{z \cdot f \cdot V_{\text{med}}}{F_i} = \tilde{f} \cdot V_{\text{med}},$$

rezultă

$$\zeta = \frac{V_i^2}{\mu^2 \cdot \tilde{f}^2 \cdot V_{\text{med}}^2} + 1$$

sau

$$\zeta = \frac{\overline{V}_i^2}{\mu^2 \cdot \bar{f}^2} + 1. \tag{16}$$

Evoluţia fluidului în interiorul ajutajului cu reţele depresive şi fante longitudinale determină apariţia unor forţe gazodinamice care solicită ajutajul în direcţiile axială şi tangenţială.

Expresia forţei axiale R_{al} rezultă din ecuaţia cantităţii de mişcare la intrarea şi la ieşirea din ajutaj şi are forma

$$R_{al} = \rho Q_g \left(C_i \mp \frac{\cos \alpha}{L \cdot V_{\text{med}}} \int_0^L V_x^2 \, \mathrm{d}x \right), \tag{17}$$

în care α reprezintă unghiul de deviere a vitezei la ieşirea din fante în raport cu normala la axa ajutajului.

Forţa tangenţială R_t care acţionează asupra ajutajului poate fi exprimată cu ajutorul relaţiei:

$$R_t = \overline{\eta}_{nr} \cdot \rho \cdot Q_g \cdot C_i, \tag{18}$$

în care $\overline{\eta}_{nr}$ reprezintă eficienţa normală a reţelei depresive.

Pentru evidenţierea comportării voleţilor în reţeaua depresivă, autorul a efectuat o serie de experienţe, ale căror rezultate sînt prezentate în diagramele din figurile 6—9. Datele se referă la două tipuri de

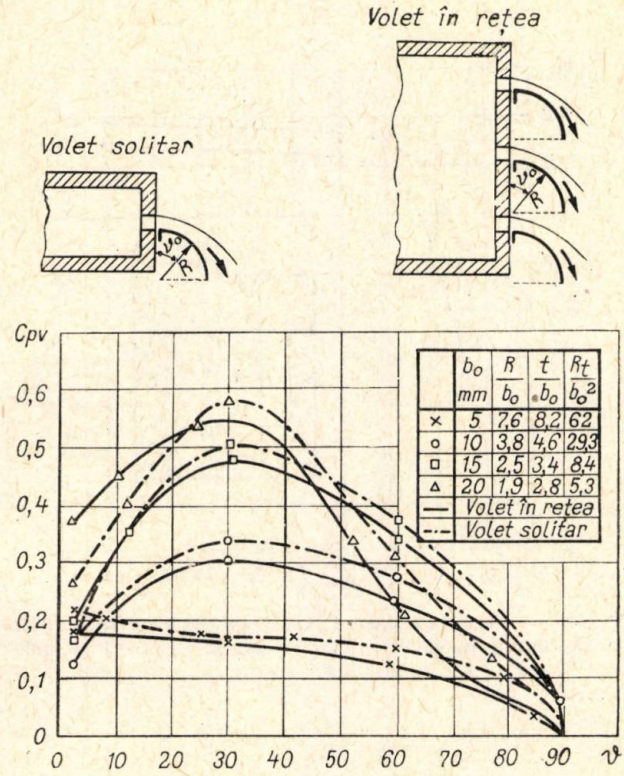


Fig. 6. — Distribuția comparativă a presiunii în lungul voletului circular cu $R=38$ mm și $\lambda=5$ mm (A).

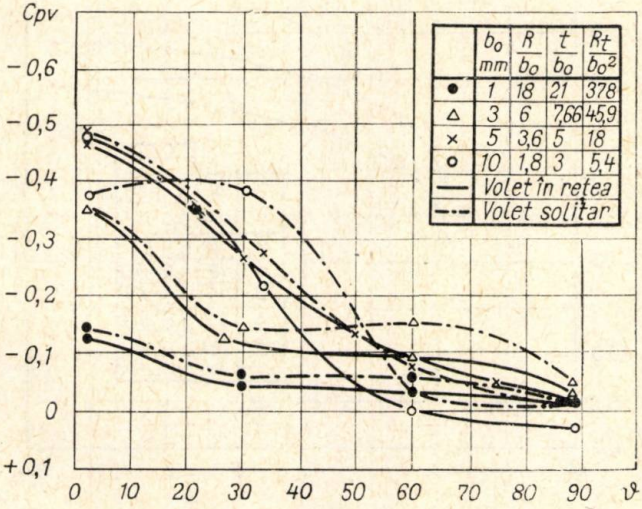


Fig. 7. — Distribuția comparativă a presiunii în lungul voletului circular cu $R=38$ mm și $\lambda=5$ mm (A).

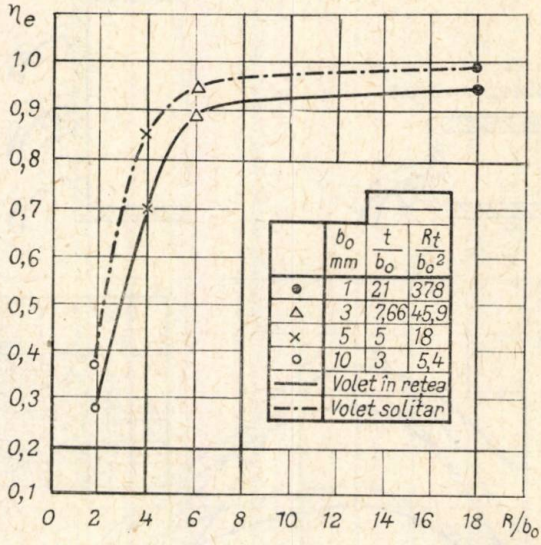


Fig. 8. — Variația eficienței experimentale a voletului circular de tipul A în variantele „volet solitar" (— ·—) și „volet în rețea" (— —).

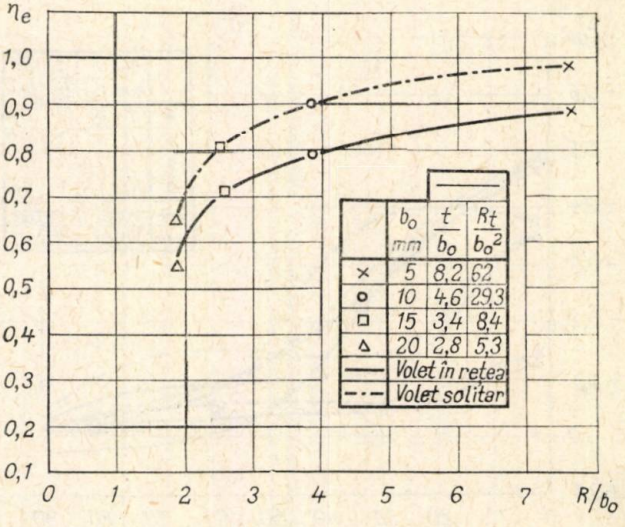


Fig. 9. — Variația eficienței experimentale a voletului circular de tipul B în variantele „volet solitar" (— · —) și „volet în rețea" (——).

voleți montați în rețelele plane și sînt comparate cu valorile obținute în cazul voleților solitari.

În cazul ajutajului cu fante transversale distribuite simetric și uniform pe suprafața laterală a acestuia, rezultanta forțelor care solicită voleții este dirijată axial și se calculează cu formula (18).

Rezultanta forței axiale care acționează asupra ajutajului în acest caz va fi

$$R_{at} = \rho \cdot Q_g \cdot C_i (1 \mp \overline{\eta}_{nr}), \tag{19}$$

semnul plus sau minus luîndu-se în funcție de orientarea voleților.

2.1. AJUTAJUL CU PEREȚI RUGOȘI

Pentru a putea integra ecuația diferențială (8) se introduce noua variabilă

$$W = \frac{\overline{C}_x'}{\overline{C}_x}. \tag{20}$$

În acest caz avem

$$\overline{C}_x' = W \cdot \overline{C}_x,$$

$$\overline{C}_x'' = W' \cdot \overline{C}_x + W \cdot \overline{C}_x' = (W' + W)\overline{C}_x$$

și, ca urmare, ecuația (8) devine

$$(W' + W^2)W + pW + q = 0$$

sau

$$\frac{dW}{dx} = \frac{W^3 + pW + q}{W}. \tag{21}$$

Integrînd, se obține

$$\bar{x} = k_1 - \int \frac{W^2 dW}{W^3 + pW + q}, \tag{22}$$

unde k_1 este constanta de integrare.

Viteza relativă a gazelor în interiorul ajutajului rezultă din egalitatea (24), pe care o punem sub forma

$$\frac{d\overline{C}_x}{\overline{C}_x} = W dx.$$

Exprimînd $d\bar{x}$ cu valoarea sa rezultată din ecuaţia (22) şi integrînd se obţine

$$\ln \overline{C}_x = \ln k_2 - \int \frac{W^2\, dx}{W^3 + pW + q}. \tag{23}$$

Calculînd integrala din compunerea relaţiilor (22) şi (23) cu ajutorul metodei fracţiilor raţionale, rezultă în cele din urmă

$$\bar{x} = k_1 - \frac{W_1}{3W_1^2 + p} \ln \frac{W - W_1}{\sqrt{W^2 + WW_1 + W_1^2 + p}} -$$

$$- \frac{3W_1^2 + 2p}{(3W_1^2 + p)\sqrt{3W_1^2 + 4p}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2W + W_1}{\sqrt{3W_1^2 + 4p}}, \tag{24}$$

$$\ln \overline{C}_x = \ln k_2 - \frac{W_1^2}{3W_1^2 + p} \ln (W - W_1) - \frac{2W_1^2 + p}{2(3W_1^2 + p)} \ln (w^2 + WW_1 + W_1^2 + p) -$$

$$- \frac{pW_1}{(3W_1^2 + p)\sqrt{3W_1^2 + 4p}} \operatorname{arc\,tg} \frac{2W + W_1}{\sqrt{3W_1^2 + 4p}}, \tag{25}$$

unde

$$W_1 = +2 \frac{\mu \bar{f}}{\sqrt{3}} \operatorname{sh} \frac{\psi}{3},$$

$$W_2 = -\frac{\mu \bar{f}}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{sh} \frac{\psi}{3} + i\sqrt{3} \cdot \operatorname{ch} \frac{\psi}{3} \right),$$

$$W_3 = -\frac{\mu \bar{f}}{\sqrt{3}} \left(\operatorname{sh} \frac{\psi}{3} - i\sqrt{3} \cdot \operatorname{ch} \frac{\psi}{3} \right),$$

$$\operatorname{sh} \psi = +\frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{\lambda \overline{L}}{\mu \bar{f}}.$$

Constanta de integrare k_1 se determină observînd că pentru $W = \infty$ şi $\bar{x} = 0$ avem

$$\bar{x} = k_1 - \frac{3W_1^2 + 2p}{(3W_1^2 + p)\sqrt{3W_1^2 + 4p}} \cdot \frac{\pi}{2} = 0$$

şi

$$\overline{C}_x = 0,$$

de unde

$$k_1 = \frac{3W_1^2 + 2p}{(3W_1^2 + p)\sqrt{3W_1^2 + 4p}} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

Constanta de integrare k_2 poate fi determinată numai în procesul de calcul pentru valoarea $W = W_{\bar{x}=1}$, cînd $\bar{x} = 1$.

În acest caz, $\bar{C}_x = 1$; $\ln \bar{C}_x = 0$ și, prin urmare, $\ln k_2$ va fi egal cu suma celor trei termeni care intră în formula (25) pentru valoarea $W = W_{\bar{x}=1}$.

Cunoscînd valorile vitezei relative a gazelor în interiorul ajutajului într-o secțiune dată, se poate determina ușor viteza relativă prin fante în dreptul acelei secțiuni, avînd în vedere relațiile (11) și (20) :

$$\bar{V}_x = W \cdot \bar{C}_x. \tag{26}$$

Cele două abateri maxime ale vitezei relative în fante față de valoarea unitară se determină, conform relațiilor (12) și (13), cu una din relațiile :

$$\gamma_{calc} = 100\left(\frac{V_{max}}{V_{med}} - 1\right),$$

$$\gamma_{max\,j} = 100\left(1 - \frac{V_{min}}{V_{med}}\right).$$

Lățimea sau numărul fantelor se determină cu ajutorul relației (14).

Excedentul presiunii totale și coeficientul contrapresiunii la intrarea în ajutaj se calculează cu ajutorul relațiilor (15) și (16).

Pentru calculul forțelor gazodinamice care solicită ajutajul după direcțiile axială sau tangențială, se folosesc formulele (17) — (19).

2.2. AJUTAJUL CU PEREȚI NETEZI

În lipsa pierderilor de presiune prin frecare ($\lambda = 0$) rezultă

$$\operatorname{sh} \varphi = 0 \rightarrow \varphi = 0 ; \qquad W_1 = 0$$

și de aceea expresiile abscisei relative și vitezei relative a gazelor în ajutaj, date de formulele (24) și (25), capătă forma

$$\bar{x} = k_1 - \frac{1}{\sqrt{p}} \operatorname{arc\,tg} \frac{W}{\sqrt{p}},$$

$$\ln \bar{C}_x = \ln k_2 - \frac{1}{2} \ln (W^2 + p)$$

sau

$$x = \frac{1}{\sqrt{p}}\left(\frac{\pi}{2} - \operatorname{arc\,tg}\frac{W}{\sqrt{p}}\right)$$

şi

$$\overline{C}_x = \frac{k_2}{\sqrt{W^2+p}}.$$

Îndepărtînd variabila din ultimele două ecuaţii, se obţine

$$\overline{C}_x = \frac{k_2}{\sqrt{p\left[1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{p}\cdot\bar{x}\right)\right]}} = \frac{k^2}{\sqrt{p}}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\sqrt{p}\cdot\bar{x}\right) = \frac{k_2}{\sqrt{p}}\sin\sqrt{p}\cdot\bar{x}. \quad (27)$$

Din condiţia $\bar{x}=1$ şi deci $\overline{C}_x=1$, rezultă valoarea constantei de integrare :

$$k_2 = \frac{\sqrt{p}}{\sin\sqrt{p}},$$

care, introdusă în expresia lui $\overline{C}_x$, dă

$$\overline{C}_x = \frac{\sin\sqrt{p}\cdot\bar{x}}{\sin\sqrt{p}}. \quad (28)$$

Întrucît $p=\mu^2\bar{f}^2$, se obţine în cele din urmă

$$\overline{C}_x = \frac{\sin\mu\bar{f}\cdot\bar{x}}{\sin\mu\bar{f}}. \quad (29)$$

Examinarea ultimei relaţii evidenţiază faptul că pentru $\mu\bar{f}=0$ distribuţia vitezei este uniformă pe toată lungimea fantelor.

Într-adevăr, pentru valorile foarte mici ale produsului $\mu\bar{f}$ se poate scrie

$$\overline{C}_x = \frac{\mu\bar{f}\cdot\bar{x}}{\mu\bar{f}} = \bar{x}$$

şi, prin urmare,

$$C_x = C_i\frac{x}{L}.$$

De aici se desprinde concluzia că, o dată cu micşorarea parametrului fantei $\mu\bar{f}$, gradul de uniformitate al cîmpului vitezelor V_x în lungul fantelor creşte.

De asemenea, pentru $x=0$, rezultă $C_x=0$, adică viteza gazelor în interiorul ajutajului la extremitatea aval a acestuia este nulă.

Pentru a determina poziția secțiunii transversale a ajutajului în care viteza relativă a gazelor este maximă, anulăm derivata acesteia:

$$C'_x = \mu\bar{f}\frac{\cos \mu\bar{f}\cdot\bar{x}}{\sin \mu f},$$

de unde

$$\bar{x} = \frac{\pi}{2\mu\bar{f}}.$$

Introducînd această valoare în ecuația (28), rezultă

$$\overline{C}_{max} = \frac{1}{\sin \mu\bar{f}}.$$

Se poate conchide că viteza gazelor în interiorul ajutajului este nulă la extremitatea aval a acestuia, crește către secțiunea de intrare pînă atinge valoarea maximă pentru $\bar{x} = \frac{\pi}{2}\mu\bar{f}$ și apoi scade pentru a deveni egală cu C_i în secțiunea de intrare.

Graficul din figura 10 ilustrează variația vitezei relative a gazelor în interiorul ajutajului conform formulei (29).

Din analiza acestui grafic rezultă că variația amintită a vitezei gazelor în interiorul ajutajului este cu atît mai pregnantă, cu cît parametrul fantelor $\mu\bar{f}$ este mai mare. Începînd de la o anumită valoare $\mu\bar{f}$ în sus, prin secțiunea de fante situate la începutul ajutajului se produce absorbția aerului ambiant, ceea ce atestă că în acea porțiune a ajutajului presiunea statică este mai mică decît presiunea ambiantă.

Valoarea parametrului fantelor pentru care se produce acest fenomen, pe care o numim valoarea critică, rezultă din egalitatea

$$\overline{C}_{max} = 1$$

și este egală cu

$$\mu\bar{f} = \frac{\pi}{2} = 1{,}57.$$

Debitul de aport Q_a care intră în ajutaj în cazul $\mu\bar{f} > 1{,}57$ este

$$Q_a = (\overline{C}_{max} - 1)\,Q_i. \tag{30}$$

Viteza relativă a gazelor prin fantele ajutajului rezultă din ecuația (11) și este egală cu

$$\overline{V}_x = \mu\bar{f}\frac{\cos \mu\bar{f}\cdot\bar{x}}{\sin \mu\bar{f}}. \tag{31}$$

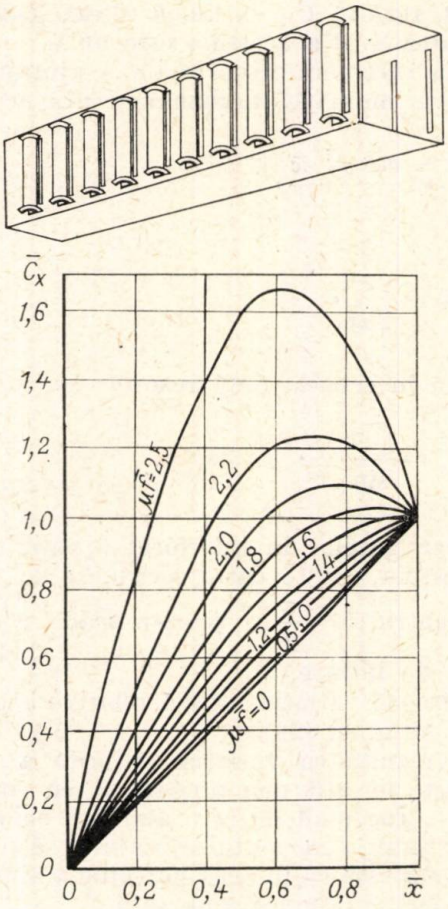


Fig. 10. — Variaţia vitezei relative a gazelor în interiorul ajutajului cu distribuţie variabilă a vitezei prin fante.

Valoarea maximă a acestei viteze se determină din condiţia

$$\bar{V}'_x = -\mu^2\bar{f}^2\frac{\sin\mu\bar{f}\cdot\bar{x}}{\sin\mu\bar{f}} = 0,$$

care dă

$$\bar{x} = 0$$

şi

$$\bar{V}_{max} = \frac{\mu\bar{f}}{\sin\mu\bar{f}} > 1.$$

Poziţia secţiunii transversale în care viteza relativă a gazelor prin fante devine unitară rezultă din ecuaţia (31), făcînd $\bar{V}_x = 1$:

$$\mu\bar{f}\cdot\cos\mu\bar{f}\cdot\bar{x} = \sin\mu\bar{f}.$$

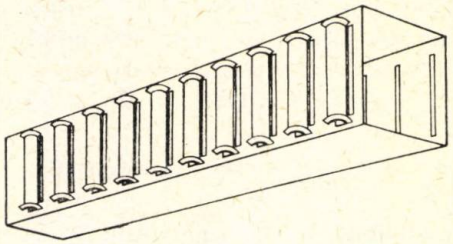
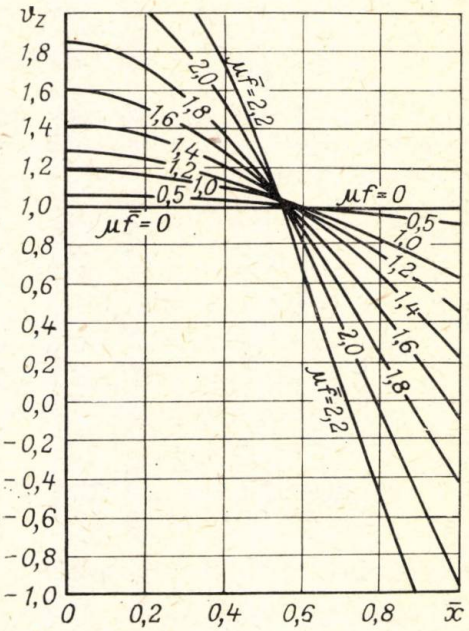


Fig. 11. — Distribuția vitezei gazelor în fantele ajutajului în funcție de parametrul relativ $\bar{x}$ pentru diverse valori ale produsului $\mu\bar{f}$.



Dezvoltînd cosinusul și sinusul în serii de puteri și considerînd numai primii doi termeni, se obține

$$\mu\bar{f}\left[1-\frac{\mu\bar{f}\cdot\bar{x}}{2!}\right]\approx\mu\bar{f}-\frac{(\mu\bar{f})^3}{3!},$$

de unde

$$\bar{x}=\sqrt{\frac{2!}{3!}}=\frac{1}{\sqrt{3}}=0{,}577.$$

La începutul ajutajului ($\bar{x}=1$), viteza relativă a gazelor prin fante atinge valoarea minimă:

$$\bar{V}_{\min}=\frac{\mu\bar{f}}{\operatorname{tg}\mu\bar{f}}<1.$$

Așadar, viteza relativă a gazelor prin fantele ajutajului este maximă la extremitatea aval a ajutajului și scade continuu către secțiunea inițială, devenind egală cu unitatea pentru $\bar{x}=0{,}577$ și atingînd valoarea sa minimă în dreptul secțiunii de intrare ($\bar{x}=1$). Aceste concluzii sînt ilustrate grafic în diagrama din figura 11, întocmită pe baza formulei (31).

Abaterile vitezei relative $\overline{V}_x$ faţă de unitate în secţiunile iniţială şi finală ale ajutajului se determină, respectiv, cu relaţiile

$$\gamma_{max} = 100(1 - \overline{V}_{min}) = 100(1 - \mu\bar{f}\operatorname{cotg}\mu\bar{f}), \tag{32}$$

$$\gamma_{calc} = 100(\mu\bar{f}\operatorname{cosec}\mu\bar{f} - 1). \tag{33}$$

Coeficientul contrapresiunii la intrarea în ajutaj se determină pe baza relaţiilor (16) şi (31) şi este egal cu

$$\zeta = 1 + \operatorname{cotg}^2\mu\bar{f}. \tag{34}$$

În figura 12 sînt reprezentate grafic valorile celor două abateri ale vitezei relative $\overline{V}_x$ şi cele ale coeficientului contrapresiunii ζ în funcţie de parametrul fantelor.

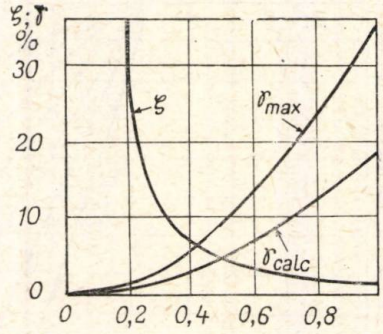


Fig. 12. — Variaţia coeficientului contrapresiunii şi a abaterilor vitezei relative V_x în funcţie de parametrul $\mu\bar{f}$ în ajutajul cu distribuţie variabilă a vitezei prin fante.

Depresiunea existentă în secţiunea iniţială a ajutajului în cazul $\mu\bar{f} > \frac{\pi}{2}$ rezultă din egalitatea

$$V_{min} = \mu\sqrt{\frac{2}{\rho}\Delta P_i}$$

este egală cu

$$\Delta P_i = -\frac{\rho}{2}\left(\frac{\mu\bar{f}}{\operatorname{tg}\mu\bar{f}}\right)^2 V_{med}^2, \tag{35}$$

semnul minus indicînd o presiune mai mică decît cea din exteriorul ajutajului.

Este necesar a sublinia că ajutajul cu reţele depresive cu $\mu\bar{f} > \frac{\pi}{2}$ realizează o accelerare a curentului de gaze prin canalizaţia din amonte, comparativ cu cazul cînd curgerea s-ar face direct în atmosferă, fenomen provocat de diminuarea presiunii statice la intrarea în ajutaj. Cantitativ acest fenomen poate fi estimat pornind de la formula (35).

3. CURGEREA PRIN AJUTAJUL CU DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ A VITEZELOR LA IEȘIREA DIN FANTE

Pentru obținerea unei distribuții uniforme a vitezei prin fantele ajutajului, aria secțiunilor transversale ale acestuia trebuie să varieze după o anumită lege, a cărei evidențiere se face mai departe.

Ajutajul cu fante longitudinale. Fie ajutajul de lungime L și formă variabilă a secțiunii transversale, avînd aria secțiunii de intrare egală cu F_i (fig. 13). De-a lungul ajutajului sînt dispuse z fante longitudinale de lățime b_0 constantă pe toată lungimea lor, prin care ies gaze cu viteza V, de asemenea constantă.

Trasînd axele de coordonate ca în figura 13 și considerînd relația

$$zb_{0x} = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{z^2 b_{00}^2} - \frac{\mu^2}{\cos^2\theta}\left(\frac{x^2}{F_x^2} - \frac{\lambda}{4}\int_0^x \frac{S'_x}{F_x^3}\, x^2\, dx\right.}} \tag{36}$$

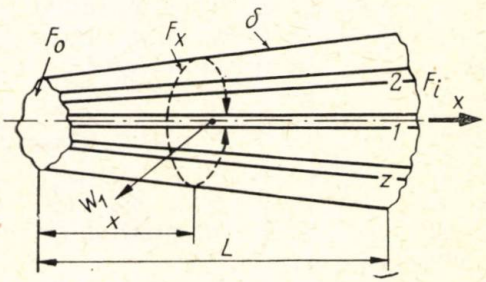


Fig. 13. — Ajutaj cu secțiune transversală de formă variabilă.

stabilită de K. K. Baulin (4), în care facem

$$b_{0x} = b_{00} = b_0,$$

se obține relația

$$\frac{x^2}{F_x^2} = \frac{\lambda}{4}\int_0^x \frac{S'_x}{F_x^3}\, x^2\, dx,$$

în care

λ — reprezintă coeficientul rezistenței de frecare,

$S'_x = \dfrac{dS}{dx}$,

S_x — suprafața laterală spălată de gaze în intervalul $0 - x$.

Derivînd această relație în raport cu x, rezultă ecuația diferențială

$$F'_x - \frac{1}{x} F_x + \frac{\lambda}{8} S'_x = 0, \tag{37}$$

care exprimă legea de variaţie a suprafeţei secţiunilor transversale ale ajutajului în lungul acestuia.

Rezolvarea acestei ecuaţii în cazul general nu este posibilă. Totuşi, în fiecare caz concret cînd se cunoaşte legătura dintre variabilele F_x şi S'_x, integrarea devine relativ simplă.

Numărul fantelor longitudinale se determină cu ajutorul ecuaţiei de debit din condiţia ca viteza la ieşirea din fante să aibă valoarea V impusă apriori :

$$Z = \frac{\rho_i Q_0}{\rho_f b_0 L V}, \tag{38}$$

unde

ρ_i este densitatea gazelor la intrarea în ajutaj,
ρ_f — densitatea gazelor la ieşirea din fante.

Realizarea uniformităţii cîmpului de viteze prin fante impune necesitatea existenţei unei presiuni statice constante în toate punctele din interiorul ajutajului. De aceea ajutajul considerat în paragraful de faţă poate fi numit şi ajutaj cu presiune statică constantă.

Excedentul presiunii totale (faţă de presiunea atmosferică) în secţiunea de intrare a ajutajului este

$$\Delta P_i^* = \Delta P_i + \frac{\rho_i C_i^2}{2}, \tag{39}$$

unde ΔP_i este excedentul presiunii statice.

Observînd că

$$\Delta P_i = \frac{\rho_f V_i^2}{2\mu^2}, \tag{40}$$

se poate scrie

$$\Delta P_i^* = \frac{\rho_f V_i^2}{2\mu^2} + \frac{\rho_i C_i^2}{2},$$

de unde

$$V_i = \mu \sqrt{\frac{2\Delta P_i^*}{\rho_f} - \frac{\rho_i}{\rho_f} C_i^2} \tag{41}$$

sau, neglijînd compresibilitatea gazelor în ajutaj,

$$V_i = V = \mu \sqrt{\frac{2\Delta P_i^*}{\rho_f} - C_i^2}. \tag{42}$$

Modificarea ariei secţiunilor transversale ale ajutajului în scopul asigurării uniformităţii cîmpului de viteze la ieşirea din fante se poate

realiza fie prin variația parametrului suprafeței laterale a ajutajului, fie prin introducerea unui corp profilat în interiorul acestuia.

În continuare vom determina arhitectura interioară a ajutajului în cele două variante.

3.1. AJUTAJUL CONIC CU DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ A VITEZELOR

Considerăm ajutajul de lungime L și formă semicirculară a secțiunilor transversale avînd suprafața laterală profilată după o curbă oarecare. De-a lungul ajutajului sînt dispuse z fante longitudinale de lățime constantă b_0 (fig. 14). Gazul intră în ajutaj prin secțiunea inițială cu

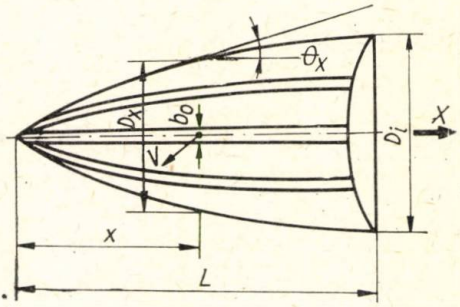


Fig. 14. — Ajutaj cu distribuție uniformă a vitezelor prin fante.

diametrul D_i, se distribuie uniform în fantele acestuia și iese în atmosferă cu viteză constantă.

Problema ce urmează a fi rezolvată constă în stabilirea legii de variație a diametrului secțiunilor transversale ale ajutajului D_x, astfel încît să se asigure uniformitatea cîmpului de viteze în fante.

Cu notațiile din figura 14 și precizînd că θ_x reprezintă unghiul format de tangenta la conturul suprafeței laterale S a ajutajului în punctul considerat cu axa absciselor, se poate scrie succesiv

$$Q_g = \frac{\pi D_i^2}{8} C_i ,$$

$$F_x = \frac{\pi D_x^2}{8},$$

$$F'_x = \frac{1}{4} \pi D_x \cdot D'_x,$$

$$S'_x = \frac{\pi D_x}{2\cos \theta_x}.$$

Considerînd unghiul θ_x suficient de mic, rezultă

$$S'_x = \frac{\pi D_x}{2}.$$

Introducînd valorile F_x şi F'_x în ecuaţia (37), se obţine următoarea ecuaţie diferenţială liniară :

$$D'_x - \frac{1}{2x} D_x + \frac{\lambda}{4} = 0, \tag{43}$$

a cărei integrare conduce la expresia

$$D_x = e^{\int \frac{dx}{2x}} \left(\tau - \frac{\lambda}{4} \int e^{-\int \frac{dx}{2x}} dx \right) = \tau \sqrt{x} - \frac{\lambda}{2} x.$$

Considerînd $x = L$, rezultă

$$D_i = \tau \sqrt{L} - \frac{\lambda}{2} L,$$

de unde

$$\tau = \frac{D_i}{\sqrt{L}} + \frac{\lambda}{2} \sqrt{L}$$

şi, prin urmare,

$$D_x = \left[\frac{D_i}{\sqrt{L}} + \frac{\lambda}{2} (\sqrt{L} - \sqrt{x}) \right] \sqrt{x}. \tag{44}$$

Să analizăm în continuare această relaţie, stabilind valoarea abscisei x, pentru care D_x este maxim.

Derivînd expresia (44) şi anulînd derivata obţinută, rezultă

$$2D_i + \lambda L - 2\lambda \sqrt{L \cdot x} = 0,$$

de unde

$$x_1 = \left(\frac{2D_i + \lambda L}{2\lambda \sqrt{L}} \right)^2. \tag{45}$$

Pentru a şti dacă valoarea x obţinută, reprezintă maximum sau minimum funcţiei (44), efectuăm derivata a doua :

$$D''_x = -\frac{1}{4} \left(\frac{2D_i + \lambda L}{2\sqrt{L}} \right) \frac{1}{\sqrt{x^3}}.$$

şi substituim x cu x_1.

Rezultă astfel

$$D''_{x_1} = -\frac{\lambda^3 L}{(2D_i + \lambda L)^2} < 0,$$

ceea ce înseamnă că valoarea x_1, furnizată din relația (45), reprezintă abscisa secțiunii transversale cu diametrul maxim al ajutajului.

Înlocuind în relația (44) valoarea lui x_1 furnizată de relația (45), rezultă expresia diametrului maxim al ajutajului:

$$D_{max} = \frac{(2D_i + \lambda L)^2}{8\lambda L} \simeq \frac{\lambda}{2} x_1.$$

Din analiza relației obținute rezultă că lungimea porțiunii divergente a ajutajului (în sensul pozitiv al abscisei) se micșorează o dată cu micșorarea diametrului inițial și apropierea mărimilor L și λ de anumite valori optime.

Revenind la relația (44), observăm că la extremitatea aval a ajutajului ($x=0$) diametrul acestuia (D_x) este egal cu zero. Din acest punct către amonte, diametrul ajutajului crește treptat pînă la valoarea D_{max} în secțiunea de abscisă x_1, după care începe să scadă pînă la valoarea D_i. Această variație a diametrului este proprie ajutajului cu $L > x_1$.

În cazul cînd $L = x_1$, ajutajul este continuu divergent de la extremitatea aval pînă la secțiunea inițială, al cărei diametru este maxim pentru întreg ajutajul.

Pentru determinarea celorlalte caracteristici (z, V, C_i) ale ajutajului conic cu cîmp uniform de viteze și fante longitudinale, se utilizează formulele (38), (41) și (42).

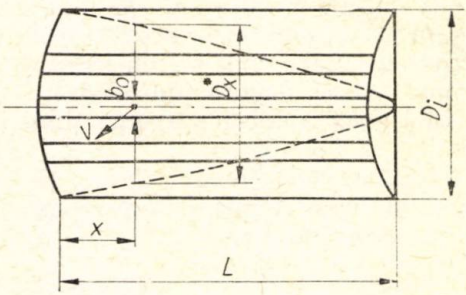


Fig. 15. — Ajutaj cilindric cu distribuție uniformă a vitezelor prin fante.

În cazul ajutajului cilindric prevăzut cu corp central de formă conică și secțiuni transversale inelare (fig. 15), uniformitatea vitezelor la ieșirea din fante rezultă din condiția

$$D_x^* = D_i - D_i$$

sau, conform relației (44),

$$D_x^* = D_i - \left[\frac{D_i}{\sqrt{L}} + \frac{\lambda}{2}(\sqrt{L} - \sqrt{x})\right]\sqrt{x}. \qquad (46)$$

În absența frecării, relațiile (44) și (46) capătă forma :

$$D_x = D_i \sqrt{\frac{x}{L}}, \tag{47}$$

$$D_x^* = D_i\left(1 - \sqrt{\frac{x}{L}}\right). \tag{48}$$

3.2. AJUTAJUL PARALELIPIPEDIC CU DISTRIBUȚIE UNIFORMĂ A VITEZELOR PRIN FANTE

Considerăm ajutajul paralelipipedic de lungime L, prevăzut cu corp central în formă de pană. De-a lungul ajutajului sînt dispuse z fante longitudinale de lățime constantă b_0 (fig. 16). Gazul intră în ajutaj prin

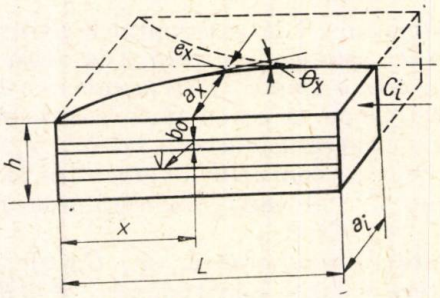


Fig. 16. — Ajutaj paralelipipedic cu distribuție uniformă a vitezelor prin fante.

secțiunea inițială cu aria $2a_i \times h$, se distribuie uniform în fantele acestuia și iese în atmosferă cu viteza constantă V.

În continuare vom stabili legea de variație a semilățimii penei (e_x), astfel încît să se asigure uniformitatea cîmpului de viteze în fante. În acest scop vom analiza curgerea numai printr-una din jumătățile ajutajului.

Utilizînd notațiile din figura 16 și admițînd că unghiul făcut de tangenta la profilul penei în punctul considerat este suficient de mic, se poate scrie succesiv

$$F_x = a_x \cdot h,$$

$$F'_x = a'_x \cdot h,$$

$$S'_x \simeq 2(a_x + h).$$

Introducînd valorile F_x, F'_x și S'_x în ecuația (37), se obține următoarea ecuație diferențială liniară de ordinul întîi :

$$a'_x + \left(\frac{\lambda}{4h} - \frac{1}{x}\right) a_x + \frac{\lambda}{4} = 0,$$

a cărei integrare conduce la relația

$$a_x = \mathrm{e}^{-\int\left(\frac{\lambda}{4h}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\cdot\left[C-\frac{\lambda}{4}\int \mathrm{e}^{\int\left(\frac{\lambda}{4h}-\frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x}\cdot \mathrm{d}x\right] =$$

$$=\left[C-\frac{\lambda}{4}\int \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right] x\cdot \mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{4h}}.$$

Valoarea constantei de integrare rezultată din condiția $x = L$:

$$a_i = \left(C-\frac{\lambda}{4}\int_0^L \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) L\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda L}{4h}},$$

de unde

$$C = \frac{a_i}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda L}{4h}} + \frac{\lambda}{4}\int_0^L \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}}\frac{\mathrm{d}x}{x}$$

și, prin urmare,

$$a_x = \left(\frac{a_i}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda L}{4h}} + \frac{\lambda}{4}\int_x^L \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}}\frac{\mathrm{d}x}{x}\right) x\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{4h}}.$$

Pentru calculul integralei dintre paranteze, dezvoltăm în serie pe $\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}}$:

$$\mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}} = 1+\frac{\lambda x}{4h}+\frac{\lambda^2 x^2}{2!\,16h^2}+\frac{\lambda^3 x^3}{3!\,64h^3}+\ldots$$

Limitîndu-ne la primii doi termeni și efectuînd integrarea, se obține

$$\int_0^L \mathrm{e}^{\frac{\lambda x}{4h}}\frac{\mathrm{d}x}{x} = \int_x^L\left(\frac{1}{x}+\frac{\lambda}{4h}\right)\mathrm{d}x = \ln\frac{L}{x}+\frac{\lambda}{4h}(L-x).$$

Expresia lui a_x devine astfel

$$a_x = \left\{\frac{a_i}{L}\,\mathrm{e}^{\frac{\lambda L}{4h}} + \frac{\lambda}{4}\left[\ln\frac{L}{x}+\frac{\lambda}{4h}(L-x)\right]\right\} x.\,\mathrm{e}^{-\frac{\lambda x}{4h}}. \qquad (49)$$

Deoarece

$$a_x = a_i - a_e,$$

rezultă valoarea căutată a semilăţimii penei

$$e_x = a_i - a_x,$$

sau

$$e_x = a_i - \left\{ \frac{a_i}{L} e^{\frac{\lambda L}{4h}} + \frac{\lambda}{4}\left[\ln \frac{L}{x} + \frac{\lambda}{4h}(L - x) \right] \right\} x \cdot e^{-\frac{\lambda x}{4h}}. \qquad (50)$$

Calculul celorlalţi parametri (z, V, C_i) ai ajutajului paralelipipedic cu cîmp uniform de viteze se face cu ajutorul relaţiilor (38), (41) şi (42).

Primită la redacţie la 17 decembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. C. Teodorescu-Ţintea, E. Moisei, *Brevet Nr. 42.718, Dispozitiv cu voleţi depresivi pentru atenuarea zgomotului radiat de jetul motoarelor cu reacţie*, Bucureşti, O.S.I., 1960.
2. C. Teodorescu-Ţintea, *Consideration concernant la réalisation de cerlaines turbines basées sur l'effet Coandă*, Primul colocviu european de mecanică, Berlin Vest, 5—6 aprilie 1965.
3. — *Cercetări asupra reversării tracţiunii turbomotoarelor de avion cu ajutorul efectului Coandă*, Revista transporturilor, **7**, *9* (1960).
4. K. K. Baulin, *Issledovanie ravnomernti razdaci vozduha iz priamih turboprovodov*, Otoplenie i ventilaţia, *7* (1934).
5. V. I. Taliev, *Aerodinamika ventilaţii*, Moskva, Gosudarstvenoe izdatelstvo, 1963.
6. C. Teodorescu-Ţintea, *Brevet No. 42.186, Turbină radială cu palete depresive*, Bucureşti, O.S.I., 1969.
7. — *Brevet No.* 2345/41446, *Reversor de tracţiune cu voleţi depresivi pentru avioanele cu reacţie*, Bucureşti, O.S.I., 1960.
8. I. Iacovachi, *Henri Coandă, personalité marquante de la technique moderne*, Machines et Equipaments Roumains, *4* (1966).
9. D. Moroianu, I. M. Ştefan, *Focul viu*, Bucureşti, Edit. ştiinţifică, 1963.
10. C. Teodorescu-Ţintea, *Aplicarea efectului Coandă la instalaţiile de amortizare a zgomotului generat de motoarele cu reacţie pe bancul de probă*, Bucureşti, Edit. de stat pentru imprimate şi publicaţii, 1965.

STRATUL-LIMITĂ DISIPATIV PE CORPURI ALE CĂROR SUPRAFEȚE AU TEMPERATURA VARIABILĂ (SOLUȚII AUTOMODELATE)

de P. BRĂDEANU, ELISABETA BALOGH
Universitatea „Babeș-Bolyai" — Cluj
Facultatea matematică-mecanică

Se introduce o transformare generalizată de variabile pentru ecuațiile stratului-limită compresibil plan și axial-simetric, care se folosește apoi la obținerea unor soluții automodelate.
Se integrează numeric ecuația energiei și se calculează fluxul de căldură de la corpul încălzit la fluidul în mișcare.

NOTAȚII

x, y, coordonatele stratului-limită: x se măsoară pe generatoarea corpului iar y se măsoară pe normala la generatoare;
u, v, proiecțiile vitezei particulei fluide pe axele coordonatelor x și y;
p, ρ, presiunea, respectiv densitatea;
c_p, căldura specifică la presiune constantă;
T, temperatura absolută;
$i = c_p T$, entalpia unității de masă;
r, distanța de la un punct curent al stratului-limită la axa de simetrie a corpului de rotație;
μ, coeficientul dinamic de viscozitate;
λ, coeficientul conductibilității termice;
$\sigma = \mu c_p / \lambda$, numărul lui Prandtl;
$\mathcal{R}_{ex}$, $\mathcal{N}_u$, numerele lui Reynolds și Nusselt;
ν, este egal cu 0 și 1 pentru stratul-limită plan și, respectiv, axial-simetric;
ε, este egal cu 0 și 1 pentru stratul-limită incompresibil și, respectiv, compresibil.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 799–810

INDICI

w, valorile parametrilor pe suprafața corpului ($y = 0$);
1, valorile parametrilor pe frontiera exterioară ($y = \infty$);
ξ, η, derivate în raport cu ξ și, respectiv, η.

În lucrare se studiază stratul-limită laminar incompresibil, cu luarea în considerare a disipației și a variației temperaturii suprafeței corpului. În acest scop se introduce o transformare generalizată de variabile pentru ecuațiile stratului-limită compresibil plan și axial-simetric și se deduc condiții de existență a unor soluții automodelate pentru cazul incompresibil. Se face o aplicație la mișcarea din vecinătatea punctului critic (stagnare). Se integrează numeric ecuația energiei și se dă o formulă pentru calculul fluxului de căldură și a numărului Nusselt. Luarea în considerare a disipației prelungește domeniul de existență al soluțiilor din vecinătatea punctului critic.

1. TRANSFORMAREA GENERALIZATĂ A ECUAȚIILOR STRATULUI-LIMITĂ

Ecuațiile mișcării, energiei, continuității, ecuația de stare și legea viscozității în stratul-limită compresibil plan și axial-simetric au forma [1]:

$$\rho\left(u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial u}{\partial y}\right)=-\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left(r^{\nu}\mu\frac{\partial u}{\partial y}\right), \tag{1}$$

$$\rho\left(u\frac{\partial i}{\partial x}+v\frac{\partial i}{\partial y}\right)=u\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}+\mu\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^{2}+\frac{1}{r^{\nu}}\frac{\partial}{\partial y}\left(r^{\nu}\frac{\mu}{\sigma}\frac{\partial i}{\partial y}\right), \tag{2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(r^{\nu}\rho u)+\frac{\partial}{\partial y}(r^{\nu}\rho v)=0, \tag{3}$$

$$\frac{p}{\rho}=F(i)\ \text{sau}\ p=\rho RT;\ \frac{\mu}{\mu_0}=f\left(\frac{i}{i_0}\right), \tag{4}$$

$$u(x,\,0)=0,\ v(x,\,0)=0;\ u(x,\,\infty)=u_1(x)\qquad \left(\frac{\partial u}{\partial y}(x,\,\infty)=0\right),$$

$$i(x,\,0)=i_w\ \text{sau}\ \frac{\partial i}{\partial y}(x,\,0)=0;\ i(x,\,\infty)=i_1\qquad \left(\frac{\partial i}{\partial y}(x,\,\infty)=0\right),$$

unde u, v, i, ρ și μ sînt funcții necunoscute de x și y, iar $r=r(x,y)$.

Vom face în ecuațiile (1) — (4) următoarele transformări de variabile:

$$x=\int_0^{\xi}A(\xi)\,\mathrm{d}\xi;\ y=\int_0^{\eta}B(\xi,\,\eta)\,\mathrm{d}\eta\qquad(\mathrm{d}x=A\mathrm{d}\xi) \tag{5}$$

sau

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{1}{A}\left[\frac{\partial}{\partial \xi} - \left(\frac{1}{B}\int_0^\eta \frac{\partial B}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\eta\right)\frac{\partial}{\partial \eta}\right], \quad \frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial \eta},$$

unde ξ şi η sînt noile variabile care înlocuiesc pe x şi y. Observînd că din ecuaţia continuităţii (3), în urma unei integrări prin părţi, găsim

$$r^\nu \rho v = -\frac{1}{A}\int_0^\eta \frac{\partial}{\partial \xi}(r^\nu \rho u B)\,\mathrm{d}\eta + \frac{r^\nu \rho u}{A}\int_0^\eta \frac{\partial B}{\partial \xi}\,\mathrm{d}\eta$$

şi introducînd mărimile adimensionale

$$\bar{u} = \frac{u}{u_1(x)}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_1(x)}, \quad \bar{i} = \frac{i}{i_1(x)}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_1(x)}, \quad \bar{r} = \frac{r}{r_w(x)},$$

ecuaţiile (1) şi (2) se transformă în următoarele ecuaţii integrale:

$$r^\nu \bar{\mu}\bar{\rho}\bar{u}\bar{u}_\xi - \frac{\bar{\mu}\bar{u}_\eta}{\rho_1 u_1 B}\int_0^\eta (r^\nu \rho u B)_\xi\,\mathrm{d}\eta = -\frac{r^\nu \bar{\mu} p_\xi}{\rho_1 u_1^2} -$$

$$- r^\nu \bar{\mu}\bar{\rho}\bar{u}^2\frac{u_{1\xi}}{u_1} + \frac{A\mu_1\bar{\mu}}{\rho_1 u_1 B}\left(r^\nu \frac{\bar{\mu}\bar{u}_\eta}{B}\right)_\eta, \tag{6}$$

$$r^\nu \bar{\mu}\bar{\rho}\bar{u}\bar{i}_\xi - \frac{\bar{\mu}\bar{i}_\eta}{\rho_1 u_1 B}\int_0^\eta (r^\nu \rho u B)_\xi\,\mathrm{d}\eta = \frac{u_1^2}{i_1}\frac{r^\nu A\bar{\mu}^2\mu_1}{\rho_1 u_1 B^2}\bar{u}_\eta^2 +$$

$$+ \frac{A\mu_1\bar{\mu}}{\rho_1 u_1 B}\left(\frac{r^\nu}{\sigma}\frac{\bar{\mu}}{B}\bar{i}_\eta\right)_\eta + r^\nu \bar{\mu}\bar{u}\left(\frac{p_\xi}{\rho_1 i_1} - \frac{i_{1\xi}}{i_1}\bar{\rho}\bar{i}\right). \tag{7}$$

Admiţînd că funcţia $B(\xi, \eta)$ este de forma

$$B = \left(\frac{r_w}{r}\right)^\nu \frac{B_1(\xi)}{\rho},$$

să modificăm funcţiile $A(\xi)$ şi $B_1(\xi)$ în aşa fel, încît să fie îndeplinite condiţiile

$$\frac{(r_w^\nu u_1 B_1)_\xi}{r_w^\nu u_1 B_1} = \frac{\alpha_\xi}{\alpha(\xi)}, \quad \frac{A\mu_1\rho_1}{u_1\beta B_1^2} = \frac{1}{\alpha^2},$$

unde $\alpha(\xi)$ și $\beta(\xi)$ sînt alte două funcții arbitrare care înlocuiesc funcțiile A și B_1. Se deduce imediat din egalitățile precedente că

$$B_1 = \frac{\alpha}{u_1 r_w^\nu}, \quad A = \frac{\beta}{\mu_1 \rho_1 u_1 r_w^{2\nu}}, \quad B = \frac{\alpha}{u_1 \rho r^\nu}.$$

Transformările de coordonate (5) și ecuațiile integrale (6) și (7), după înlocuirea funcțiilor A și B determinate mai sus, iau următoarea formă:

$$\xi = \int_0^x \frac{\mu_1 \rho_1 u_1 r_w^{2\nu}}{\beta} \mathrm{d}x; \quad \eta = \frac{u_1}{\alpha(\xi)} \int_0^y r^\nu \rho \mathrm{d}y, \tag{8}$$

$$(\bar{r}^{2\nu} \bar{\mu}\, \bar{\rho} f_{\eta\eta})_\eta + \frac{\alpha \alpha_\xi}{\beta} f f_{\eta\eta} = \frac{\alpha^2}{\beta}(f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) +$$

$$+ \frac{\alpha^2}{\beta}\left[\frac{1}{\bar{\rho}} \frac{p_\xi}{\rho_1 u_1^2} + \frac{u_{1\xi}}{u_1}(f_\eta)^2\right], \tag{9}$$

$$\left(\frac{\bar{r}^{2\nu}}{\sigma} \bar{\mu}\, \bar{\rho} \bar{i}_\eta\right)_\eta + \frac{\alpha \alpha_\xi}{\beta} f \bar{i}_\eta = \frac{\alpha^2}{\beta}(f_\eta \bar{i}_\xi - f_\xi \bar{i}_\eta) - \frac{u_1^2}{i_1} \bar{r}^{2\nu} \overline{\mu\rho} (f_{\eta\eta})^2 -$$

$$- \frac{\alpha^2}{\beta}\left(\frac{\varepsilon p_\xi}{\rho_1 i_1} - \bar{\rho}\bar{i} \frac{i_{1\xi}}{i_1}\right) \frac{f_\eta}{\bar{\rho}}, \tag{10}$$

$$f(\xi, 0) = 0, \; f_\eta(\xi, 0) = 0, \; f_\eta(\xi, \infty) = 1; \; \bar{i}_\eta(\xi, 0) = 0$$

$$\text{sau } \bar{i}(\xi, 0) = \frac{i_w(\xi)}{i_1(\xi)}, \quad \bar{i}(\xi, \infty) = 1, \tag{11}$$

unde

$$f(\xi, \eta) = \int_0^\eta \bar{u}(\xi, \eta) \mathrm{d}\eta, \; \bar{u} = \frac{\partial f}{\partial \eta} (= f_\eta). \tag{12}$$

Funcția $f(\xi, \eta)$ se introduce prin expresia (12) ca o consecință a următorului calcul:

$$\int_0^\eta (r^\nu \rho_1 u_1 \bar{\rho}\, \bar{u} B)_\xi \mathrm{d}\eta = \frac{\partial}{\partial \xi}\left(\alpha \int_0^\eta \bar{u} \mathrm{d}\eta\right) = \frac{\partial}{\partial \xi}(\alpha f).$$

Din transformarea generalizată (8) și din ecuațiile (9) — (12) se pot deduce direct, luînd expresii particulare simple pentru α și β, transformările și ecuațiile lui Illingworth-Stewartson, Blasius, Howarth, Stewartson-Rott, Lees-Dorotnițîn, Mangler etc., care sînt folosite în mod curent în diferite probleme ale stratului-limită.

2. STRAT-LIMITĂ INCOMPRESIBIL PLAN. SOLUȚII AUTOMODELATE

Mișcarea în stratul-limită incompresibil plan se caracterizează prin formulele

$$\rho = \rho_1 = \rho_\infty = \text{const}, \quad \mu = \mu_1 = \mu_\infty = \text{const}, \quad i_1 =$$

$$= i_\infty = \text{const}, \quad \varepsilon = 0, \quad \nu = 0. \tag{13}$$

Vom lua în considerare influența disipației, admițînd că nu este neglijabilă căldura care ia naștere prin frecare, și vom presupune că suprafața corpului are temperatura variabilă. Problema aceasta însă, în lipsa disipației, este studiată în lucrarea [3].

Pentru a calcula parametrii stratului-limită, urmărind în mod special influența disipației, vom da o altă formă ecuațiilor (9) și (10). În acest scop vom face substituțiile

$$\theta_1^2 \equiv \frac{u_1^2}{2i_\infty}, \quad (\theta_1^2)_\xi = \frac{u_1 u_{1\xi}}{i_\infty}, \quad \bar{\rho} = 1, \quad \bar{\mu} = 1,$$

$$\bar{i} = (1 + \theta_1^2)\, g - \theta_1^2 f_\eta^2, \quad \frac{1}{\bar{\rho}} - f_\eta^2 = 1 - f_\eta^2, \quad f_\eta^2 \equiv (f_\eta)^2, \tag{14}$$

$$\bar{i}\bar{\rho} \neq 1, \quad p_\xi + \rho u_1 u_{1\xi} = 0, \quad i_{10} = \left(i_1 + \frac{u_1^2}{2}\right) \neq \text{const} \quad (i_1 = i_\infty),$$

unde $g(\xi, \eta)$ este noua funcție necunoscută care înlocuiește entalpia adimensională $\bar{i}$, iar i_{10} este entalpia de stagnare în curentul exterior. Mărimea i_{10} este constantă numai în cazul plăcii plane atacată sub unghi nul sau în cazul mișcării nedisipative cînd $\theta_1 \to 0$.

Din ecuațiile (9) și (10) deducem, dacă înmulțim ecuația (9) cu $2\theta_1^2 f_\eta$ și adunăm rezultatul la ecuația (10) și dacă folosim substituțiile (14), ecuațiile stratului-limită incompresibil plan, în forma

$$f_{\eta\eta\eta} + \frac{\alpha\alpha_\xi}{\beta} f f_{\eta\eta} = \frac{\alpha^2}{\beta}(f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) - \frac{\alpha^2}{\beta}\frac{u_{1\xi}}{u_1}(1 - f_\eta^2), \tag{15}$$

$$\frac{1}{\sigma} g_{\eta\eta} + \frac{\alpha\alpha_\xi}{\beta} f g_\eta = \frac{\alpha^2}{\beta}(f_\eta g_\xi - f_\xi g_\eta) - \frac{2\theta_1^2}{1 + \theta_1^2}\left[\left(1 - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{1}{\sigma}\right)(f_\eta f_{\eta\eta})_\eta - \frac{\alpha^2}{\beta}\frac{u_{1\xi}}{u_1}(g - 1) f_\eta\right], \tag{16}$$

$$f(\xi, 0) = 0, f_\eta(\xi, 0) = 0, \quad f_\eta(\xi, \infty) = 1; \quad g_\eta(\xi, 0) =$$

$$= 0, \text{ sau, } g(\xi, 0) = \frac{i_w(\xi)}{i_{10}} \equiv g_w, \quad g(\xi, \infty) = 1, \tag{17}$$

unde

$$\xi = \mu\rho \int_0^x \frac{u_1}{\beta}\,dx, \quad \eta = \frac{u_1\rho}{\alpha(\xi)}\,y \tag{18}$$

sînt formulele de transformare (8) care stabilesc legătura dintre planul fizic (x, y) şi planul auxiliar (ξ, η).

În ecuaţiile (15), (16) şi în condiţiile la limită (17), variabila ξ apare nu numai prin intermediul funcţiilor $f(\xi, \eta)$ şi $g(\xi, \eta)$, ci şi prin coeficienţi, prin entalpia $i_w(\xi)$ a suprafeţei corpului şi prin i_{10}. Deoarece funcţiile α şi β sînt arbitrare, vom putea admite că

$$\alpha = \sqrt{2\xi}, \quad \beta = 1 \text{ şi } g = 1 + (g_w - 1)\,G(\xi, \eta), \tag{19}$$

unde $G(\xi, \eta)$ este o nouă funcţie, care înlocuieşte funcţia $g(\xi, \eta)$.

Ecuaţiile (15), (16), condiţiile la limită (17) şi formulele de transformare (18), efectuînd substituţiile (19), vor primi următoarea formă:

$$f_{\eta\eta\eta} + f f_{\eta\eta} = 2\xi(f_\eta f_{\eta\xi} - f_\xi f_{\eta\eta}) - 2\xi\frac{u_{1\xi}}{u_1}(1 - f_\eta^2), \tag{20}$$

$$G_{\eta\eta} + \sigma f G_\eta = 2\sigma\xi(f_\eta G_\xi - f_\xi G_\eta) + 2\sigma\xi\left[\frac{g_{w\xi}}{g_w - 1} + \right.$$

$$\left. + \frac{(\theta_1^2)_\xi}{1 + \theta_1^2}\right] f_\eta G - \frac{2\theta_1^2(\sigma - 1)}{(1 + \theta_1^2)(g_w - 1)}(f_\eta f_{\eta\eta})_\eta, \tag{21}$$

$$f(\xi, 0) = f_\eta(\xi, 0) = 0, \; f_\eta(\xi, \infty) = 1;$$

$$G(\xi, 0) = 1, G(\xi, \infty) = 0, \tag{22}$$

$$\xi = \mu\rho \int_0^x u_1(x)\,dx, \quad \eta = \frac{\rho u_1}{\sqrt{2\xi}}\,y. \tag{23}$$

După cum se vede, introducerea funcţiei $G(\xi, \eta)$ elimină variabila ξ din expresia condiţiilor la limită. Acest fapt este avantajos în problema obţinerii unor soluţii automodelate pentru ecuaţiile (20) — (21). Într-adevăr, să presupunem că parametrii exteriori u_1 şi g_w, care pînă acum nu au fost precizaţi, satisfac condiţiile matematice

$$2\xi\frac{u_{1\xi}}{u_1} = \text{const} \equiv 2n, \; 2\xi\left[\frac{g_{w\xi}}{g_w - 1} + \frac{(\theta_1^2)_\xi}{1 + \theta_1^2}\right] =$$

$$= \text{const} \equiv 2k, \; \frac{2\theta_1^2}{(1 + \theta_1^2)(g_w - 1)} \equiv D, \tag{24}$$

care exprimă constanța coeficienților, dependenți de ξ, din ecuațiile (20) — (21). În aceste formule, n, k și D sînt constante arbitrare. Valorile diferite pe care le vor primi aceste constante vor defini problema din punct de vedere aerotermodinamic.

Condițiile (24) sînt satisfăcute, după cum se constată ușor integrînd ecuații diferențiale de ordinul întîi cu variabile separate, dacă

$$\text{a) } D \neq 0,\ g_w \neq \text{const}\ (\theta_1 \neq 0),$$

$$\text{b) } u_1 = c_1 \xi^n,$$

$$\text{c) } g_w = 1 + B_0 \frac{\xi^k}{1 + \theta_1^2} = 1 + B_0 \xi^k (1 + c_{10} \xi^{2n})^{-1}, \tag{25}$$

$$\text{d) } k = 2n \qquad \left(D = \frac{c_1^2}{B_0 i_\infty},\ c_1 = \text{const},\ B_0 = \text{const},\ c_{10} = \frac{c_1^2}{2 i_\infty} \right),$$

unde c_1 și B_0 sînt constante arbitrare de integrare.

Condițiile (25) au o semnificație hidrodinamică (fizică) precisă. Condiția a) reprezintă influența disipației și variației temperaturii suprafeței corpului care ne interesează în problema pe care o studiem. Desigur că condițiile (24) pot fi îndeplinite și în alte cazuri posibile fizic, studiate prin diferite metode de diverși autori. Condițiile (24) determină parametrii u_1, g_w și k.

Cu condițiile (25) vom căuta pentru ecuațiile (20) — (22) soluții de forma $f(\eta)$ și $G(\eta)$, zise automodelate (independente de ξ), care satisfac, după (20) — (22), ecuațiile diferențiale ordinare

$$f''' + ff'' + 2n(1 - f'^2) = 0, \tag{26}$$

$$G'' + \sigma f G' - 4n\sigma f' G = (1 - \sigma) D (f' f'')', \tag{27}$$

$$f(0) = f'(0) = 0,\ f'(\infty) = 1;\ G(0) = 1,\ G(\infty) = 0. \tag{28}$$

Problema pe care o studiem se reduce la integrarea ecuațiilor (26) și (27), cu condițiile la limită (28). Ecuația (26) este ecuația lui Falkner și Skan și ea a fost integrată numeric de diferiți autori. Ecuația energiei (27) coincide cu cea din lucrarea [3] dacă luăm $D=0$.

După integrarea ecuațiilor (26) — (28) urmează să se determine tensiunea de frecare și să se evalueze schimbul de căldură dintre corp și fluid.

Tensiunea de frecare τ_w pe suprafaţa corpului şi fluxul de căldură q_w se vor calcula, potrivit formulelor lui Newton şi Fourier, cu ajutorul formulelor

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_w = \frac{\mu \rho u_1^2}{\sqrt{2\xi}} f''(0), \tag{29}$$

$$q_w = -\lambda \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_w = -\frac{i_{10}}{\sigma} \frac{\mu \rho u_1}{\sqrt{2\xi}} (g_w - 1) G'(0), \tag{30}$$

unde q_w reprezintă cantitatea de căldură care se scurge prin unitatea de suprafaţă în unitatea de timp de la corp la fluid.

În sfîrşit, rămîne să se stabilească corespondenţa dintre planul fizic (x, y) şi planul auxiliar (ξ, η), să se găsească formulele de trecere la planul fizic. Din (23), cu luarea în considerare a condiţiilor (25), obţinem

$$\xi = [(1-n)\mu\rho c_1]^{\frac{1}{1-n}} x^{\frac{1}{1-n}}, \quad \eta = \frac{\rho u_1}{\sqrt{2\xi}} y. \tag{31}$$

Pentru viteza u_1 şi temperatura suprafeţei corpului T_w, avem formulele

$$u_1 = c_1 \xi^n = c_1 [(1-n)\mu\rho c_1]^{\frac{n}{1-n}} x^{\frac{n}{1-n}},$$

$$T_w = T_\infty + \left(\frac{c_1^2}{2c_p} + B_0 T_\infty\right) \xi^{2n} = T_\infty + \left(\frac{c_1^2}{2c_p} + B_0 T_\infty\right)$$

$$[(1-n)\rho\mu c_1]^{\frac{2n}{1-n}} x^{\frac{2n}{1-n}}, \tag{32}$$

care sînt de forma

$$u_1 = cx^m, \quad T_w = T_\infty + ax^\gamma, \tag{33}$$

unde c, T_∞ şi a sînt mărimi date dacă luăm

a) $$\frac{n}{1-n} = m, \; 2n = \frac{2m}{m+1} \; (= \beta), \; c = c_1 [(1-n)\mu\rho c_1]^{\frac{n}{1-n}} =$$

$$= c_1^{1+m} \left(\frac{\mu\rho}{1+m}\right)^m, \tag{34}$$

b) $$\frac{2n}{1-n} = \gamma, \; \gamma = 2m, \; a = \left(\frac{c_1^2}{2c_p} + BT_\infty\right) \left(\frac{\mu\rho c}{1+m}\right)^{\frac{2m}{1+m}}. \tag{35}$$

Formulele de transformare a variabilelor (31) după (32) şi (34) devin

$$\xi = \frac{\mu\rho}{1+m} x u_1(x), \quad \eta = y\sqrt{\frac{m+1}{2}\frac{\rho u_1}{\mu x}} \ (= \eta_{\text{Hartree}}). \tag{36}$$

În planul fizic, condiţiile de automodelare sînt (33) împreună cu (34)—(35), şi ele corespund stratului-limită care se formează pe un diedru încălzit cu deschiderea $\pi\beta$ în vecinătatea punctului critic al cilindrului încălzit şi a plăcii plane încălzite, atacate perpendicular de curentul fluid vîscos.

3. CALCULUL SCHIMBULUI DE CĂLDURĂ ÎN VECINĂTATEA PUNCTULUI CRITIC (stagnare)

Vom aplica ecuaţiile (26) — (36) în cazul

$$n = \frac{1}{2}, \ m = 1, \ \beta = 1, \ D = 1, \tag{37}$$

cînd expresia vitezei exterioare şi a temperaturii suprafeţei corpului au, respectiv, forma

$$u_1 = cx, \ T_w = T_\infty + a x^2, \tag{38}$$

unde c, a şi T_∞ sînt constante date. Formulele (38) corespund mişcării din vecinătatea punctului critic al unei mişcări perpendiculare pe placa plană sau pe generatoarele unui corp cilindric.

Ecuaţiile mişcării vor fi

$$f''' + ff'' + 1 - f'^2 = 0, \tag{39}$$

$$G'' + \sigma f G' - 2\sigma f' G = (1-\sigma)(f'f'')', \tag{40}$$

$$f(0) = f'(0) = 0, \ f'(\infty) = 1; \ G(0) = 1, \ G(\infty) = 0, \tag{41}$$

$$\xi = \frac{\mu\rho}{2} x u_1(x) = \frac{\mu\rho c}{2} x^2, \quad \eta = y\sqrt{\frac{\rho u_1}{\mu x}} = y\sqrt{\frac{\rho c}{\mu}}. \tag{42}$$

Ecuaţia mişcării (39), independentă de ecuaţia energiei (40), a fost integrată numeric de Hiemenz, Howarth, Hartree şi alţii. Vom folosi soluţia numerică dată de Hartree (tabela 1) [4].

Pentru rezolvarea ecuaţiei energiei (40), care conţine pe f şi derivatele sale, aplicăm metoda diferenţelor finite [5]. Rezultatele numerice, obţinute cu ajutorul maşinii de calcul DACIC—1 (Cluj), sînt prezentate în tabela 1, unde figurează valorile funcţiilor $G(\eta)$ şi $G'(\eta)$ pe intervalul [0 ; 4,0]. Soluţia numerică relativ la funcţia $G(\eta)$ este reprezentată grafic în figura 1 (curba (1)). Tot în figura 1 este dată pentru comparaţie şi

Tabela 1

η	f	f'	f''	G	G'
0,0	0,0000	0,0000	1,2326	1,0000	−0,875
0,2	0,0233	0,2266	1,0345	0,8250	−0,822
0,4	0,0881	0,4144	0,8463	0,6712	−0,716
0,6	0,1867	0,5662	0,6751	0,5388	−0,611
0,8	0,3124	0,6859	0,5251	0,4268	−0,514
1,0	0,4592	0,7778	0,3980	0,3332	−0,427
1,2	0,6220	0,8467	0,2937	0,2561	−0,349
1,4	0,7966	0,8968	0,2109	0,1936	−0,281
1,6	0,9798	0,9324	0,1473	0,1436	−0,223
1,8	1,1688	0,9569	0,0999	0,1045	−0,173
2,0	1,3619	0,9732	0,0658	0,0744	−0,132
2,2	1,5577	0,9841	0,0420	0,0518	−0,098
2,4	1,7552	0,9905	0,0260	0,0352	−0,071
2,6	1,9537	0,9946	0,0156	0,0234	−0,050
2,8	2,1529	0,9971	0,0091	0,0150	−0,035
3,0	2,3525	0,9985	0,0051	0,0094	−0,024
3,2	2,5522	0,9992	0,0027	0,0056	−0,018
3,4	2,7521	0,9996	0,0019	0,0032	−0,010
3,6	2,9521	0,9998	0,0010	0,0016	−0,006
3,8	3,1518	0,9999	0,0004	0,0006	−0,004
4,0	3,3518	1,0000	0,0002	0,0000	−0,003

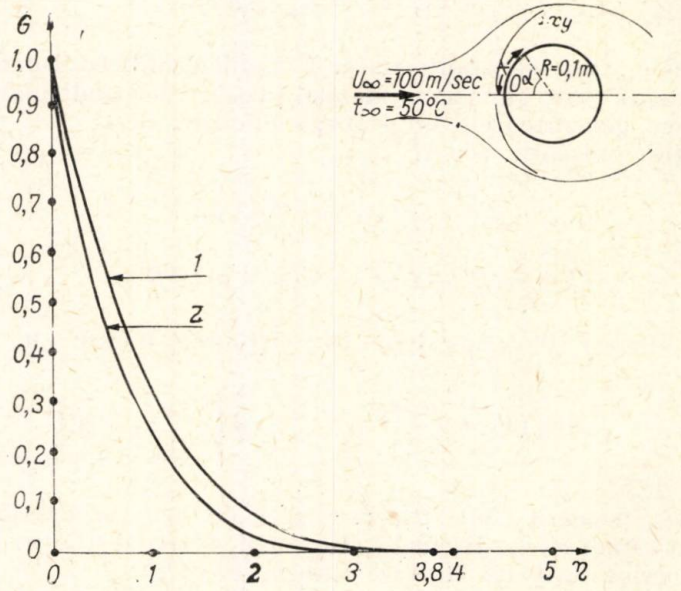


Fig. 1

curba (2), obţinută în lucrarea [3] în ipoteza lipsei disipaţiei. Diferenţa dintre cele două curbe este mică, ceea ce pune în evidenţă faptul că influenţa disipaţiei nu este mare.

Soluția numerică din tabela 1 se folosește pentru determinarea tensiunii de frecare și a transferului de căldură de la corpul încălzit la fluidul în mișcare din vecinătatea punctului critic. Datorită condiției la limită $G(0)=1$, va exista un flux de căldură de la corp la fluid.

Pentru tensiunea locală de frecare pe corp $\tau_w(x)$ și pentru fluxul termic local q_w, care reprezintă cantitatea de căldură ce se scurge prin unitatea de suprafață în unitatea de timp, avem formulele

$$\tau_w = \sqrt{\mu\rho c}\, u_1 f''(0) = 1{,}2326\, cx \sqrt{\mu\rho c}, \tag{43}$$

$$q_w = -\frac{i_{10}}{\sigma}\sqrt{\mu\rho c}\,(g_w - 1)\,G'(0) = 0{,}875\sqrt{\mu\rho c}\,\frac{c_p}{\sigma}\left(T_w - T_\infty - \frac{c^2}{2c_p}\,x^2\right), \tag{44}$$

care se deduc din (29) — (30). Sensul de scurgere al căldurii de la corpul încălzit la fluid este asigurat dacă

$$T_w > T_\infty + \frac{c^2}{2c_p}x^2, \text{ adică } a > \frac{c^2}{2c_p}.$$

Cu privire la calculul schimbului de căldură se obișnuiește să se folosească numărul lui Nusselt $\mathcal{N}_u$, care, în problema aceasta, are expresia

$$\mathcal{N}_u = \frac{q_w}{T_w - \left(T_\infty + \dfrac{u_1^2}{2c_p}\right)}\,\frac{x}{\lambda} = 0{,}875\sqrt{\mathcal{R}_{ex}} \quad \left(\mathcal{R}_{ex} = \frac{\rho u_1 x}{\mu}\right), \tag{45}$$

unde $\mathcal{R}_{ex}$ este numărul lui Reynolds relativ la viteza u_1 și la lungimea x.

Aplicație numerică. Să considerăm mișcarea din vecinătatea punctului critic O al unui cilindru fix cu raza $R=0{,}1$ m, încălzit la temperatura $T_w = T_\infty + ax^2$ ($a = 5\cdot 10^3$ °C/m²), care este atacat de un curent de aer având la infinit viteza $u_\infty = 100$ m/s și temperatura $t_\infty = 50$°C.

Valorile parametrilor caracteristici ai curentului de aer sînt

$$\sigma = 0{,}7\ ;\ \lambda = 0{,}0241\ \frac{\text{Kcal}}{\text{m oră °C}}\ ;\ \frac{\mu}{\rho} = 2{,}36\cdot 10^{-5}\,\frac{\text{m}^2}{\text{s}},$$

$$\rho = \frac{1}{8}\,\frac{\text{Kgf s}^2}{\text{m}^4}, \quad c_p = 0{,}24\,\frac{\text{Kcal}}{\text{Kg °C}} = 0{,}24\cdot 427\cdot 9{,}81\,\frac{\text{m}^2}{\text{grad s}^2}.$$

Pentru viteza exterioară u_1 avem expresia (fig. 1)

$$u_1 = 2u_\infty \sin\alpha = 2\,u_\infty \sin\frac{x}{R} \approx \frac{2u_\infty}{R}\,x \quad \left(c = \frac{2u_\infty}{R}\right),$$

unde α este unghiul la centru determinat de raza în punctul x și direcția curentului neperturbat. Aplicînd formulele precedente, găsim rezultatele următoare :

$$u_1 = 2 \cdot 10^3 x \frac{m}{s}; \; T_w = (323 + 5 \cdot 10^3 x^2)\,^\circ\mathrm{K}; \; \mathcal{R}_{ex} = 846 \cdot 10^5 x^2,$$

$$\mathcal{N}_u = 8023\, x, \quad q_w = 580 \cdot 10^3 x^2 \frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{m^2\ oră}}.$$

De exemplu, în punctul $x = 0{,}05$ m obținem

$$u_1 = 100 \frac{m}{s}; \; T_w = 335{,}5\,^\circ\mathrm{K}; \; \mathcal{R}_{ex} = 211500, \; \mathcal{N}_u = 401{,}15,$$

$$q_w = 1450 \frac{\mathrm{Kcal}}{\mathrm{m^2\ oră}}.$$

Primită la redacție la 4 iulie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Lunev, PMM, Moskva, *1* (1959).
2. J. Tinkler, 50 Jahre Grenzschichtfor, 1955 (Braunschweig).
3. S. Levy, JAS, May, 1952.
4. H. Schlichting, *Teoria pogranicinogo sloia*, Izd. Inost. Lit., 1956, Moskva (trad. din l. germană).
5. L. Collatz, *Cislenie metodi reșenia differ. uravn.*, Izd. Inost. Lit., Moskva, 1953 (trad. din l. germană).

SOLUȚII NUMERICE ÎN CURGEREA TRANZIȚIONALĂ ȘI TURBULENTĂ PRIN CONDUCTE ȘI CANALE

de ȘT. N. SĂVULESCU și N. APOSTOLESCU
I.M.F.C.A

Sînt date soluțiile numerice ale ecuației integrale deduse de primul autor [4] pentru curgerea medie cu frecare datorită fluctuațiilor în conducte și canale. Rezultatele obținute la calculator pe baza unui procedeu de comparare arată că profilele de viteze evoluează rapid de la profilul parabolic al curgerii laminare la cel asimptotic al curgerii turbulente în funcție de numărul Reynolds care intervine în expresia frecării turbulente utilizate de autori.

1. INTRODUCERE

În general, tratarea curgerii medii în canale și conducte, bazată pe echilibrul dintre gradientul longitudinal al presiunii și cel transversal al frecării, consideră separat regimurile de curgere laminar, tranzițional și turbulent. Curgerea laminară este cunoscută drept curgere Poiseuille, cu profilul de viteză tipic parabolic [2]. Curgerea turbulentă medie este, în schimb, obiectul a diferite teorii semiempirice [2], [3], care, în esență, caută să prindă variația profilului de viteză cu numărul Reynolds. Curgerea tranzițională medie nu este abordată teoretic, întrucît se știe că nu există o teorie unitară care să lege stadiul instabilității liniare cu stadiul avansat al variațiilor bruște de viteză locale și al spoturilor turbulente [4].

În lucrarea de față se prezintă, în fond, o teorie fenomenologică unitară care permite deducerea profilelor de viteză și a coeficienților de frecare indiferent de regimul de curgere. Această teorie se bazează pe expresia frecării turbulente [1], [4], dedusă de primul autor pe baza unei formulări integrodiferențiale a ecuațiilor Navier-Stokes. Se ajunge astfel la un model de curgere fluctuantă, în care particula de fluid reprezintă o medie locală a proceselor intime de transfer de energie cinetică la scară moleculară și molară. Măsura acestui transfer de energie, datorit, în esență, fluctuațiilor de viteză, este o așa-zisă „viscozitate turbulentă", care depinde de distribuția energiei medii normale pe scurgerea

principală, ca şi de intensitatea fluctuaţiilor. Această dependenţă nu este însă de tip gradient, ca în teoriile lungimii de amestec, ci de un tip special, şi anume este proporţională cu diferenţa dintre distribuţia de energie fizică şi o nouă distribuţie, calculată prin transformarea celei fizice cu ajutorul unei variabile integrale. Constanta de proporţionalitate rămîne aceeaşi într-o secţiune normală pe curgerea principală, însă variază în lungul curgerii, depinzînd puternic de numărul Reynolds. Numeroase date experimentale furnizează o curbă aproape cu caracter universal, analogă caracteristicii fizice a viscozităţii moleculare care rezultă din agitaţia moleculelor.

În acest fel, sistemul de ecuaţii care modelează curgerea medie în straturi vîscoase devine închis, permiţînd obţinerea caracteristicilor globale de interes inginerese : profile de viteză, frecare la perete pentru întregul domeniu al curgerii de fluctuaţii — laminar, tranziţional şi turbulent. În lucrarea de faţă s-a tratat cazul simplu al curgerii prin canale şi conducte cu un dublu scop :

— verificarea calitativă a soluţiilor obţinute prin integrarea numerică a ecuaţiei integrale a modelului prin comparare cu soluţiile clasice cunoscute,

— propunerea acestui model ca metodă didactică de a explica raţional particularităţile profilului de viteze şi al frecării în funcţie de curgerea laminară, tranziţională sau turbulentă.

2. EXPRESIA FRECĂRII MEDII ÎN MODELUL CURGERII FLUCTUANTE

Cercetările teoretice şi experimentale anterioare [1] — [4], au condus la următorul model al frecării medii, care se referă în această lucrare la curgerea fluctuantă incompresibilă din straturile vîscoase tridimensionale.

Fie un strat vîscos raportat la un sistem de coordonate Oxy, cu Oy normal pe curgerea principală dirijată după Ox şi limitat exterior de o curbă $\delta(x)$ analogă grosimii stratului-limită. Fie viteza $\vec{V} = (U+u')\vec{i} + v'\vec{j}$, unde $U(x, y)$ reprezintă viteza medie a curgerii principale, iar u', v' fluctuaţiile.

Definim următoarele mărimi :

$$\eta_0 = y/\delta \qquad \text{— variabilă adimensională curentă ;} \tag{2.1}$$

$$\eta_2 = \int_0^y U^2 dy \Big/ \int_0^\delta U^2 dy \qquad \text{— variabilă adimensională de transformare ;}$$

$$\tau = \mu_f \frac{\partial U}{\partial y} \qquad \text{— tensiune de frecare.}$$

Pentru coeficientul de viscozitate datorită fluctuaţiilor, μ_f, scriem relaţia

$$\mu_f = \mu\,[1 + K(x)(\eta_0 - \eta_2)], \tag{2.2}$$

unde μ este coeficientul de viscozitate moleculară, iar $K(x)$ un parametru de frecare datorit fluctuațiilor. O formulă generală pentru K are forma [1]

$$K=k_0\, p(\psi_\delta/\nu)^p\,(1-e^{a+b\psi_\delta/\nu}), \tag{2.3}$$

unde

$$\psi_\delta=\int_0^\delta U\mathrm{d}y,\quad \mu=\rho\cdot\nu,$$

k_0, p, a, b fiind parametrii fizici ai lui K.

După cum se observă în figura 1, construită cu date experimentale corespunzătoare diverselor cazuri de curgere, în domeniul curgerii turbulente curba $K=0{,}5\,(\psi_\delta/\nu)^{3/4}$ aproximează o bună parte a datelor experimentale. În domeniul tranzițional, adică pentru $K<500$, din cauza lipsei datelor experimentale s-a trasat un domeniu limitat de două curbe. Pentru curgerile cu fluctuații, frecarea este dominată în general de corelația transversală $\widetilde{u'v'}$, astfel că avem

$$\mu K(\eta_0-\eta_2)\frac{\partial U}{\partial y}=-\rho\widetilde{u'v'}, \tag{2.4}$$

relație care a servit la baza determinării lui K.

3. ECUAȚIA INTEGRALĂ A MODELULUI CURGERII FLUCTUANTE PRIN CANALE ȘI CONDUCTE

Să considerăm curgerea dezvoltată a unui fluid incompresibil printr-un canal de lățime $2b$ și, respectiv, printr-o conductă de rază R, raportată la axele Oxy, așa cum se arată în figura 2.
Ecuațiile de echilibru ale particulei se scriu

$$\begin{aligned}&\frac{\partial\tau}{\partial y}=\frac{\partial p}{\partial x}\qquad\text{— pentru canal,}\\ &\frac{\partial}{\partial y}\,[\tau(R-y)]=\frac{\partial p}{\partial x}(R-y)\ \text{— pentru conductă.}\end{aligned} \tag{3.1}$$

Condițiile la limită în ambele cazuri sînt

$$\begin{aligned}&y=0;\ U=0,\\ &y=b(R);\ U=U_e,\ \tau\approx 0.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Se introduc notațiile comune

$$\eta_0=y/b(R);\qquad \eta_2=\int_0^{\eta_0}U_a^2\,\mathrm{d}\eta_0\Big/\int_0^1 U_a^2\,\mathrm{d}\eta_0;\quad U_a=\frac{U}{U_e}, \tag{3.3}$$

$$C^*=-\frac{b^2(R^2)}{\mu U_e}\frac{\partial p}{\partial x};\quad R_{e\psi_\delta}=\psi_\delta/\nu,\qquad \psi_\delta=\int_0^{b(R)}U\mathrm{d}y.$$

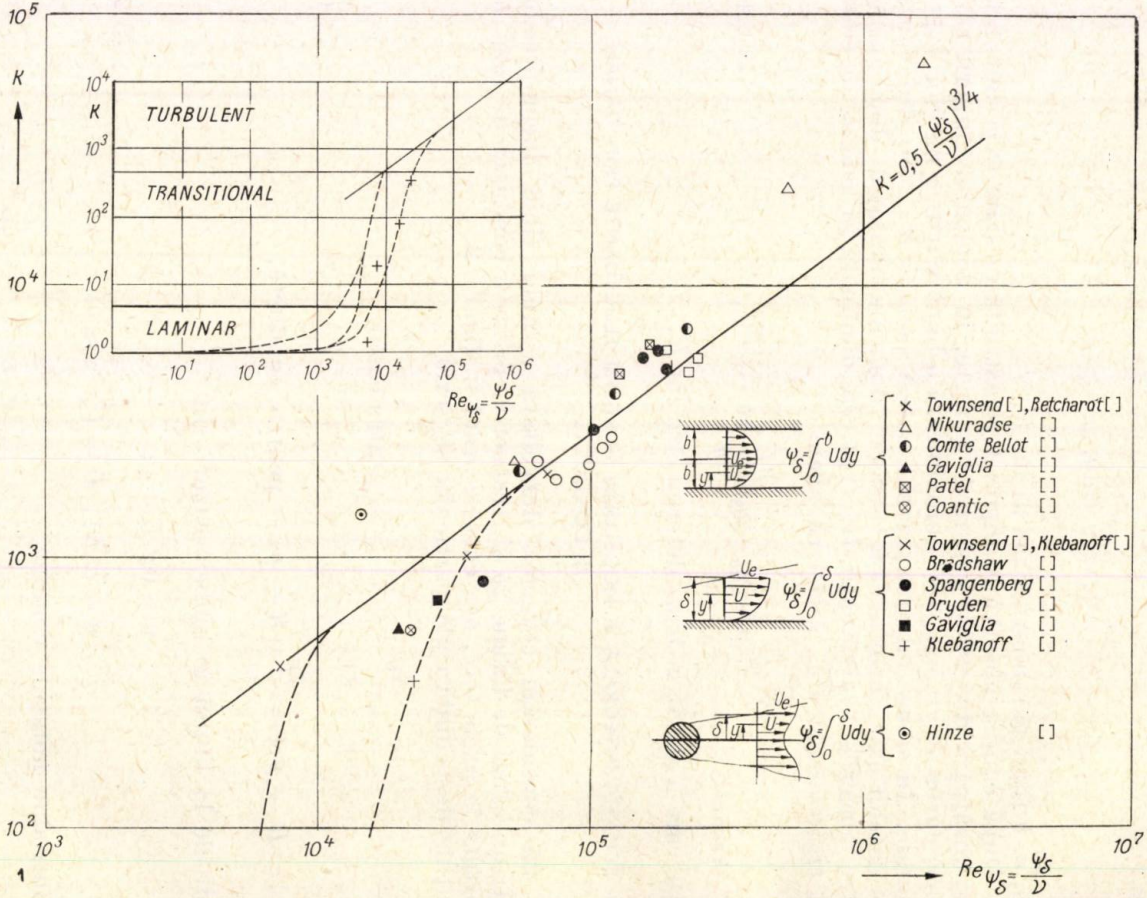

K
TURBULENT
TRANSITIONAL
LAMINAR
$Re_{\psi_\delta}=\frac{\psi_\delta}{\nu}$
$K=0,5\left(\frac{\psi_\delta}{\nu}\right)^{3/4}$
$\psi_\delta=\int_0^b U dy$
$\psi_\delta=\int_0^\delta U dy$
Townsend [ ], Retcharot [ ]
Nikuradse [ ]
Comte Bellot [ ]
Gaviglia [ ]
Patel [ ]
Coantic [ ]
Townsend [ ], Klebanoff [ ]
Bradshaw [ ]
Spangenberg [ ]
Dryden [ ]
Gaviglia [ ]
Klebanoff [ ]
Hinze [ ]
$Re_{\psi_\delta}=\frac{\psi_\delta}{\nu}$

Fig. 1

De asemenea, în ambele cazuri se utilizează expresia frecării din curgerile cu fluctuații :

$$\tau = \mu[1+K(R_{e_{\psi_\delta}})(\eta_0-\eta_2)]\frac{\partial U}{\partial y}, \tag{3.4}$$

unde $K(R_{e_{\psi_\delta}})$ este caracteristica de „viscozitate" a curgerii fluctuante.

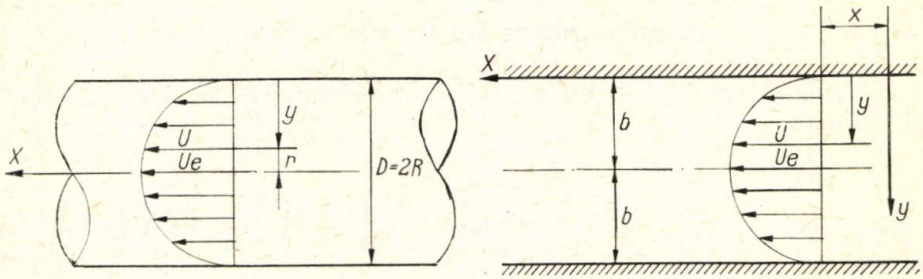


Fig. 2

Introducerea relației (3.4) în (3.1) și (3.2), integrarea în lungul lui y de la $y=b(R)$ la y și aranjarea expresiei obținute cu ajutorul notațiilor (3.3) conduc la următoarea ecuație integrodiferențială :

$$[1+K(\eta_0-\eta_2)]\frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0} = C^*(1-\eta_0), \tag{3.5}$$

$$\eta_0 = y/b(R),\ \eta_2 = \int_0^{\eta_0} U_a^2\,\mathrm{d}\eta_0 \Big/ \int_0^1 U_a^2\,\mathrm{d}\eta_0,$$

comună ambelor cazuri. Această ecuație reprezintă modelul matematic simplificat al curgerii fluctuante dezvoltate prin canale și conducte de secțiune constantă. Condițiile la limită sînt

$$\eta_0 = 0\,;\ U_a = 0,$$

$$\eta_0 = 1,\ U_a = 1,\ \frac{\mathrm{d}U_a}{\mathrm{d}\eta_0} \approx 0. \tag{3.6}$$

Integrarea prin părți a membrului stîng al ecuației (3.5), ținînd seama de condițiile la limită (3.6), permite transformarea ecuației integrodiferențiale într-o ecuație integrală de forma

$$U_a = \eta_0(2-\eta_0)\frac{1-K\int_0^1 U_a\mathrm{d}(\eta_0-\eta_2)}{1+K(\eta_0-\eta_2)} + K\frac{\int_0^{\eta_0} U_a\mathrm{d}(\eta_0-\eta_2)}{1+K(\eta_0-\eta_2)}, \tag{3.7}$$

care, pentru $K=0$, se reduce la distribuţia parabolică a vitezei U_a. Frecarea la perete se deduce din relaţia $\tau_w = \mu \left|\frac{dU}{dy}\right|_{y=0}$, obţinîndu-se uşor expresia

$$\tau_w = \rho U_e^2 \left(\frac{\nu}{U_e b(R)}\right) 2\left[1 - K\int_0^1 U_a \, d(\eta_0 - \eta_2)\right], \tag{3.8}$$

4. SOLUŢII NUMERICE ALE ECUAŢIEI INTEGRALE (3.7)

Utilizînd expresiile lui η_0 şi η_2, rescriem ecuaţia (3.7), punînd-o sub forma

$$U_a = \frac{\eta_0(2-\eta_0) - K\left\{\eta_0(2-\eta_0)\int_0^1\left[U_a - U_a^3\Big/\int_0^1 U_a^2 d\eta_0\right]d\eta_0 - \int_0^{\eta_0}\left[U_a - U_a^3\Big/\int_0^1 U_a^2 d\eta_0\right]\right\}d\eta_0}{1 + K\left[\eta_0 - \int_0^{\eta_0} U_a^2 d\eta_0 \Big/ \int_0^1 U_a^2 d\eta_0\right]}. \tag{4.1}$$

Soluţionarea numerică a acestei ecuaţii integrale comportă următoarele observaţii. Ecuaţia integrală (4.1), neîncadrîndu-se într-una din formele generale ale ecuaţiilor integrale de tip Fredholm sau Volterra pentru care este aplicabilă metoda aproximaţiilor succesive, necesită metode diferite pentru rezolvare.

Fie $U_a(\eta_0)$ o funcţie continuă pe intervalul $[0,1]$ care satisface ecuaţia integrală (4.1), deci $U_a(\eta_0)$ este o soluţie a ecuaţiei (4.1). Dacă pe intervalul $[0,1]$ se formează o reţea de noduri R : $[\eta_0^i \eta_0^{i+1}]$, $(i=0, n)$, unde $\eta_0 = 0$, $\eta_0^n = 1$, atunci fiecare dintre integralele membrului al doilea se pot scrie, folosind sumele integrale ale lui Riemann, astfel:

$$U_a(\eta_0) = \frac{\eta_0(2-\eta_0)\left\{1 - K\sum_{i=1}^{n}\left[U_a(\xi_i) - \frac{U_a^2(\xi_i)}{\sum_{i=1}^{n} U_a^2(\xi_i)\,\eta_0^i - \eta_0^{i-1}}\right](\eta_0^i - \eta_0^{i-1})\right\}}{1 + K\left[\eta_0 - \sum_{i=1}^{t_\eta} U_a^2(\xi_i)(\eta_0^i - \eta_0^{i-1})\right]} +$$

$$+ K\,\frac{\sum_{j=1}^{t_\eta}\left[U_a(\xi_i) - \frac{U_a^3(\xi_j)}{\sum_{i=1}^{n} U_a^2(\xi_i)(\eta_0^i - \eta_0^{i-1})}\right](\eta_0^j - \eta_0^{j-1})}{1 + K\left[\eta_0 - \sum_{j=1}^{t_\eta} U_a^2(\xi_j)(\eta_0^j - \eta_0^{j-1})\right]}, \tag{4.2}$$

unde

$$\xi_i \in [\eta_0^{i-1}, \eta_0^i], \text{ iar } t_\eta = \left[\frac{\eta_0}{\eta_0^j - \eta_0^{j-1}}\right].$$

Dacă rețeaua este insuficient de fină și avînd în vedere faptul că toate funcțiile de sub semnele sumă sînt funcții continue, rezultă că putem aproxima $U_a(\xi_i)$ cu $U_a(\eta_{0i})$, $(i=0,\ n)$.

Așadar, soluția ecuației integrale se poate scrie

$$U_a(\eta_0)=\frac{\eta_0(2-\eta_0)\left\{1-K\sum_{i=1}^{n}\left[U_a(\eta_0{}^j)-\frac{U_a^3(\eta_{0i})}{\sum_{i=1}^{n}U_a^2(\eta_0{}^i)(\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})}\right](\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})\right\}}{1+K\left[\eta_0-\sum_{i=1}^{t_\eta}U_a^2(\eta_0{}^i)(\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})\right]}+$$

$$+K\frac{\sum_{j=1}^{t_\eta}\left[U_a(\eta_0{}^j)\frac{U_a^3(\eta_0{}^j)}{\sum_{i=1}^{n}U_a^2(\eta_0{}^i)(\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})}\right](\eta_0{}^j-\eta_0{}^{j-1})}{1+K\left[\eta_0-\sum_{j=1}^{t_\eta}U_a^2(\eta_0{}^j)(\eta_0{}^j-\eta_0{}^{j-1})\right]}. \tag{4.3}$$

În concluzie, soluția ecuației integrale (4.1) s-a aproximat după relația (4.3) cu o sumă utilizînd valorile funcției $U_a(\eta_0)$ pe nodurile rețelei. Deci, dacă se cunosc valorile funcției $U_a(\eta_0)$ pe nodurile unei rețele suficient de fine, se poate scrie ușor o soluție aproximativă a ecuației (4.1). Determinarea valorilor $U_a(\eta_0{}^i)$ se face punînd condiția ca funcția soluției să verifice (4.3) pentru fiecare nod $\eta_0{}^i$ $(i=0,\ n)$. Obținem astfel sistemul

$$U_a(\eta_0{}^s)=\frac{\eta_0{}^s(2-\eta_0{}^s)\left\{1-K\sum_{i=1}^{n}\left[U_a(\eta_0{}^i)-\frac{U_a^3(\eta_0{}^i)}{\sum_{i=1}^{n}U_a^2(\eta_0{}^i)(\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})}\right](\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})\right\}}{1+K\left[\eta_0{}^s-\sum_{i=1}^{t_\eta}U_a^2(\eta_0{}^i)(\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})\right]}+$$

$$+K\frac{\sum_{j=1}^{t_\eta}\left[U_a(\eta_0{}^j)-\frac{U_a^3(\eta_0{}^j)}{\sum_{i=1}^{n}U_a^2(\eta_0{}^i)(\eta_0{}^i-\eta_0{}^{i-1})}\right](\eta_0{}^j-\eta_0{}^{j-1})}{1+K\left[\eta_0{}^i-\sum_{j=1}^{n}U_a^2(\eta_0{}^j)(\eta_0{}^j-\eta_0{}^{j-1})\right]}, \tag{4.4}$$

cu $n+1$ ecuații și $n+1$ necunoscute $(s=0,\ n)$.

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Rezolvarea sistemului (4.4), fiind foarte dificilă datorită neliniarităţii sale, a condus la alegerea unui procedeu de comparare pentru soluţionarea problemei puse. S-a pornit de la ideea [4] că soluţia ecuaţiei integrale (4.1) este o funcţie continuă de forma

$$U_a(\eta_0)=\eta_0^M\,(2-\eta_0^M),$$

unde M este un parametru care corespunde fiecărei valori a lui K.

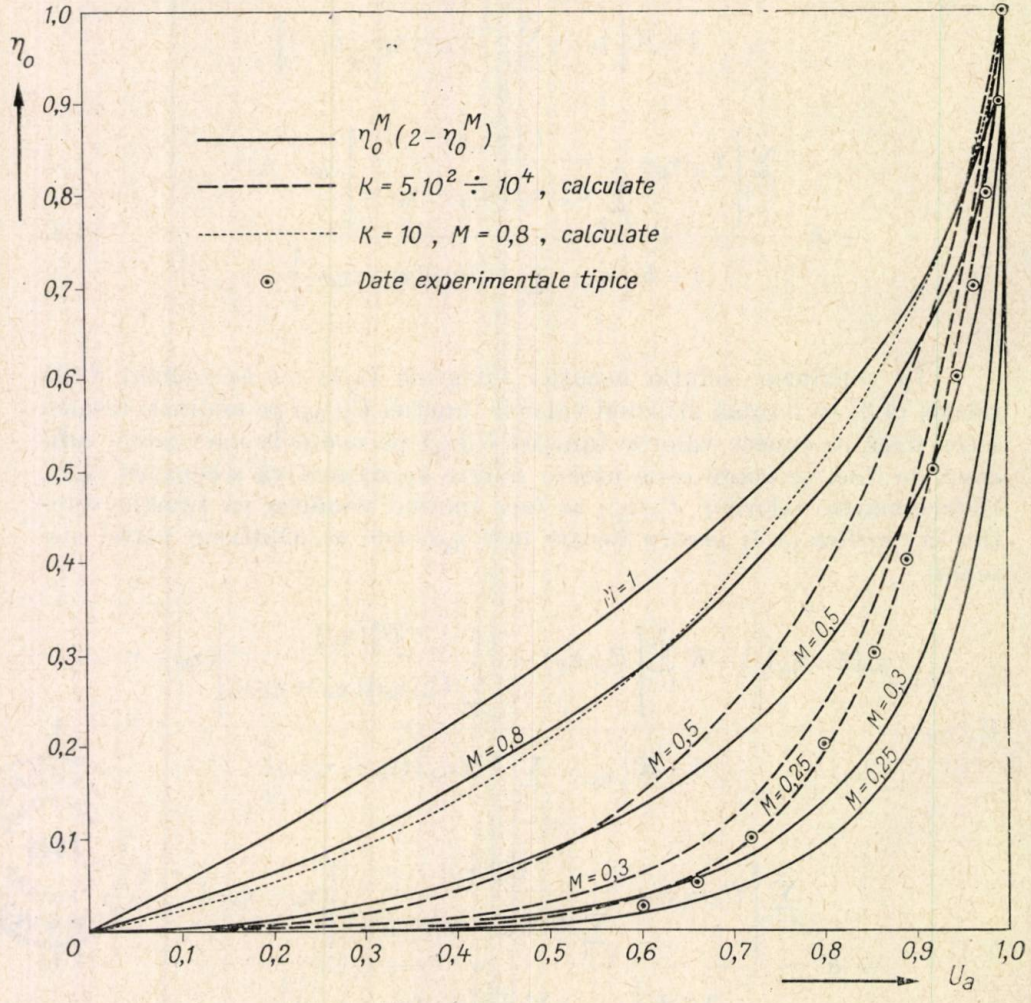


Fig. 3

Determinarea funcţiei $U_a(\eta_0)$ s-a redus, aşadar, la determinarea lui M, iar aceasta se va face astfel ca diferenţa dintre membrii I şi II ai fiecărei ecuaţii a sistemului (4.4) să fie minimă. Problema astfel pusă

a necesitat un volum mare de calcul, de aceea s-a întocmit un program de calcul în limbajul FORTRAN care a permis alegerea rapidă dintr-o anumită mulțime de valori a parametrului M care să satisfacă condiția impusă.

În final, pentru fiecare valoare a parametrului K s-a găsit o valoare a parametrului M, deci o funcție $U_a(\eta_0)$ care poate aproxima soluția ecuației integrale (4.1).

Trebuie remarcat că diferența dintre soluțiile corespunzătoare diverșilor M nu este așa de concludenta, astfel că s-au utilizat procedee de apreciere a exactității soluției obținute în raport cu expresia $U_a = \eta_0^M(2-\eta_0^M)$ introdusă în calculator. Procedeele de apreciere se referă la suma erorilor absolute care dau aproximarea preferențială la perete ($\eta_0 \to 0$) sau la exterior ($\eta_0 \to 1$).

În figura 3 sînt arătate cîteva profile de viteză obținute la calculator în comparație cu distribuția $\eta_0^M(2-\eta_0^M)$.

Pe baza criteriilor de apreciere a exactității soluțiilor, limitate ca precizie după cum s-a menționat, s-a trasat curba $K=f(M)$ din figura 4.

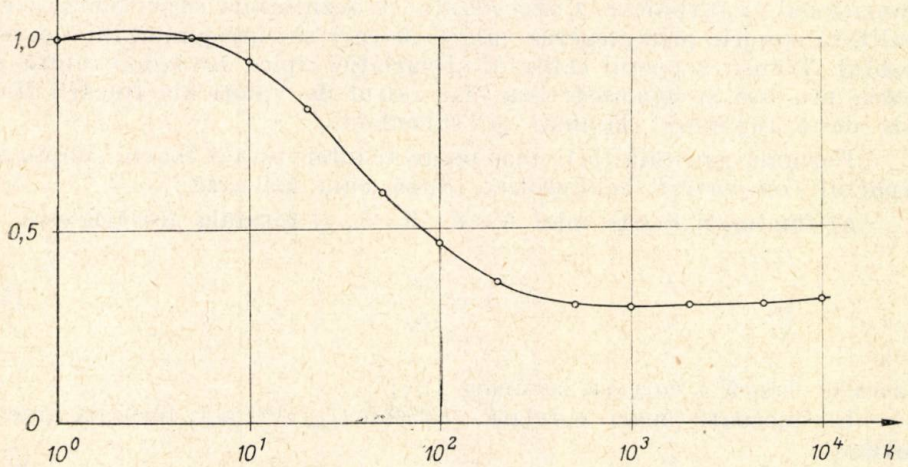


Fig. 4

5. CALCULUL COEFICIENTULUI DE FRECARE

Utilizînd profilul de viteze de aproximare $\eta_0^M(2-\eta_0^M)$, formula coeficientului de frecare în conducte circulare de diametru $D=2R$ se scrie

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}e} \cdot \frac{(1+M)(1+2M)(2+M)}{2(2+7M)} [1-K(\psi_\delta/\nu)E(M)], \qquad (5.1)$$

unde

$$\psi_\delta/\nu = \frac{(1+3M)(2+M)}{2(2+7M)}\,\mathcal{R}e\,; \qquad \mathcal{R}e = \frac{U_{med}\cdot D}{\nu},$$

$$\psi_\delta = \int_0^R U\,dy = \frac{1+3M}{(1+M)(1+2M)}\,U_e R\,; \quad U_{med} = \frac{2+7M}{(1+M)(1+2M)(2+M)}\,U_e,$$

$$E(M) = -8M^4\,\frac{5+61M+126M^2}{(1+M)(1+2M)(1+5M)(1+6M)(1+9M+22M^2)}.$$

Utilizînd relația $K=K(\psi_\delta/\nu)$ din figura 1 și relațiile $\mathcal{R}e=\mathcal{R}e(\psi_\delta/\nu)$, $K=K(M)$ deduse anterior, s-a putut obține relația

$$\lambda=\lambda(\mathcal{R}e),$$

care este trasată în figura 5.

Pe aceeași figură sînt trasate și rezultatele experimentale cunoscute pentru conductele netede [2]. Se remarcă faptul că rezultatele teoretice surprind printr-o singură curbă cele trei regimuri de curgere : laminar, tranziţional și turbulent. Concordanța cu rezultatele experimentale este realizată empiric prin alegerea valorii M care să corespundă lui λ experimental. Totuși, aspectul calitativ al variației tipice $\lambda=\lambda(\mathcal{R}e)$ reultă din teoria propusă și demonstrează clar saltul de valori ale frecării dintre cele două regimuri : laminar și turbulent.

Formula generală (5.1) mai poate fi interpretată foarte simplu sub caportul comportării asimptotice, după cum urmează :

a) fluctuaţii foarte mici $K=0$, $M=1$, și formula frecării este

$$\lambda = \frac{64}{\mathcal{R}e}, \tag{5.2}$$

formula clasică a curgerii laminare [2];

b) fluctuaţii mari corelate, $K\approx 0{,}5$ $(\psi_\delta/\nu)^{3/4}\gg 1$, formula frecării devenind

$$\lambda \approx \frac{A(M)}{\mathcal{R}e^{1/4}}. \tag{5.3}$$

Cu $m=1/3$ se obţine $A(M)=0{,}318$, adică o formulă apropiată de cea pur empirică a lui Blasius [2], [3], propusă pentru curgerea turbulentă.

Deci, după cum rezultă și calitativ din examinarea soluției teoretica pentru cele boună regimuri-limită, M tinde să păstreze aceeași valoare, corespunzînd unei distribuţii tipice de viteze. În regimul tranziţional nu există un profil de viteze definit [4], astfel că aceste calcule au un caracter pur estimativ și curba lui $K=K(\psi_\delta/\nu)$ arată variaţia rapidă din acest domeniu (fig. 1).

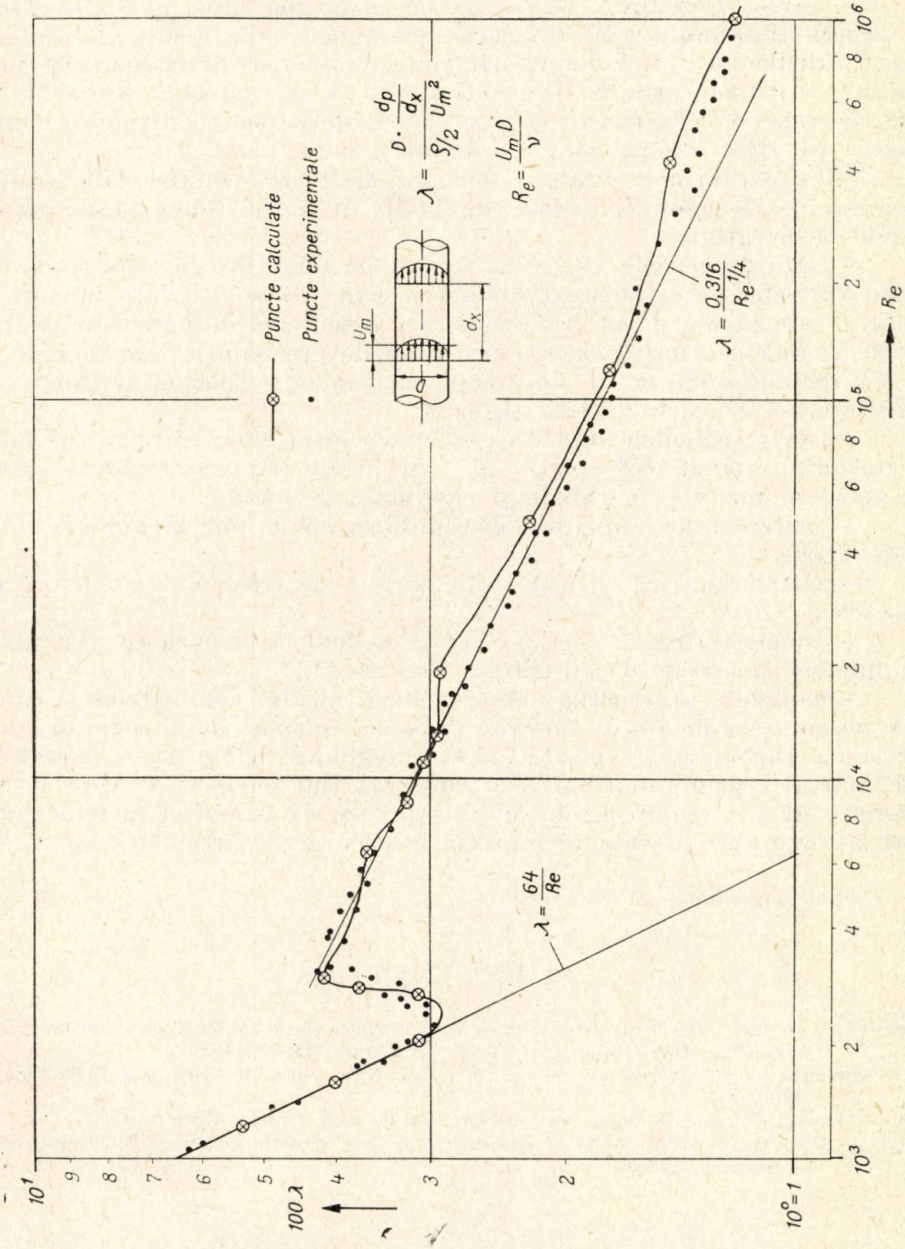

Puncte calculate
Puncte experimentale
$\lambda = \frac{D \cdot \frac{dp}{dx}}{\frac{\rho}{2} U_m^2}$
$R_e = \frac{U_m D}{\nu}$
$\lambda = \frac{64}{Re}$
$\lambda = \frac{0{,}316}{Re^{1/4}}$
100 λ
R_e
U_m
dx
10^1
$10^0 = 1$
10^3
10^4
10^5
10^6

Fig. 5

6. CONCLUZII

Lucrarea prezentată s-a bazat pe utilizarea unui model teoretic al curgerii fluctuante conform căruia caracteristicile medii ale curgerii se pot calcula cu ajutorul unui singur „parametru de viscozitate fluctuantă", însemnat prin K. Dependenţa lui K de numărul Reynolds al curgerii respective cu frecare este o curbă unică pentru diversele configuraţii, ca strat-limită, canale, conducte, jet [1].

Utilizarea lui K în expresia tensiunii de frecare conduce la o ecuaţie integrală ale cărei soluţii au fost examinate în lucrarea de faţă, cu următoarele observaţii :

— tipul de ecuaţie integrală nefiind încadrat în cele clasice (Fredholm, Volterra), s-au încercat diverse scheme de soluţionare numerică. Esenţial este că n-a putut fi demonstrată o teoremă de unicitate pentru soluţie şi nici n-a fost găsit un procedeu de aproximare convergent al ei. Va trebui studiată în continuare dependenţa soluţiei obţinute de cea introdusă în calculul integralelor ;

— totuşi, calculele numerice efectuate prin compararea cu o soluţie iniţială de tipul $U_a^{(0)} = \eta_0^M (2 - \eta_0^M)$ au arătat cîteva trăsături specifice curgerii medii prin canale şi conducte, şi anume :

— tinderea spre un profil de echilibru cu M mic la numere Reynolds mari ;

— saltul relativ brusc al coeficientului de frecare în domeniul de tranziţie ;

— generalitatea relaţiei $K = K(\psi_\delta/\nu)$, dedusă pe baza experienţelor din numeroase cazuri de curgere cu frecare [1] ;

— modelul curgerii fluctuante aplicat cazului conductelor şi canalelor poate arăta destul de limpede trecerea continuă de la regimul laminar la cel turbulent şi apariţia acestor regimuri asimptotice, caracterizate mai ales prin intensitatea şi corelaţia fluctuaţiilor. Pentru aceste rezultate nu s-a recurs la obişnuitele ipoteze de calcul şi nici nu s-au făcut aproximaţii cu valoare limitată la o curgere particulară.

Primit la redacţie la 5 ianuarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Şt. N. Săvulescu, H. Dumitrescu, *Theoretical considerations on the friction in shear flow turbulence*, Rev. Roum. Sc. Tech. Méc. Appl., **15**, 5 (1970).
2. H. Schlichting, *Boundary layer theory*, ed. a 4-a, New York, McGraw Hill Book Comp., 1960.
3. J. O. Hinze, *Turbulence*, New York, McGraw Hill Book Comp., 1959.
4. Şt. N. Săvulescu, *Tranziţia de la scurgerea laminară la cea turbulentă*, Bucureşti, Edit. Academiei, 1968.

ASUPRA INJECȚIEI FLUIDELOR CALDE ÎN ZĂCĂMINTELE DE PETROL. II *

de T. OROVEANU
Institutul de petrol Ploiești

În această parte a lucrării se examinează, înainte de a se trece la studiul unor cazuri mai generale, un aspect particular al problemei stimulării termice, și anume efectuarea procesului cu viteză variabilă în timp. Deși se consideră o schemă fizică destul de simplificată, stratul productiv fiind presupus de grosime foarte mare, apar unele dificultăți în rezolvarea problemelor corespunzătoare. Utilizarea unor transformări integrale permite însă să se ajungă la soluții aproximative cu ajutorul cărora se poate aprecia destul de corect efectul variației în timp a vitezei.

5. EFECTUL VARIAȚIEI ÎN TIMP A VITEZEI ÎN CAZUL SCURGERII LINIARE

Înainte de a studia posibilitățile de rezolvare a problemei scurgeri liniare așa cum am formulat-o mai înainte, ne vom opri asupra unui alt aspect care poate prezenta interes în realizarea practică a procesului de injecție a unui lichid cald într-un zăcământ de petrol. Într-adevăr, în considerațiile precedente am presupus, așa cum au făcut de altfel toți cei ce s-au ocupat de această problemă, că viteza cu care se injectează lichidul cald în stratul productiv este constantă. Se poate presupune însă că această viteză depinde de timp, ceea ce din punct de vedere practic înseamnă o dirijare într-un anumit sens a procesului de injecție. Bineînțeles, o astfel de presupunere face mai dificilă rezolvarea problemei, care nu este prea simplă nici așa cum am prezentat-o anterior. Pentru a putea pune însă în evidență unele particularități legate de aspectul la care ne referim, vom recurge la cîteva simplificări în formularea problemei, de natura celor utilizate de M. T. Abasov și A. A. Abbasov**. Aceste simplificări rezultă din presupunerea că stratul productiv are o

* Prima parte a acestei lucrări a fost publicată în St. cerc. mec. apl., **XXX**, *3* (1971).

** Vezi lucrările citate sub [1] și [2] din prima parte a acestui studiu.

grosime foarte mare, fapt care permite să se neglijeze transmisia căldurii în stratele adiacente.

În acest caz, ecuația (7) devine

$$\frac{\partial T}{\partial \tau} + \alpha(\tau)\frac{\partial T}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2}, \tag{58}$$

variabilele adimensionale τ și ξ fiind tot cele definite prin (6), cu observația că h reprezintă de data aceasta o anumită lungime caracteristică. De asemenea, pentru α rămîne valabilă relația de definiție (8), cu observația că, deoarece w depinde de timp, α este funcție de τ.

Condiția inițială și condițiile la limită pentru temperatură sînt (12), respectiv (13) și (14); dacă introducem temperatura adimensională

$$\theta = \frac{T - T_0}{T_i - T_0}, \tag{59}$$

ecuația (58) se scrie

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \alpha(\tau)\frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2}, \tag{60}$$

iar condițiile amintite iau forma

$$\tau = 0, \quad \theta = 0, \tag{61}$$

respectiv

$$\xi = 0, \quad \theta = 1; \quad \xi = +\infty, \quad \theta = 0. \tag{62}$$

Observăm în prealabil că, atunci cînd α este o constantă, soluția ecuației (60) cu condițiile (61) și (62) poate fi găsită cu ușurință și este

$$\theta = \frac{1}{2}\left\{ \operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}} - \alpha\sqrt{\tau}\right)\right] + e^{\alpha\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{\xi}{\sqrt{\tau}} + \alpha\sqrt{\tau}\right)\right]\right\}. \tag{63}$$

Se știe de asemenea din cercetările efectuate asupra unor probleme de altă natură, în care intervine însă și o soluție de aceeași formă cu cea precedentă, că, atunci cînd raportul $\frac{1}{\alpha\xi}$ este suficient de mic, cel de-al doilea termen din soluție poate fi neglijat. Mai mult se poate arăta [14] că pentru $\frac{1}{\alpha\xi} < 0{,}0075$ eroarea este mai mică de 5%; practic, la valorile obișnuite ale mărimilor care intervin în relația (8) de definiție a lui α rezultă, după un calcul simplu, $x > \frac{1}{300}$ m, ceea ce arată că neglijarea celui de-al doilea termen din (63) este perfect admisibilă.

Trecînd acum la problema de care ne ocupăm, vom face apel la un procedeu asemănător cu acela pe care l-am utilizat în rezolvarea unei probleme de același gen din punct de vedere matematic [15]. În esență, procedeul amintit se reduce la aplicarea unei transformări integrale care dă posibilitatea de a se obține pe o cale relativ simplă o soluție aproximativă a problemei.

În cazul de față, deoarece $\xi \in [0, \to)$, apare indicat se aplicăm ecuației (60) sinus-transformata Fourier, definită prin

$$\theta_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta \sin(\mu\xi)\, d\xi. \tag{64}$$

În prealabil scriem

$$w = w_0 f(\tau), \tag{65}$$

w_0 fiind o valoare constantă, așa cum a fost definită anterior prin relația (2); putem deci pune de asemenea

$$\alpha = \alpha_0 f(\tau), \tag{66}$$

cu α_0 dat de prima relație (8), în care debitul de lichid injectat q este constant și are o valoare dată q_0. În felul acesta, ecuația (60) devine

$$\frac{\partial \theta}{\partial \tau} + \alpha_0 f(\tau) \frac{\partial \theta}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} \tag{67}$$

și, după aplicarea transformării (64), obținem, ca rezultat al unor calcule simple,

$$\frac{d\theta_s}{d\tau} + \mu^2 \theta_s - \alpha_0 \mu f(\tau) \theta_c = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \tag{68}$$

unde

$$\theta_c = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \theta \cos(\mu\xi)\, d\xi. \tag{69}$$

Această ecuație trebuie rezolvată cu condiția

$$\tau = 0, \quad \theta_s = 0, \tag{70}$$

dedusă imediat din (61). Observăm însă că prezența termenului care conține cosinus-transformata Fourier (69) a funcției θ nu permite găsirea soluției. Din acest motiv vom recurge la o aproximație referitoare chiar la acest termen, punînd $f(\tau) = 0$ în ecuația (68). Aceasta devine astfel

$$\frac{d\theta_s}{d\tau} + \mu^2 \theta_s = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{71}$$

şi, cu condiţia (70), are soluţia

$$\theta_s = \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - e^{-\mu^2\tau}). \tag{72}$$

Aplicarea formulei de inversiune a sinus-transformatei Fourier [16] ne dă

$$\theta = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty (1 - e^{-\mu^2\tau})\frac{\sin(\mu\xi)}{\mu}\,d\mu, \tag{73}$$

respectiv [13]

$$\theta = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right). \tag{74}$$

Cu această valoare aproximativă a lui θ, care este soluţia ecuaţiei (60) cu $\alpha(\tau)=0$ şi condiţiile (61), respectiv (62), putem calcula cosinus-transformata Fourier θ_c. Obţinem astfel [13]

$$\theta_c = \frac{2\sqrt{2\tau}}{\pi}\,{}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; -\mu^2\tau\right), \tag{75}$$

unde

$${}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; -\mu^2\tau\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma(1)}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\Gamma(1+k)}{\Gamma\left(\frac{3}{2}+k\right)}\frac{(-\mu^2\tau)^k}{k!} \tag{76}$$

este funcţia confluentă hipergeometrică.

Revenind acum la ecuaţia (68), aceasta ia forma

$$\frac{d\theta_s}{d\tau} + \mu^2\theta_s = \mu\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left[1 + 2\alpha_0 f(\tau)\sqrt{\tau}\,{}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; -\mu^2\tau\right)\right] \tag{77}$$

şi are cu condiţia (70) soluţia

$$\theta_s = \frac{1}{\mu}\sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - e^{-\mu^2\tau}) + \\ + 2\alpha_0\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\mu\int_0^\tau f(\tau')\sqrt{\tau'}\,{}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; -\mu^2\tau'\right)e^{-\mu^2(\tau-\tau')}\,d\tau'. \tag{78}$$

Evident, calculul efectiv depinde de forma funcţiei $f(\tau)$; presupunînd că aceasta a fost precizată, soluţia aproximativă a problemei este

$$\theta = 1 - \operatorname{erf}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}}\right) + \\ + \frac{4\alpha_0}{\pi}\int_0^\infty \mu\left[\int_0^\tau f(\tau')\sqrt{\tau'}\,{}_1F_1\left(1; \frac{3}{2}; -\mu^2\tau'\right)e^{-\mu^2(\tau-\tau')}\,d\tau'\right]\sin(\mu\xi)\,d\mu. \tag{79}$$

Observăm că aproximația pe care am făcut-o pentru a ajunge la acest rezultat este cu atît mai bună, cu cît $f(\tau)$ are valori mai mici.

O altă aproximație se poate obține dacă facem în ecuația (67) schimbarea de funcție

$$\theta = \theta' e^{\frac{\alpha_0}{2}\xi}, \tag{80}$$

care ne dă

$$\frac{\partial \theta'}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 \theta'}{\partial \xi^2} + \alpha_0 [1 - f(\tau)] \frac{\partial \theta'}{\partial \xi} + \frac{\alpha_0^2}{4} [1 - 2f(\tau)]\theta', \tag{81}$$

în timp ce condiția inițială și condițiile la limită devin

$$\tau = 0, \quad \theta' = 0, \tag{82}$$

respectiv

$$\xi = 0, \quad \theta' = 1; \qquad \xi = +\infty, \quad \theta' = 0, \tag{83}$$

păstrîndu-se deci aceeași formă ca și pentru funcția θ.

Aplicarea sinus-transformatei Fourier ne conduce la ecuația

$$\frac{d\theta_s'}{d\tau} + \left\{\mu^2 - \frac{\alpha_0^2}{4}[1 - 2f(\tau)]\right\}\theta_s' + \alpha_0 \mu [1 - f(\tau)]\theta_c' = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}}, \tag{84}$$

cu observația că am presupus că derivata $\dfrac{\partial \theta'}{\partial \xi}$ tinde către zero atunci cînd $\xi \to \infty$. Aceeași ipoteză a fost de altfel necesară și pentru a se ajunge la ecuația (68).

Presupunerea că $f(\tau)$ are valori mici, pe care am utilizat-o mai înainte, corespunde din punct de vedere fizic la o scurgere în care viteza w la un timp oarecare este mică față de w_0, așa cum se întîmplă în faza inițială a unei scurgeri care pornește din repaus. Vom utiliza acum, pentru a obține o soluție aproximativă a ecuației (84), ipoteza că $f(\tau)$ are valori apropiate de unitate, ceea ce ne permite să neglijăm termenul care conține cosinus-transformata θ_c'. Ajungem astfel la ecuația

$$\frac{d\theta_s'}{d\tau} + \left\{\mu^2 - \frac{\alpha_0^2}{4}[1 - 2f(\tau)]\right\}\theta_s' = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}} \tag{85}$$

și trebuie să găsim soluția acesteia care satisface condiția

$$\tau = 0, \quad \theta' = 0, \tag{86}$$

avînd deci forma

$$\theta_s' = \mu \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, e^{-\left(\mu^2 - \frac{\alpha_0^2}{4}\right)\tau - \frac{\alpha_0^2}{2}\int_0^\tau f(\tau')d\tau'} \int_0^\tau e^{\left(\mu^2 - \frac{\alpha_0^2}{4}\right)\tau' + \frac{\alpha_0^2}{2}\int_0^{\tau'} f(\lambda)d\lambda} d\tau'. \tag{87}$$

Revenirea la original se face cu ajutorul formulei de inversiune, care ne dă

$$\theta' = \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \left[\mu e^{-\left(\mu^2-\frac{\alpha_0^2}{4}\right)\tau - \frac{\alpha_0^2}{2}\int_0^\tau f(\tau')d\tau'} \int_0^\tau e^{\left(\mu^2-\frac{\alpha_0^2}{4}\right)\tau' + \frac{\alpha_0^2}{2}\int_0^{\tau'} f(\lambda)d\lambda} d\tau'\right] \sin(\mu\xi)d\mu, \tag{88}$$

şi pentru efectuarea calculelor este necesar să se precizeze forma funcţiei $f(\tau)$. Putem ocoli această problemă dacă recurgem la o extindere a aproximaţiei utilizate, punînd $f(\tau)=1$ şi în celălalt termen din ecuaţia (84) în care intervine această funcţie. Obţinem în acest mod

$$\frac{d\theta_s'}{d\tau} + \left(\mu^2 + \frac{\alpha_0^2}{4}\right)\theta_s' = \mu\sqrt{\frac{2}{\pi}}, \tag{89}$$

iar soluţia acestei ecuaţii care satisface condiţia (86) este

$$\theta' = \mu\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1-e^{-\left(\mu^2+\frac{\alpha_0^2}{4}\right)\tau}}{\mu^2+\frac{\alpha_0^2}{4}}, \tag{90}$$

originalul fiind [13]

$$\theta' = e^{-\frac{\alpha_0\xi}{2}}\left\{1-\frac{1}{2}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sqrt{\tau}-\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right]-e^{\alpha_0\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sqrt{\tau}+\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\right\}\right\}. \tag{91}$$

Cu ajutorul relaţiei (80) găsim imediat

$$\theta = 1-\frac{1}{2}\left\{\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sqrt{\tau}-\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right]-e^{\alpha_0\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha_0\sqrt{\tau}+\frac{\xi}{\sqrt{\tau}}\right)\right]\right\} \tag{92}$$

şi se constată cu uşurinţă că această funcţie satisface atît condiţia iniţială (61), cît şi condiţiile la limită (62).

Din punct de vedere fizic, aproximaţia pe care am făcut-o considerînd $f(\tau)=1$ corespunde fie la faza iniţială a unei scurgeri care începe din repaus cu o viteză w_0 ce descreşte apoi, fie la o fază mai înaintată în timp a unei scurgeri care porneşte lent din repaus şi a cărei viteză tinde către w_0.

Ultimul rezultat găsit, exprimat prin formula (92), poate fi interpretat ca fiind acceptabil în cazul în care funcţia $f(\tau)$ variază destul de puţin, viteza scurgerii rămînînd apropiată de o valoare medie. În această situaţie, constanta α_0 trebuie considerată ca reprezentînd valoarea medie a lui $\alpha(\tau)$ într-un interval de timp convenabil ales. Este evident că se

poate ajunge la (92) plecîndu-se direct de la ecuația (67), în care se introduce $f(\tau)=1$ sau o valoare medie corespunzătoare. Mai observăm că în această situație se poate recurge la soluția (63) sau la forma ei simplificată, pe care am justificat-o mai înainte.

Evident, rezultatele găsite nu rezolvă complet problema propusă, putînd fi considerate ca prime aproximații, valabile în special în cazurile-limită pe care le-am semnalat. Excepție face numai soluția (79), care apare ca o a doua aproximație, deci susceptibilă de o mai mare precizie. Facem însă observația că posibilitatea efectuării calculelor în (79) și, prin urmare, a găsirii unei soluții utilizabile depinde în mare măsură de forma funcției $f(\tau)$.

6. EFECTUL VARIAȚIEI ÎN TIMP A VITEZEI ÎN CAZUL SCURGERII RADIAL-PLANE

Pentru a examina aceeași problemă în celălalt caz de interes practic pe care l-am discutat sub aspectele lui generale în prima parte a acestei lucrări, vom recurge la aceleași simplificări ca și în cazul scurgerii plane. Stratul productiv fiind deci presupus și de data aceasta de grosime foarte mare, ecuația (10) devine

$$\frac{\partial T}{\partial \bar{t}} + a(\bar{t}, \bar{r}) \frac{\partial T}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2 T}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial T}{\partial \bar{r}}, \tag{93}$$

variabilele adimensionale fiind cele definite prin (9), cu observația, pe care am făcut-o și în cazul precedent, că h reprezintă o anumită lungime caracteristică.

Condiția inițială pentru temperatură este tot (12), în timp ce condițiile la limită sînt (37) și (38).

Pentru a pune mai bine în evidență aspectul problemei de care urmează să ne ocupăm, vom pune

$$a(\bar{t}, \bar{r}) = \frac{a_1(\bar{t})}{\bar{r}}, \tag{94}$$

expresia lui $a_1(\bar{t})$ rezultînd imediat din prima relație (11), în care Q este considerat funcție de $\bar{t}$; de asemenea vom introduce temperatura adimensională, definită prin (59). În felul acesta ecuația (93) ia forma

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} + \frac{a_1(\bar{t})}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}}, \tag{95}$$

iar condițiile amintite mai sus devin

$$\bar{t} = 0, \ \theta = 0, \tag{96}$$

respectiv

$$\bar{r} = \bar{r}_s, \ \theta = 1; \ \bar{r} = \infty, \ \theta = 0. \tag{97}$$

Vom căuta o soluție aproximativă a acestei probleme tot cu ajutorul unei transformări integrale. Astfel, dacă punem

$$a_1(\bar{t}) = a_{10} g(\bar{t}), \tag{98}$$

a_{10} fiind o constantă a cărei definiție este imediată, ne vom referi la cazul în care funcția $g(\bar{t})$ are valori apropiate de unitate. După cum am arătat și mai înainte, din punctul de vedere al efectuării calculelor necesare pentru a se ajunge la soluție, această situație este echivalentă cu aceea în care $g(\bar{t})$ variază suficient de puțin pentru a se putea înlocui $a_1(\bar{t})$ cu o valoare medie, calculată într-un interval de timp convenabil ales.

În acest mod, ecuația (95) devine

$$\frac{\partial \theta}{\partial \bar{t}} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial \bar{r}^2} - \frac{a_{10} - 1}{\bar{r}} \frac{\partial \theta}{\partial \bar{r}}, \tag{99}$$

cu observația că am scris-o astfel deoarece a_{10} este în general mai mare decît unitatea.

Observăm de la început că aplicarea unui procedeu analog cu acela utilizat în cazul scurgerii liniare pune o serie de probleme. Astfel, dacă încercăm să găsim o soluție aproximativă aplicînd ecuației (99) o transformare integrală, constatăm imediat că apar dificultăți destul de serioase. Transformarea lui Hankel, care ar putea conduce în principiu la găsirea unor soluții bazate pe aproximații de același gen cu cele care impuse în cazul scurgerii liniare de utilizarea sinus-transformatei Fourier, nu este aplicabilă, deoarece domeniul de variație al lui $\bar{r}$ nu este cuprins între zero și infinit. Reducerea sondei de injecție la o sursă punctiformă cu raza nulă ($\bar{r}_s = 0$), care în principiu ar înlătura acest inconvenient, ridică o altă problemă, care nu a mai fost studiată, și anume stabilirea formei sub care trebuie să apară soluția în acest caz. O altă modalitate ar fi aceea de a considera stratul de extindere finită în plan, fapt care ar permite aplicarea transformării finite a lui Hankel, bineînțeles tot cu anumite aproximații. Pe lîngă faptul că și conturul exterior al stratului ar trebui să fie presupus de formă circulară, se mai pune și problema stabilirii condiției la limită pe acest contur. De altfel, deși la prima vedere s-ar părea că prin considerarea unui strat de extindere finită în plan ne apropiem de realitatea fizică, problema își pierde totuși sensul sub forma ei simplă, deoarece în acest caz, pe lîngă sonda de injecție, ar trebui să considerăm cel puțin o sondă de reacție. Ca urmare, nu ar mai fi posibilă utilizarea transformatei finite a lui Hankel.

O altă posibilitate de principiu, care apare cel puțin la prima vedere mai indicată, este aceea de a se aplica ecuației (99) transformarea lui Laplace. Este ușor de constatat că în acest mod obținem în loc de (99) o ecuație diferențială de ordinul doi, ale cărei soluții se exprimă cu ajutorul funcțiilor Bessel de argument imaginar. Însă, așa cum se poate observa imediat, ordinul acestor funcții depinde de constanta a_{10}, care poate avea diferite valori pozitive, oarecum arbitrare, în sensul că este greu de admis că a_{10} este un număr întreg sau o fracție ordinară. Din acest motiv se ajunge la funcții Bessel de ordin oarecare, ceea ce face ca procedeul să fie practic inutilizabil. Remarcăm de asemenea faptul

că integrarea ecuației (99) prin procedeul propus de M. T. Abasov și A. A. Abbasov* nu este posibilă decît cu ipoteza restrictivă că $a_{10}-1$ este un număr întreg. Precizăm că procedeul are la bază în primul rînd presupunerea că raza sondei de injecție este nulă, fapt care permite o schimbare de variabile de tipul aceleia introduse de Boltzmann. În felul acesta se obține o ecuație diferențială obișnuită de ordinul doi, care se poate integra cu ușurință în cazul în care acceptăm restricția indicată mai sus. Desigur, în realitate, $a_{10}-1$ nu poate fi decît în mod excepțional un număr întreg, dar este de asemenea posibil ca prin rotunjire să nu se comită o eroare prea importantă. Ar rămîne deci de analizat această alternativă, dar, după părerea noastră, neglijarea razei sondei de injecție pune problema, pe care am semnalat-o și mai înainte, a stabilirii formei adecvate a soluției.

Prin urmare, chiar în cazul cu totul particular în care se încearcă rezolvarea problemei luîndu-se ca punct de plecare ecuația (99), nu apare posibil să se urmeze o cale asemănătoare cu aceea care a condus la soluții aproximative în studiul scurgerii plane. Urmează deci a se încerca utilizarea unui procedeu de altă natură, care ar putea să nu conducă la dificultăți de genul celor semnalate mai sus.

În ceea ce privește ecuația (95), evident nu este posibil să se utilizeze transformarea lui Laplace pentru găsirea soluției problemei propuse. Ideea de a se utiliza eventual alt gen de transformare integrală se izbește de aceleași inconveniente ca și în cazul ecuației simplificate (99).

Remarcăm de asemenea faptul că ecuația care permite determinarea temperaturii în scurgerea plan-radială în varianta simplificată pe care o studiem nu poate fi supusă unor transformări asemănătoare cu acelea pe care le-am utilizat în studiul scurgerii liniare. Nu mai avem deci posibilitatea de a studia diferite situații-limită, așa cum am procedat în cazul scurgerii liniare, decît dacă recurgem la aproximații care pot conduce la erori considerabile.

Nu intenționăm să examinăm în cadrul acestui studiu alte posibilități de rezolvare a problemei propuse, întrucît intenția noastră a fost doar aceea de a investiga modalitățile de aplicare a transformatelor integrale. Încheiem cu observația că, și în cadrul schemei fizice destul de simplificate pe care am adoptat-o, variația în timp a vitezei de injecție introduce complicații destul de serioase din punctul de vedere al obținerii unor soluții simple și ușor de utilizat.

Primită la redacție la 2 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

13. Fritz Oberhettinger, *Tabellen zur Fourier Transformation*, Berlin — Göttingen — Heidelberg, Springer-Verlag, 1957, p. 48, 110, 112 și 123.
14. T. Oroveanu, *Scurgerea fluidelor multifazice prin medii poroase*, București, Edit. Academiei, 1966, p. 483.
15. — *Dezlocuirea în regim nepermanent a fluidelor miscibile într-un mediu poros*, St. cerc. mec. apl., **27**, 6 (1968).
16. Ian N. Sneddon, *Fourier Transforms*, New York — Toronto — Londra, McGraw-Hill Book Comp., Inc., 1951, p. 6.

* Vezi nota de la p. 823 (1).

DETERMINAREA PULSAȚIILOR PROPRII TORSIONALE ALE ARBORILOR COTIȚI

de NICOLAE MOȘU
Institutul politehnic Brașov

Se prezintă o metodă nouă, exactă, simplă și generală, de calcul al coeficienților ecuației pulsațiilor proprii torsionale ale sistemelor oscilante de forma celui arătat în figura 1. Pentru sistemele oscilante la care numărul de volanți este cuprins între 2 și 7 se prezintă și un program de calcul în limbaj Fortran pentru obținerea coeficienților și rezolvarea ecuației pulsațiilor proprii pe calculatoare numerice.

1. INTRODUCERE

Modelul matematic liniarizat cu care se asimilează arborii cotiți cînd se studiază vibrațiile torsionale libere este arătat în figura 1. Acest studiu conduce în final la determinarea pulsațiilor proprii.

Modul în care se obține ecuația pulsațiilor proprii analizînd ecuațiile diferențiale care descriu vibrațiile libere neamortizate ale modelului

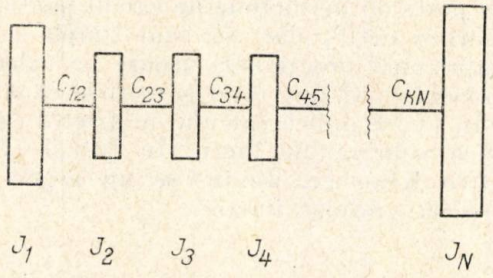


Fig. 1

din figura 1 este bine cunoscut și rezultă din egalarea cu zero a determinantului

$$D_n = \begin{vmatrix} C_{12}-p^2J_1 & -C_{12} & 0 & 0\ldots & 0 & 0 \\ -C_{12} & C_{12}+C_{23}-p^2J_2 & -C_{23} & 0\ldots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0\ldots & -C_{nk} & C_{nk}-p^2J_n \end{vmatrix} . \quad (1)$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 833–850

Prin dezvoltarea acestui determinant se obține ecuația pulsațiilor proprii, care este un polinom de gradul n în p^2, avînd o rădăcină nulă și $K=n-1$ rădăcini diferite de zero. Notînd $p^2=X$, această ecuație are forma

$$Y = [A_1 - A_2X + A_3X^2 - A_4X^3 +, \ldots, + (-1)^k A_n X^K]X. \qquad (2)$$

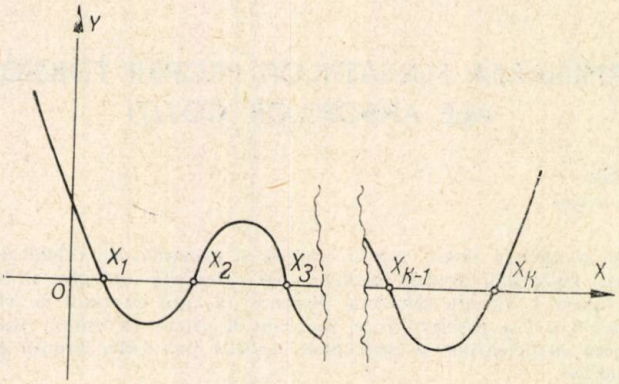


Fig. 2

Graficul acestui polinom pentru un sistem oscilant cu un număr impar de volanți este arătat în figura 2.

Cu cît numărul volanților este mai mare, cu atît dezvoltarea determinantului (1) devine mai laborioasă, și acest fapt a condus la dezvoltarea unui mare număr de metode aproximative de calcul. În [3] se arată că au fost propuse peste 30 de metode de calcul pentru pulsațiile proprii torsionale ale arborilor cotiți, dar cea mai simplă este metoda Holzer care are și avantajul unei programări ușoare pe calculatoare numerice. În lucrări relativ recente s-au dezvoltat și metode exacte de calcul pentru pulsațiile proprii. În [4] se aplică calculul matriceal care simplifică raționamentele și reduce volumul de lucru. În [6] și [7] se generalizează metoda grafică Otto Kraemer, dîndu-i-se un aspect grafoanalitic, iar în [1] se aplică teoria grafelor liniare.

2. O NOUĂ METODĂ PENTRU OBȚINEREA ECUAȚIEI PULSAȚIILOR PROPRII

În literatură sînt date expresiile coeficienților ecuației pulsațiilor proprii pentru sisteme oscilante cu doi, trei și chiar patru volanți [2]. De fapt pentru aceste situații dezvoltarea determinantului (1) nu este laborioasă.

Ordonînd în același mod aceste relații și analizînd cu atenție forma coeficienților de același rang, se găsește printr-un raționament inductiv, o metodă simplă de calcul a lor pentru cazul general cu n volanți. În figura 3 se arată această ordonare.

După cum se observă, numărul de termeni care intră în componența diverșilor coeficienți ai ecuației pulsațiilor este dat de relația

$$T_i = C_K^{n-i} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

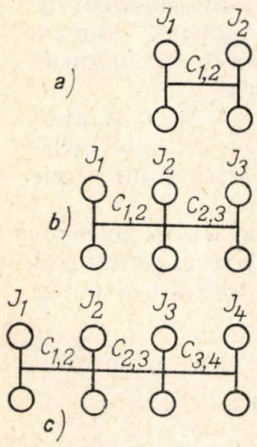
unde i este indicele coeficienților A_i din ecuația (2).

De asemenea trebuie observat că fiecare termen din componența oricărui coeficient conține $K+1=n$ factori, formați din constantele elastice și momentele de inerție.

Foarte importantă și utilă este observația că în timp ce toate cele n momente de inerție participă o singură dată în absolut toți termenii sub formă de sumă, sume și factori sau numai factori, cele $K=n-1$ constante elastice participă numai sub formă de factori în toți termenii unui coeficient cu aceeași pondere și cu altă pondere în ceilalți coeficienți după o lege unică.

Legea de participare a constantelor elastice este următoarea : cei T_i termeni din care este format coeficientul A_i sînt dați de numărul combinărilor ce se pot face cu cele K constante elastice, luate cîte $K-i$. Deci coeficientul A_1 conține $C_K^{n-1}=1$ termeni, adică numărul de combinații ce se pot face cu cele K constante elastice luate cîte K, așadar în acest termen intervin toate constantele elastice.

Coeficientul A_2 conține $C_K^{n-2}=K$ termeni, adică numărul combinărilor ce se pot face cu cele K constante elastice luate cîte $K-1$, deci în fiecare din acești termeni intervin cîte $K-1$ constante elastice (evident, sub formă de factori).



$$A_1 = C_{1,2}\,(J_1 + J_2)$$
$$A_2 = J_1\,J_2$$

$$A_1 = C_{1,2}\,C_{2,3}\,(J_1 + J_2 + J_3)$$
$$A_2 = C_{1,2}\,(J_1 + J_2)\,J_3 + C_{2,3}\,(J_2 + J_3)\,J_1$$
$$A_3 = J_1\,J_2\,J_3$$

$$A_1 = C_{1,2}\,C_{2,3}\,C_{3,4}\,(J_1 + J_2 + J_3 + J_4)$$
$$A_2 = C_{1,2}\,C_{2,3}\,(J_1 + J_2 + J_3)\,J_4 + C_{1,2}\,C_{2,3}\,(J_1 + J_2)\,(J_3 + J_4) + C_{2,3}\,C_{3,4}\,(J_2 + J_3 + J_4)\,J_1$$
$$A_3 = C_{1,2}\,(J_1 + J_2)\,J_3\,J_4 + C_{2,3}\,(J_2 + J_3)\,J_1\,J_4 + C_{3,4}\,(J_3 + J_4)\,J_1\,J_2$$
$$A_4 = J_1\,J_2\,J_3\,J_4$$

Fig. 3

Coeficientul A_{n-1} conține $C_K^1 = K$ termeni, adică numărul combinărilor ce se pot face cu cele K constante elastice luate cîte una, deci în fiecare termen intervine o singură constantă elastică.

Coeficientul A_n conține $C_K^{n-n} = 1$ termeni, adică numărul combinărilor ce se pot face cu cele K constante elastice luate cîte zero, deci în acest termen nu intervine nici o constantă elastică.

Înaintea prezentării legii de participare a momentelor de inerție se amintește că acestea poartă un singur indice, iar constantele elastice doi, adică J_i și $C_{i,i+1}$ $(i=1,n)$ și, evident, $C_{n,n+1}=0$.

Legea de participare este următoarea : în oricare termen de la oricare coeficient, momentele de inerție al căror indice este conținut și de constantele elastice care participă în termenul respectiv formează o sumă de doi termeni, iar suma participă ca factor în acel termen. Cînd constantele elastice sînt consecutive, acestea au cîte un indice comun, de exemplu $C_{i-1,i}$, $C_{i,i+1}$, și, deoarece oricare moment de inerție nu poate interveni decît o singură dată într-un termen, factorul-sumă se extinde la trei termeni, adică $(J_{i-1}+J_i+J_{i+1})$, sau, dacă este cazul, la patru, cinci etc., deci la coeficientul A_1 toate momentele de inerție formează un singur factor (pe cel de-al n-lea), iar la coeficientul A_n, unde nu există nici o constantă elastică, toate cele n momente de inerție intervin ca factori.

Analizînd expresiile coeficienților ecuației pulsațiilor proprii scrise pe baza legii de construcție prezentată mai înainte, observăm că, dacă se dispune de aceste expresii pentru un sistem oscilant cu n volanți, atunci pentru sistemele oscilante cu un număr mai mic de volanți expresiile coeficienților ecuației pulsațiilor proprii se obțin cu ușurință prin particularizarea cazului general. Particularizarea constă în a face valorile constantelor elastice care lipsesc egale cu unu (deoarece acestea participă numai ca factori în expresiile coeficienților), iar valorile momentelor de inerție ale volanților care lipsesc egale cu zero (deoarece acestea participă și ca factori, și ca termeni în expresiile coeficienților).

Observăm că această lege de construcție a coeficienților ecuației pulsațiilor proprii ca funcții de elementele sistemului oscilant (momentele de inerție, J_i, și constantele elastice, C_{ij}) are caracter general, pentru că toți determinanții de ordin mai mic decît n se obțin din determinantul de ordinul n prin particularizarea amintită mai înainte.

Așadar, dacă în expresia lui D_n se face $C_{Kn}=1$ și $J_n=0$ și apoi se adaugă linia n la linia K, determinantul ce se obține, D'_n, este echivalent cu determinantul D_K, $D'_n \equiv D_K$, corespunzător sistemului oscilant cu $K=n-1$ volanți.

Metoda prezentată pentru calculul coeficienților ecuației pulsațiilor proprii, în afară de faptul că este simplă și generală, are și avantajul că permite eliminarea oricăror erori, deoarece legea de formare a coeficienților permite verificări simple și sigure.

3. REZOLVAREA ECUAȚIEI PULSAȚIILOR PROPRII

După ce coeficienții ecuației pulsațiilor proprii A_i $(i=1, 2, \ldots, n)$ au fost calculați, deci s-a obținut ecuația pulsațiilor proprii, problema determinării acestor pulsații revine la aflarea rădăcinilor unui polinom de gradul K, despre care se știe că sînt reale, pozitive, distincte și cuprinse într-un interval de lungime Δ [5] :

$$\Delta = \sqrt{\frac{2}{K}[(K-1)(A_{n-1}/A_n)^2 - 2K(A_{n-2}/A_n)]}. \qquad (3)$$

$$D_n = \begin{vmatrix} C_{12}-p^2J_1 & -C_{12} & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{12} & C_{12}+C_{23}-p^2J_2 & -C_{23} & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{23} & C_{23}+C_{34}-p^2J_3 & -C_{34} & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & -C_{jm} & C_{jm}+C_{mk}-p^2J_m & -C_{mk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & -C_{mk} & C_{mk}+C_{kn}-p^2J_k & -C_{kn} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & -C_{kn} & C_{kn}-p^2J_n \end{vmatrix}$$

$$(k=n-1;\ m=k-1;\ j=m-1)$$

$$D'_n = \begin{vmatrix} C_{12}-p^2J_1 & -C_{12} & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_{12} & C_{12}+C_{23}-p^2J_2 & -C_{23} & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_{23} & C_{23}+C_{34}-p^2J_3 & -C_{24} & 0\ldots0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & -C_{jm} & C_{jm}+C_{mk}-p^2J_m & -C_{mk} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & -C_{mk} & C_{mk}+1-p^2J_k & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\ldots0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$(C_{kn}=1;\ J_n=0)$$

Or, pentru această situație, metoda cea mai potrivită de aflare a rădăcinilor este cea a lui Lobacevski. Metoda permite determinarea tuturor rădăcinilor cu precizia dorită, iar volumul de calcul nu este exagerat.

După cum se știe, metoda lui Lobacevski se bazează pe aplicarea repetată a unei transformări care conduce de fiecare dată la un nou polinom ai cărui coeficienți se calculează pe baza celor precedenți cu relația

$$B_i = A_i^2 - 2A_{i-1}A_{i+1} + 2A_{i-2}\cdot A_{i+2}, \tag{4}$$

iar rădăcinile lui rezultă din formula

$$X_i = \sqrt[2^N]{B_i/B_{i+1}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, K), \tag{5}$$

unde N este numărul transformărilor.

Sînt necesare mai multe transformări pentru a mări precizia rădăcinilor. Cu cît rădăcinile polinomului sînt mai apropiate între ele, cu atît numărul transformărilor trebuie să fie mai mare. De exemplu [5], cînd raportul a două rădăcini consecutive este 1,001, transformarea trebuie aplicată de circa 14 ori. Dar, în general, pulsațiile proprii nu au valori apropiate și, în consecință, numărul transformărilor necesar obținerii unei precizii bune este în jur de șase.

Pentru a se ușura efectuarea calculelor indicate de relația (4), este utilă transformarea

$$X = Z\cdot\sqrt[K]{A_1/A_n},$$

care conduce la polinomul

$$Y_1 = 1 - C_2Z + C_3Z^2 - C_4Z^3 + \ldots + (-1)^KZ^K,$$

coeficienții acestuia calculîndu-se cu relația

$$C_i = A_i/(A_1^{n-i}\cdot A_n^{i-1})^{\frac{1}{K}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

3.1. REZOLVAREA ECUAȚIEI PULSAȚIILOR PROPRII PE CALCULATOARE NUMERICE

Deși volumul de calcul pe care îl necesită metoda lui Lobacevski, așa cum s-a arătat, nu este prea mare și se poate efectua cu ajutorul unor tabele de logaritmi, este utilă și rezolvarea acestei ecuații pe calculatoare numerice.

Deoarece calculatorul Olivetti programa 101, este larg răspîndită chiar în birourile de proiectare, se prezintă mai întîi programul de calcul pentru acesta. Raționamentul programului se bazează pe graficul din figura 2.

Pentru înțelegerea programului trebuie arătat că polinomul definit de relația (2) poate fi scris și sub forma

$$Y = A_1 + X(-A_2 + X(A_3 + X(-A_4 +, \ldots, + (-1)^KX\,A_n))\ldots)). \tag{6}$$

Această formă permite întocmirea unui program foarte economic în ce privește registrele de memorare, program care să calculeze valorile lui Y pentru diferite valori date lui X.

Gradul polinomului pentru care aflarea rădăcinilor se poate face cu relația (6) este hotărît de numărul registrelor de memorare pe care le are calculatorul. În cazul calculatorului Olivetti programa 101, sînt zece registre. Pentru un polinom de gradul K care are toți termenii, sînt $K+1=n$ coeficienții care trebuie memorați, plus valoarea lui X, pentru care se calculează valoarea polinomului. Rezultă că gradul maxim al polinomului este $K=8$, adică pot fi determinate pulsațiile proprii ale unui arbore cotit cu opt manetoane.

Programul de calcul este arătat în tabela (1).

Tabela 1

AV,	S,	$B/\uparrow$, (A_1)	S,	$B\uparrow$, (A_2)	S,	$C/\uparrow$, (A_3)	S,	$C\uparrow$, (A_4)	S
$D/\uparrow$, (A_5)	S,	$D\uparrow$, (A_6)	S,	$E/\uparrow$, (A_7)	S,	$E\uparrow$, (A_8)	S,	$F/\uparrow$, (A_9)	AW
S,	$F\uparrow$,	$A\downarrow$,	$F/\times$,	$E+$,	$F\times$,	$E/+$,	$F\times$,	$D+$,	$F\times$,	$D/+$
$F\times$,	$C+$,	$F\times$,	$C/+$,	$F\times$,	$B+$,	$F\times$,	$B/+$,	$A\diamond$,	W,	V

Modul de aplicare al acestui program este, desigur, simplu. Se împarte intervalul Δ într-un număr de părți egale, de exemplu $\Delta_1=\Delta/2K$, și se calculează valorile polinomului în aceste puncte. Urmărind graficul polinomului trasat principial, se analizează dacă s-au separat toate rădăcinile. În caz contrar se mai calculează valorile polinomului și în alte puncte pînă se realizează separarea. După separare se restrîng intervalele în care se găsesc rădăcinile pînă la precizia dorită.

Coeficienții ecuației pulsațiilor proprii, A_i ($i=1, 2, \ldots, n$) nu pot fi calculați după un program general pe calculatorul Olivetti programa 101, pentru că registrele de memorare sînt insuficiente.

Desigur, utilizarea unui calculator cu memorie permite și calculul acestor coeficienți. Pentru această situație se prezintă în continuare schema logică a unui program general, cu care se calculează atît coeficienții, cît și rădăcinile ecuației pulsațiilor proprii ale unui sistem oscilant cu 2—7 volanți. Și această schemă se bazează tot pe graficul din figura 2.

Programul de calcul corespunzător acestei scheme logice este scris în limbaj Fortran și este prezentat împreună cu schema logică în anexă.

3.2. AVANTAJELE UTILIZĂRII CALCULATOARELOR

Cînd se studiază o problemă concretă, trebuie determinate valorile mărimilor J_i ($i=1, 2, \ldots, K, n$) și $C_{i,i+1}$ ($i=1, 2 \ldots, K$). Evident, precizia cu care se determină aceste mărimi se răsfrînge asupra rezultatelor.

Momentele de inerție se pot determina experimental suficient de precis fără instalații speciale și deci cu cheltuieli minime. În schimb, determinarea experimentală a constantelor elastice este mult mai dificilă și costisitoare, necesitînd instalații speciale pentru torsionarea arborelui cotit și măsurarea unghiurilor de răsucire.

Din această cauză, pentru determinarea constantelor elastice se folosesc relații de calcul cu caracter empiric, impuse de geometria foarte complexă a arborilor cotiți. Deci valorile constantelor elastice sînt, de regulă, eronate. Pentru ca situația reală să fie în mod sigur analizată, se repetă programul de calcul al pulsațiilor proprii pentru mai multe serii de valori ale constantelor elastice, întocmindu-se o tabelă cu rezultatele obținute. În acest fel se poate depista prin calcul o eventuală situație periculoasă.

Dar cunoașterea cît mai exactă a constantelor elastice este necesară la studiul vibrațiilor forțate. Pentru aceasta se recomandă determinarea experimentală a frecvențelor proprii, deoarece aceste măsurători se execută mai ușor. Se caută apoi în tabela întocmită, prin repetarea calculelor, situația cea mai apropiată și, în calculul amplitudinilor vibrațiilor forțate, se vor folosi constantele elastice corespunzătoare.

4. EXEMPLE DE CALCUL COMPARATIVE

Pentru verificarea programului de calcul și mai ales pentru verificarea noii metode de obținere a coeficienților ecuației pulsațiilor proprii, se prezintă în continuare rezultatele obținute în cazul a două aplicații.

a) Se rezolvă ecuația

$$1000 - 1350 + 380\,x^2 - 35\,x^3 + x^4 = 0$$

și se compară rezultatele cu cele obținute în [5]. Această comparație este arătată în tabela 2.

Tabela 2

K	1	2	3	4
	Rezultatele din [5]			
X_k	0,994223	5,00001	11,4743	17,5314
Y_k	−0,03	0,003	0,03	− 0,02
	Rezultatele de la calculator, programul general			
X_k	0,9942255	5,0	11,47477	17,53145
Y_k	0,0	0,0	0,0	−0,0625

b) Se rezolvă exemplul de calcul din [1], care consideră un sistem oscilant cu șase volanți (fig. 4) pentru care se cere să se stabilească și să se rezolve ecuația pulsațiilor proprii torsionale.

Se dau :

$J_1 = 20$ kg·m²; $C_{12} = 7 \cdot 10^7$ N.m/rad,

$J_2 = 17$ kg·m²; $C_{23} = 2{,}4 \cdot 10^7$ N.m/rad,

$J_3 = 17$ kg·m²; $C_{34} = 7 \cdot 10^7$ N.m/rad,

$J_4 = 21$ kg·m²; $C_{45} = 3 \cdot 10^7$ N.m/rad,

$J_5 = 129{,}87$ kg·m²; $C_{56} = 7{,}2 \cdot 10^7$ N.m/rad.

$J_6 = 1250$ kg·m²;

Rezultatele calculului și cele prezentate în [1] sînt arătate în tabela 3.

Tabela 3

i		A_i	A_i/A_6	X_i	Y_i
1	LUCRAREA [1]		$-18 \cdot 10^{30}$	0	0
2			$136 \cdot 10^{24}$	186.774	$-0{,}1777121 \cdot 10^{27}$
3			$-234{,}7 \cdot 10^{18}$	704.983	$-0{,}3965277 \cdot 10^{27}$
4			$124{,}36 \cdot 10^{12}$	1812.739	$-0{,}1739644 \cdot 10^{32}$
5			$-20{,}157 \cdot 10^6$	7.848049	$0{,}11666 \cdot 10^{32}$
6			1	9.608.927	$0{,}2826923 \cdot 10^{32}$
1	COEFICIENȚII DIN [1]		$-18 \cdot 10^{30}$	0	0
2			$136 \cdot 10^{24}$	186.776,9	$-0{,}7253555 \cdot 10^{25}$
3			$-234{,}7 \cdot 10^{18}$	704971,8	$0{,}1934281 \cdot 10^{26}$
4			$124{,}36 \cdot 10^{12}$	1,812758	$0{,}3022315 \cdot 10^{27}$
5			$-20{,}157 \cdot 10^6$	7868348	$0{,}9551723 \cdot 10^{28}$
6			1	9584088	$-0{,}9938700 \cdot 10^{29}$
1	COEFICIENȚII CORECTAȚI	$3695603 \cdot 10^{35}$	$-18{,}75508 \cdot 10^{30}$	0	0
2		$2713643 \cdot 10^{28}$	$137{,}7165 \cdot 10^{24}$	194086,7	$-0{,}2417852 \cdot 10^{25}$
3		$4527247 \cdot 10^{21}$	$-235{,}0807 \cdot 10^{18}$	713298,7	$0{,}1208926 \cdot 10^{25}$
4		$2452196 \cdot 10^{14}$	$124{,}4481 \cdot 10^{12}$	1794183	$-0{,}6528199 \cdot 10^{26}$
5		$3973167 \cdot 10^7$	$-20{,}16371 \cdot 10^6$	7879578	$0{,}7130244 \cdot 10^{28}$
6		$1970453 \cdot 10^4$	1	9582585	$-0{,}1267680 \cdot 10^{29}$

Pentru a se putea face o comparație edificatoare, s-a rezolvat ecuația pulsațiilor cu calculatorul și pentru valorile coeficienților dați în [1] și, deasemenea, pentru rădăcinile date în această lucrare s-au calculat valorile polinomului.

Se menționează faptul că pentru calculele prezentate în tabelele 2 și 3 s-a lucrat cu precizie simplă, deci rezultatele mai pot fi îmbunătă-

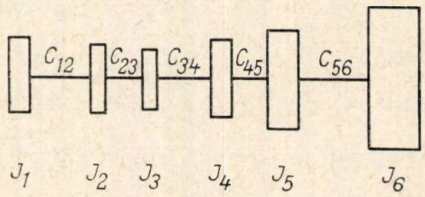


Fig. 4

țite dacă o anumită problemă ar cere acest lucru, și anume să se lucreze cu precizie dublă.

Analiza rezultatelor arată că programul de calcul conduce la rezultate foarte exacte și că noua metodă pentru calculul coeficienților ecuației pulsațiilor proprii este corect.

5. CONCLUZII

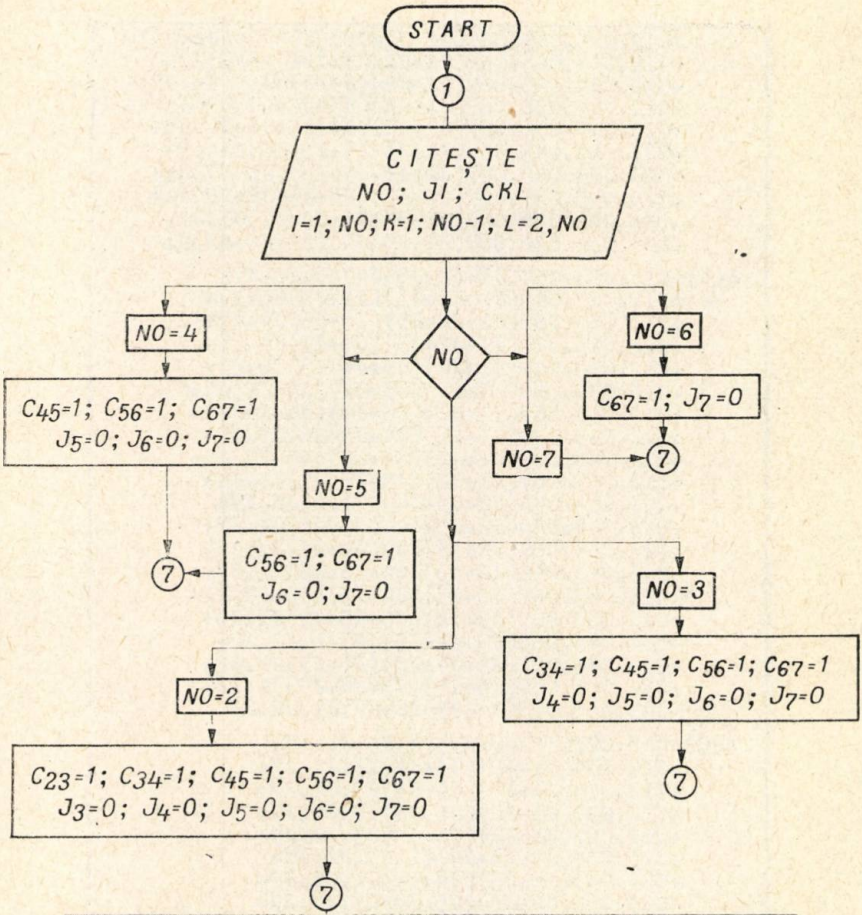
Metoda prezentată pentru calculul coeficienților ecuației pulsațiilor proprii este exactă, simplă și generală, iar volumul de calcul este considerabil mai mic decît cel necesar dezvoltării determinantului la care se ajunge în mod obișnuit. Față de celelalte metode, prezenta se distinge prin simplitate și siguranță, deoarece legea de formare a coeficienților permite verificări simple și sigure, astfel încît erorile de calcul sînt eliminate cu ușurință.

Utilizarea calculatoarelor numerice pentru calculul coeficienților și pentru aflarea rădăcinilor ecuației pulsațiilor proprii este deosebit de utilă, deoarece conduce la rezultate precise într-un timp foarte scurt.

Primită la redacție la 24 martie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. I. Crăciun, *O metodă de calcul a oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor cu ajutorul grafelor liniare*, St. cerc. mec. apl., **28**, *6*, 1381—1401 (1969).
2. I. Hamburger, Gh. Buzdugan, *Teoria vibrațiilor și aplicațiile ei în construcția mașinilor*, București, Edit. tehnică, 1958.
3. C. M. Harris, C. E. Crede, *Șocuri și vibrații*, vol. III (trad. din l. engleză, S.U.A.), București, Edit. tehnică, 1968.
4. I. Kozesnik, *Dynamika Strojn*, Praha, SNTL, 1958.
5. Gh. Pic, *Algebră superioară*, București, Edit. didactică și pedagogică, 1966.
6. A. Ripianu, *Determinarea pulsațiilor proprii corespunzătoare vibrațiilor de torsiune a arborilor cotiți*, St. cerc. mec. apl., **13**, *5*, 1193—1219 (1962).
7. — *Mișcările vibratorii ale arborilor drepți și cotiți*, București, Edit. Academiei,1969



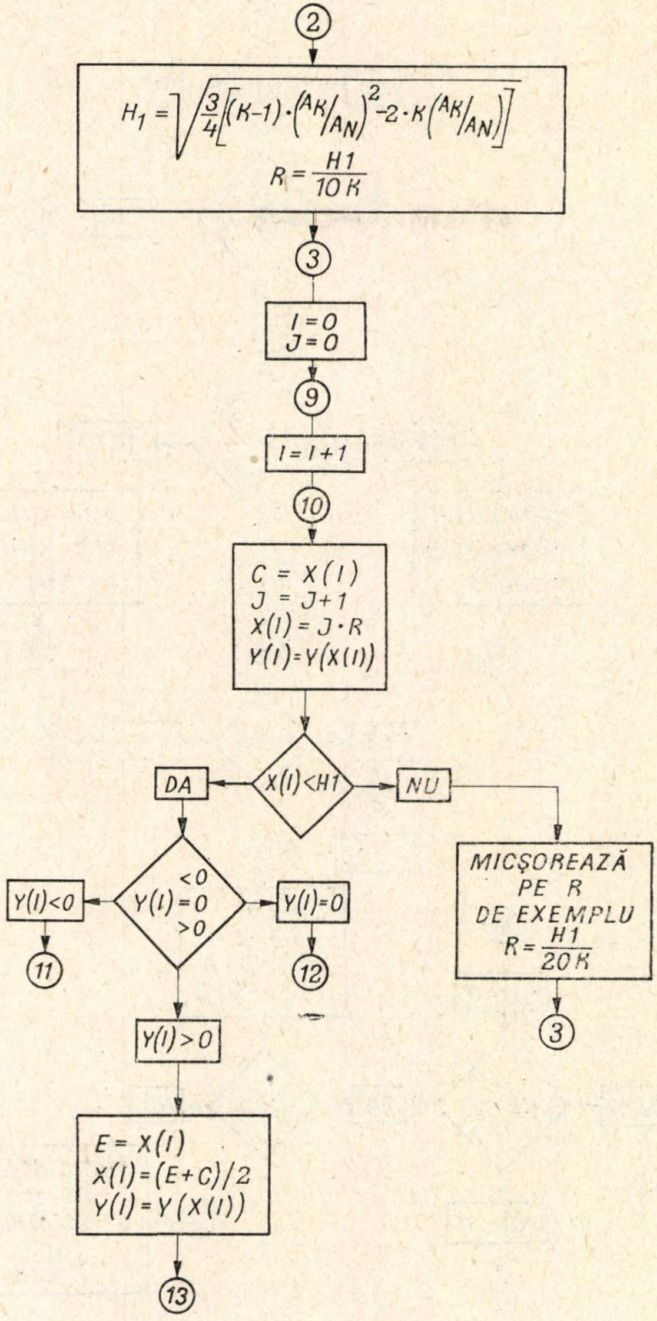

```
A(1)=C12.C23.C34.C45.C56.C67(J1+J2+J3+J4+J5+J6+J7)

A(2)=C12.C23.C34.C45.C56.(J1+J2+J3+J4+J5+J6)J7+
     +C12.C23.C34.C45.C67(J1+J2+J3+J4+J5)(J6+J7)+
     +C12.C23.C34.C56.C67(J1+J2+J3+J4)(J5+J6+J7)+
     +C12.C23.C45.C56.C67(J1+J2+J3)(J4+J5+J6+J7)+
     +C12.C34.C45.C56.C67(J1+J2)(J3+J4+J5+J6+J7)+
     +C23.C34.C45.C56.C67(J2+J3+J4+J5+J6+J7)J1

A(3)=C12.C23.C34.C45(J1+J2+J3+J4+J5)J6.J7+
     +C12.C23.C34.C56(J1+J2+J3+J4)(J5+J6)J7+
     +C12.C23.C34.C67(J1+J2+J3+J4)(J6+J7)J5+
     +C12.C23.C45.C56(J1+J2+J3)(J4+J5+J6)J7+
     +C12.C23.C56.C67(J1+J2+J3)(J5+J6+J7)J4+
```

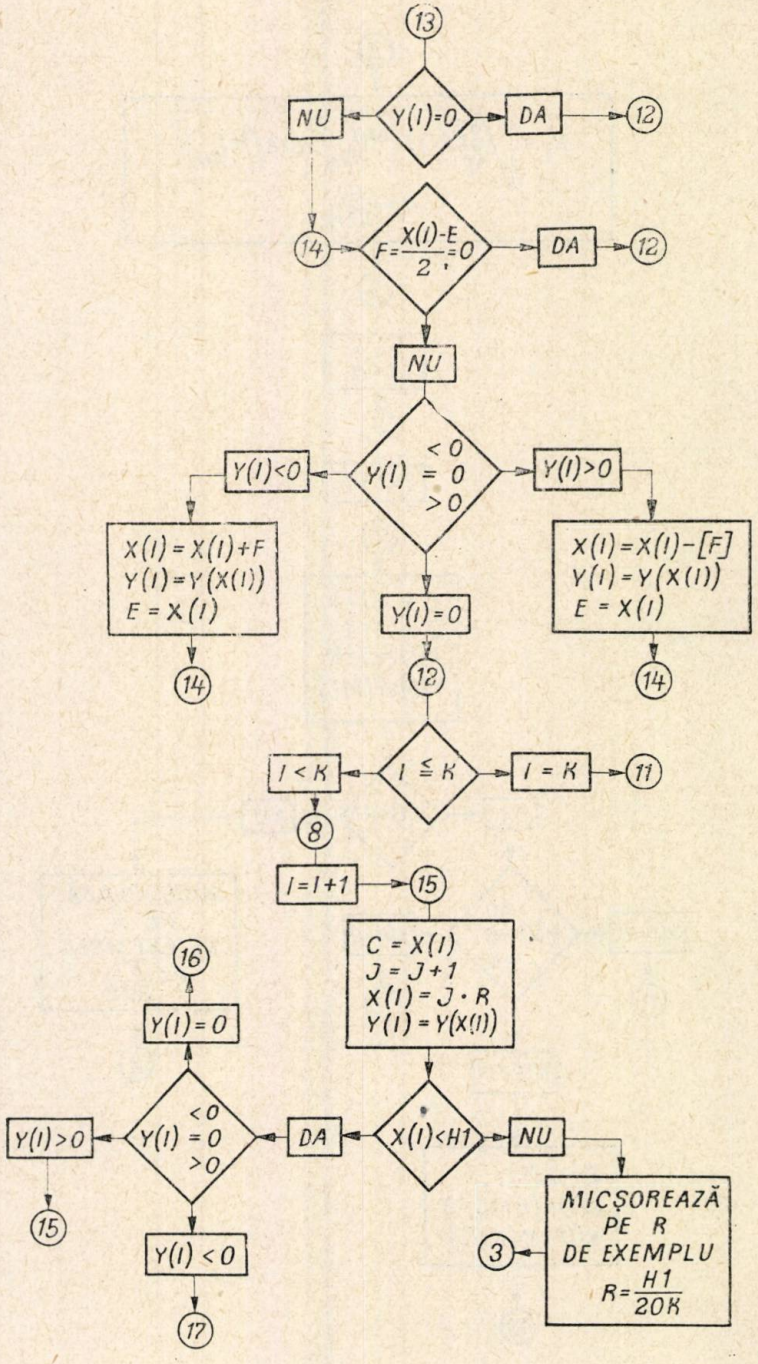
CONTINUĂ 7

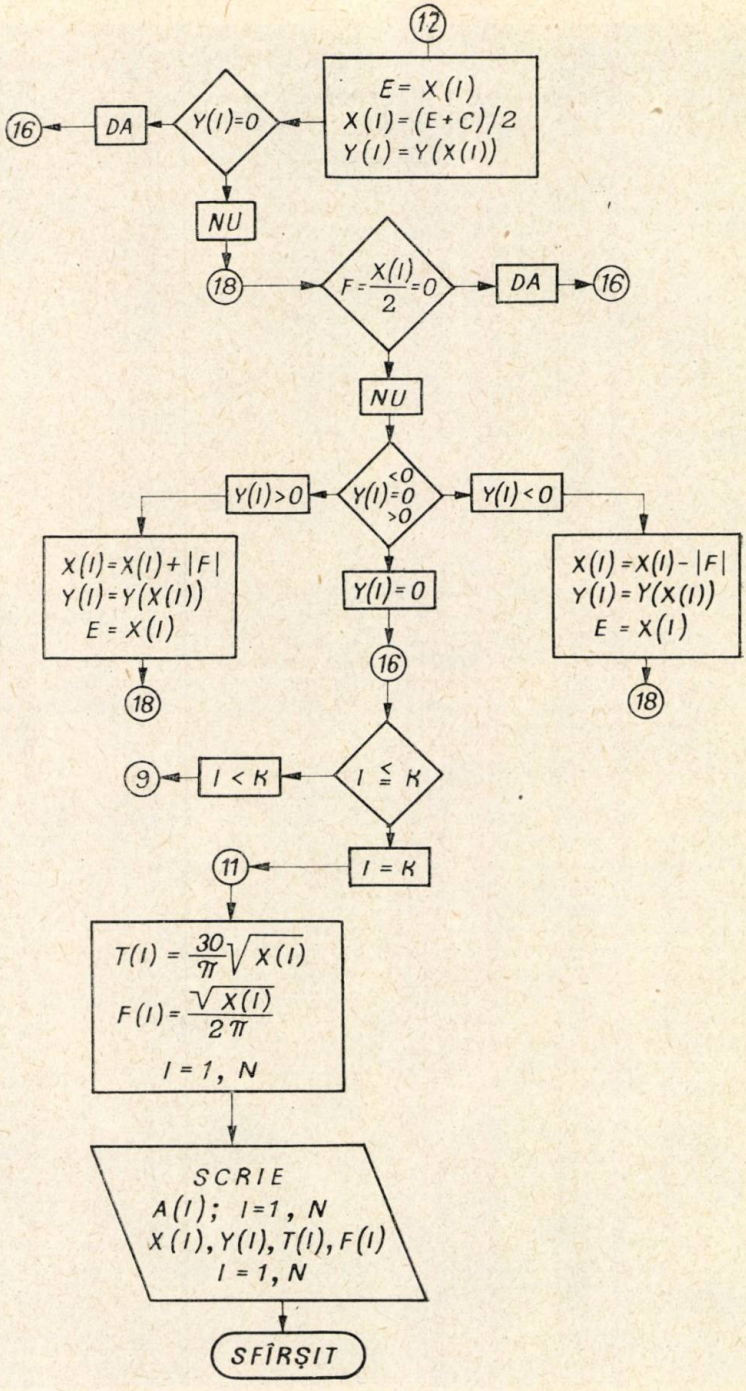
7 CONTINUĂ

```
     +C12.C23.C45.C67(J1+J2+J3)(J4+J5)(J6+J7)+
     +C12.C34.C45.C56(J1+J2)(J3+J4+J5+J6)J7+
     +C12.C34.C45.C67(J1+J2)(J3+J4+J5)(J6+J7)+
     +C12.C34.C56.C67(J1+J2)(J3+J4)(J5+J6+J7)+
     +C12.C45.C56.C67(J1+J2)(J4+J5+J6+J7)J3+
     +C23.C34.C45.C56(J2+J3+J4+J5+J6)J1.J7+
     +C23.C34.C45.C67(J2+J3+J4+J5)(J6+J7)J1+
     +C23.C45.C56.C67(J2+J3)(J4+J5+J6+J7)J1+
     +C34.C45.C56.C67(J3+J4+J5+J6+J7)J1.J2+
     +C23.C34.C56.C67(J2+J3+J4)(J5+J6+J7)J1

A(4)=C12.C23.C34(J1+J2+J3+J4)J5.J6.J7+
     +C12.C23.C45(J1+J2+J3)(J4+J5)J6.J7+
     +C12.C23.C56(J1+J2+J3)(J5+J6)J4.J7+
     +C12.C23.C67(J1+J2+J3)(J6+J7)J4.J5+
     +C12.C34.C45(J1+J2)(J3+J4+J5)J6.J7+
     +C12.C34.C56(J1+J2)(J3+J4)(J5+J6)J7+
     +C12.C34.C67(J1+J2)(J3+J4)(J6+J7)J5+
     +C12.C45.C56(J1+J2)(J4+J5+J6)J3.J7+
     +C12.C45.C67(J1+J2)(J4+J5)(J6+J7)J3+
     +C12.C56.C67(J1+J2)(J5+J6+J7)J3.J4+
     +C23.C34.C45(J2+J3+J4+J5)J1.J6.J7+
     +C23.C34.C56(J2+J3+J4)(J5+J6)J1.J7+
     +C23.C34.C67(J2+J3+J4)(J6+J7)J1.J5+
     +C23.C45.C56(J2+J3)(J4+J5+J6)J1.J7+
     +C23.C45.C67(J2+J3)(J4+J5)(J6+J7)J1+
     +C23.C56.C67(J2+J3)(J5+J6+J7)J1.J4+
     +C34.C45.C56(J3+J4+J5+J6)J1.J2.J7+
     +C34.C45.C67(J3+J4+J5)(J6+J7)J1.J2+
     +C34.C56.C67(J3+J4)(J5+J6+J7)J1.J2+
     +C45.C56.C67(J4+J5+J6+J7)J1.J2.J3

A(5)=C12.C23(J1+J2+J3)J4.J5.J6.J7+
     +C12.C34(J1+J2)(J3+J4)J5.J6.J7+
     +C12.C45(J1+J2)(J4+J5)J3.J6.J7+
     +C12.C56(J1+J2)(J5+J6)J3.J4.J7+
     +C12.C67(J1+J2)(J6+J7)J3.J4.J5+
     +C23.C34(J2+J3+J4)J1.J5.J6.J7+
     +C23.C45(J2+J3)(J4+J5)J1.J6.J7+
     +C23.C56(J2+J3)(J5+J6)J1.J4.J7+
     +C23.C67(J2+J3)(J6+J7)J1.J4.J5+
     +C34.C45(J3+J4+J5)J1.J2.J6.J7+
     +C34.C56(J3+J4)(J5+J6)J1.J2.J7+
     +C34.C67(J3+J4)(J6+J7)J1.J2.J5+
     +C45.C56(J4+J5+J6)J1.J2.J3.J7+
     +C45.C67(J4+J5)(J6+J7)J1.J2.J3+
     +C56.C67(J5+J6+J7)J1.J2.J3.J4

A(6)=C12(J1+J2)J3.J4.J5.J6.J7+
     +C23(J2+J3)J1.J4.J5.J6.J7+
     +C34(J3+J4)J1.J2.J5.J6.J7+
     +C45(J4+J5)J1.J2.J3.J6.J7+
     +C56(J5+J6)J1.J2.J3.J4.J7+
     +C67(J6+J7)J1.J2.J3.J4.J5

A(7)=J1.J2.J3.J4.J5.J6.J7
```

←


2
$H_1 = \sqrt{\frac{3}{4}\left[(K-1)\cdot\left(AK/AN\right)^2 - 2\cdot K\left(AK/AN\right)\right]}$
$R = \frac{H1}{10K}$
3
I = 0
J = 0
9
I = I + 1
10
C = X(I)
J = J + 1
X(I) = J · R
Y(I) = Y(X(I))
X(I) < H1
DA
NU
MICŞOREAZĂ PE R DE EXEMPLU
$R = \frac{H1}{20K}$
3
Y(I) < 0
Y(I) = 0
Y(I) > 0
11
12
Y(I) > 0
E = X(I)
X(I) = (E + C)/2
Y(I) = Y(X(I))
13


13
Y(I)=0
NU
DA
12
14
F=X(I)-E/2
DA
12
NU
Y(I) < 0 = 0 > 0
Y(I)<0
Y(I)>0
X(I)=X(I)+F
Y(I)=Y(X(I))
E=X(I)
Y(I)=0
X(I)=X(I)-[F]
Y(I)=Y(X(I))
E=X(I)
14
12
14
I<K
I≤K
I=K
11
8
I=I+1
15
C=X(I)
J=J+1
X(I)=J·R
Y(I)=Y(X(I))
16
Y(I)=0
Y(I) < 0 = 0 > 0
DA
X(I)<H1
NU
Y(I)>0
15
Y(I)<0
17
3
MICȘOREAZĂ PE R DE EXEMPLU
R=H1/20K


12
E = X(I)
X(I) = (E + C)/2
Y(I) = Y(X(I))
Y(I)=0
DA
16
NU
18
F = X(I)/2 = 0
DA
16
NU
Y(I) <0 =0 >0
Y(I)>0
Y(I)<0
X(I) = X(I) + |F|
Y(I) = Y(X(I))
E = X(I)
18
Y(I) = 0
16
X(I) = X(I) - |F|
Y(I) = Y(X(I))
E = X(I)
18
I ≤ K
9
I < K
I = K
11
T(I) = 30/π √X(I)
F(I) = √X(I)/2π
I = 1, N
SCRIE
A(I); I=1, N
X(I), Y(I), T(I), F(I)
I = 1, N
SFÎRŞIT

```
C              INSTRUCTIUNILE PROGRAMULUI DE CALCUL
C  CU ACEST PROGRAM SE CALCULEAZA COEFICIENTII ECUATIEI PULSATIILOR
C  PROPRII TORSIONALE LA SISTEME OSCILANTE CU 2-7 VOLANTI MONTATI
C  IN SERIE,SE REZOLVA ECUATIA SI SE CALCULEAZA TURATIILE CRITICE .
C     MARIMILE DE INTRARE SINT
C        N=2,7   NUMARUL VOLANTILOR
C        G(I),I=1,N-1   CONSTANTELE ELASTICE
C        D(I),I=1,N   MOMENTELE DE INERTIE
C   MARIMILE DE INTRARE SE SCRIU
C        N   CU FORMATUL 44 IAR
C        G(I) SI D(I)   CU FORMATUL 1
C   DECI SE VOR INTRODUCE OBLIGATORIU 5 CARTELE DE DATE .
  DIMENSION G(7),D(7),A5(7),X(6),Y(6),T(6),FR(6)
  PI=0.3141593E+01
 1 FORMAT(4E14.7)
44 FORMAT(I1)
  READ(1,44) (N)
  READ(1,1) (G(I),I=1,7),(D(I),I=1,7))
  C12=G(1)
   C23=G(2)
  C34=G(3)
  C45=G(4)
  C56=G(5)
  C67=G(6)
  A5(1)=C12*C23*C34*C45*C56*C67*(D(1)+D(2)+D(3)+D(4)+D(5)+D(6)+D(7))
  A5(2)=C12*C23*C34*C45*C56*(D(1)+D(2)+D(3)+D(4)+D(5)+D(6))*D(7)+C12
 C*C23*C34*C45*C67*(D(1)+D(2)+D(3)+D(4)+D(5))*(D(6)+D(7))+C12*C23*C3
 C4*C56*C67*(D(1)+D(2)+D(3)+D(4))*(D(5)+D(6)+D(7))+C12*C23*C45*C56*C
 C67*(D(1)+D(2)+D(3))*(D(4)+D(5)+D(6)+D(7))+C23*C34*C45*C56*C67*(D(2
 C)+D(3)+D(4)+D(5)+D(6)+D(7))*D(1)+C12*C34*C45*C56*C67*(D(1)+D(2))*(
 CD(3)+D(4)+D(5)+D(6)+D(7))
  A5(2)=(-1)*A5(2)
  A5(3)=C12*C23*C34*C45*(D(1)+                                    D(2)
 C                      +D(3)+D(4)+D(5))*D(6)*D(7)+C12*C23*C3
 C4*C56*(D(1)+D(2)+D(3)+D(4))*(D(5)+D(6))*D(7)+C12*C23*C34*C67*(D(1)
 C+D(2)+D(3)+D(4))*(D(6)+D(7))*D(5)+C12*C23*C45*C56*(D(1)+D(2)+D(3))
 C*(D(4)+D(5)+D(6))*D(7)+C12*C23*C56*C67*(D(1)+D(2)+D(3))*(D(5)+D(6)
 C+D(7))*D(4)+C12*C34*C45*C56*(D(1)+D(2))*(D(3)+D(4)+D(5)+D(6))*D(7)
 C+C12*C34*C56*C67*(D(1)+D(2))*(D(3)+D(4))*(D(5)+D(6)+D(7))+C12*C45*
 CC56*C67*(D(1)+D(2))*(D(4)+D(5)+D(6)+D(7))*D(3)+C23*C34*C45*C56*(D(
 C2)+D(3)+D(4)+D(5)+D(6))*D(1)*D(7)+C23*C34*C56*C67*(D(2)+D(3)+D(4))
 C*(D(5)+D(6)+D(7))*D(1)+C23*C45*C56*C67*(D(2)+D(3))*(D(4)+D(5)+D(6)
 C+D(7))*D(1)+C34*C45*C56*C67*(D(3)+D(4)+D(5)+D(6)+D(7))*D(1)*D(2)+C
 C12*C23*C45*C67*(D(1)+D(2)+D(3))*(D(4)+D(5))*(D(6)+D(7))+C12*C34*C6
 C7*(D(1)+D(2))*(D(3)+D(4)+D(5))*(D(6)+D(7))+C23*C34*C45*C67*(D(2)+D
 C(3)+D(4)+D(5))*(D(6)+D(7))*D(1)
  A5(4)=C12*C23*C34*(D(1)+                                        D(2)
 C                      +D(3)+D(4))*D(5)*D(6)*D(7)+C12*C23*C45*(D
 C(1)+  D(2)+D(3))*D(4)*D(5)*D(6)*D(7)+C12*C23*C56*(D(1)+D(2)+D(3))*
 C(D(5)+D(6))*D(4)*D(7)+C12*C23*C67*(D(1)+D(2)+D(3))*(D(6)+D(7))*D(4
 C)*D(5)+C12*C34*C45*(D(1)+D(2))*(D(3)+D(4)+D(5))*D(6)*D(7)+C12*C34*
 CC56*(D(1)+D(2))*(D(3)+D(4))*(D(5)+D(6))*D(7)+C12*C34*C67*(D(1)+D(2
 C))*(D(3)+D(4))*(D(6)+D(7))*D(5)+C12*C45*C56*(D(1)+D(2))*(D(4)+D(5)
 C+D(6))*D(3)*D(7)+C12*C45*C67*(D(1)+D(2))*(D(4)+D(5))*(D(6)+D(7))*D
 C(3)+C12*C56*C67*(D(1)+D(2))*(D(5)+D(6)+D(7))*D(3)*D(4)+C23*C34*C45
 C*(D(2)+D(3)+D(4)+D(5))*D(1)*D(6)*D(7)+C23*C34*C56*(D(2)+D(3)+D(4))
 C*(D(5)+D(6))*D(1)*D(7)+C23*C34*C67*(D(2)+D(3)+D(4))*(D(6)+D(7))*D(
 C1)*D(5)+C23*C45*C56*(D(2)+D(3))*(D(4)+D(5)+D(6))*D(1)*D(7)+C23*C45
 C*C67*(D(2)+                                                    D(3))
```

```
C*(D(4)*D(5))*(D(6)*D(7))*D(1)*C23*C56*C67*(D(2)*                    D(3
C))*(D(5)*D(6)*D(7))*D(1)*D(4)*C34*C45*C56*(D(3)*D(4)*D(5)*D(6))*D(
C1)*D(2)*D(7)+C34*C45*C67*(D(3)*D(4)*D(5))*(D(6)*D(7))*D(1)*D(2)+C3
C4*C56*C67*(D(3)*D(4))*(D(5)*D(6)*D(7))*D(1)*D(2)+C45*C56*C67*(D(4)
C+D(5)*D(6)*D(7))*D(1)*D(2)*D(3)
 A5(4)=(-1)*A5(4)
 A5(5)=C12*C23*(D(1)*                                          D(2)
C.                +D(3))*D(4)*D(5)*D(6)*D(7)+C12*C34*(D(1)*D(2)
C)*(D(3)*D(4))*D(5)*D(6)*D(7)+C12*C45*(D(1)*D(2))*(D(4)*D(5))*D(3)*
CD(6)*D(7)+C12*C56*(D(1)*D(2))*(D(5)*D(6))*D(3)*D(4)*D(7)+C12*C67*(
CD(1)*D(2))*(D(6)*D(7))+D(3)*D(4)*D(5)+C23*C34*(D(2)*D(3)*D(4))*D(1
C)*D(5)*D(6)*D(7)+C23*C45*(D(2)*D(3))*(D(4)*D(5))*D(1)*D(6)*D(7)+C2
C8*C56*(D(2)*D(3))*(D(5)*D(6))*D(1)*D(4)*D(7)+C23*C67*(D(2)*D(3))*1
CD(6)*D(7))*D(1)*D(4)*D(5)+C34*C45*(D(3)*D(4)*D(5))*D(1)*D(2)*D(6)*
CD(7)+C34*C56*(D(3)*D(4))*(D(5)*D(6))*D(1)*D(2)*D(7)+C34*C67*(D(3)+
CD(4))*(D(6)*D(7))*D(1)*D(2)*D(5)+C45*C56*(D(4)*D(5)*D(6))*D(1)*D(2
C)*D(3)*D(7)+C45*C67*(D(4)*D(5))*(D(6)*D(7))*D(1)*D(2)*D(3)+C56*C67
C*(D(5)*D(6)*D(7))*D(1)*D(2)*D(3)*D(4)
 A5(6)=C12*(D(1)*                                              D(2))*
CD(3)*D(4)*D(5)*D(6)*D(7)+                    C23*(D(2)*D(3))*D(1)*D
C(4)*(5)*D(6)*D(7)+C34*(D(3)+ D(4))*D(1)*D(2)*D(5)*D(6)*D(7)+C45*(D
C(4)+D(5))*D(1)*D(2)*D(3)*D(6)*D(7)+C56*(D(5)*D(6))*D(1)*D(2)*D(3)*
CD(4)*D(7)+C67*(D(6)*D(7))*D(1)*D(2)*D(3)*D(4)*D(5)
 A5(6)=(-1)*A5(6)
 A5(7)=D(1)*D(2)*D(3)*D(4)*D(5)*D(6)*D(7)
 H1=(3*((N-2)*(A5(N-1)/A5(N))**2)-(2*(N-1)*A5(N-2)/A5(N)))/(N-1))*
C*0.5
 R=H1/(10*N)
 J1=N-1
50 I=0
 K=-1
3 I=I+1
5 C=X(I)
 K=K+1
 X(I)=K*R
 Y(I)=0
   DO 7 J=2,N
7 Y(I)=Y(I)+A5(J)*(X(I)**(J-1))
 Y(I)=Y(I)+A5(1)
   IF(X(I)-H1)9,40,40
9 E=X(I)
   IF(Y(I))13,11,5
13 X(I)=(E+C)*0.5
15 Y(I)=0
   DO 17 J=2,N
17 Y(I)=Y(I)+A5(J)*(X(I)**(J-1))
 Y(I)=Y(I)+A5(1)
   IF(Y(I))19,11,19
19   IF(X(I)-E)21,11,23
21 F=(X(I)-E)*(-0.5)
   GO TO 25
23 F=(X(I)-E)*0.5
25 E=X(I)
   IF(Y(I))27,11,29
27 X(I)=X(I)-F
   GO TO 15
29 X(I)=X(I)+F
   GO TO 15
11   IF(I-J1)2,30,30
 2 I=I+1
```

```
    4 C=X(I)
      K=K+1
      X(I)=K*R
      Y(I)=0
          DO 6 J=2,N
    6 Y(I)=Y(I)+A5(J)*(X(I)**(J-1))
      Y(I)=Y(I)+A5(1)
          IF(X(I)-H1)8,40,40
    8 E=X(I)
          IF(Y(I))4,10,12
   12 X(I)=(E+C)*0.5
   14 Y(I)=0
          DO 16 J=2,N
   16 Y(I)=Y(I)+A5(J)*(X(I)**(J-1))
      Y(I)=Y(I)+A5(1)
          IF(Y(I))18,10,18
   18     IF(X(I)-E)20,10,22
   20 F=(X(I)-E)*(-0.5)
          GO TO 24
   22 F=(X(I)-E)*0.5
   24 E=X(I)
          IF(Y(I))26,10,28
   26 X(I)=X(I)+F
          GO TO 14
   28 X(I)=X(I)-F
          GO TO 14
   10     IF(I-J1)3,30,30
   40 R=H1/(40*N)
          GO TO 50
   50     DO 31 I=1,J1
      T(I)=(30*X(I)**0.5)/PI
   31 FR(I)=T(I)/60
      WRITE(3,152)
  152 FORMAT(/,T2,'MOMENTELE DE INERTIE                    COEFICIENTII PO
     CLINOMULUI')
      WRITE(3,153)
  153 FORMAT(/,T21,'CONSTANTELE ELASTICE')
          DO 155 I=1,N
      K=I+1
      WRITE(3,156) (I,D(I),I,K,G(I),I,A5(I))
  156 FORMAT(/,T2,'J(',I1,')=',E14.7,'   C',I1,I1,'=',E14.7,'   A(',I1,'
     C)=',E14.7)
  155 CONTINUE
      WRITE(3,161)
  161 FORMAT(///,T3,'RADACINILE POLINOMULUI,VALORILE LUI,TURATIILE SI FR
     CECVENTELE')
      WRITE(3,162)
  162 FORMAT(/,T21,'CRITICE CORESPUNZATOARE')
      WRITE(3,154)
  154  FORMAT(///,T5,'X(K)              Y(K)              T(K)              F(K)')
      WRITE(3,158) (J1)
  158 FORMAT(/,T26,'K=1,',I1,/)
          DO 751 K=1,J1
      WRITE(3,157) (X(K),Y(K),T(K),FR(K))
  157 FORMAT(/,1X,E14.7,1X,E14.7,1X,E14.7,1X,E14.7)
  751 CONTINUE
      END
```

ASUPRA AMORTIZĂRII VIBRAȚIILOR LA OSCILAȚII DUPĂ FORMELE PROPRII

de N. POSEA, S. MURGULESCU
Institutul de petrol Ploiești

Se prezintă experiențele de vibrații efectuate pe două bare, una de duraluminiu și alta de oțel, avînd două sau trei mase concentrate, în scopul determinării coeficienților de amortizare la rezonanța fundamentală și la rezonanțele de ordinul doi și trei.

Din interpretarea datelor experimentale rezultă o creștere importantă a amortizării în funcție de ordinul formei de rezonanță și o abatere sensibilă a deformatelor de rezonanță față de formele proprii teoretice fără amortizare, ceea ce evidențiază că amortizarea depinde în mod sensibil nu numai de viteză, ci și de alți factori.

Comportarea dinamică a unei structuri depinde în mare măsură de fenomenele de amortizare, atît cele interne, cît și cele de sistem. În lucrările [1] — [3] se precizează că disiparea energiei depinde de mulți factori, printre care : amplitudinea eforturilor unitare maxime ale ciclului, variația stării de eforturi în lungul barei și în secțiunea transversală, efectele magnetoelastice și deformările plastice în microvolumul materialelor, care la anumite materiale se produc mai puternic în apropierea limitei de oboseală, iar la altele, cum este betonul sau betonul armat, chiar la tensiuni mici.

Cercetările experimentale privind determinarea coeficienților de amortizare sînt deosebit de complexe, deoarece, pe lîngă o aparatură de mare precizie, necesită standuri corespunzătoare care să dea posibilitatea stabilirii influenței diferiților factori. Deoarece nu se cunosc standuri speciale pentru cercetarea fenomenelor de amortizare, determinările experimentale privind amortizarea sînt realizate de cercetători în condiții diferite și astfel datele din literatură diferă foarte mult, iar uneori sînt chiar contradictorii. În lucrarea [1] se arată că pierderile de energie prin frecări interioare, indicate de diferiți autori, variază în limite foarte largi, chiar pentru aceeași calitate de oțel, ceea ce se explică prin pierderile exterioare care nu pot fi eliminate.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 851–868

Ca factor pentru aprecierea amortizării se foloseşte decrementul logaritmic al amortizării (γ) sau rezistenţa interioară relativă (ψ), definită ca raportul dintre energia absorbită într-un ciclu şi energia totală de deformaţie a elementului în vibraţie. Valorile acestor factori date în literatura tehnică, după cum se recomandă în [1] şi [2], trebuie folosite cu prudenţă, deoarece ele depind foarte mult de condiţiile în care au fost stabilite şi nu au valabilitate generală; se impun deci continuarea şi adîncirea cercetărilor privind fenomenele de amortizare.

Pentru amortizarea vibraţiilor la rezonanţele de ordin superior, datele experimentale aproape lipsesc, iar aprecierile diferiţilor autori sînt contradictorii. Astfel, pornind de la aprecierea că trebuie diferenţiată amortizarea la formele superioare faţă de forma fundamentală, unele lucrări indicate în [3] consideră că la primele forme de vibraţii coeficienţii de amortizare trebuie să fie aceiaşi, iar altele, cum ar fi [5], că mărimea coeficientului de amortizare trebuie să crească cu numărul formei.

Propunîndu-şi elucidarea unora dintre aceste aspecte, lucrarea de faţă a urmărit în principal stabilirea amortizării la rezonanţele de ordin superior.

Cercetările experimentale au constat din înregistrarea răspunsului dinamic la oscilaţii forţate şi la deplasări iniţiale după formele proprii, pentru:

— o bară de duraluminiu $l=108$ cm, prevăzută succesiv cu două şi cu trei mase;

— o bară de duraluminiu $l = 23{,}2$ cm cu două mase;

— o bară de oţel $l = 108$ cm, prevăzută mai întîi cu două mase şi apoi cu trei mase;

— o bară de oţel $l = 23{,}2$ cm cu două mase.

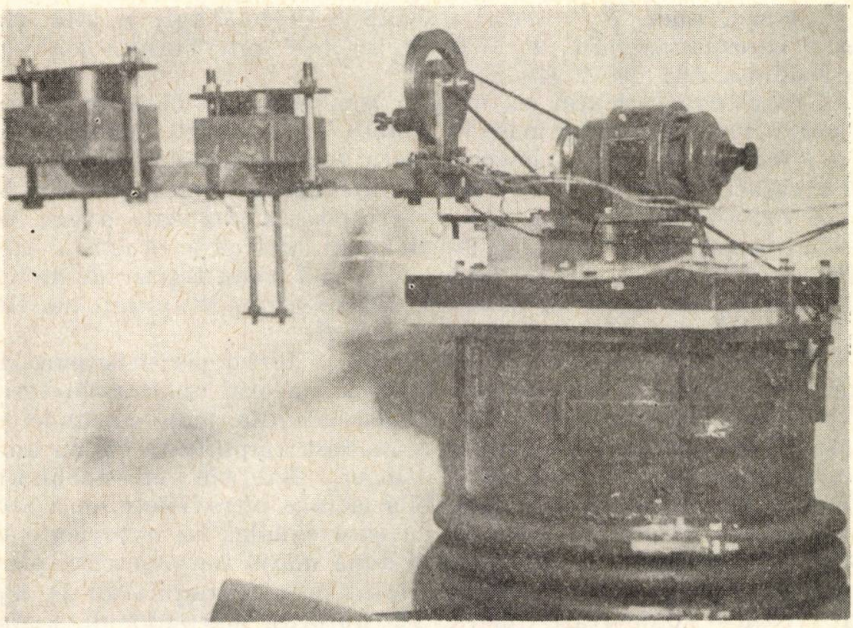
Prin dispozitivul adoptat şi încastrarea lui într-un bloc metalic rigid s-a căutat eliminarea pe cît posibil a pierderilor de energie externe. În acest fel, efectele de amortizare înregistrate considerăm că se datoresc în cea mai mare parte disipărilor de energie în masa internă a barelor folosite.

Prelucrarea datelor experimentale a condus la determinarea frecvenţelor proprii, a formelor proprii de oscilaţie şi a deformatelor dinamice pentru situaţiile de rezonanţă din care s-au stabilit coeficienţii de amortizare în funcţie de ordinul rezonanţei şi unele precizări asupra unor factori de care depinde amortizarea.

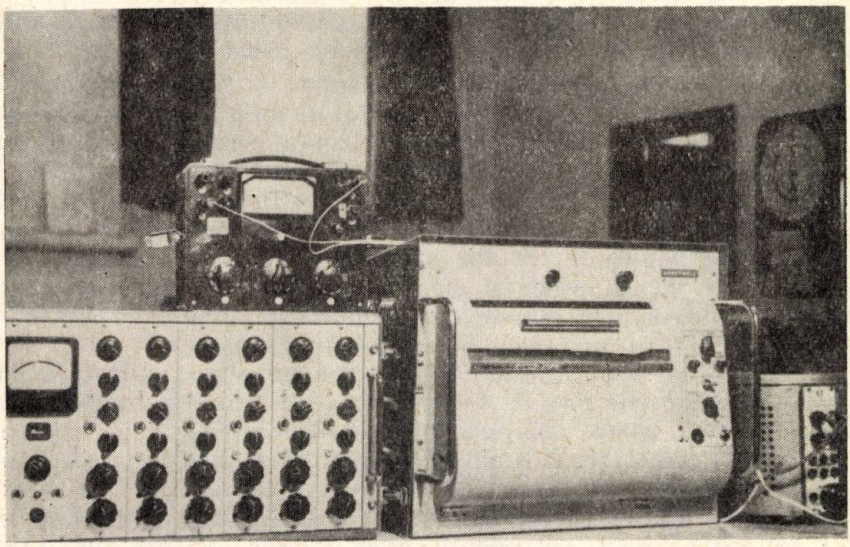
1. DISPOZITIVUL, APARATURA ŞI METODOLOGIA DE ÎNCERCARE

Dispozitivul de încercare (fig. 1*a*) a constat din bara de încercat, fixată încastrat la unul din capete, dintr-un excentric de greutate totală $Q = 3{,}7$ kgf, fixat pe bară, şi dintr-un motor cu turaţie variabilă care acţiona excentricul.

Dimensiunile secţiunilor transversale ale barelor de încercat erau: $2{,}5 \times 2{,}5$ cm^2 la barele de duraluminiu şi $2{,}7 \times 1{,}7$ cm^2 la cele de oţel.



a



b

Fig. 1

Excentricul putea să funcţioneze cu două mase excentrice diferite, şi anume una mică, care conducea la o forţă perturbatoare variabilă $P = P_0 \cos\omega t$, unde $P_0 = me\omega^2 = 0{,}1425 \times 10^{-3} \cdot \omega^2$ kgf, şi alta mare, căreea îi corespunde forţa $P_0 = 0{,}541 \cdot 10^{-3}\,\omega^2$ kgf. Turaţia maximă a excentricului a fost de 72 Hz.

În afara excentricului s-a montat concentrat pe bara de încercat, după caz, o masă sau două mase de plumb. În acest fel, neglijînd masa proprie a barei de încercat, ceea ce practic este admisibil deoarece barele aveau greutăţi reduse, $G = 1{,}85$ kgf bara lungă de duraluminiu şi $G = 4$ kgf bara lungă de oţel, sistemele oscilante analizate aveau două grade de libertate dinamică (fig. 2*a*) în cazul cînd pe bară exista excentricul $Q_3 = 3{,}7$ kgf şi masa ① de greutate $Q_1 = 7{,}5$ sau trei grade de libertate dinamică (fig. 2*b*) cînd, în afară de excentric, se aplicau masele ① şi ② de greutăţi $Q_1 = 7{,}5$ kgf şi $Q_2 = 7{,}0$ kgf.

Vibraţia barei de încercat sub acţiunea forţei perturbatoare dată de excentric a fost înregistrată mai întîi cu ajutorul unor traductori inductivi TRI—300, care înregistrau deplasările din punctele unde erau montaţi. Semnalele acestor traductori au fost amplificate cu un amplificator modulator (KWS/6T—5 Hottinger, Baldwin Messtechnik) şi înregistrate pe hîrtie specială, sensibilă la raze ultraviolete, cu ajutorul unui oscilograf Honeywell UV—31 cu şase canale. La experienţe s-au folosit patru traductori de deplasări şi două mărci tensometrice, plasate în zona de încastrare a barei. S-a constatat însă că traductorii de deplasări nu aveau o comportare liniară, atît datorită mărimilor deplasărilor care apăreau, cît şi datorită unor oscilaţii transversale ale barei din cauza inerţiei de rotaţie a maselor aplicate, care aveau dimensiuni transversale relativ mari. În aceste condiţii, rezultatele obţinute la înregistrări nu au putut fi considerate satisfăcătoare şi s-a trecut la determinarea indirectă a deplasărilor prin folosirea deformaţiilor dinamice longitudinale, captate cu ajutorul unor mărci tensometrice rezistive.

Mărcile tensometrice, montate deasupra şi dedesubtul barei în punctele notate cu *A*, *B*, *C* (fig. 2) în planul median longitudinal al barei pentru eliminarea încovoierilor în plan orizontal, erau legate la o punte tensometrică (fig. 1*b*) pentru înregistrări dinamice tip TDA_3 cu trei canale, care a fost cuplată cu un oscilograf cu bucle K—105. În acest fel, la orice turaţie a excentricului s-a putut observa vizual şi înregistra pe film deformaţiile specifice longitudinale din punctele în care erau lipite mărcile tensometrice. Se menţionează că efectele dinamice în plan orizontal au fost mult diminuate prin folosirea unor mase de plumb cu dimensiuni transversale mult mai mici decît la primele experimentări.

Cu această montare a standului de încercat s-au analizat situaţiile de rezonanţă şi formele proprii de oscilaţii pentru barele lungi de duraluminiu şi oţel cu masele poziţionate ca în figura 2*b*.

În scopul cercetării dependenţei amortizării de frecvenţă şi ordinul formei de rezonanţă s-au deplasat masele în poziţia din figura 3 pentru a obţine frecvenţa fundamentală egală cu frecvenţa proprie de ordinul doi din situaţia precedentă. Deşi masele au fost deplasate în situaţia posibilă cea mai apropiată de încastrare (fig. 3), frecvenţa fundamentală a rămas mult inferioară frecvenţei de ordinul doi din cazul precedent.

Pentru a face ca pentru același sistem, cu aceleași mase să se obțină două situații de rezonanțe de ordine diferite la aceeași frecvență, s-a efectuat o a treia serie de încercări, pornind de la sistemul cu două mase

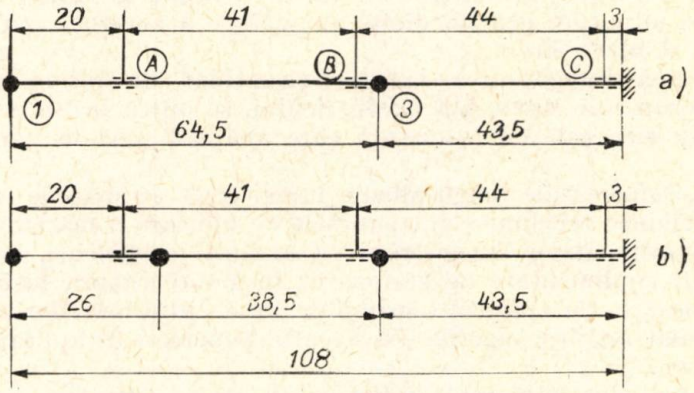


Fig. 2

din figura 2*a* ca o primă poziționare a maselor și continuînd cu sistemul din figura 4 ca o a doua poziționare a maselor.

De această dată s-a reușit ca frecvența fundamentală a sistemului din figura 4 să corespundă cu frecvența de ordinul doi a sistemului din figura 2*a*. Bara din figura 4 are aceeași secțiune transversală ca cea din

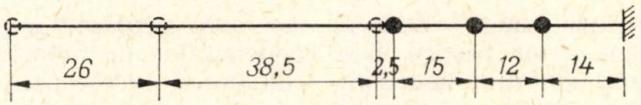


Fig. 3

figura 2*a*, dar a fost scurtată, deoarece masa ei proprie în situația cu masele deplasate spre încastrare nu mai poate fi neglijată. O dată cu aceste încercări, pentru o verificare suplimentară, au fost repetate și experiențele pentru sistemul cu trei grade de libertate (fig. 2*b*).

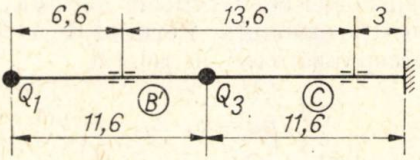


Fig. 4

La aceste ultime încercări, înregistrarea s-a făcut pe o hîrtie lată de 12 cm, ceea ce a permis înregistrarea diagramelor de oscilație la scări convenabile unor bune măsurători practice.

Metodologia de determinare a deformatelor dinamice de rezonanţă a fost următoarea :

—se pornea motorul şi se varia foarte încet frecvenţa pînă se constata situaţia de rezonanţă, care se înregistra pe cît posibil într-o situaţie stabilizată, urmărindu-se să se prindă, pe lîngă situaţia de maxim, şi situaţiile din imediata vecinătate a acesteia atît premergătoare, cît şi ulterioare ;

— după înregistrarea tuturor situaţiilor de rezonanţă întîlnite pînă la rezonanţa maximă a excentricului, se oprea brusc motorul şi se înregistrau situaţiile de rezonanţă care apăreau pînă la oprirea excentricului.

Din deformaţiile longitudinale înregistrate cu mărcile tensometrice s-au determinat tensiunile din punctele de aplicare a mărcilor prin multiplicarea ordonatelor înregistrate cu anumiţi coeficienţi, stabiliţi prin măsurători suplimentare de etalonare ; în aceste cazuri, forţele aplicate erau cunoscute. Cu ajutorul tensiunilor din dreptul mărcilor tensometrice s-au calculat analitic săgeţile din dreptul punctelor de aplicare a maselor concentrate.

Pentru determinarea coeficienţilor de amortizare s-au calculat analitic formele proprii, s-au stabilit forţele statice care ar produce astfel de deformate şi s-a încărcat static sistemul în mod succesiv cu forţele corespunzătoare fiecărei forme proprii. La îndepărtarea bruscă a sistemului de forţe s-a înregistrat oscilaţia liberă a grinzii, care, mai ales în primele momente, oscila după forma proprie după care fusese deformată.

La fiecare dintre aceste oscilaţii libere s-au făcut mai multe înregistrări, astfel încît s-au putut prinde şi situaţii în care o formă superioară de oscilaţii trecea într-o alta inferioară.

În concluzie, metodologia de încercare adoptată a permis determinarea frecvenţelor proprii şi a coeficienţilor de amortizare în mod corespunzător, atît din deformatele dinamice de rezonanţă, cît şi din oscilaţiile libere după o deformată iniţială corespunzătoare unei forme proprii.

2. DATELE EXPERIMENTALE, PRELUCRAREA ŞI INTERPRETAREA LOR

Pentru fiecare dintre cazurile analizate s-au determinat experimental variaţiile în timp ale deformaţiilor longitudinale Δ_i din punctele de lipire ale mărcilor tensometrice. Graficele acestora au permis obţinerea directă a frecvenţelor de rezonanţă. Pornind de la acestea, s-au calculat eforturile unitare corespunzătoare cu relaţia

$$\sigma_i = \alpha_i \cdot \Delta_i, \tag{1}$$

în care α_i reprezintă coeficienţii de etalonare. Notînd σ_i^e tensiunea din punctul de lipire al mărcii i sub acţiunea unei forţe cunoscute şi Δ_i^e deformaţia longitudinală înregistrată, rezultă $\alpha_i = \sigma_i^e / \Delta_i^e$.

În funcţie de tensiunile σ_i obţinute în dreptul mărcilor tensometrice A, B, C s-au determinat forţele şi apoi săgeţile dinamice din dreptul

maselor concentrate ale fiecărui sistem analizat. În acest fel, pornind de la o stare de deformații longitudinale măsurate, s-au determinat deformatele dinamice și amortizările care au loc, puse în evidență prin decrementul logaritmic al amortizării.

Barele încercate au fost confecționate din duraluminiu cu $E = 7 \cdot 10^5$ kgf/cm² și $\sigma_r = 3\,100$ kgf/cm² și oțel cu $E = 1{,}98 \cdot 10^6$ kgf/cm² și $\sigma_r = 5\,800$ kgf/cm².

Menționăm că ambele materiale au prezentat zone limitate de curgere în apropierea rezistenței de rupere.

2.1. CAZUL BARELOR DE DURALUMINIU CU DOUĂ MASE

A. BARA LUNGĂ

Secțiunea transversală a barei având $W = 2{,}605$ cm³, tensiunile în fibrele extreme din punctele A, C produse de forțele F_1, F_3 (fig. 5*a*) sînt

$$\sigma_A = 7{,}67\, F_1; \quad \sigma_C = 40{,}25\, F_1 + 15{,}53\, F_3. \tag{1'}$$

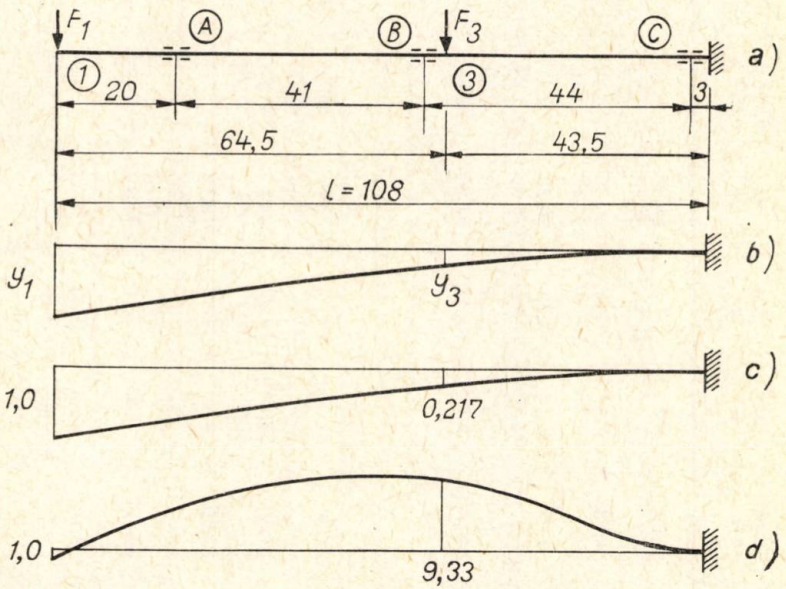


Fig. 5

Din forțele F_1 F_3, fibra medie a barei (fig. 5*b*) are în dreptul punctelor ①, ③ de aplicare a maselor concentrate următoarele ordonate convenționale :

$$\begin{aligned} Y_1^* &= 1{,}998\, F_1 + 0{,}421\, F_3, \\ Y_3^* &= 0{,}422\, F_1 + 0{,}131\, F_3, \end{aligned} \tag{1''}$$

Tabela 1

Bara lungă de duraluminiu cu două mase

Nr. crt.	Film	Masa exc. nr. amplitudinii	Frecv. Hz	Δ_A Δ_C	α_A α_C	σ_A σ_C	$0{,}118\sigma_A$ $0{,}027\sigma_C$	Y^*_1	$0{,}0107\sigma_A$ $0{,}0084\sigma_C$	Y^*_3	Observaţii
1	IV—1d	mare	4,03	8,8 16,7	3,33 10,04	29,30 167,40	3,45 4,53	7,98	0,317 1,407	1,824	Rezonanţa fundamentală
2	IV—2a	1	4,03	7,9 15,3	3,33 10,04	26,30 153,40	3,10 4,16	7,26	0,281 1,287	1,568	forma proprie I
3	IV—2a	9	4,02	6,1 12,0	3,33 10,04	20,30 120,40	2,40 3,27	5,67	0,217 1,013	1,230	forma proprie I
4	IV—2a	17	4,03	4,9 9,7	3,33 10,04	16,35 97,20	1,93 2,635	4,565	0,175 0,817	0,992	forma proprie I
5	IV—2a							0,0312		0,0304	decrem. între amp. 1—9
6	IV—2a							0,0274		0,0269	decrem. între amp. 9—17
7	IV—2a							0,0291		0,0297	decrem. între amp. 1—17
8	IV—5a	mică	34,80	31,5 —31,2	10,57 31,7	333 —992	39,30 —26,90	12,40	3,35 —8,33	—4,80	rezonan. ordin. II
9	IV—6c	mică	34,80	33,0 —30,0	10,57 31,70	349 —953	41,20 —25,90	15,30	3,73 —8,00	—4,27	rezonan. ordin. II
10	IV—11	8	35,50	3,80 —10,70	3,33 3,18	12,70 —34,00	1,500 — 0,922	0,578	0,136 — 0,285	—0,149	forma proprie I
11	IV—11	17	36,10	1,90 — 6,00	3,33 3,18	6,33 —19,10	0,747 — 0,517	0,230	0,068 — 0,160	—0,092	forma proprie I
12	IV—11	26	36,10	1,30 — 4,20	3,33 3,18	4,33 —13,35	0,511 — 0,362	0,149	0,0463 —0,1123	—0,066	forma proprie I
13								0,102		0,0537	decrem. între amp. 1—17
14								0,0483		0,037	decrem. între amp. 17—26
15								0,0752		0,0452	decrem. între amp. 8—26

legate de săgeţile reale Y prin relaţia

$$Y = \frac{l^3}{6\,EI}\,Y^*, \tag{2}$$

care conduce în cazul de faţă la $Y = 0{,}092\ Y^*$.

Înlocuind forţele F_1, F_3 din relaţiile (1″) cu valorile lor în funcţie de tensiunile σ_A, σ_C (relaţiile 1′), se obţine

$$\begin{aligned} Y_1^* &= 0{,}1181\ \sigma_A + 0{,}0271\ \sigma_C, \\ Y_3^* &= 0{,}0107\ \sigma_A + 0{,}0084\ \sigma_C. \end{aligned} \tag{3}$$

Valorile înregistrate în cazul vibraţiilor forţate la cele două rezonanţe şi în cazul oscilaţiilor libere după formele proprii sînt date în tabela 1 împreună cu deformatele dinamice calculate cu relaţiile (3), după determinarea prealabilă a tensiunilor cu formula (1).

Se menţionează că fiecare stare de rezonanţă a fost înregistrată de cel puţin 4—5 ori şi valorile obţinute au fost apropiate, abaterile ajungînd pînă la 5—8%. La oscilaţiile libere, după fiecare din formele proprii s-au determinat deformatele dinamice la diferite intervale pentru a cerceta dependenţa decrementului logaritmic de mărimea săgeţii sau a efortului unitar. Valorile decrementului au fost trecute de asemenea în tabela 1, pe coloana corespunzătoare deplasării fiecărei mase. S-a indicat, de asemenea, şi numărul amplitudinilor între care a fost evaluat decrementul.

În figurile 5*c* şi *d* sînt reprezentate formele proprii calculate teoretic cărora le corespund frecvenţele $f_1 = 4{,}18$ Hz şi $f_2 = 41{,}7$ Hz. Se observă că frecvenţele proprii înregistrate, $f_1 = 4{,}03$ Hz şi $f_2 = 35$, sînt inferioare celor calculate teoretic fără amortizare cu 3,75%, respectiv cu 19,15%.

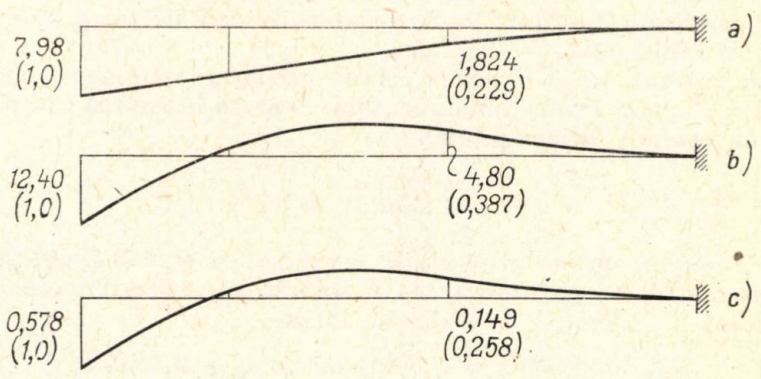


Fig. 6

În figura 6*a* este reprezentată deformata dinamică la rezonanţa fundamentală, iar în figura 6*b* deformata dinamică la rezonanţa de ordinul doi (ordonatele deformatelor sînt cele convenţionale Y^*, iar în paran-

teze sînt trecute valorile în cazul unei normalizări). Se constată că valorile normalizate ale deformatei la rezonanţa fundamentală sînt foarte apropiate de forma proprie teoretică şi că deformata dinamică la rezonanţa de ordinul doi este mult diferită de forma proprie II, prezentînd o atenuare mare a ordonatelor pe măsură ce ne apropiem de încastrare.

Deoarece forţa perturbatoare este dependentă de turaţia excentricului, forţele perturbatoare la forma II şi la forma I stau în raportul $P^0_{II}/P^0_I = (f_{II}/f_I)^2 = 75{,}5$. Întrucît la forma I s-a folosit masa excentrică mare, rezultă că forţa perturbatoare este mai mare la forma II cu $\Delta p_0 = 0{,}090 \times 75{,}5 - 0{,}34 = 6{,}46$ kgf. Săgeţile produse de această forţă calculate cu relaţiile (1″) se scad din ordonatele formei II (fig. 6*b*) şi se obţine deformata dinamică de ordinul doi ($Y^*_1 = 8{,}67$; $Y^*_3 = -3{,}95$) pentru aceeaşi forţă perturbatoare cu deformata dinamică de ordinul unu. Se observă însă că săgeata cea mai mare a formei II din vîrful consolei este mai mare decît săgeata maximă de la forma I cu circa 8,65%, dar în punctul unde forma proprie II, calculată teoretic fără amortizare, are valoarea maximă (punctul 3), săgeata este mult mai mică.

Decrementul logaritmic al amortizării (γ) cu ajutorul căruia se calculează coeficientul de amortizare $\varepsilon = \gamma \cdot f$, determinat din oscilaţia masei ①, respectiv ③, are aproximativ aceeaşi valoare ($\gamma_m = 0{,}0294$), însă descreşte o dată cu micşorarea săgeţilor şi deci cu micşorarea eforturilor unitare efective. La vibraţia liberă după deformarea iniţială cu forţele corespunzătoare formei proprii teoretice II (fig. 5*d*) se constată o deformată (fig. 6*c*) similară cu cea înregistrată în situaţia de rezonanţă (fig. 6 *b* ca formă şi ca frecvenţă. Decrementul logaritmic dedus din oscilaţia masei ①, în medie $\gamma_m = 0{,}0752$, între amplitudinile 8 şi 26 ale diagramei de oscilaţie, este diferit de decrementul dedus din oscilaţiile masei ③, în medie $\gamma_m = 0{,}0452$, între aceleaşi amplitudini. Valorile decrementelor scad, de asemenea, o dată cu micşorarea amplitudinilor formei deformate, care tinde să se transforme într-o deformată mai apropiată de forma I. De aceea trebuie luate în consideraţie numai primele oscilaţii, cînd tendinţa de transformare este mai puţin evidentă (la forma II, tabela 1, rîndul 13, nu s-au luat amplitudinile 1—8, deoarece filmele de înregistrare prezentau unele deficienţe).

Se constată însă la forma II de oscilaţie decremente logaritmice mai mari decît la forma fundamentală. Aceasta înseamnă că amortizarea creşte cu ordinul formei proprii.

B. BARA SCURTĂ

Pentru masele de greutăţi $Q_{1'} = 7{,}5$ kgf şi $Q_{2'} = 3{,}7$ kgf şi mărcile tensometrice B, C, poziţionate ca în figura 7*a*, urmînd metodologia de la punctul precedent, s-au calculat forţele

$$F_{1'} = 0{,}395\ \sigma_B\ ;\ F_{2'} = -0{,}928\ \sigma_B + 0{,}3035\ \sigma_C$$

şi apoi săgeţile convenţionale în dreptul maselor cu expresiile

$$\begin{aligned} Y^*_1 &= 1{,}680\ \sigma_B + 1{,}518\ \sigma_C, \\ Y^*_2 &= 0{,}119\ \sigma_B + 0{,}607\ \sigma_C, \end{aligned} \tag{4}$$

din care săgeţile reale se calculează cu relaţia $Y=1{,}134\cdot10^{-4}Y^*$ (bara are secţiunea $2{,}5\times2{,}5$ cm^2).

Rezultatele experimentale şi ordonatele deformatelor dinamice sînt trecute în tabela 2.

Deşi sistemul are două grade de libertate dinamică, în tabela 2 a fost trecută numai frecvenţa proprie fundamentală, deoarece a doua

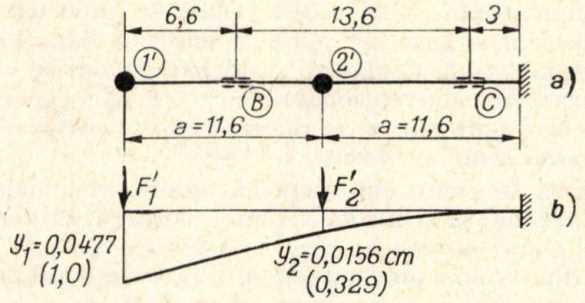


Fig. 7

este mult mai ridicată şi se găseşte peste frecvenţa maximă a excentricului.

Se constată că frecvenţa proprie fundamentală măsurată 34,5 Hz la bara scurtă corespunde practic cu frecvenţa proprie de ordinul doi (35 Hz) înregistrată la bara lungă, dar ambele diferă faţă de cele calculate

Tabela 2

Bara scurtă de duraluminiu cu două mase

Nr. crt.	Film	Frec. Hz	Δ_B Δ_C	α_B α_C	σ_B σ_C	1,680 σ_B 1,518 σ_C	Y_1^*	0,119 σ_B 0,607 σ_C	Y_2^*	Obs.
1	III-2	34,5	17,3 21,0	3,30 10,70	57,0 214,0	95,800 324,50	420,30	6,78 130,00	136,78	rez. de or. I. cu masa mică exc.
2	III-6b	33,4	23,5 27,0	3,30 10,17	77,5 275,0	130,0 417,0	547,0	9,23 167,00	176,23	for. pr. I la am. 1
3	III-6b	33,4	1,2 1,2	3,30 10,17	3,95 12,23	6,64 18,58	25,24	0,47 7,43	7,90	for. pr. I la am. 8
4	Decrementul logaritmic = 0,439							0,443		decr. între amp. 1—8

teoretic prin neglijarea amortizării cu 24% (la bara scurtă o parte din această neconcordanţă poate fi pusă şi pe seama lipsei de precizie în fixarea punctului teoretic de încastrare şi deci a deschiderii consolei).

În figura 7*b* s-a reprezentat deformata dinamică la rezonanţa fundamentală care prezintă o formă similară cu cea calculată (valorile din

paranteze), dar care are săgeți la aceeași depărtare de încastrare mult mai mici decît la bara lungă. În același timp decrementul logaritmic este mult mai mare.

Observație. Dacă se introduce noțiunea de coeficient de rigiditate la deplasare, a cărui valoare K_x într-un punct x se definește ca fiind forța care produce în același punct o săgeată unitară, rezultă că cele două bare (lungă și scurtă) au coeficienții de rigiditate la deplasare pentru capetele lor în raportul $K^s/K^l = 100$. Dacă se raportează amortizarea din cazul barei scurte, care are aceleași mase ca bara lungă, la același coeficient de rigiditate la deplasare ca al barei lungi se obține un coeficient de amortizare convențional $\varepsilon^* = \gamma \cdot f \cdot K^l/K^s = 0{,}439 \cdot 33{,}4 \cdot 1/100 = 0{,}1465$, care este apropiat de coeficientul de amortizare al formei fundamentale al barei lungi $\varepsilon = 0{,}0304 \cdot 4{,}03 = 0{,}1225$.

Din aceasta se poate considera că amortizarea depinde de forma deformatei de rezonanță și nu de valoarea corespunzătoare a frecvenței. Astfel, pentru două sisteme la care o frecvență proprie de un anumit ordin a unuia din sisteme corespunde cu o frecvență proprie de alt ordin al celuilalt sistem, amortizarea este mai mare la sistemul la care frecvența proprie considerată este de un ordin mai mare.

2.2. CAZUL BAREI DE DURALUMINIU CU TREI MASE

Bara are dimensiunile geometrice și caracteristicile elastice precizate la punctul 1. A. Poziția maselor, valorile lor și poziția mărcilor tensometrice sînt cele din figura 2*b*.

Pornind de la tensiunile σ_A, σ_B, σ_C, calculate cu formula (1) pe baza deformațiilor longitudinale indicate de mărcile tensometrice A, B, C, se determină forțele (fig. 8*a*)

$$\begin{aligned} F_1 &= 0{,}131\ \sigma_A, \\ F_2 &= -\,0{,}2284\ \sigma_A + 0{,}0744\ \sigma_B, \\ F_3 &= 0{,}106\ \sigma_A - 0{,}145\ \sigma_B + 0{,}0643\ \sigma_C \end{aligned} \tag{5}$$

și apoi săgețile convenționale corespunzătoare:

$$\begin{aligned} Y_1^* &= 2F_1 + 1{,}291\,F_2 + 0{,}422\,F_3, \\ Y_2^* &= 1{,}291\,F_1 + 0{,}873\,F_2 + 0{,}304\,F_3, \\ Y_3^* &= 0{,}422\,F_1 + 0{,}304\,F_2 + 0{,}130\,F_3, \end{aligned} \tag{5'}$$

legate de săgețile reale prin relația (2).

Introducînd în (5') expresiile forțelor date de (5), se obțin

$$\begin{aligned} Y_1^* &= 0{,}0113\ \sigma_A + 0{,}0347\ \sigma_B + 0{,}0272\ \sigma_C, \\ Y_2^* &= 0{,}0014\ \sigma_A + 0{,}0209\ \sigma_B + 0{,}0196\ \sigma_C, \\ Y_3^* &= -\,0{,}003\ \sigma_A + 0{,}0037\ \sigma_B + 0{,}0084\ \sigma_C. \end{aligned} \tag{6}$$

Datele experimentale și deformatele dinamice calculate cu formulele (6) sînt redate în tabela 3, în care s-au determinat și decrementele logaritmice pentru fiecare formă proprie.

Deformatele dinamice de rezonanță de ordinul unu, doi și trei au fost reproduse în ordine în figurile 8*b*, *c* și *d*, cu ordonatele Y^* (în paran-

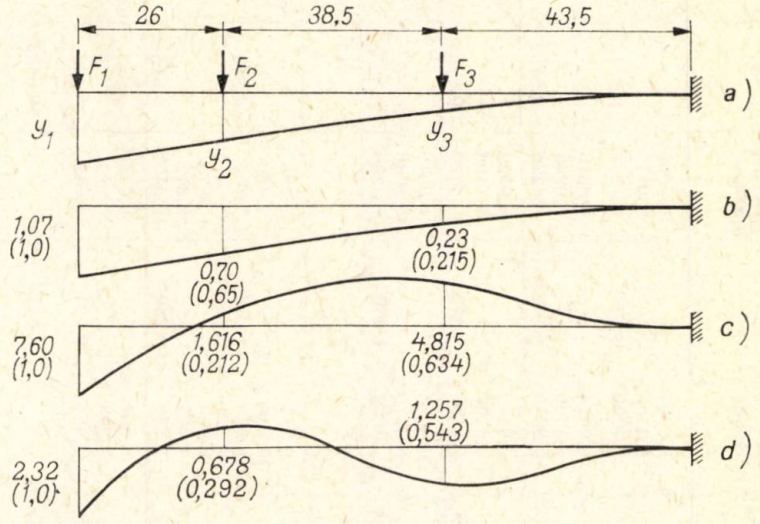


Fig. 8

teze sînt trecute valorile normalizate). Frecvențele de rezonanță măsurate, fiind în ordine 3,40; 28,3; 71,3 Hz, rezultă că forțele de inerție de pe cele trei deformate se găsesc în rapoartele 1 : 69 : 439.

Deși ordonatele formei II sînt mai mari decît la forma fundamentală chiar dacă am reduce ordonatele formei II pentru a corespunde forței perturbatoare de la rezonanța fundamentală, se constată cu ușurință, urmărind rapoartele dintre forțele de inerție de pe formele de rezonanță, că vibrația forțată de pe forma fundamentală la aceleași accelerații ca pe forma de ordinul II conduce la deformații mult mai mari decît ale formei de rezonanță de ordinul doi. De aceea la sistemele dinamice la care rezonanța nu poate fi evitată este mai avantajos, din punctul de vedere al măririi deplasărilor, ca ea să se producă cu una din formele proprii de ordin superior.

Deformata la rezonanța de ordinul trei are ordonate mult mai mici decît deformata de ordinul doi, cu toate că forța perturbatoare este de 6,35 de ori mai mare.

Determinînd analitic, în situația fără amortizare, frecvențele proprii pentru sistemul cu trei mase (fig. 9*a*), se obțin $f_1=3{,}55$ Hz; $f_2=31{,}2$ Hz; $f_3=64{,}5$ Hz. Formele proprii corespunzătoare acestor frecvențe sînt reprezentate în ordine în figurile 9*b*, *c*, *d*.

Dînd deformații inițiale sistemului după fiecare dintre aceste forme proprii teoretice și înregistrînd oscilația liberă apărută după înlăturarea bruscă a sistemului de forțe care a produs deformata inițială, s-au deter-

Tabela 3

Bara de duraluminiu cu trei mase

Nr. crt.	Film	Masa excentrică sau nr. amp.	Frecvența Hz	Δ_A Δ_B Δ_C	α_A α_B α_C	σ_A σ_B σ_C	$0{,}0113\sigma_A$ $0{,}0347\sigma_B$ $0{,}0272\sigma_C$	Y_1^*	$0{,}0014\sigma_A$ $0{,}0209\sigma_B$ $0{,}0196\sigma_C$	Y_2^*	$-0{,}0003\sigma_A$ $0{,}0037\sigma_B$ $0{,}0084\sigma_C$	Y_3^*	Observații
1	V—4	mică	3,48	0,8 2,9 7,9	3,33 4,45 3,17	2,67 12,93 21,90	0,0302 0,4480 0,5960	1,0742	0,0037 0,2700 0,4290	0,7027	−0,0008 0,0477 0,1843	0,231	rez. fundament.
2	V—9b	mare	3,40	1,60 5,75 15,80	3,33 4,45 3,17	5,34 25,60 50,20	0,0603 0,8870 1,3660	2,3133	0,0075 0,5360 0,9850	1,5825	−0,0016 0,0948 0,4220	0,5152	rez. fundament.
3	IV bis —1	1	3,40	2,20 7,20 18,40	3,33 4,45 3,17	7,33 32,10 58,30	0,083 1,115 1,585	2,783	0,0102 0,6720 1,1420	1,8242	−0,0022 0,1190 0,4780	0,595	forma proprie I
4	IV bis —1	5	3,40	1,90 6,30 16,25	3,33 4,45 3,17	6,33 28,10 51,60	0,0715 0,9750 1,4040	2,4505	0,0088 0,5870 1,0130	1,609	−0,0019 0,1040 0,4330	0,535	forma proprie I
5	IV bis —1							0,0314		0,0314		0,0314	decr. între amp.1—5
6	3—5	mică	28,3	3,4 2,4 − 2,4	191,7 282,0 352	653 671 −845	7,38 23,30 −23,00	7,60	0,914 14,030 −16,560	−1,616	−0,195 2,480 −7,100	−4,815	rez. ord. II
7	6—2	1	27	3,55 8,40 − 5,40	17,15 10,04 20,10	60,80 84,40 −108,60	0,687 2,930 − 2,950	0,667	0,085 1,765 − 2,130	−0,280	−0,018 0,312 −0,912	−0,618	forma proprie II
8	6—2	8	27	2,65 5,85 − 3,80	17,15 10,04 20,10	45,4 58,80 −76,50	0,514 2,040 − 2,080	0,474	0,064 1,228 − 1,497	−0,205	−0,014 0,217 −0,642	−0,439	forma proprie II
9	6—2							0,0496		0,0447		0,0485	decr. între amp.1—8
10	2—3	mică	71,3	5,90 − 3,50 1,90	99,2 112,6 181,2	587 −394 344	6,630 −13,670 9,360	2,32	0,822 − 8,240 6,740	−0,678	−0,176 −1,457 2,890	1,2570	rezonanță de ord. III
11			74,5							0,268			decrement mediu

minat decrementele logaritmice ale amortizării, trecute în tabela 3, liniile (5, 9, 11), care arată o creștere sensibilă a amortizării o dată cu creșterea ordinului formei proprii (se urmăresc valorile de pe coloana Y_1^*). La formele I și II, s-au indicat decrementele logaritmice pentru oscilația fie-

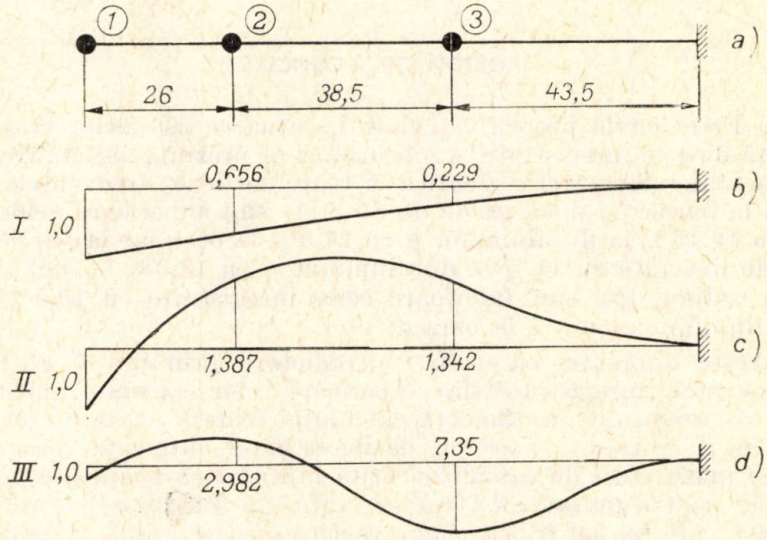


Fig. 9

cărei mase și se observă că la forma fundamentală decrementele sînt practic aceleași în toate punctele, pe cînd la forma II ele diferă foarte mult. Aceasta se întîmplă din cauza tendinței de trecere a deformatei de ordinul doi în forma deformatei fundamentale imediat după începerea oscilației libere. Din această cauză, la forma III, unde tendința de trecere a deformatei în altele inferioare este și mai puternică, s-a indicat un decrement logaritmic mediu $\gamma=0{,}268$.

Din compararea deformatelor dinamice de rezonanță (fig. 8) cu formele proprii (fig. 9), în mod similar ca la sistemul cu două mase, se observă o atenuare importantă a ordonatelor deformatelor dinamice de ordinul doi și trei, mai ales în punctele mai apropiate de încastrare. Din această cauză, deformatele dinamice la rezonanțele de ordin superior, care sînt atît de mult influențate de amortizare, nu mai respectă relațiile de ortogonalitate sub forma în care ele sînt satisfăcute de formele proprii.

2.3. CAZUL BARELOR DE OȚEL

Barele de oțel au fost încărcate în aceleași condiții ca barele de duraluminiu. Prelucrînd datele experimentale de la barele de oțel, s-a ajuns la rezultate apropiate de cele de la duraluminiu, care nu se mai reproduc din lipsă de spațiu. Cu toate că s-au folosit aceleași mase și

la fel poziționate, explicația acestor rezultate rezidă în faptul că barele aveau rigidități $[(EI)_{AL} : (EI)_{OL} = 1{,}042]$ și momente capabile limită $[(\sigma_r W)_{AL} : (\sigma_r w)_{OL} = 1{,}075]$ foarte apropiate.

Deoarece numărul de experimentări a fost redus, nu se pot trage concluzii privind dependența amortizării de felul materialului.

3. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII

a) Frecvențele proprii calculate în situația sistemelor fără amortizare față de cele înregistrate la măsurători se prezintă astfel: frecvențele fundamentale sînt practic identice în toate cazurile; frecvențele de ordinul doi la barele cu două grade de libertate sînt superioare celor înregistrate cu 19,15% la duraluminiu și cu 26,5% la oțel, iar la barele cu trei grade de libertate cu 11% la duraluminiu și cu 18,2% la oțel; frecvențele de ordinul trei sînt inferioare celor înregistrate cu 10,5% la bara de duraluminiu și cu 5% la bara de oțel.

Aceste diferențe, oarecum contradictorii prin faptul că la forma III frecvențele înregistrate sînt superioare celor calculate, pot fi considerate că provin din insuficiența calculului teoretic, care nu ține seama de inerția de rotație a maselor, de masa barei, influența rezemărilor și chiar de unele erori de calcul, datorită faptului că rezultatele numerice, în special pentru pulsația a III-a, se obțin din diferențe de numere mari apropiate, care nu pot fi prinse cu exactitatea necesară la rigla de calcul.

De asemenea este posibil ca și la experimentări să fi intervenit unele fenomene secundare de torsiune și de încovoere în două plane din cauza curelei de acționare a excentricului, care introduce o forță suplimentară paralelă cu planul longitudinal vertical al grinzii, cu influență mult mai mare la frecvențele superioare.

Totuși, valorile frecvențelor proprii înregistrate pot fi considerate corecte, deoarece ele au fost determinate în toate cazurile analizate în două feluri: din deformatele dinamice de rezonanță și din oscilațiile libere după o deformare inițială corespunzătoare formei proprii; valorile obținute au diferit foarte puțin între ele.

Rezultatele obținute conduc la concluzia că frecvențele fundamentale ale structurilor alcătuite din bare pot fi determinate fără considerarea amortizării. La frecvențele de ordin superior, influența amortizării este mai mare decît la frecvența fundamentală și numai în mod aproximativ acestea pot fi calculate fără luarea în considerare a amortizării.

b) Efectul de amortizare s-a pus în evidență prin decrementul logaritmic al amortizării (γ), considerînd că acesta este cel mai concludent factor.

Din oscilațiile libere după formele proprii rezultă în mod evident o creștere importantă a decrementului logaritmic și, în consecință, a coeficientului de amortizare ($\varepsilon = \gamma, f$) o dată cu creșterea ordinului frecvenței. Astfel, la experiențele efectuate, decrementul logaritmic al formei II a fost cel puțin de două ori mai mare decît al formei fundamentale, iar decrementul formei III l-a depășit pe cel al formei II cu mai mult de trei ori. Aceste rezultate s-au obținut atît la barele de duraluminiu,

cît și la barele de oțel, la care însă decrementele logaritmice au fost mai mici decît la cele de duraluminiu. Întrucît rigiditățile $[(E_{AL}I_{AL}) : (EI)_{OL} = 1{,}042]$ și momentele capabile la rupere $[(\sigma_{rAl}W_{Al}) : (\sigma_{rOL}W_{OL}) = 1{,}075]$ ale celor două tipuri de bare au fost foarte apropiate, coeficienții de amortizare mai mari la barele de duraluminiu se pot datora unor pierderi de energie suplimentară prin vibrații transversale în plan orizontal, observate la barele de duraluminiu cu lățimea secțiunii transversale mai mică decît a celor de oțel, iar înălțimea mai mare.

Din urmărirea vibrațiilor libere după formele proprii pentru fiecare masă a sistemului s-a constatat că decrementele logaritmice sînt aproximativ aceleași în toate punctele barei în cazul vibrației după forma fundamentală; în cazul vibrației după forma II, decrementele variază de la punct la punct, și aceasta datorită tendinței de trecere a deformatei formei II într-o deformată de tip I, cu mai puține constrîngeri. Această tendință manifestîndu-se diferit în lungul barei, considerăm că determină și variația înregistrată a decrementelor logaritmice, care, de regulă, scad pornind de la vîrful consolei spre încastrare. Acest aspect, privind variația decrementului logaritmic cu poziția masei, urmează să fie elucidat prin noi cercetări, care să examineze și elemente cu un număr de grade de libertate mai mare decît trei.

Alte aspecte observate din oscilațiile libere după formele proprii se referă la creșterea frecvenței și la scăderea decrementului pe porțiuni ale diagramei de oscilație mai îndepărtate de momentul de declanșare al vibrației.

c) Pentru a clarifica dependența amortizării de frecvență, au fost experimentate barele scurte de duraluminiu și oțel care aveau frecvența fundamentală egală cu frecvența de ordinul doi a barelor similare lungi cu aceleași mase. Din datele înregistrate și din considerațiile privind coeficienții de rigiditate la deplasări ai celor două tipuri de bare (punctele 2.-1-B și 2.-3) care au condus pentru barele scurte la coeficienți de amortizare aproximativi identici cu cei ai formelor fundamentale ale barelor lungi, se poate conchide că mărimea amortizării pe forma fundamentală este independentă de frecvența acesteia. O concluzie similară este prezentată în lucrarea [3], unde experiențele au fost făcute pe două tipuri de elemente de beton armat, aranjate astfel încît frecvența fundamentală a unuia dintre tipuri să fie egală cu frecvența de ordinul doi a celuilalt tip. Autorul acestei lucrări trage și concluzia că la prima și a doua formă proprie disiparea energiei prin reazeme se poate neglija.

d) Deformatele dinamice de rezonanță arată de asemenea că influența amortizării este cu atît mai mare, cu cît ordinul formei de oscilație după care vibrează este mai mare.

Astfel, dacă forțele dinamice de la rezonanța de ordinul doi se reduc cu raportul pătratelor dintre frecvențele formelor II și I, rezultă că săgețile deformatei dinamice II sînt mult mai mici decît cele ale deformatei dinamice I.

Dacă nu se efectuează această reducere, săgețile deformatei la rezonanța de ordinul doi sînt mai mari decît la rezonanța fundamentală. Un rezultat asemănător dat în lucrare [4] este obținut la experimentarea

unui model pentru un pod din beton precomprimat. Autorul acestei lucrări ajunge la concluzia că dispersia rezultatelor face să nu se poată trage o concluzie privind variația amortizării cu frecvența.

În cazul deformatei dinamice la rezonanța de ordinul trei, se constată că săgețile ei sînt mai mici decît ale deformatei de la rezonanța de ordinul doi, chiar dacă nu se face reducerea la aceleași forțe dinamice.

Considerînd amortizarea dependentă de valoarea eforturilor și de distribuția acestora pe secțiune și în lungul barei, se apreciază că amortizarea este mai puternică la deformatele dinamice de la rezonanțele de ordin superior, deoarece la acestea valoarea efortului unitar mediu raportat la întregul volum de material al barei este mai mare decît la deformatele de rezonanță de ordin inferior. Precizări cantitative în această direcție necesită în continuare multe cercetări experimentale care să permită determinarea coeficienților de amortizare și direct din deformata dinamică de rezonanță într-o situație stabilizată. În acest scop trebuie construiți traductori de deplasări corespunzători și să se înregistreze concomitent atît deplasările, cît și tensiunile.

Totuși, se poate aprecia că pentru un perturbator dat cu o anumită frecvență, în cazul în care prin incertitudinea datelor nu poate fi evitată rezonanța, este indicat ca sistemul să se proiecteze astfel încît rezonanța să se poată produce cu una dintre frecvențele de ordin superior.

e) Din analiza deformatelor dinamice de rezonanță și a formelor proprii calculate teoretic fără amortizare se observă că deformatele de rezonanță au variații mai line decît formele proprii, ceea ce evidențiază un fenomen de amortizare diferită în lungul barei. Pentru barele analizate atenuările ordonatelor proprii sînt mai puternice pe măsura apropierii de încastrare, adică pe măsura creșterii coeficienților de rigiditate la deplasări. Aceasta înseamnă că amortizarea poate fi considerată variabilă în lungul grinzii și dependentă nu numai de Y, ci și de Y''. Elucidarea acestui aspect necesită de asemenea multe cercetări experimentale și teoretice, care să stabilească atît modul de obținere a formelor proprii în prezența amortizării, cît și contribuția fiecărei forme proprii la deformatele dinamice de rezonanță.

Primită la redacție la 12 decembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Ponomariov ș.a., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, București, Edit. tehnică, 1964 (trad. din limba rusă).
2. Cyril M. Harris, Ch. Crede, *Șocuri și vibrații*, București, Edit. tehnică 1968 (trad. din limba engleză).
3. J. M. Aizenberg, *Beton i jelezbeton*, 2 (1970).
4. F. D. Beresford, R. E. Lewis, RILEM, București, 1969.
5. I. L. Korcinski ș.a., *Bazele proiectării clădirilor în regiuni seismice*, București, Edit. tehnică, 1964 (trad. din limba rusă).
6. E. S. Sorokin, *Dinamiceski pasciot nesuscih construcții zdanii*, Moskva, 1956.

ASUPRA VIBRAȚIILOR DE ÎNCOVOIERE ALE TACHETULUI ÎN FUNCȚIONAREA MECANISMELOR CU CAME

de I. SAVA, S. CONONOVICI
Centrul de mecanică a solidelor

În lucrare se formulează problema vibrațiilor de încovoiere ale tachetului mecanismelor cu came și se studiază modul în care constantele sistemului influențează aceste vibrații. Studiul se face prin analizarea soluțiilor ecuației diferențiale cu coeficienți periodici obținute la calculatorul numeric în baza unei organigrame, care de asemenea este prezentată în lucrare.

Dispunerea în consolă a tachetului, variația unghiului de presiune, excentricitatea tachetului, frecările din cupla superioară și erorile tehnologiei de fabricație sînt elemente care favorizează prezența unei vibrații a tachetului perpendiculare pe direcția deplasării sale.

În cazul unor vibrații de amplitudini apreciabile, parametrii de răspuns la ultimul element al sistemului urmăritor pot fi influențați. Într-adevăr, urmărind figura 1, se poate constata că, dacă curba c este traiectoria vîrfului A al tachetului, acesta va ajunge periodic pe direcția A'.

În această situație, traiectoria mișcării reale a tachetului y_r se va modifica după legea

$$y_r = y - y_v = y - u \cdot \mathrm{tg}\vartheta \tag{1}$$

unde

y este deplasarea teoretică adimensională a tachetului,
u — amplitudinea vibrației de încovoiere a tachetului,
ϑ — unghiul de presiune ce depinde de legea de profilare y.

Schimbarea legii de variație a mișcării tachetului atrage după sine o modificare mai accentuată a derivatelor sale de ordin superior și, în consecință, parametrii funcționali pot fi afectați. Cunoașterea acestor modificări poate deveni posibilă prin studierea vibrațiilor de încovoiere ale tachetului.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 869 – 880

1. MODELUL MATEMATIC

Modificarea lungimii tachetului aflate în afara ghidajelor sale dinspre camă impune o modificare periodică a elasticităţii sale şi deci schemei cinematice din figura 1 i se poate asocia modelul dinamic redat în figura 2 [1].

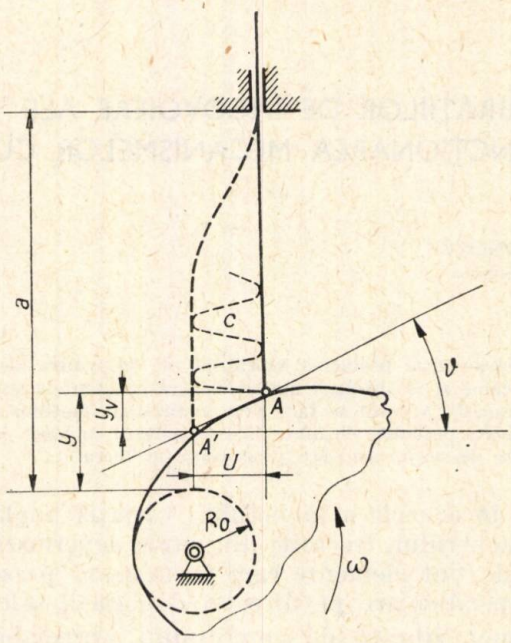


Fig. 1

În figura 2 semnificaţia notaţiilor este următoarea :

u este elongaţia vibraţiei transversale a tachetului ;

F_h — componenta reacţiunii camei asupra tachetului după direcţia perpendiculară pe deplasarea sa. Considerînd figura 3, calculul reacţiunii se face cu relaţia

$$F_h = (P_i + P)(1 + \operatorname{tg}\varphi_{1n} \operatorname{tg}\varphi_{2n}) \operatorname{tg}\varphi_{1n}, \qquad (2)$$

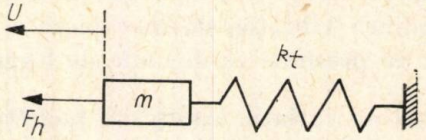


Fig. 2

cu P drept rezistenţă tehnologică, P_i forţa de inerţie ce depinde de acceleraţia profilului ales al camei, iar φ_{1n} şi φ_{2n} sînt unghiurile de frecare din cupla superioară şi, respectiv, din ghidajele tachetului [1];

k_t — constanta elastică variabilă a tachetului, care se calculează cu relația

$$k_t = 3EI \cdot \left[\frac{1/a}{1 - \frac{s}{a}}\right]^3, \tag{3}$$

unde EI este rigiditatea la încovoiere a tachetului s cursa tachetului, iar a lungimea maximă a tachetului în afara ghidajelor sale.

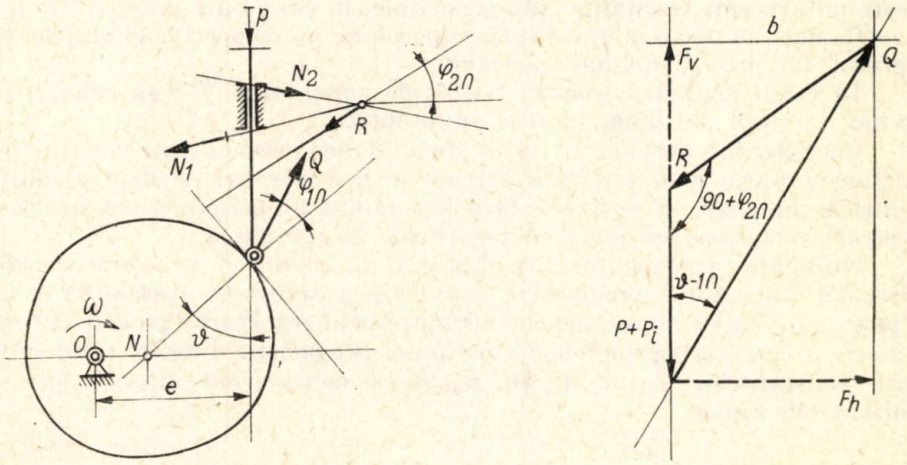


Fig. 3

Modelul matematic corespunzător celui dinamic este exprimat prin ecuația diferențială de ordinul doi cu coeficienți periodici :

$$m\ddot{u} + k_t u = F_b. \tag{4}$$

Dacă se notează prin U amplitudinea vibrației transversale și prin y legea de deplasare a tachetului, adimensionale, atunci legătura dintre acestea și mărimile reale poate fi exprimată prin relațiile

$$\begin{aligned} u &= U\varphi_0\,; \quad \ddot{u} = U\,\varphi_0/t_0^2, \\ s &= ys_0\,; \quad \dot{s} = y's_0/t_0\,; \quad \ddot{s} = y''s_0/t_0^2, \end{aligned} \tag{5}$$

unde timpul t_0 corespunde rotirii camei cu unghiul φ_0 pentru realizarea cursei maxime s_0.

Cu relațiile (5), în coordonate adimensionale, ecuația diferențială (4) are forma

$$U'' + \frac{A_1}{(1 - A_2 y)^3} U = (F + (1+\mu)y'')(B_1 + B_2 y' + B_3 y), \tag{6}$$

unde s-au făcut notaţiile

$$A_1 = 3EIt_0^2/ma^3\,;\ A_2 = s_0/a\,;\ B_1 = f_1 \mp f_1^2 f_2(1 + 2a/l_h)\,;$$

$$B_2 = (2f_1^2/l_h)\, s_0/\varphi_0, \tag{7}$$

$$B_3 = 2f_1^2 s_0(f_2/l_h)\,;\ F = Pt_0^2/ms_0\,;\ \mu = M/m$$

cu M masa celorlalte elemente, redusă la elementul executor. Toate aceste notaţii sînt constante adimensionale, în care s-au notat prin f_1 şi f_2 coeficienţii de frecare din cupla superioară şi, respectiv, ghidajele tachetului, iar prin l_h lungimea acestora.

În cazul neglijării frecării din cupla superioară ($f_1=0$), ecuaţia (6) devine de tipul Mathieu, în sine cunoscută.

Coeficientul periodic al celui de-al doilea termen din ecuaţia (6), n-o face proprie unei rezolvări directe prin cvadraturi şi deci o soluţie analitică nu poate fi obţinută fără a renunţa la periodicitate, adică la situaţia reală, ceea ce justifică rezolvarea sa numerică.

Influenţa dimensiunilor tachetului, a cursei şi acceleraţiei sale, a frecării din cuplele cinematice, precum şi a diverselor profile de came, se poate analiza în baza curbelor obţinute prin rezolvarea pe calculatorul numeric a ecuaţiei cu coeficienţi periodici (6) pentru diferite valori atribuite constantelor A_1, A_2, F, B_1, B_2, B_3 şi considerînd diferite legi de profilare ale camei.

2. PREGĂTIREA ECUAŢIEI PENTRU PROGRAMARE

Pentru scrierea programului în limbajul Basic Fortran IV, se admit următoarele variabile pentru maşină:

$$U = \mathrm{U}\,;\ U' = \mathrm{U1}\,;\ U'' = \mathrm{U2}\,;\ A_1 = \mathrm{A1}\,;\ A_2 = \mathrm{A2}\,;\ B_1 = \mathrm{B1}\,;$$

$$B_2 = \mathrm{B2}\,;\ B_3 = \mathrm{B3}\,;\ \mu = \mathrm{AN},$$

$$y = \mathrm{Y}\,;\ y' = \mathrm{Y1}\,;\ y'' = \mathrm{Y2}\,;\ DX = \mathrm{H},$$

caz în care ecuaţia (6) se transformă în funcţiile de ordinul I

$$\mathrm{F1(U,\ U1,\ Y,\ Y1,\ Y2)} = \mathrm{U1},$$

$$\mathrm{F2(U,U1,Y,Y1,Y2)} = -\frac{\mathrm{A1}}{(1-\mathrm{A2Y})}\,\mathrm{U} + (\mathrm{F} + (1+\mathrm{AN})\mathrm{Y2})(\mathrm{B1} + \mathrm{B2Y1} + \mathrm{B3Y}), \tag{8}$$

care pot fi urmărite în programul de calcul alcătuit în baza schemei-bloc din figura 4 şi redat în continuare.

ORGANIGRAMA ECUAȚIEI 7

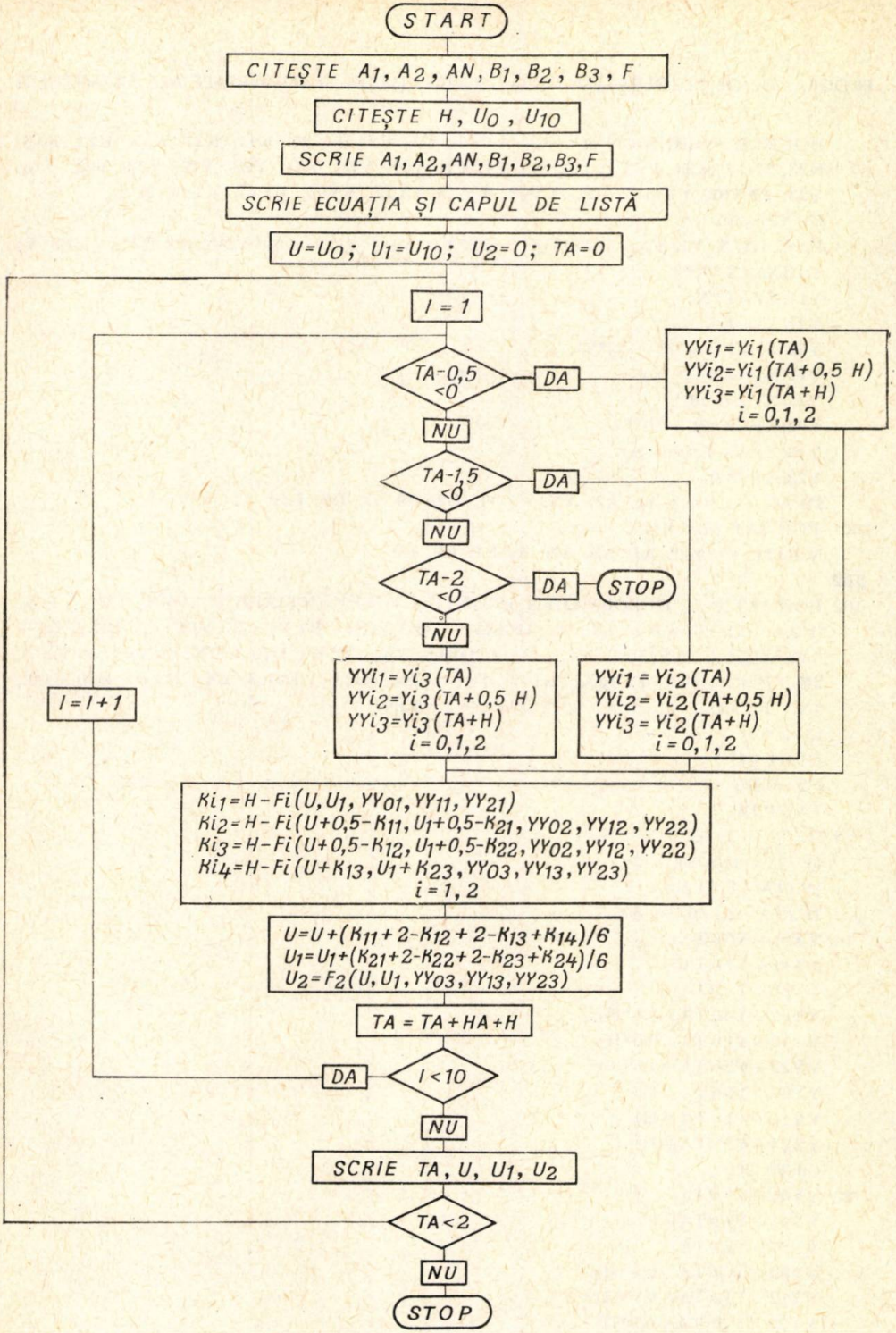


Fig. 4

PROGRAMUL DE REZOLVARE A ECUAȚIEI VIBRAȚIILOR TRANSVERSALE ALE TACHETULUI

```
      DOUBLE PRECISION A1, A2, AN, F, B1, B2, B3, H, K11, K21, K12, K22, K13,
     K23, 1K14, K24, U, U1, U2, TA, F1, F2, Y01, Y11, Y21, Y02, Y12, Y22, Y03, Y13,
     Y23, 2YY01, YY11, YY21, YY02, YY12, YY22, YY03, YY13, YY23, X
      F1(X2)=X2
      F2(U, U1, Y, Y1, Y2)=-A1*U/(1.-A2*Y)**3+(F+(1.+AN)*Y2)*(B1+B2*Y1+B3*Y)
      Y01(X)=2.*X*X
      Y11(X)=4.*X
      Y21(X)=4.0
      Y02(X)=1.-2.*(1.-X)**2
      Y12(X)=4.*(1.-X)
      Y22(X)=-4.0
      Y03(X)=2.*(2.-X)**2
      Y13(X)=-4.*(2.-X)
      Y23(X)=4.0
      READ (1, 1001) A1, A2, AN, F, B1, B2, B3, H, U0, U10
 1001 FORMAT (5D14.4)
      WRITE (3, 102) A1, A2, AN, F, B1, B2, B3
  102
  102 FORMAT (' ', 'REZOLVAREA ECUAȚIEI DIFERENȚIALE'//' ', 16X, 'U'/' ', 14X,
     'U2=-A1-------3 + (F+(1+AN).Y2)(B1+B2.Y1+B3.Y)'/' ', 13X, '(1-
     2A2.Y)'///' ', 'AVÎND', 5X, 'A1=', D10.3, 2X, 'A2=', D10.3, 2X, 'AN=', D10.3 3,
     2X, 'F=', D10.3/'0', 10X, 'B1=', D10.3, 2X, 'B2=', D10.3, 2X, 'B3=', D10.3/4'0',
     3X, 'T', 12X, 'U', 15X, 'U1', 13X, 'U2', 13X, 'P'///)
      U=U0
      U1=U10
      U2=0.D0
      TA=0.D0
    8 D0 70 I=1, 10
      IF (TA-0.5) 10, 1, 1
    1 IF (TA-1, 5) 20, 2, 2
    2 IF (TA-2.) 30, 80, 80
   10 YY01=Y01(TA)
      YY11=Y11(TA)
      YY21=Y21(TA)
      YY02=Y01(TA+0.5*H)
      YY12=Y11(TA+0.5*H)
      YY22=Y21(TA+0.5*H)
      YY03=Y01(TA+H)
      YY13=Y11(TA+H)
      YY23=Y21(TA+H)
      G0 T0 50
   20 YY01=Y02(TA)
      YY11=Y12(TA)
      YY21=Y22(TA)
      YY02=Y02(TA+0.5*H)
      YY12=Y12(TA+0.5*H)
      YY22=Y22(TA+0.5*H)
```

```
      YY03=Y02(TA+H)
      YY13=Y12(TA+H)
      YY23=Y22(TA+H)
      GO TO 50
   30 YY01=Y03(TA)
      YY11=Y13(TA)
      YY21=Y23(TA)
      YY02=Y03(TA+0.5*H)
      YY12=Y13(TA+0.5*H)
      YY22=Y23(TA+0.5*H)
      YY03=Y03(TA+H)
      YY13=Y13(TA+H)
      YY23=Y23(TA+H)
   50 K11=H*F1(U1)
      K21=H*F2(U, U1, YY01, YY11, YY21)
      K12=H*F1(U1+0.5*K21)
      K22=H*F2(U+0.5*K11, U1+0.5*K21, YY02, YY12, YY22)
      K13=H*F1(U1+0.5*K22)
      K23=H*F2(U+0.5*K12, U1+0.5*K22, YY02, YY12. YY22)
      K14=H*F1(U1+K23)
      K24=H*F2(U+K13, U1+K23, YY03, YY13, YY23)
      U=U+(K11+2.*K12+2.*K13+K14)/6.
      U1=U1+(K21+2.*K22+2.*K23+K24)/6.
   69 TA=TA+H
   70 CONTINUE
   71 WRITE (3, 1012) TA, U, U1, U2
 1012 FORMAT (' ', F7.4,3(2*,E14.7))
      IF (TA-2.) 8, 80, 80
   80 STOP
      END
```

La rezolvarea problemelor concrete se pot ivi următoarele situații referitoare la aplicarea programului:

— fără a-și schimba ordinul, ecuația (6) poate căpăta o formă mai complexă; se va scrie corespunzător funcția F2 și, respectiv, comanda FORMAT 102;

— legea de profilare a camei este exprimată printr-o altă ecuație decît cea parabolică (redată în program); se vor scri corespunzător cartelele Y01 — Y23;

— profilul camei este format din mai multe decît trei sectoare; se vor completa corespunzător numărul cartelelor conținînd legea de profilare și derivatele sale împreună cu comenzile de decizie IF;

— constantele problemei pot fi diferite; se vor schimba cartelele de date aflate după comanda END, păstrîndu-se comanda FORMAT 102.

Pentru stabilirea condițiilor inițiale se admite situația cvasireală că mișcarea începe din repaus, cînd atît amplitudinea, cît și viteza vibrației sînt nule:

$$X = 0 : U = 0; U1 = 0. \tag{9}$$

Desigur că și existența unui joc inițial nu ar aduce dificultăți în rezolvare.

Cu relaţiile (7) s-au calculat valorile constantelor ecuaţiei, care formează setul de bază pentru datele corespunzătoare unui mecanism cu came utilizat la distribuţia motoarelor cu ardere internă. Pentru a urmări influenţa diverselor condiţii reale de funcţionare, datelor sistemului de bază li s-au admis diferite valori pentru care s-a rezolvat ecuaţia (6). Constantele care ţin cont de frecarea din ghidaje şi, respectiv, din cupla superioară s-au admis neschimbate pentru toate seturile de date.

3. ANALIZA SOLUŢIILOR

În baza rezultatelor obţinute pe calculator, soluţiile ecuaţiei diferenţiale (6) s-au reprezentat grafic în figurile 5 şi 6 pentru trei sectoare de date şi în ipoteza utilizării a două profile de camă : un profil parabolic corespunzător tipului legilor de mişcare cu salturi în curba acceleraţiei şi un profil polinomial corespunzător categoriei de legi fără salturi în curba acceleraţiei, ambele de tipul PRCP :

1)	2)	3)
A1 =84200,	A1 =25000,	A1 =3130,
A2 =0,45,	A2 =0,45,	A2 =0,15,
F =25,	F =25,	F =25,
AN=2,5,	AN=2,5,	AN=2,5,

B1 = 0,0924 ; B2 = 0,002 ; B3 = 0,0003.

Profilul parabolic

$Y=2X^2$ $0\leqslant X\leqslant 0{,}5$,

$Y=1-2(1-X)^2$ $0{,}5\leqslant X\leqslant 1{,}5$,

$Y=2(2-X)^2$ $1{,}5\leqslant X\leqslant 2$,

$Y=0$ $2\leqslant X\leqslant 3$,

Profilul polinomial

$Y=35X^4-84X^5+70X^6-20X^7$ $0\leqslant X\leqslant 1$,

$Y=Y(2-X)$ $1\leqslant X\leqslant 2$,

$Y=0$ $2\leqslant X\leqslant 3$.

Diagramele ilustrează influenţa diametrului tijei tachetului, intervalului de ridicare, lungimii maxime aflate în afara ghidajelor tachetului dinspre camă, cursei maxime de ridicare şi a diverselor profile de camă asupra traiectoriei punctului A (vezi fig. 1) pe timpul corespunzător intervalului activ al camei.

a. Influența diametrului tachetului, lungimii sale în afara ghidajelor și a timpului de realizare a cursei maxime asupra amplitudinii vibrațiilor transversale ale tachetului

Reducerea diametrului tijei tachetului conduce la mărirea amplitudinii și reducerea vibrației medii. Într-adevăr, comparînd curbele *1* și *2* din figura 5, reducerea diametrului de 1,35 ori conduce la creșterea amplitudinii de aproape trei ori, iar frecvența medie scade sensibil. Amplitudinile inițiale sînt mai mari la începutul intervalului, în timp ce către mijlocul intervalului aceastea scad, oscilația devenind neînsemnată. Către sfîrșitul ridicării, din cauza reducerii lungimii a prin scăderea cursei y, frecvența crește și, drept rezultat, amplitudinea scade de la dublu la simplu față de începutul intervalului. Fenomenul se repetă similar și pentru curba *2*, căreia i s-au figurat numai traiectoriile valorilor maxime și minime ale amplitudinilor.

În același sens influențează și scăderea intervalului ridicării sau creșterea lungimii tachetului în afara ghidajelor sale dinspre camă, dar în rapoarte diferite (vezi relația (7)). Astfel mărimea lungimii tachetului în afara ghidajelor sale de la 2,2 cm la 3 cm conduce la creșterea amplitudinii vibrației de circa 25 de ori în comparație cu curba *1* și de circu 8 ori în comparație cu curba *2* (a se compara curba *3* cu curbele *1* și *2* din figura 5).

Cursa maximă s_0 influențează în sens invers lungimii tachetului, dar într-o măsură mult mai redusă. Compararea curbelor *1*, *2* și *3* din ambele figuri permit și aprecierea calitativă a influenței simultane a tuturor parametrilor menționați.

b. Influența legii de profilare a camei

Comparînd curbele din figura 5 cu cele din figura 6 care corespund celor două categorii de legi considerate cu și fără salturi în curba accelerației de intrare, apare evidentă o reducere a amplitudinilor vibrației transversale a tachetului. Acest lucru era de așteptat dată fiind ponderea cu care accelerația profilului camei contribuie prin membrul al doilea al ecuației (6).

De observat că, oricare ar fi influența parametrilor menționați pentru seturile considerate, valorile amplitudinii sînt destul de mici (0,00007—0,002) din unghiul de rotație al camei corespunzător timpului t_0), iar în cazul unor frecări reduse în cupla superioară, cum sînt majoritatea cazurilor, ele pot scădea și mai mult.

4. CONCLUZII

Se poate constata că vibrațiile transversale pot exista și că ele trebuie să atragă atenția constructorului numai în cazul unor valori exagerate ale constantelor care caracterizează sistemul considerat. În

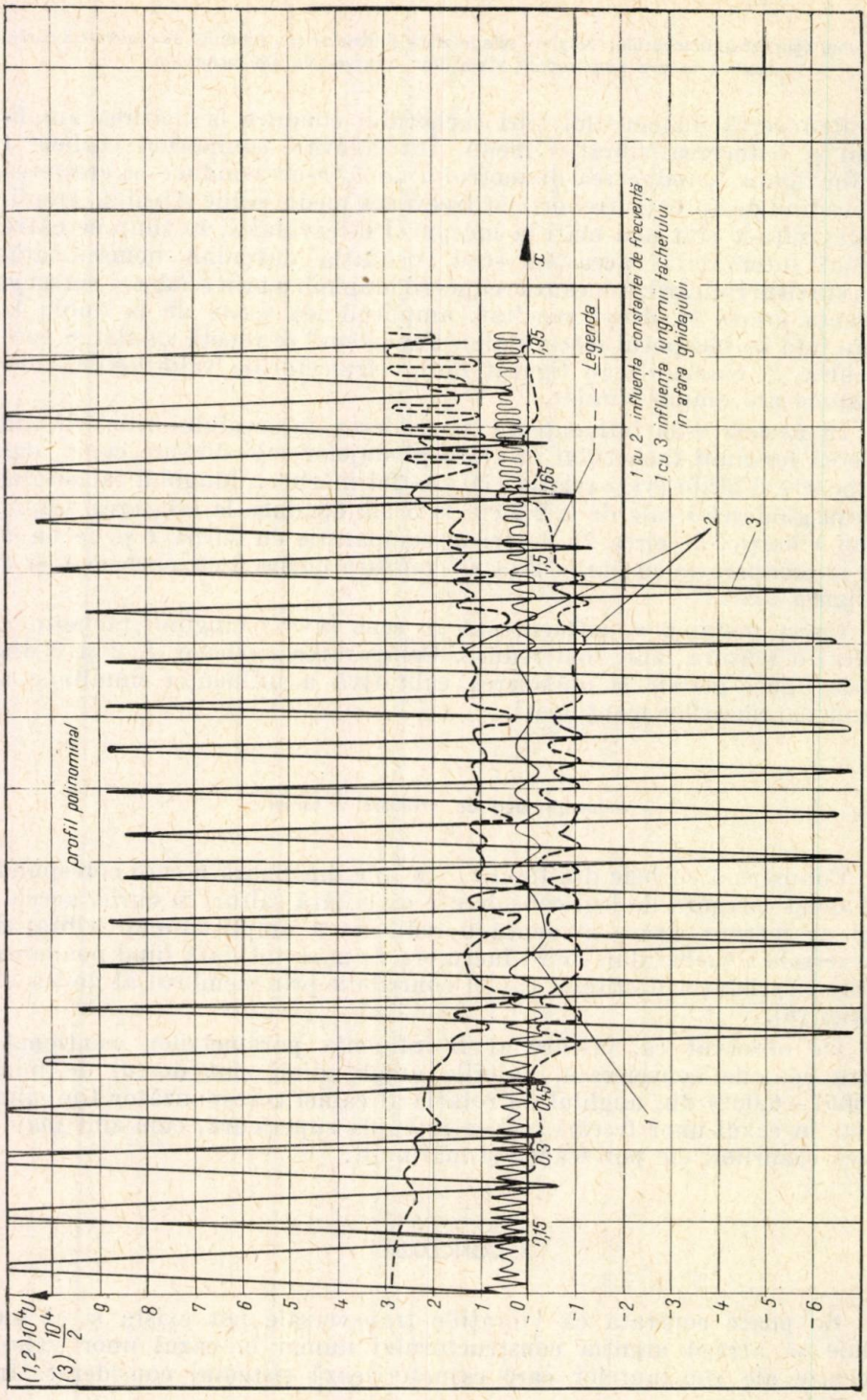

(1,2)10⁻⁴U
(3) 10⁴/2
profil polinominal
x
Legenda
1 cu 2 influența constantei de frecvență
1 cu 3 influența lungimii fachetului
în afara ghidajului
1
2
3
0,15
0,3
0,45
1,5
1,65
1,95

Fig. 5

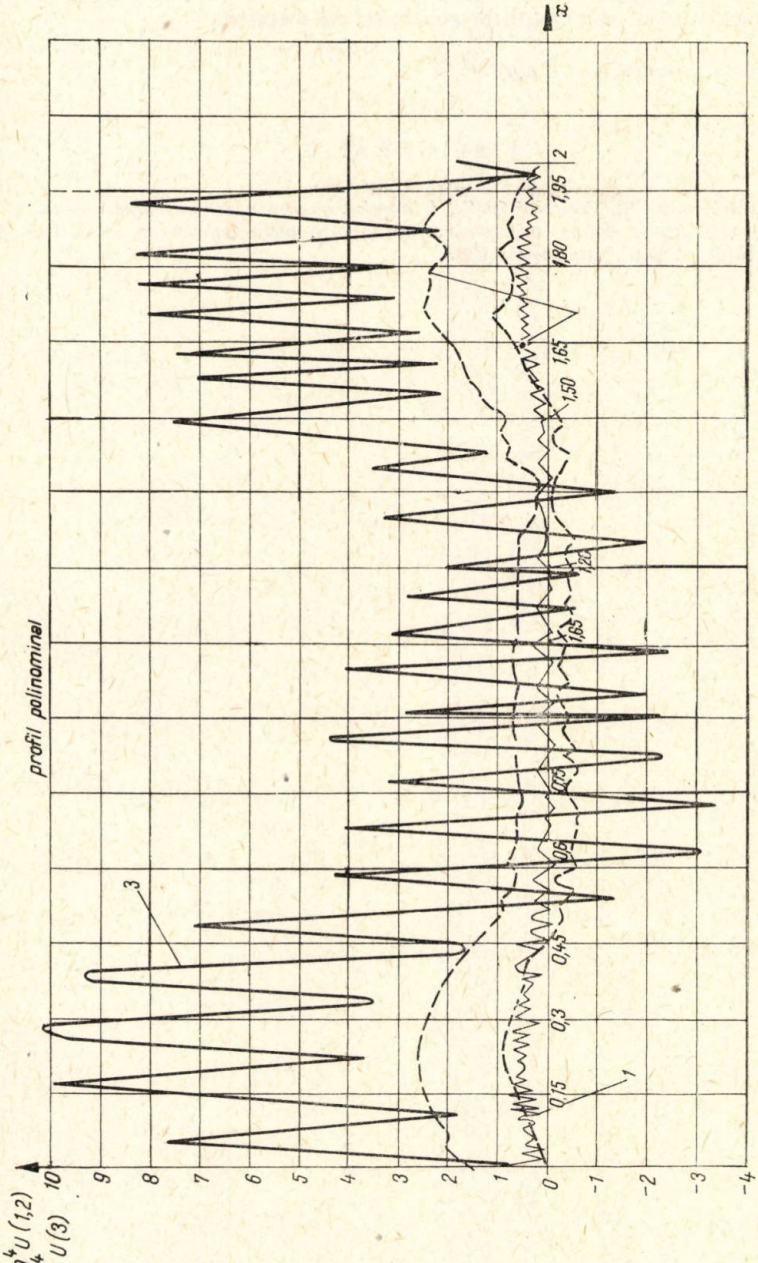

$10^4 U(1,2)$
$\frac{10^4}{2} U(3)$
profil polinominal
x
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
0,15
0,3
0,45
0,6
0,75
0,90
1,05
1,20
1,35
1,50
1,65
1,80
1,95
2
1
3

Fig. 6

ceea ce privește distribuția motoarelor cu ardere internă, așa după cum rezultă din volumul de calcule, vibrația transversală, a cărei amplitudine este foarte apropiată ca variație de curba *1*, poate fi neglijată fără a se afecta parametrii de răspuns realizați la supapă.

Primită la redacție la 14 aprilie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Pelecudi Chr., Sava I., Cononovici S., *Dinamica mecanismelor cu came rapide*, I.
2. Sava I., *Contribuții la dinamica și sinteza optimală a mecanismelor cu came*, teză de doctorat, C.M.S., București, 1969.

PRECIZIA DETERMINĂRII POZIȚIILOR ÎN MECANISMELE PLANE MONO- ȘI BICONTURURI

de CHR. PELECUDI și G. M. GIUROVICI
Centrul de mecanică a solidelor

Pentru determinarea pozițiilor și a traiectoriilor mecanismelor plane se cunosc metode experimentale, grafice, analitice, numerice etc., care, din punctul de vedere al erorilor de măsurare sau de calcul și al volumului de lucru, prezintă avantaje și dezavantaje.
Prezenta lucrare are drept scop realizarea unei sinteze asupra diverselor metode, propunînd noi îmbunătățiri și adaptînd metoda generală a aproximațiilor succesive pentru mărirea preciziei.

Una dintre cele mai importante probleme ale teoriei mecanismelor este problema pozițiilor, care prezintă totodată, față de problemele vitezelor și accelerațiilor, caracterul neliniar al ecuațiilor pe care se bazează. Într-adevăr, atît în analiza mecanismelor, unde mersul calculului cere rezolvarea mai întîi a pozițiilor, apoi a vitezelor și în urmă a accelerațiilor, dar mai ales în sinteza mecanismelor, cele mai multe probleme de proiectare se referă la realizarea unor poziții pentru punctele sau corpurile mecanismelor în timpul funcționării acestora. Pe de altă parte, metodele de determinarea vitezelor și accelerațiilor au fost bine sistematizate [1] și varietatea lor grafică, grafoanalitică sau analitică, dau posibilitatea utilizării metodei celei mai adecvate scopului urmărit, avînd în vedere avantajele și dezavantajele fiecăreia în parte. Totodată ele sînt utile în determinarea pozițiilor, pentru a căror rezolvare nu s-a realizat încă o varietate așa de mare de metode ca pentru viteze și accelerații, probabil și din cauza inconvenientelor neliniarităților semnalate anterior.

1. În general, *metoda grafică* a pozițiilor se bazează pe construcțiile geometrice. Dar în afară de construcția pozițiilor diadelor, începînd cu triadele și continuînd cu tetradele, aceste construcții sînt mai anevoioase, fiind rezolvate prin încercări, astfel că măresc gradul de inexactitate, care este recunoscut ca un dezavantaj al metodei respective. Fără a mai trece în revistă construcțiile geometrice pentru diade [1], amintim numai determinarea pozițiilor la triadă și tetradă. Astfel, la o triadă

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 881–913

cu cuple de rotaţii se cunosc poziţiile cuplelor exterioare A, B şi C şi lungimile elementelor (fig. 1). Desfăcîndu-se una dintre articulaţiile interioare, se găseşte poziţia acesteia la intersecţia unui cerc cu o curbă

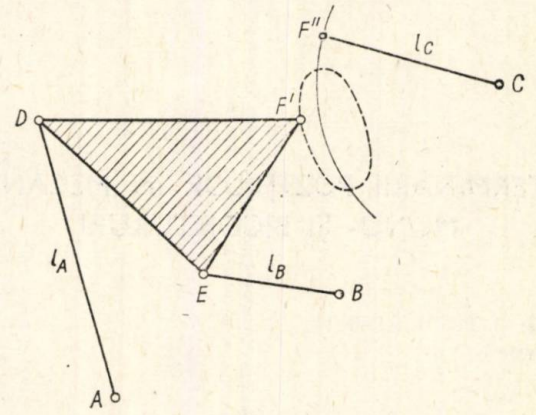


Fig. 1

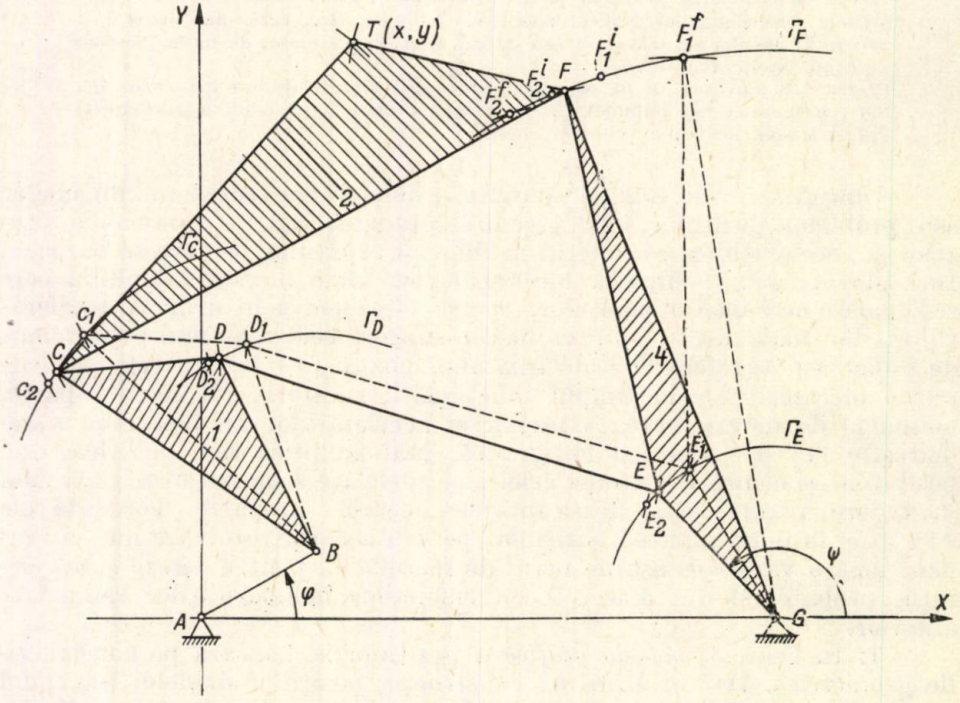


Fig. 2

de bielă, determinată prin puncte pe baza construcţiilor poziţiilor diadelor.

Pentru tetradă construcţiile grafice ale poziţiilor sînt mai dificile (fig. 2). Spre exemplu se cunosc poziţiile cuplelor potenţiale exterioare B şi G şi se trasează arcele de cerc $\Gamma_C\Gamma_D\Gamma_E\Gamma_F$, pe care se pot afla punc-

tele C, D, E, F. Mai departe se poate utiliza proprietatea tetradei de a fi formată din două diade legate în sens invers. Într-adevăr, interpretîndu-le ca multipoli cinematici cu elemente rigide, diada *1—2* (fig. 2) are intrările în B și în F și ieșirea în D, iar diada *3—4* are intrările în D și în G, iar ieșirea în F. De aceea alegînd pe arcul Γ_F punctul F_1^i și împreună cu B se desenează prima poziție a diadei *1—2* cu punctele C_1 și D_1. La fel din D_1 și împreună cu G se determină prima poziție pentru diada *3—4* cu punctele E_1 și F_1^f. Punctele F inițial și final, deși se află pe același arc de cerc Γ_F, nu coincid, ceea ce face ca aceeași operație să se refacă în treapta a doua de aproximație, mergîndu-se pînă cînd în treapta n de aproximație distanța Δ între puncte devine neglijabilă : $\Delta = F_n^i F_n^f \approx 0$.

Deja acest procedeu grafic se bazează pe aproximațiile geometrice succesive a căror convergență depinde de valorile inițiale de plecare.

Din cauza construcțiilor grafice anevoioase, la triadă și tetradă se preferă de multe ori utilizarea șabloanelor, cu ajutorul cărora, prin încercări simple și rapide, se fixează pozițiile elementelor și punctelor. Dar atît metoda șabloanelor, cît și metoda grafică sînt afectate de unele imprecizii, care pot fi considerate prea mari pentru anumite scopuri cerute mecanismelor. Însă aceste determinări grafice pot fi alese ca valori inițiale în procesul de aproximații analitice succesive pentru îmbunătățirea oricît de mare a preciziei.

2. Pentru mecanisme se pot aplica în mod direct aceleași construcții grafice corespunzătoare grupelor fundamentale din care sînt formate. Aceste construcții se repetă de obicei pentru 12 poziții (sau chiar 24) ale manivelei conducătoare, determinîndu-se astfel prin puncte diverse traiectorii și deplasări. Îmbunătățirea preciziei determinării lor se face prin metoda aproximațiilor succesive.

Dar, la fel ca în cazul determinării vitezelor și accelerațiilor, se pot utiliza construcțiile indirecte prin schimbarea mecanismului, păstrîndu-se lanțul cinematic, dar reducîndu-se complexitatea grupelor fundamentale din care este construit. Aplicarea metodelor indirecte de schimbare a mecanismului inițial are două aspecte :

— cu păstrarea mișcării absolute prin menținerea bazei și schimbarea elementului conducător ;

— prin transformarea mișcării relative cu schimbarea bazei și a elementului conducător.

Desigur, utilizarea acestor procedee este necesară la mecanismele complexe cu mai multe contururi interioare independente. Lanțul cinematic Watt (fig. 3), care, transformat în orice motomecanism, este compus numai din diade, nu necesită construcții deosebite. Al doilea lanț cinematic, cu două contururi independente Sthephenson (fig. 4), poate cuprinde diverse grupe fundamentale în funcție de mecanismul utilizat.

Spre exemplu (fig. 5), plecînd de la manivela conducătoare c și baza b, mecanismul lanțului Sthephenson cuprinde o tetradă formată din elementele *1*, *2*, *3*, *4*. În funcție de diversele poziții ale manivelei c se poate determina în mod direct pozițiile tetradei așa cum s-a arătat mai sus. Schimbînd manivela conducătoare c cu balansierul *4*, dar păstrînd baza b, lanțul Sthephenson cuprinde o triadă, formată din elementele *1*, *2*, *3*, c, cu construcții grafice mai simple (fig. 5). Dar, alegînd

arbitrar diverse poziţii pentru noua manivelă conducătoare $\chi(4)$, se determină poziţiile vechii manivele c, devenită balansier, care nu vor corespunde cu poziţiile prescrise iniţial acesteia. Cum prin însuşi caracterul metodei grafice care are particularitatea că se aplică unor poziţii discrete, între diversele poziţii trebuind să se realizeze interpolările necesare, rela-

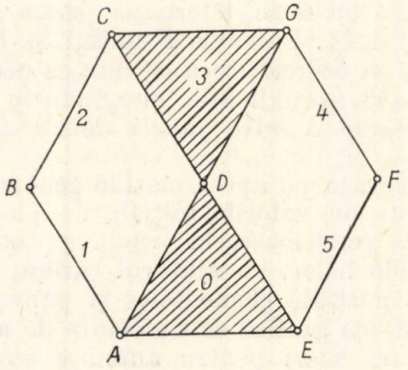


Fig. 3

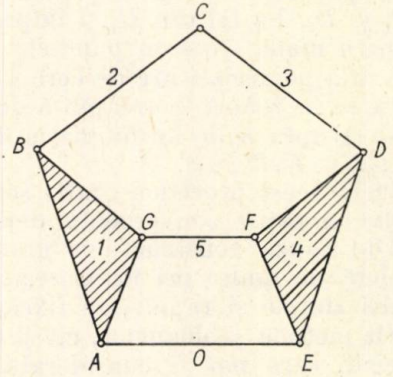


Fig. 4

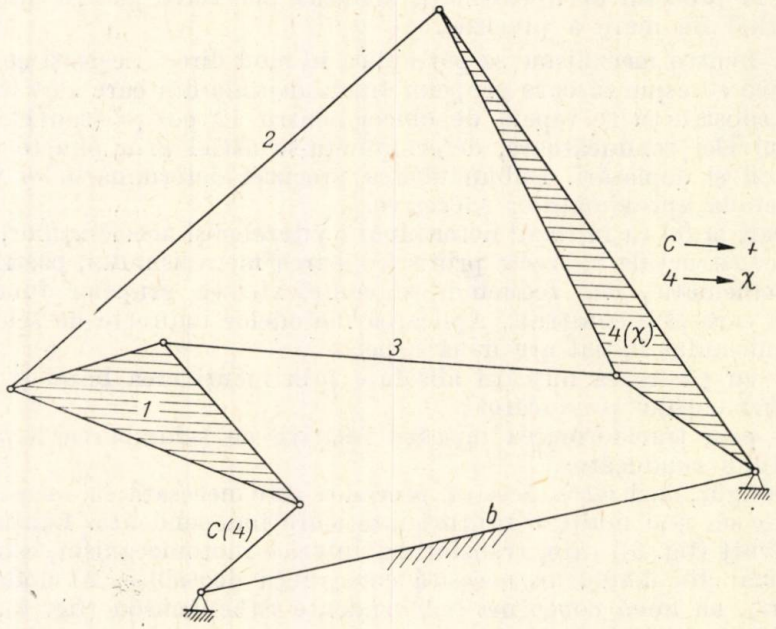


Fig. 5

ţia dintre poziţiile balansierului $4(\chi)$ şi poziţiile manivelei conducătoare $c(4)$, obţinută pentru intervale neegale, nu deranjează în general precizia urmărită. Numai obţinerea unor intervale disproporţionate în raport cu altele ar putea necesita aplicarea interpolării. Totodată aplicarea interpolării este necesară şi în cazul cînd se urmăreşte determinarea

poziţiilor elementelor pentru o anumită poziţie a manivelei conducătoare $c(4)$, plecînd de la diverse poziţii ale balansierului $4(\chi)$.

Dar această problemă se poate rezolva analitic prin aproximaţii succesive, determinînd în diferite trepte creşterile atît ale parametrilor dependenţi, cît şi independenţi, pornind, desigur, de la o poziţie grafică obţinută anterior.

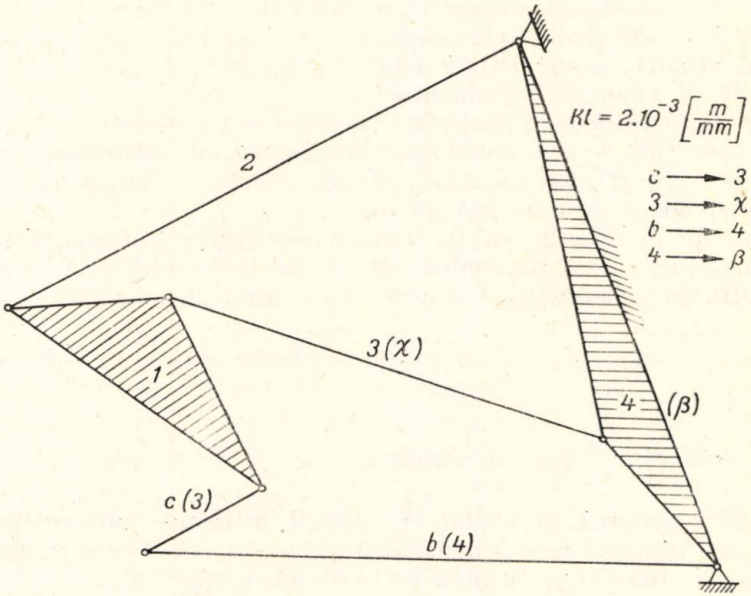


Fig. 6

Schimbînd atît baza b cu balansierul 4, cît şi manivela conducătoare c cu biela 3, lanţul Sthephenson se transformă într-un mecanism format din două diade $1-2$ şi $c(3) - b(4)$ (fig. 6), ale căror construcţii grafice sînt, desigur, mult mai simple. În acest caz, pentru o poziţie întîmplătoare a noului mecanism iniţial $4(\beta)$, $3(\chi)$, se va obţine o poziţie a vechiului mecanism iniţial c, b, care nu va corespunde nici pentru baza b şi nici pentru manivela conducătoare c cu poziţiile prescrise acestora. De aceea parametrii de poziţionare se vor măsura în mod relativ faţă de poziţia bazei vechi sau se va rabate întregul plan al mecanismului pînă ce baza b va ocupa poziţia reală cerută iniţial. Manivela c rămîne mai departe într-o poziţie diferită de cea impusă iniţial, dar, ca şi în cazul anterior, se pot aplica aproximaţiile succesive atît parametrilor dependenţi, cît şi celor independenţi pentru a fi aduşi la valorile reale.

3. Stabilirea prin *metoda analitică* a funcţiilor de poziţii se face în două feluri :

— fie prin metoda conturuiilor, folosind coordonatele polare relative ;

— fie prin metoda elementelor, folosind coordonatele rectangulare carteziene.

3.1. Prima metodă utilizează vectorii de poziţie şi proiecţiile acestora pe axele de coordonate. Ecuaţiile vectoriale de poziţii se obţin în baza celor N contururi deformabile independente, deschise sau închise, care conduc la $2N$ ecuaţii scalare de proiecţii. Aceste ecuaţii determină în cazurile nesingulare $2N$ necunoscute scalare.

La grupele fundamentale, întrucît numărul elementelor este $m=2N$, revine cîte o necunoscută pentru fiecare element. La mecanismele cu M grade de mobilitate, deoarece $n=2N+(1+M)$, pentru a avea mişcări determinate la elementele conduse este necesar să se cunoască $(1+M)$ parametri scalari: unul pentru elementul fix şi cîte unul pentru fiecare dintre cele M elemente conducătoare.

Pentru mecanismele plane de translaţie se pot scrie numai N ecuaţii scalare, proiecţiile pe cele două axe fiind dependente între ele; dar, deoarece $n=N+(1+M)$, se menţin aceleaşi concluzii atît pentru grupele structurale, cît şi pentru mecanisme.

Este de menţionat că în baza observaţiilor anterioare se poate determina uşor gradul de mobilitate al mecanismelor de familii mixte cu α contururi generale şi τ contururi de translaţii, adică

$$M = (n-1) - 2\alpha - \tau = (n-1) - 2N + \tau = (n-1) - N - \alpha \qquad (1)$$

sau

$$M = M_3 + \tau = M_2 - \alpha, \quad \text{unde} \quad \alpha + \tau = N. \qquad (2)$$

Pentru scrierea ecuaţiilor de poziţii utilizînd contururile poligonale, fiecare element este schematizat prin cîte două bare drepte legate rigid într-un punct O şi formînd între ele un unghi fix γ.

Alteori elementele se schematizează prin bare drepte cu $\gamma=0$ sau 180°. Legătura dintre două elemente consecutive ale conturului se presupune realizată printr-o diadă redusă TRT, la care pietrele de culisă alunecă în lungul barelor, iar articulaţia centrală marchează punctul de intersecţie A al acestora. În realitate, în mod obişnuit, legătura dintre două elemente este formată ori numai cu cuple de rotaţie, unde cele două pietre de culisă sînt solidare cu barele, ori dintr-o cuplă de translaţie, unde pietrele de culisă sînt solidare între ele şi cu una dintre bare, ceea ce nu reprezintă decît cazuri particulare ale situaţiei generale anterioare. Necunoscutele se găsesc printre deplasările relative r_m dintre două puncte A_{m-1} şi A_m sau printre unghiurile absolute φ_m ale barelor cu dreapta de referinţă.

3.2. A doua metodă pentru stabilirea ecuaţiilor de poziţii întrebuinţează ca necunoscute coordonatele punctelor de legătură $A(x, y)$. Între acestea se scriu relaţiile distanţelor dintre două cuple de rotaţie sau a pantelor axelor de translaţii relative.

Astfel, pentru un element de clasa i care se poate desface în $i-3$ triunghiuri, se pot scrie $i+i-3=2i-3$ ecuaţii. Acestea, spre exemplu, exprimă distanţele constante dintre toate vîrfurile sale.

Pentru cele n elemente ale lanţului cinematic se obţin $\sum(2i-3)n_i = 2\sum in_i - 3\sum n_i = 4c - 3n$ ecuaţii, care, pentru cazurile nesingulare, pot determina tot atîtea necunoscute. Deoarece pentru cele c cuple avem

$2c$ variabile, numărul variabilelor independente este $2c - (4c - 3n) = 3n - 2c = L = M + 3$, care, respectiv, reprezintă gradul de libertate al mecanismului.

Dintre acestea, trei revin bazei, iar M revin elementelor conducătoare. Dar, pentru anumite forme critice permanente (sau instantanee) ale mecanismelor, unele ecuații pot depinde de celelalte, nefiind independente, ceea ce corespunde unor legături pasive din mecanismul respectiv. Astfel criteriul general de apreciere al gradului de libertate este rangul matricei funcționale a ecuațiilor de poziții.

Dacă acesta este r, iar numărul variabilelor n, rezultă $L = n - r$.

4. *Rezolvarea directă* a sistemelor de ecuații de poziții este de obicei foarte greoaie, datorită neliniarității acestora și gradului algebric ridicat. O cale generală de rezolvare utilizează aproximațiile succesive. Fiecare necunoscută se obține ca valoare finală dintr-o sumă de termeni, în care primul reprezintă valoarea inițială arbitrară, iar ceilalți sînt corecții succesive pe diferite trepte de aproximație. Aplicarea practică a acestui gen de rezolvare necesită o rapiditate satisfăcătoare a convergenței șirului de termeni pentru a ajunge la aproximația dorită în cît mai puține trepte.

Fie r ecuații de poziții independente, de forma

$$f_i(x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_r) = 0, \tag{3}$$

unde $i = 1, 2, \ldots, r$, în care, dacă iacobianul $J \neq 0$ este diferit de zero, se obțin r variabile dependente de m variabile independente. Se formează funcțiile ajutătoare

$$h_i(x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_r) = y_i - (M_{i1} f_1 + M_{i2} f_2 + \ldots + M_{ir} f_r), \tag{4}$$

unde M_{ij} sînt minorii normalizați ai determinantului funcțional J pentru valorile x^0 și y^0 sau din vecinătatea acestora. Rezolvarea ecuațiilor $f_i = 0$ echivalează cu rezolvarea ecuațiilor

$$y_i = h_i(x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_r), \tag{5}$$

care au o formă adecvată aplicării aproximațiilor succesive.

4.1. Pentru o *rezolvare simultană* a ecuațiilor cu valorile date $x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0$ și alegînd valorile inițiale $y_1^0 y_2^0 \ldots y_r^0$, se găsesc pe rînd din toate ecuațiile valorile

$$y_i^{(1)} = h_i(x_1^0 x_2^0 \ldots x_m^0 y_1^0 y_2^0 \ldots y_r^0) \tag{6}$$

în prima treaptă, continuîndu-se în același fel pînă cînd diferențele $|y_i^{(n)} - y_i^{(n-1)}|$ sînt suficient de mici și corecțiile următoare se pot neglija. Totodată, datorită proprietăților de regularitate ale funcțiilor f_i, rezultă că și funcțiile sînt regulate, adică uniforme, finite și continue, împreună cu derivatele parțiale în domeniul $D(\xi_1 \xi_2 \ldots \xi_m \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_r)$, vecin soluțiilor

$$|x_i - x_i^*| \leqslant \xi_i; \quad |y_j - y_j^*| \leqslant \eta_j.$$

Împreună cu faptul că pentru aceleași soluții derivatele parțiale se anulează, $\partial h_i/\partial y_j = 0$, se poate lua în același domeniu D limitarea

$$|\partial h_i/\partial y_j| < K/r, \text{ unde } 0 < K < 1. \tag{7}$$

Se deduce convergența procesului de aproximare prin

$$|\Delta y^{(k+1)}|_{\max} = \max_i |y_i^{(k+1)} - y_i^{(k)}| = \max_i |h_i(x, y^{(k)}) -$$

$$- h_i(x, y^{(k-1)})| \leqslant \max_i \sum_{j=1}^{r} |\partial h_i/\partial y_j| |y_j^{(k)} - y_j^{(k-1)}| = K\Delta y_{\max}^{(k)}, \tag{8}$$

astfel că $$|\Delta y^{(k+1)}|_{\max} \leqslant K^k |\Delta y^{(1)}|_{\max} \ll |\Delta y^{(1)}|_{\max}. \tag{9}$$

Deci cînd variabilele $x_1 x_2 \ldots x_m$ tind către valorile $x_1^* x_2^* \ldots x_m^*$ variabilele dependente tind către valorile $y_1^* y_2^* \ldots y_r^*$ și reprezintă funcții regulate în domeniul D.

4.2. Dacă valorile inițiale sînt alese foarte apropiate de valorile reale, se poate utiliza un *procedeu de aproximații simplificat* liniarizat, entru care se folosesc funcțiile

$$h_i(x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_r) = y_i - \frac{f_\alpha(x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots)}{\dfrac{\partial f_\alpha}{\partial y_i}(x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots)}, \tag{10}$$

cu ajutorul cărora sistemul de ecuații $f_\alpha = 0$ se transformă în

$$y_i = h_i(x, y).$$

Cu ultimul sistem, aproximațiile succesive se calculează prin

$$y_i^{(k+1)} = h_i^{(k)}(x^*, y^{(k)}). \tag{11}$$

De asemenea, notînd în aproximația de ordinul k derivata parțială prin

$$m_{ij}^{(k)} = \partial h_i^{(k)}/\partial y_j = -\frac{\partial f_\alpha^{(k)}/\partial y_j}{\partial f_\alpha^{(k)}/\partial y_i} > 0 \quad \text{și} \quad m_{ii}^{(k)} = 0, \tag{12}$$

formula (8) devine

$$|\Delta y_i^{(k+1)}| \leqslant \sum_{j=1}^{r} m_{ij}^{(k)} |\Delta y_j^{(k)}| \tag{13}$$

sau

$$|\Delta y^{(k+1)}|_{\max} \leqslant \sum_{j=1}^{r} m_{ij}^{(k)} |\Delta y_j^{(k)}| \leqslant \left(\sum_{j=1}^{r} m_{ij}^{(k)}\right) \Delta y_{\max}^{(k)} = K\Delta y_{\max}^{(k)}, \tag{14}$$

unde

$$0 < \sum_{j=1}^{r} {}^{1} m_{j\alpha} = K \leqslant 1. \tag{15}$$

Aici coeficienții $m_{ij}^{(k)} = m_{ij}$ se pot lua constanți, cu valorile din prima treaptă de aproximare, și ei sînt chiar constanți în cazul sistemelor de ecuații liniare. Convergența acestui procedeu de aproximații este cu atît mai mare, cu cît neegalitățile

$$\sum_{j=1}^{r} m_{ij} < 1, \text{ pentru fiecare } i = 1, 2, \ldots, r,$$

sînt mai accentuate (Wittmeyer), deși există sisteme de ecuații care permit o rapiditate acceptabilă a convergenței chiar fără îndeplinirea acestei condiții foarte severe.

4.3. O *rezolvare succesivă* a ecuațiilor îmbunătățește rapiditatea convergenței. În această rezolvare, la aproximația de ordinul $(k+1)$ a unei necunoscute y_i se iau în considerare aproximațiile deja găsite în acest ciclu ale necunoscutelor care precedă pe $y_i (1, 2, \ldots, i-1)$ și se reține aproximațiile din ciclul anterior (k) pentru necunoscutele care succedă pe $y_i (i+1,\ i+2,\ \ldots, r)$, adică

$$y_i^{(k+1)} = h_i (x_1^* x_2^* \ldots x_m^* y_1^{(k+1)} y_2^{(k+1)} \ldots y_{i-1}^{(k+1)} y_i^{(k)} y_{i+1}^{(k)} \ldots y_r^{(k)}) \tag{16}$$

sau, în cazul liniarizării,

$$\Delta y_i^{(k+1)} = \sum_{j=1}^{i-1} m_{ij} \Delta y_j^{(k+1)} + \sum_{i+1}^{r} m_{ij} \Delta y_j^{(k)}. \tag{17}$$

De asemenea, în cazul numerelor de ecuații și de necunoscute mari la mecanismele complexe, rezolvarea simultană a tuturor ecuațiilor este greoaie, pe lîngă faptul că valorile inițiale ale tuturor necunoscutelor este greu să se aleagă în mod convenabil. De aceea se urmărește pentru rezolvarea succesivă să se separe sistemul de ecuații în două grupe :

a) în prima grupă, o parte din necunoscute intră ca independente (cu valori inițiale alese), iar cealaltă parte de necunoscute sînt dependente ;

b) în a doua grupă, situația necunoscutelor se inversează :

$$f_i (x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots) = 0,\ g_i (y_1 y_2 \ldots x_1 x_2 \ldots) = 0. \tag{18}$$

Alegînd numai valorile inițiale pentru $x_1 x_2 \ldots$, din prima grupă de ecuații se deduc necunoscutele $y_1 y_2 \ldots$, care se înlocuiesc în a doua grupă de ecuații și se obțin noi valori pentru primele necunoscute. Convergența procesului se poate verifica simplu prin aplicarea directă a metodei, observînd valorile succesive ale acelorași variabile sau devia-

ţiile de la zero ale funcţiilor f_i sau g_i. Se urmăresc care variabile au influenţă mai mare asupra acestor deviaţii şi se apreciază corecţiile necesare.

4.4. În aplicarea practică a acestor aproximaţii se pleacă de la sistemul de valori $x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_r$, căruia, adăugîndu-i-se creşterile $\Delta x_1 \Delta x_2 \ldots \Delta y_1 \Delta y_2 \ldots$, se obţin valorile mai apropiate de realitate, ceea ce corespunde la

$$f_\alpha(x_1 x_2 \ldots x_m y_1 y_2 \ldots y_r) \neq 0 \tag{19}$$

şi la

$$f_\alpha(x_1 + \Delta x_1,\ x_2 + \Delta x_2 \ldots,\ y_1 + \Delta y_1,\ y_2 + \Delta y_2 \ldots) = 0. \tag{20}$$

Din dezvoltarea Taylor se găseşte sistemul liniar de r ecuaţii cu r necunoscute Δy_j:

$$f_\alpha(x_1 x_2 \ldots y_1 y_2 \ldots) + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_\alpha}{\partial x_j} \Delta x_j + \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial f_\alpha}{\partial y_j} \Delta y_j = 0. \tag{21}$$

Dacă r este mare, se poate aplica chiar acestui sistem liniar procedeul aproximaţiilor succesive.

Se determină astfel relaţiile

$$|\Delta y_i|^{(k+1)} = - \frac{f_\alpha^{(k)} + \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial f_\alpha^{(k)}}{\partial x_j} \Delta x_j + \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\partial f_\alpha^{(k)}}{\partial y_j} \Delta y_j^{(k)} + \sum_{j=i+1}^{r} \frac{\partial f_\alpha^{(k)}}{\partial y_j} \Delta y_j^{(k)}}{\frac{\partial f_\alpha^{(k)}}{\partial y_i}}, \tag{22}$$

în care se poate începe procesul de aproximare, alegînd $\Delta y_j^{(0)} = 0$.

În cazul termenilor neglijabili în $\Delta y_j^{(k)}$, procesul corespunde aproximaţiilor simplificate amintite anterior. Pe de altă parte, este verificată limita maximă a abaterii $\Delta y_i^{(k+1)}$ prin ecuaţiile (13), (14). Ecuaţiile (21), fie $\Delta x_j = 0$ sau $\Delta x_j \neq 0$, se pot rezolva în cazurile nesingulare $J \neq 0$. În apropierea valorilor pentru care $J \simeq 0$, sistemul dă valori mari pentru abaterile Δy, ceea ce poate face ca procesul aproximaţiilor să fie divergent. De aceea alegerea valorilor iniţiale şi îndepărtarea mecanismului de poziţiile sale critice instantanee — poziţii moarte — au influenţă asupra rapidităţii convergenţei.

Într-adevăr, în cazul $J = 0$, rangul determinantului se reduce, unele dintre ecuaţii fiind compatibile şi dependente de altele. Astfel, numărul variabilelor dependente se reduce, unele din ele putînd fi alese arbitrar şi mecanismul avînd instantaneu grade de mobilitate mai numeroase. Deci, dacă într-un ciclu de variaţie al variabilelor propriu-zise independente (manivelele conducătoare) se obţine un număr finit de q poziţii în care $J = 0$, acestea sînt poziţii de ramificaţii în care mişcarea mecanismului nu mai este unic determinată. În ipoteza că în aceste poziţii alegerea deplasării este guvernată de o lege exterioară determinată, este posibil ca anumite părţi ale mecanismului (variabilele y) să treacă de

mai multe ori prin aceleași poziții. În mecanismul bielă-manivelă, dacă mișcarea este comandată de pistonul x, datorită pozițiilor moarte, manivela y se poate reîntoarce sau nu pe același drum.

5. *Exemplificări* la mecanismul patrulater. La mecanismul din figura 7 s-au ales dimensiunile : $AB = 0{,}100$ m, $BC = 0{,}400$ m, $CD = 0{,}250$ m, $DA = 0{,}300$ m, $TB = 0{,}315$ m, $TC = 0{,}135$ m și s-a trasat grafic, prin puncte, traiectoria punctului T.

Pentru precizarea traiectoriei, în afară de determinările pentru pozițiile echidistante ale manivelei din 30 în 30°, s-au luat pozițiile suplimentare cînd manivela se suprapune bielei sau cînd balansierul este perpendicular pe bază. Tabela 1 cuprinde valorile unghiului balansierului ψ și ale coordonatelor x_c y_c x_T y_T ale punctelor C și T în funcție de unghiul manivelei φ măsurate grafic, inclusiv unghiul θ al bielei (2) din figura 7.

Diagramele lor sînt reprezentate în figurile 8 și 9.

5.1. În metoda elementelor (fig. 7), ecuațiile de poziții sînt

$$\begin{aligned} f_1 &= (x_c - r\cdot\cos\varphi)^2 + (y_c - r\cdot\sin\varphi)^2 - l^2 = 0, \\ f_2 &= (x_c - a)^2 + y_c^2 - R^2 = 0 \end{aligned} \tag{23}$$

sau

$$f_2 = (a - r\cdot\cos\varphi)(2x_c - r\cdot\cos\varphi - a) - r\cdot\sin\varphi\,(2y_c - r\cdot\sin\varphi) - l^2 + R^2 = 0$$

și

$$\begin{aligned} f_3 &= (x_T - r\cdot\cos\varphi)^2 + (y_T - r\cdot\sin\varphi)^2 - b^2 = 0, \\ f_4 &= (x_T - x_c)^2 + (y_T - y_c)^2 - c^2 = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

sau

$$f_4 = (x_c - r\cdot\cos\varphi)(2x_T - r\cdot\cos\varphi - x_c) + (y_c - r\cdot\sin\varphi)(2y_T - r\cdot\sin\varphi - y_c) - b^2 + c^2 = 0.$$

Rezolvarea directă comportă determinarea variabilelor x_c și y_c din primele două ecuații și apoi aflarea coordonatelor x_T și y_T din ultimele două ecuații. De fapt ecuațiile se aduc la formele

$$\begin{aligned} f_1 &= x_c^2 + y_c^2 - 2r\cdot\cos\varphi\, x_c - 2r\cdot\sin\varphi\, y_c + r^2 - l^2 = 0, \\ f_2 &= A(\varphi)\, x_c + B(\varphi)\, y_c + C = 0 \end{aligned} \tag{25}$$

și

$$\begin{aligned} f_3 &= x_T^2 + y_T^2 - 2r\cdot\cos\varphi\, x_T - 2r\cdot\sin\varphi\, y_T + r^2 - b^2 = 0, \\ f_4 &= D(\varphi, x_c)\, x_T + E(\varphi, y_c)\, y_T + F(x_c, y_c) = 0, \end{aligned} \tag{26}$$

Tabela 1

Poz. manivelei		φ în grade	θ în grade	ψ în grade	x_C în m	y_C în m	x_T în m	y_T în m
	1	30°	20°30′	49°40′	+0,4602	+0,191	+0,3365	+0,2425
	2	60°	18°40′	59°	+0,428	+0,2142	+0,305	+0,2695
	3	90°	20°	72°30′	+0,375	+0,2385	+0,250	+0,2905
	4	120°	24°20′	86°30′	+0,3145	+0,2495	+0,187	+0,296
	5	150°	29°30′	98°45′	+0,261	+0,2473	+0,1295	+0,278
	6	180°	36°30′	108°5′	+0,221	+0,2375	+0,0875	+0,2525
	7	210°	44°	113°40′	+0,200	+0,2293	+0,065	+0,226
	8	240°	51°40′	114°20′	+0,1967	+0,2275	+0,0635	+0,207
	9	270°	57°	109°25′	+0,217	+0,2358	+0,0865	+0,203
	10	300°	56°30′	96°50	+0,269	+0,248	+0,1385	+0,2165
	11	330°	47°	76°	+0,3595	+0,2425	+0,225	+0,2335
0° și	12	0° și 360°	30°40′	54°40′	+0,444	+0,2045	+0,3125	+0,2335
	13	măsurat 22°	23°	49°25′	+0,463	+0,190	+0,336	+0,2375
	14	idem 127°20′	25°30′	90°	+0,300	+0,250	+0,172	+0,2915
	15	idem 228°50′	49°10′	114°45′	+0,195	+0,227	+0,061	+0,213
	16	idem 312°	54°	90°	+0,300	+0,250	+0,1685	+0,2245
	17	345°	39°20′	64°30′	+0,407	+0,225	+0,272	+0,2358

NOTĂ Poz. 13, cînd manivela AB este în prelungire cu biela EC.
Poz. 15, cînd manivela AB este suprapusă bielei BC.
Poz. 14 și 16, cînd balansierul DC face un unghi $\Psi = 90°$ cu axa OX.
Poz. 17, poziție suplimentară între poziția 11 și 12 pentru precizarea curbei în diagrama accelerației a_C și a_T.

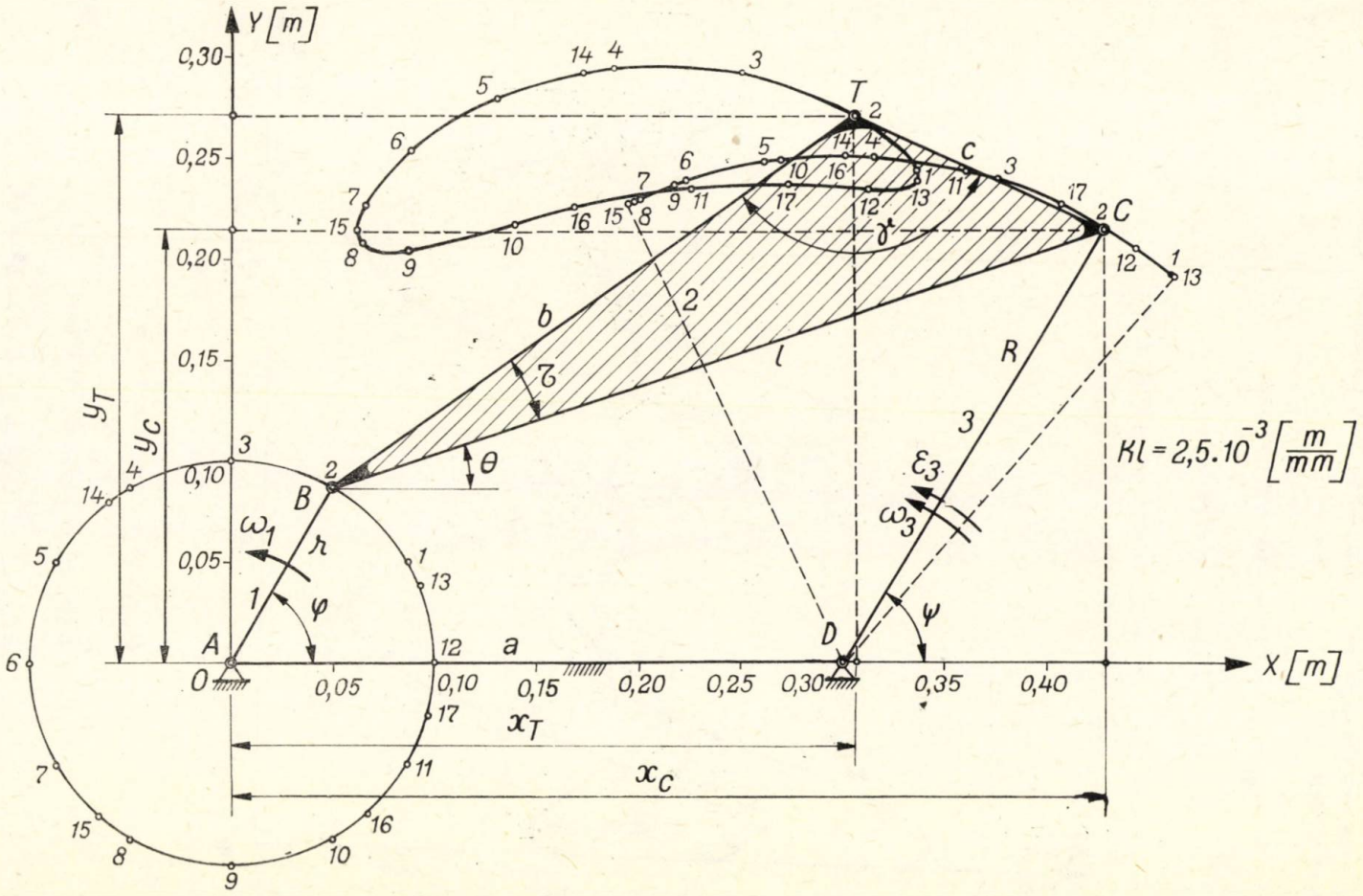

Y [m]
X [m]
0,30
0,25
0,20
0,15
0,10
0,05
0
0,05
0,10
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
T
C
A
B
D
O
a
b
l
R
r
1
2
3
θ
φ
ψ
γ
ω1
ω3
ε3
yT
yC
xT
xC
Kl = 2,5.10⁻³ [m/mm]

Fig. 7

adică este nevoie să se rezolve două ecuații pătrate și două ecuații liniare cu coeficienții

$$A(\varphi) = 2(a - r \cdot \cos \varphi),$$

$$B(\varphi) = -2r \cdot \sin \varphi, \tag{27}$$

$$C = -a^2 + r^2 - l^2 + R^2;$$

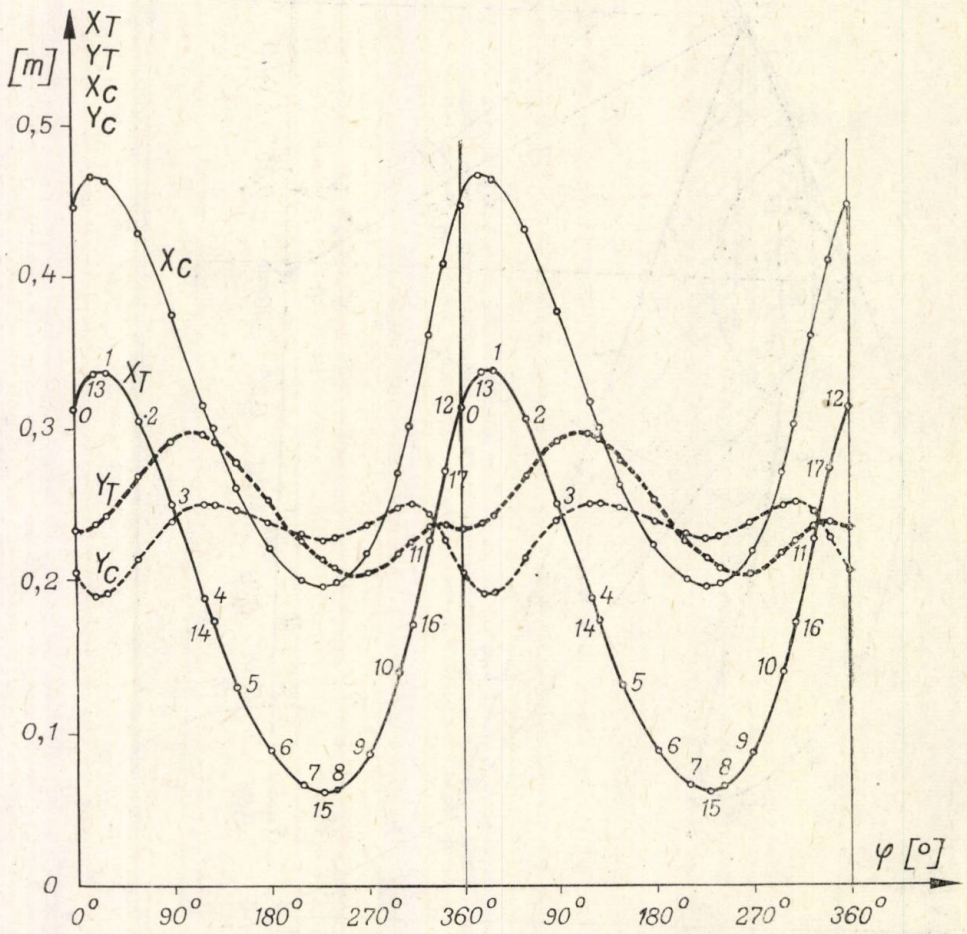


Fig. 8

$$D(\varphi, x_c) = 2(x_c - r \cdot \cos \varphi),$$

$$E(\varphi, y_c) = 2(y_c - r \cdot \sin \varphi), \tag{28}$$

$$F(x_c, y_c) = -x_c^2 - y_c^2 + r^2 - b^2 + c^2.$$

5.2. Aplicarea aproximațiilor succesive pentru îmbunătățirea preciziei pozițiilor determinate grafic se face pe baza ecuațiilor (21), adică

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c}\Delta y_c + \ldots = 0,$$

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_2}{\partial y_c}\Delta y_c + \ldots = 0; \tag{29}$$

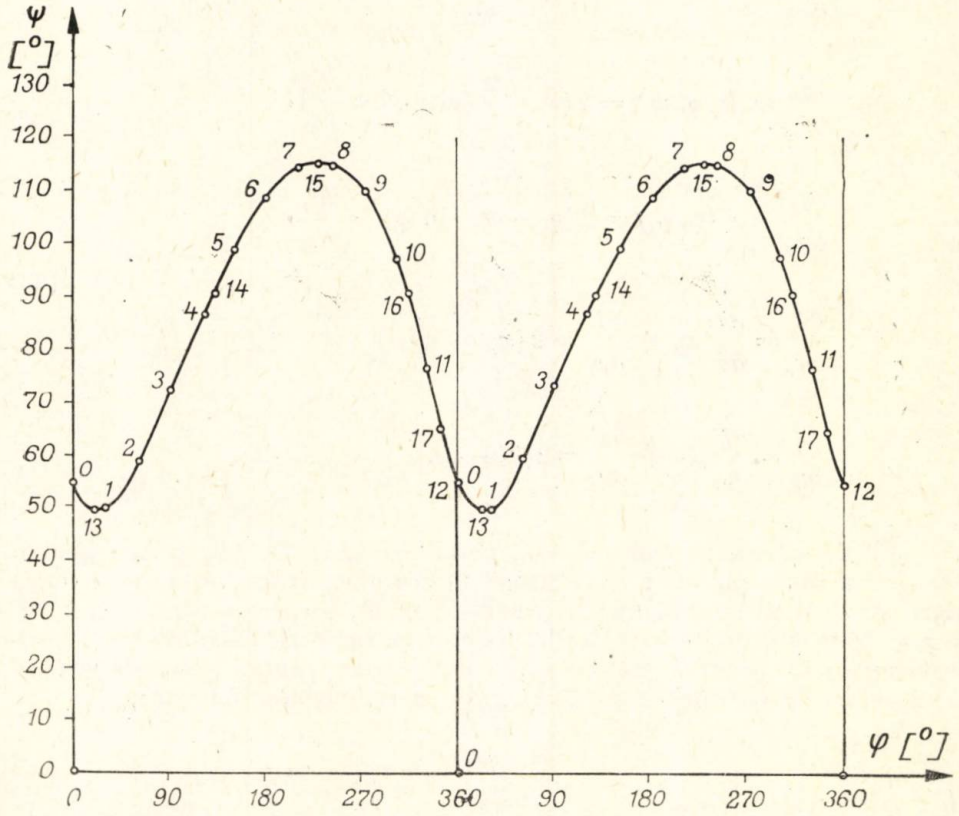


Fig. 9

$$f_3 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_3}{\partial y_T}\Delta y_T = 0,$$

$$f_4 + \frac{\partial f_4}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_4}{\partial y_c}\Delta y_c + \frac{\partial f_4}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_4}{\partial y_T}\Delta y_T = 0, \tag{30}$$

unde

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} = 2(x_c - r \cdot \cos\varphi); \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_c} = 2(y_c - r \cdot \sin\varphi), \tag{31}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_c} = A(\varphi) = 2(a - r \cdot \cos\varphi); \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_c} = B(\varphi) = -2r \cdot \sin\varphi;$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_T} = 2(x_T - r \cdot \cos\varphi); \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_T} = 2(y_T - r \cdot \sin\varphi), \tag{32}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_T} = D(\varphi, x_c) = 2(x_c - r \cdot \cos\varphi) = \frac{\partial f_1}{\partial x_c},$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_T} = E(\varphi, y_c) = 2(y_c - r \cdot \sin\varphi) = \frac{\partial f_1}{\partial y_c},$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_c} = \frac{\partial D}{\partial x_c} x_T + \frac{\partial F}{\partial x_c} = 2(x_T - x_c), \tag{33}$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial y_c} = \frac{\partial E}{\partial y_c} y_T + \frac{\partial F}{\partial y_c} = 2(y_T - y_c).$$

Cu aceste relaţii s-au calculat corelaţiile Δx_c Δy_c Δx_T şi Δy_T pentru poziţiile a două puncte : unul situat în regiunea traiectoriei cu curbură mare şi altul într-o regiune de curbură mică, respectiv pentru $\varphi_1 = 30°$ şi $\varphi_4 = 120°$, obţinîndu-se valorile din tabela 2*a* şi 2*b*. Se observă că procesul este aproximativ egal de rapid convergent pentru punctele situate în regiunea de curbură minimă (ρ_{mare}) sau de curbură mare (ρ_{mic}).

Tabela 2a

$\varphi_1 = 30°$

	x_c în m	y_c în m	x_T în m	y_T în m
Grafic				
$\varphi_1 = 30°$	0,46025	0,191	0,3365	0,2425
Δ_I	0,0004537134	0,00050660294	−0,0007172362	0,00020444247
I	0,460703714	0,191506603	0,335782764	0,242704443
Δ_{II}	−0,00000020824	−0,000001007661	0,000003573923	−0,000006062816
II	0,46070350576	0,191505595339	0,335786337923	0,242698380184
Δ_{III}	0,000000024728	0,000000001950474	− 0,000002603007	0,0000033670611
III	0,4607035305	0,1915055973	0,3357837349	0,2427017472

Tabela 2b

$\varphi_4 = 120°$

	x_c în m	y_c în m	x_T în m	y_T în m
Grafic				
$\varphi_4 = 120°$	0,3145	0,2495	0,187	0,296
Δ_I	0,000779546	0,000033853	0,000592513	−0,002559622
I	0,315279546	0,249533853	0,187592513	0,293440378
Δ_{II}	−0,0000001143	−0,0000016034	0,0000603295	−0,0000859823
II	0,3152794317	0,2495322496	0,1876528425	0,2933543957
Δ_{III}	−0,0000001837	0,0000004028	−0,0000453908	0,0000521477
III	0,315279248	0,2495326524	0,1876074517	0,2934065434

De asemenea trebuie observat că, dacă se rezolvă succesiv ecuațiile așa cum indică și structura lor, astfel încît valorile lui f_3, dar mai ales ale lui f_4, sînt calculate deja cu valorile corectate în privința variabilelor x_c și y_c cu ajutorul corecțiilor date de primele două ecuații, atunci formele ultimelor două ecuații se reduc, adică

$$f_3(x_c + \Delta x_c, y_c + \Delta y_c, x_T, y_T) + \frac{\partial f_3}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_3}{\partial y_T}\Delta y_T = 0,$$

$$f_4(x_c + \Delta x_c, y_c + \Delta y_c, x_T, y_T) + \frac{\partial f_4}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_4}{\partial y_T}\Delta y_T = 0, \tag{33'}$$

ceea ce simplifică determinările.

5.3. Trecerea prin aproximații succesive de la o poziție la alta se face în baza acelorași ecuații, la care în prima treaptă de aproximare se consideră și corecțiile variabilelor independente pe lîngă cele ale variabilelor dependente, continuînd apoi ca în cazul anterior. Astfel, pentru prima treaptă de aproximare vom avea ecuațiile

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c}\Delta y_c + \ldots = 0,$$

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_2}{\partial y_c}\Delta y_c + \ldots = 0; \tag{34}$$

$$f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_3}{\partial y_T}\Delta y_T = 0,$$

$$f_4 + \frac{\partial f_4}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_4}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_4}{\partial y_c}\Delta y_c + \frac{\partial f_4}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_4}{\partial y_T}\Delta y_T = 0, \tag{35}$$

unde

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = 2r(\sin \varphi\, x_c - \cos \varphi y_c),$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = \frac{\partial A}{\partial \varphi} x_c + \frac{\partial B}{\partial \varphi} y_c = 2r(\sin \varphi x_c - \cos \varphi y_c) = \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}, \tag{36}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = 2r(\sin \varphi x_T - \cos \varphi y_T),$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial \varphi} = \frac{\partial D}{\partial \varphi} x_T + \frac{\partial E}{\partial \varphi} y_T = 2r(\sin \varphi x_T - \cos \varphi y_T) = \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}.$$

Cu aceste formule s-au calculat deplasările aproximative Δx_c Δy_T Δx_T Δy_T de la o poziție la alta a mecanismului pentru două cazuri : de la $\varphi_1 = 30°$ la $\varphi_2 = 60°$ și între $\varphi_3 = 90°$ la $\varphi_4 = 120°$, avînd în ambele cazuri $\Delta\varphi = 30°$.

Rezultatele și îmbunătățirea preciziei lor sînt redate în tabelele (3*a* și 3*b*). Se mențin aceleași observații în privința convergenței procesului de calcul.

Tabela 3a

De la $\varphi_1 = 30°$ la $\varphi_2 = 60°$

	x_c în m	y_c în m	x_T în m	y_T în m
Grafic				
$\varphi_1 = 30°$	0,46025	0,191	0,3365	0,2425
$\Delta\varphi = 30°$	−0,012815978	0,01639944	−0,007567793	0,02045693
I $\varphi_2 = 60°$	0,447434022	0,20739944	0,328932207	0,26295693
Δ_{II}	−0,01806909	0,007417279	−0,02241423	0,008010087
II	0,429364962	0,214816719	0,306517977	0,270967017
Δ_{III}	−0,0002545447	−0,000734714	−0,0003317555	−0,0010749414
III	0,429110417	0,214082005	0,306186221	0,269892076
Δ_{IV}	−0,00000040656	−0,0000011678	−0,00000058085	−0,0000026357
IV $\varphi_2 = 60°$	0,42911001	0,21408084	0,30618564	0,26988944
Comparativ $\varphi_2 =$ $= 60°$ Grafic	0,428	0,21425	0,305	0,2695

Tabela 3b

De la $\varphi_3 = 90°$ la $\varphi_4 = 120°$

	x_c în m	y_c în m	x_T în m	y_T în m
Grafic				
$\varphi_3 = 90°$	0,375	0,2385	0,25	0,2905
$\Delta\varphi = 30°$	−0,0589808008	0,0185322225	−0,0484372243	−0,0048005907
I $\varphi_4 = 120°$	0,3160191992	0,2570322225	0,2015627757	0,2856994093
Δ_{II}	0,0076566289136	−0,0079124014763	−0,0056074405548	0,0141790321176
II	0,3236758281136	0,2491198210237	0,1959553351452	0,2998784414176
Δ_{III}	−0,0014209160963	−0,0000107240058	0,0011048279396	−0,0001957992611
III	0,3222549120173	0,2491090970179	0,1970601630848	0,2996826421565
Δ_{IV}	0,0002865994393	−0,0001272129703	0,000225008575	−0,0003430909203
IV $= 120°$	0,3225415114566	0,2489818840476	0,1972851716598	0,2993395512362
Comparativ grafic $\varphi_4 = 120°$	0,3145	0,2495	0,187	0,296

Pe diverse trepte de aproximație, coeficienții corecțiilor (derivatele parțiale) pot fi considerate aproape constante și valorile lor pot fi luate, de asemenea, din construcțiile grafice (fig. 10), adică

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_c} = 2\,\vec{BC}_0 = \frac{\partial f_4}{\partial x_T}; \quad \frac{\partial f_1}{\partial y_c} = 2\,\vec{C_0C} = \frac{\partial f_4}{\partial y_T},$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_c} = 2\,\vec{BD}_0 \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_c} = 2\,\vec{D_0D}, \tag{37}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_T} = 2\,\vec{BT}_0 \quad ; \quad \frac{\partial f_3}{\partial y_T} = 2\,\vec{T_0T},$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_c} = 2\,\vec{CQ} \quad ; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_c} = 2\,\vec{QT}$$

și, respectiv (fig. 11), pentru

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 2r\,\vec{C_*C}; \quad \frac{\partial f_3}{\partial \varphi} = \frac{\partial f_4}{\partial \varphi} = 2r\,\vec{T_*T}, \tag{38}$$

ceea ce simplifică mai mult calculele. Rămîne să se calculeze pentru diverse trepte de aproximație numai valorile funcțiilor f_1, f_2, f_3 și f_4.

5.4. Dacă se întrebuinţează celălalt sistem de ecuaţii, se schimbă numai funcţiile f_2 şi f_4, care nu mai depind explicit de φ şi sînt deci mai convenabile pentru calculul deplasărilor aproximative. Avem

$$f_2 = x_c^2 + y_c^2 - 2ax_c + a^2 - R^2 = 0,$$

$$f_4 = x_T^2 + y_T^2 - 2x_T x_c - 2y_T y_c + x_c^2 + y_c^2 - c^2 = 0, \tag{39}$$

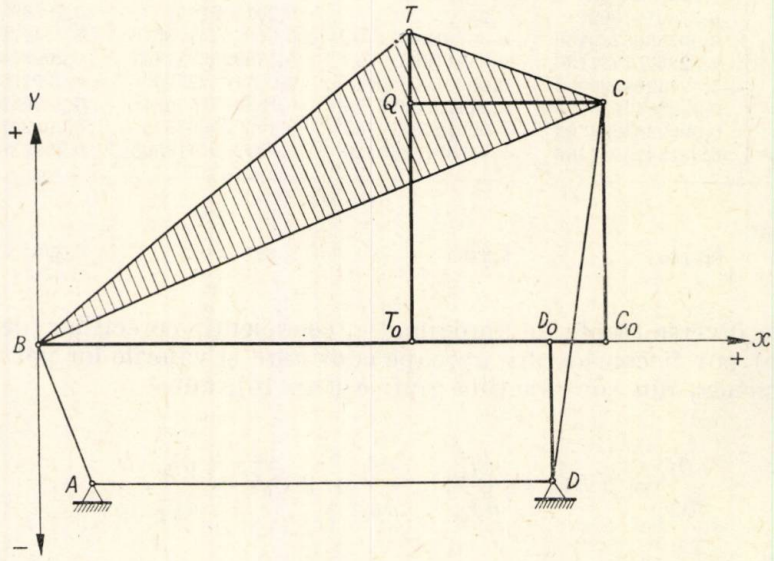


Fig. 10

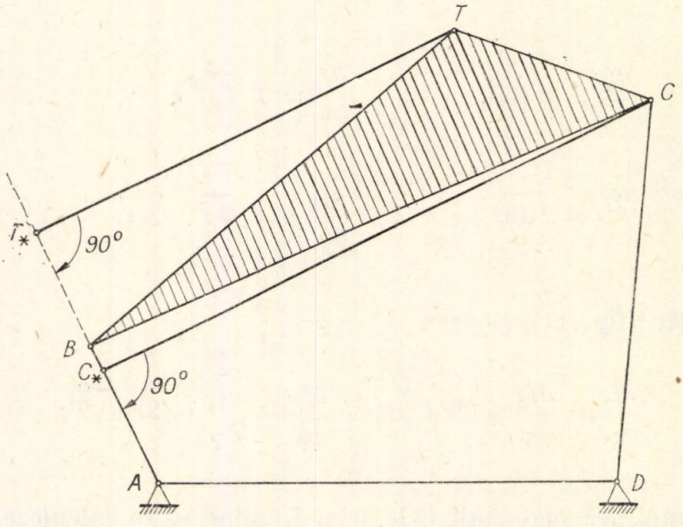


Fig. 11

astfel că

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_c} = 2(x_c - a) \quad ; \quad \frac{\partial f_2}{\partial y_c} = 2y_c,$$

$$\frac{\partial f_4}{\partial x_T} = 2(x_T - x_c) = -\frac{\partial f_4}{\partial x_c}; \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_T} = 2(y_T - y_c) = -\frac{\partial f_4}{\partial y_c}, \tag{40}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = 0 \quad , \quad \frac{\partial f_4}{\partial \varphi} = 0.$$

Ecuațiile abaterilor sau deplasărilor aproximative sînt

$$f_1(\varphi x_c\, y_c) + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_1}{\partial y_c}\Delta y_c = 0,$$

$$f_2(x_c\, y_c) + \ldots + \frac{\partial f_2}{\partial x_c}\Delta x_c + \frac{\partial f_2}{\partial y_c}\Delta y_c = 0\,; \tag{41}$$

$$f_3(\varphi x_T\, y_T) + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_3}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_3}{\partial y_T}\Delta y_T = 0,$$

$$f_4(x_c + \Delta x_c, y_c + \Delta y_c, x_T, y_T) + \frac{\partial f_4}{\partial x_T}\Delta x_T + \frac{\partial f_4}{\partial y_T}\Delta y_T = 0, \tag{42}$$

cu $\Delta\varphi \neq 0$ sau $\Delta\varphi = 0$.

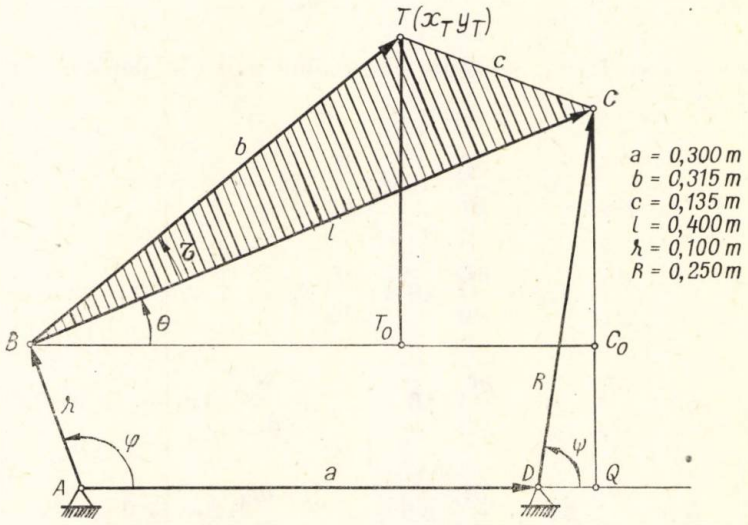


Fig. 12

5.5. În metoda contururilor (fig. 12), ecuațiile de poziții sînt

$$f_1 = r \cdot \cos\varphi + l \cdot \cos\theta - R \cdot \cos\psi - a = 0, \tag{43}$$

$$f_2 = r \cdot \sin\varphi + l \cdot \sin\theta - R \cdot \sin\psi = 0;$$

$$f_3 = x_T - r \cdot \cos\varphi - b \cdot \cos(\theta + \tau) = 0, \tag{44}$$

$$f_4 = y_T - r \cdot \sin\varphi - b \cdot \sin(\theta + \tau) = 0,$$

astfel că

$$\frac{\partial f_1}{\partial \varphi} = -r \cdot \sin\varphi = -\frac{\partial f_3}{\partial \varphi}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial \varphi} = r \cdot \cos\varphi = -\frac{\partial f_4}{\partial \varphi},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \theta} = -l \cdot \sin\theta = \overrightarrow{CC_0}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial \theta} = l \cdot \cos\theta = \overrightarrow{BC_0},$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial \theta} = b \cdot \sin(\theta + \tau) = \overrightarrow{T_0T}; \quad \frac{\partial f_4}{\partial \theta} = -b \cdot \cos(\theta + \tau) = \overrightarrow{T_0B},$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial \psi} = R \cdot \sin\psi = \overrightarrow{QC}; \quad \frac{\partial f_2}{\partial \psi} = -R \cdot \cos\psi = \overrightarrow{QD}, \tag{45}$$

$$\frac{\partial f_3}{\partial x_T} = 1, \quad \frac{\partial f_4}{\partial y_T} = 1.$$

Deci se vor obține ecuațiile corecțiilor sau ale deplasărilor aproximative prin

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial f_1}{\partial \psi}\Delta\psi + \ldots = 0,$$

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \psi}\Delta\psi + \ldots = 0; \tag{46}$$

$$f_3 + \frac{\partial f_3}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_3}{\partial \theta}\Delta\theta + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial x_T}\Delta x_T + \ldots = 0,$$

$$f_4 + \frac{\partial f_4}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_4}{\partial \theta}\Delta\theta + \ldots + \frac{\partial f_4}{\partial y_T}\Delta y_T = 0 \tag{47}$$

sau, mai concis,

$$f_1(\varphi + \Delta\varphi, \theta, \psi) + \frac{\partial f_1}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial f_1}{\partial \psi}\Delta\psi = 0,$$
$$f_2(\varphi + \Delta\varphi, \theta, \psi) + \frac{\partial f_2}{\partial \theta}\Delta\theta + \frac{\partial f_2}{\partial \psi}\Delta\psi = 0; \tag{48}$$

$$f_3(\varphi + \Delta\varphi, \theta + \Delta\theta, x_T) + \Delta x_T = 0,$$
$$f_4(\varphi + \Delta\varphi, \theta + \Delta\theta, y_T) + \Delta y_T = 0, \tag{49}$$

ceea ce arată o simplificare a calculelor față de cazul anterior, cînd s-au întrebuințat ecuațiile de poziții prin metoda elementelor.

Pentru îmbunătățirea preciziei pozițiilor de pe figura 12 s-a întocmit tabela 4*a* și 4*b*. Pentru determinarea deplasărilor aproximative s-a întocmit tabela 5*a* și 5*b*.

6. *Exemplificări* la mecanismul Sthephenson. Dacă la mecanismul patrulater monocontur numărul ecuațiilor și al necunoscutelor era egal în cele două metode, la mecanismele biconture și mai ales la mecanismele multiconture metoda coordonatelor polare a contururilor necesită mai puține ecuații și necunoscute decît metoda coordonatelor carteziene a elementelor. Într-adevăr, în ultima metodă numărul acestora este $(4c-3n-e)$, în care e reprezintă numărul variabilelor și, respectiv, al

Tabela 4a

$\varphi = \varphi_1 = 30°$

	θ	ψ	x_T în m	y_T în m
Grafic	20°30′	49°40′	0,3365	0,2425
Δ_I	0°12′41″	0°19′	−0,0006996296904	0,0001819250548
I	20°42′41″	49°59′	0,3358003703096	0,2426819250548
Δ_{II}	0°0′0,02″	0°0′0,4″	0,0000000502997	−0,0000006940259
II	20°42′41″	49°59′	0,3358004206093	0,2426812310289

Tabela 4b

$\varphi = \varphi_4 = 120°$

	θ	ψ	x_T în m	y_T în m
Grafic	24°20′	86°30′	0,187	0,296
Δ_I	− 0°17′50″	− 0°0′45″	0,0006059879841	−0,0025849161431
I	24°2′10″	86°29′15″	0,1876059879841	0,2934150838569
Δ_{II}	0°0′0,26″	0°0′0,18″	−0,0000029625503	−0,000003409523
II	24°2′10″	86°29′15″	0,1876030254338	0,2934116743339

Tabela 5a

De la $\varphi_1=30°$ la $\varphi_2=60°$

	θ	ψ	x_T în m	y_T în m
Grafic $\varphi_1=30°$	20°30′	49°40′	0,3365	0,2425
Δ_I la $\varphi_2=60°$	−4°58′4″	4°26′17″	−0,0095452359209	0,0229366547148
I	15°31′56″	54°6′17″	0,3269547640791	0,2654366547148
Δ_{II}	3°8′44″	4°49′41″	−0,0206824292186	0,005144830072
II	18°40′40″	58°55′58″	0,3062723348605	0,2705814847868
Δ_{III}	−0°5′51″	−0°2′17″	−0,0000831224112	−0,0006972747796
III	18°34′49″	58°53′41″	0,3061892124493	0,2698842100072
Grafic $\varphi_2=60°$ pentru comparație	18°40′	59°	0,305	0,2695

Tabela 5b

De la $\varphi_3=90°$ la $\varphi_4=120°$

	θ	ψ	x_T în m	y_T în m
Grafic $\varphi_3=90°$	20°	72°30′	0,25	0,2905
Δ_I la $\varphi_4=120°$	3°5′3″	14°11′3″	−0,060992774725	0,0126150594868
I	23°5′3″	86°41′3″	0,189007225275	0,3031150594868
Δ_{II}	0°56′55″	−0°12′35″	−0,0013603318323	−0,009689804098
II	24°1′58″	86°28′28″	0,1876468934427	0,2934252553888
Δ_{III}	0°0′12″	0°0′47″	−0,0000438169224	−0,0000293592436
III	24°2′10″	86°29′15″	0,1876030765203	0,2933958961452
Grafic $\varphi_4=120°$ pentru comparație	24°20′	86°30′	0,187	0,296

ecuațiilor aferente bazei și manivelelor conducătoare, iar în prima metodă numărul lor este $2N$, astfel că diferența este

$$D = (4c - 3n - e) - 2N = M + 4N - (3 + e) \geqslant 0,$$

unde

$$c = M + 3N; \quad n = (1 + M) + 2N.$$

La mecanismul patrulater avem $M=1$, $N=1$, $e=2$, deci $D=0$, iar la mecanismul Sthephenson $M=1$, $N=2$, $e=2$, deci $D=4$.

Pe de altă parte, și forma ecuațiilor din metoda contururilor este mai simplă. De aceea vom exemplifica pe lanțul Sthephenson numai ecuațiile de poziții obținute prin această metodă (fig. 13), care sînt următoarele :

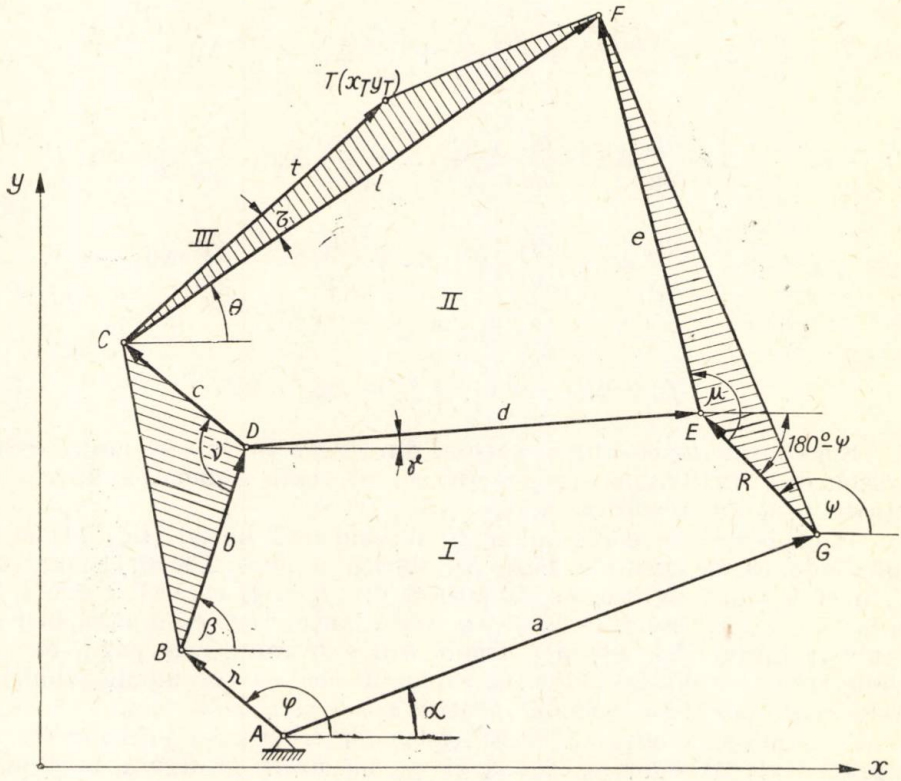


Fig. 13

$$f_1 = r \cdot \cos\varphi + b \cdot \cos\beta + d \cdot \cos\gamma - R \cdot \cos\psi - a \cdot \cos\alpha = 0,$$
$$f_2 = r \cdot \sin\varphi + b \cdot \sin\beta + d \cdot \sin\gamma - R \cdot \sin\psi - a \cdot \sin\alpha = 0\,; \tag{50}$$

$$f_3 = -c \cdot \cos(\nu - \beta) + l \cdot \cos\theta - d \cdot \cos\gamma + e \cdot \cos(\mu + \psi) = 0,$$
$$f_4 = c \cdot \sin(\nu - \beta) + l \cdot \sin\theta - d \cdot \sin\gamma + e \cdot \sin(\mu + \psi) = 0. \tag{51}$$

La aceasta se adaugă ecuațiile care poziționează punctul trasor T (fig. 13), spre exemplu

$$f_5 = x_T - r \cdot \cos\varphi - b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos(\nu - \beta) - t \cdot \cos(\tau + \theta) = 0,$$
$$f_6 = y_T - r \cdot \sin\varphi - b \cdot \sin\beta - c \cdot \sin(\nu - \beta) - t \cdot \sin(\tau + \theta) = 0. \tag{52}$$

Ecuaţiile pentru calculul aproximaţiilor succesive vor fi

$$f_1 + \frac{\partial f_1}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f_1}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f_1}{\partial \gamma}\Delta\gamma + \frac{\partial f_1}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_1}{\partial \psi}\Delta\psi \ldots = 0,$$

$$f_2 + \frac{\partial f_2}{\partial \alpha}\Delta\alpha + \frac{\partial f_2}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f_2}{\partial \gamma}\Delta\gamma + \frac{\partial f_2}{\partial \varphi}\Delta\varphi + \frac{\partial f_2}{\partial \psi}\Delta\psi + \ldots = 0; \tag{53}$$

$$f_3 + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f_3}{\partial \gamma}\Delta\gamma + \ldots + \frac{\partial f_3}{\partial \psi}\Delta\psi + \frac{\partial f_3}{\partial \theta}\Delta\theta = 0,$$

$$f_4 + \ldots + \frac{\partial f_4}{\partial \beta}\Delta\beta + \frac{\partial f_4}{\partial \gamma}\Delta\gamma + \ldots + \frac{\partial f_4}{\partial \psi}\Delta\psi + \frac{\partial f_4}{\partial \theta}\Delta\theta = 0 \tag{54}$$

şi

$$f_5 + \Delta x_T = 0; \qquad f_6 + \Delta y_T = 0. \tag{55}$$

S-a considerat cazul mai general din figura 13, în care lanţul Sthephenson este fixat numai în punctul A, iar toate elementele au rotaţii marcate prin unghiurile α, β, γ, φ, ψ şi θ.

Dacă lanţul se descompune în mecanismul iniţial (fig. 14) şi în două diade, ca, de exemplu, baza BC, deci $\beta_0 = \text{const}$, $\Delta\beta = 0$, şi manivela CF, deci $\theta_0 = \text{dat}$, $\Delta\theta = 0$, se calculează din f_3 şi f_4 corecţiile $\Delta\gamma$ şi $\Delta\psi$ şi apoi din f_1 şi f_2 corecţiile $\Delta\alpha$ şi $\Delta\varphi$. Dacă lanţul se descompune într-un mecanism iniţial (fig. 14) şi o triadă sau o tetradă, cele patru ecuaţii trebuie rezolvate deodată. Pentru exemplificare s-a considerat problema determinării poziţiilor tetradei pentru $\alpha_0 = 0$ şi $\varphi_0 = 30^\circ + \alpha_0$.

Alegîndu-se arbitrar $\beta_0 = 110^\circ$ şi $\theta_0 = 30^\circ$, s-au găsit prin construcţiile grafice ale diadelor γ_0, ψ_0, α_0 şi φ_0, măsurate pe figura 14 şi inserate în tabela 6.

Păstrîndu-se $\alpha_0 = \text{const}$, deci $\Delta\alpha = 0$, şi dînd creşterea unghiului conducător $\Delta\varphi = 30^\circ + \alpha_0 - \varphi_0$, se determină în prima aproximaţie β, γ, φ, θ, după care se continuă îmbunătăţirea preciziei prin aproximaţii succesive cu $\Delta\alpha = 0$ şi $\Delta\varphi = 0$.

7. *Utilizarea vitezelor*, acceleraţiilor şi supraacceleraţiilor pentru determinarea deplasărilor. Din aproximarea mişcării unui punct în vecinătatea unei poziţii [1] pe baza dezvoltării în serie Taylor a vectorului de poziţie

$$\bar{r}(t) = \bar{r}(0) + \frac{t}{1!}\dot{\bar{r}}(0) + \frac{t^2}{2!}\ddot{\bar{r}}(0) + \ldots, \tag{56}$$

se determină:

a) în vecinătatea de ordinul întîi a originii O, mişcarea curbilinie poate fi aproximată cu o mişcare rectilinie uniformă pe tangenta în O la traiectorie, cu viteza din punctul O al mobilului;

b) în vecinătatea de ordinul doi a originii O, mișcarea curbilinie poate fi aproximată cu două mișcări rectilinii: prima este o mișcare uniformă pe tangenta la traiectorie cu viteza $\dot{\bar{r}}(0)$ și a doua uniform variată cu accelerația $\ddot{\bar{r}}(0)$. Ultima reprezintă deviația mișcării;

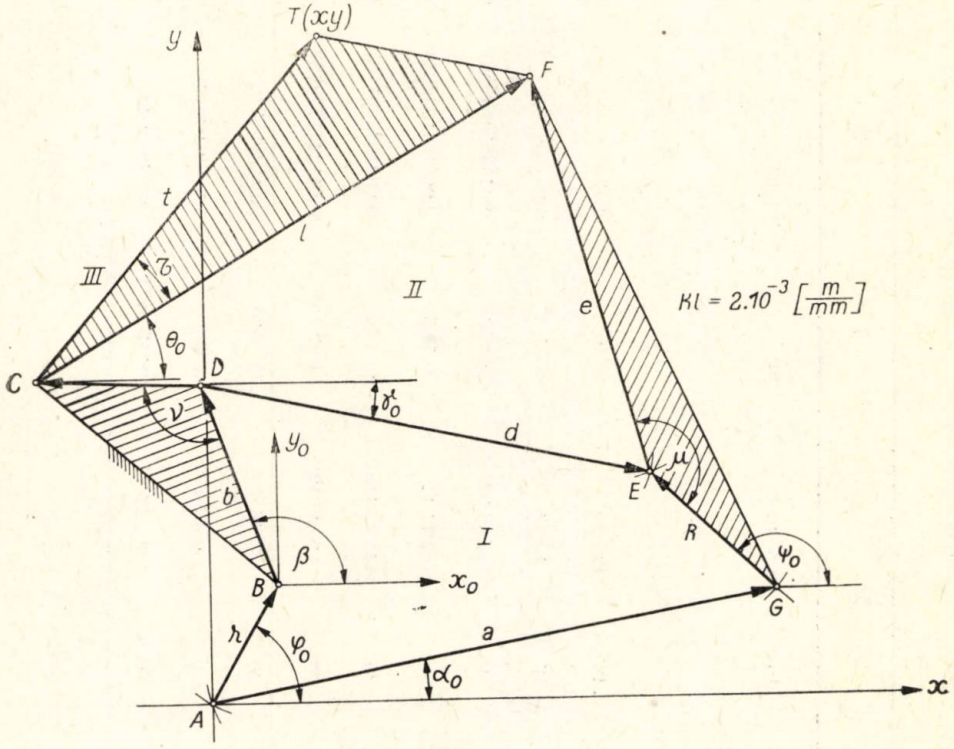


Fig. 14

c) precizii mai mari se obțin considerînd mișcările elementare cu accelerații de diverse ordine, adică

$$\Delta\bar{r} = \bar{v}\Delta t + \frac{1}{2!}\bar{a}(\Delta t)^2 + \frac{1}{3!}\bar{a}^{(2)}(\Delta t)^3 + \ldots, \tag{57}$$

$$\Delta\varphi = \omega \cdot \Delta t, \tag{58}$$

astfel că

$$\Delta\bar{r} = \frac{\bar{v}}{\omega}\Delta\varphi + \frac{1}{2!}\cdot\frac{\bar{a}}{\omega^2}(\Delta\varphi)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{\bar{a}^{(2)}}{\omega^3}(\Delta\varphi)^3 + \ldots \tag{59}$$

La mecanismul patrulater (fig. 7) s-au calculat grafoanalitic vitezele, accelerațiile și supraaccelerațiile pentru poziția $\varphi_1 = 30°$.

Tabela 6

$\varphi_1 = 30°$

	α	β	γ	φ	ψ	θ	x_T în m	y_T în m
Grafic	10°20′	110°	12°20′	59°	136°40′	30°	0,063	0,345
Grafic ptr. o rotire a axelor cu $\alpha = 10°20'$	0°	99°40′	2°	48°40′	126°20′	19°40′	0,123	0,328
$\Delta\varphi$	0°	24°49′34″	16°33′53″	−18°40′	10°29′32″	9°21′53″	−0,0476349339999	−0,0406220166
0	0°	124°29′34″	18°33′53″	30°	136°49′32″	29°1′53″	0,0753650660001	0,2873779834
Δ_I	0°	−2°31′21″	−1°28′55″	0°	−2°17′17″	0°59′57″	−0,0061671692834	0,0048600177833
I	0°	121°58′13″	17°4′58″	30°	134°32′15″	30°1′50″	0,0691978967167	0,2922380011833
Δ_{II}	0°	−4°37′1″	0°0′59″	0°	−0°,44′12″	−1°22′59″	0,0112411770833	0,0075515210167
II	0°	117°21′12″	17°5′57″	30°	133°48′3″	28°38′51″	0,0804390738	0,2997895222
Δ_{III}	0°	0°12′59″	−0°6′29″	0°	0°4′50‴	0°9′3″	−0,0008028438	0,0001052474334
III	0°	117°34′11″	16°59′28″	30°	133°52′53″	28°47′54″	0,07963623	0,2996842747666
Grafic pentru comparație	0°			30°			0,0805	0,2995

Pentru simplitate s-au întrebuințat accelerațiile compuse [1], care se bazează pe relațiile vectoriale ale vitezelor :

$$\overline{V}_C = \overline{V}_B + \overline{V}_{CB} = \overline{V}_D + \overline{V}_{CD}, \tag{60}$$

și au avantajul construcțiilor grafice asemenea, cu laturi paralele sau perpendiculare. De asemenea s-a considerat $\omega_1 = 3{,}14$ rad/s.

Pentru viteze (fig. 15) s-au determinat

$$\overline{V}_B = \overline{w}_1 \times \overline{r} = k_v(\overline{ib}) \text{ și } \overline{V}_D = 0,$$

iar $\overline{V}_{CB}$ este $\perp CB$ și $\overline{V}_{CD}$ este $\perp CD$.

Pentru accelerațiile primare (fig. 16) s-au calculat

$$\overline{a}'_{CB} = \omega_2^2 \overline{BC} = k_a(\overline{b'c'}) \quad \text{și} \quad \overline{a}'_{CD} = \omega_3^2 \overline{DC} = k_a(\overline{d'c'}),$$

s-au adăugat accelerațiile reale

$$\overline{a}_B = \omega_1^2 \overline{r} = k_a(\overline{b'b''}) \quad \text{și} \quad \overline{a}_D = 0\,;\ d' \equiv d'',$$

iar accelerațiile secundare s-au luat

$$\overline{a}''_{CB} \perp CB \text{ și } \overline{a}''_{CD} \perp CD$$

Pentru supraaccelerațiile primare (fig. 17) s-au calculat asemănător

$$\begin{aligned} \overline{a}^{(2)\prime}_{CB} &= A_2(\omega_2)\,\overline{BC} = k_a(\overline{b'c'}), \\ \overline{a}^{(2)\prime}_{CD} &= A_3(\omega_3)\,\overline{DC} = k_a\,\overline{d'c'}, \end{aligned} \tag{61}$$

cu $A_2(\omega_2) = 3\omega_2\dot{\omega}_2$ și $A_3(\omega_3) = 3\,\omega_3\dot{\omega}_3$.

S-au adăugat supraaccelerațiile reale ale punctelor B și D, adică

$$\begin{aligned} \overline{a}_B^{(2)} &= -A_1(\omega_1)\,\overline{AB} + B_1(\omega_1)\,\overline{AB}\cdot i, \\ \overline{a}_D^{(2)} &= 0\,;\ d' = d'', \end{aligned} \tag{62}$$

unde

$$A_1 = 3\omega_1\dot{\omega}_1 \text{ și } B_1 = \ddot{\omega}_1 - \omega_1^3$$

și s-au desenat supraaccelerațiile secundare

$$\overline{a}^{(2)\prime\prime}_{CB} \perp CB \text{ și } \overline{a}^{(2)\prime\prime}_{CD} \perp CD. \tag{63}$$

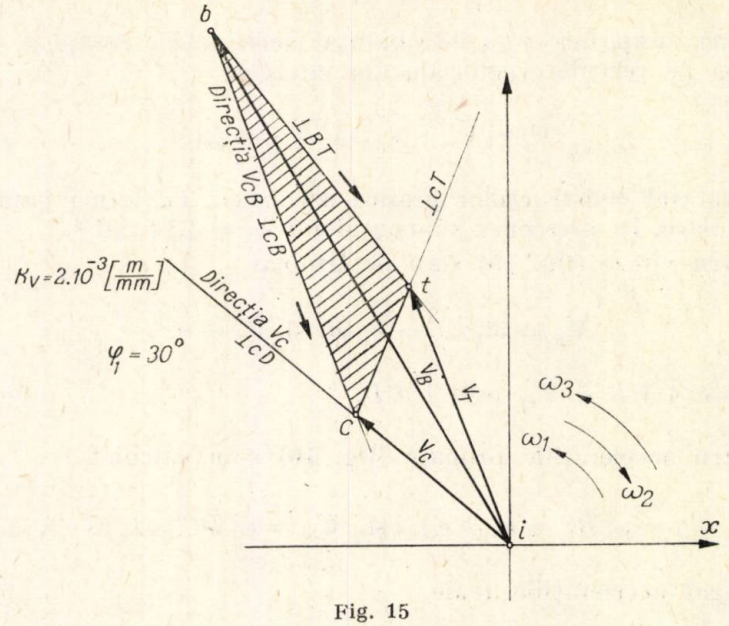

b
Direcția VcB ⊥cB
⊥BT
⊥cT
$K_V = 2.10^{-3}\left[\frac{m}{mm}\right]$
Direcția Vc ⊥cD
$\varphi_1 = 30°$
t
C
V_B
V_T
V_c
ω_3
ω_1
ω_2
i
x

Fig. 15

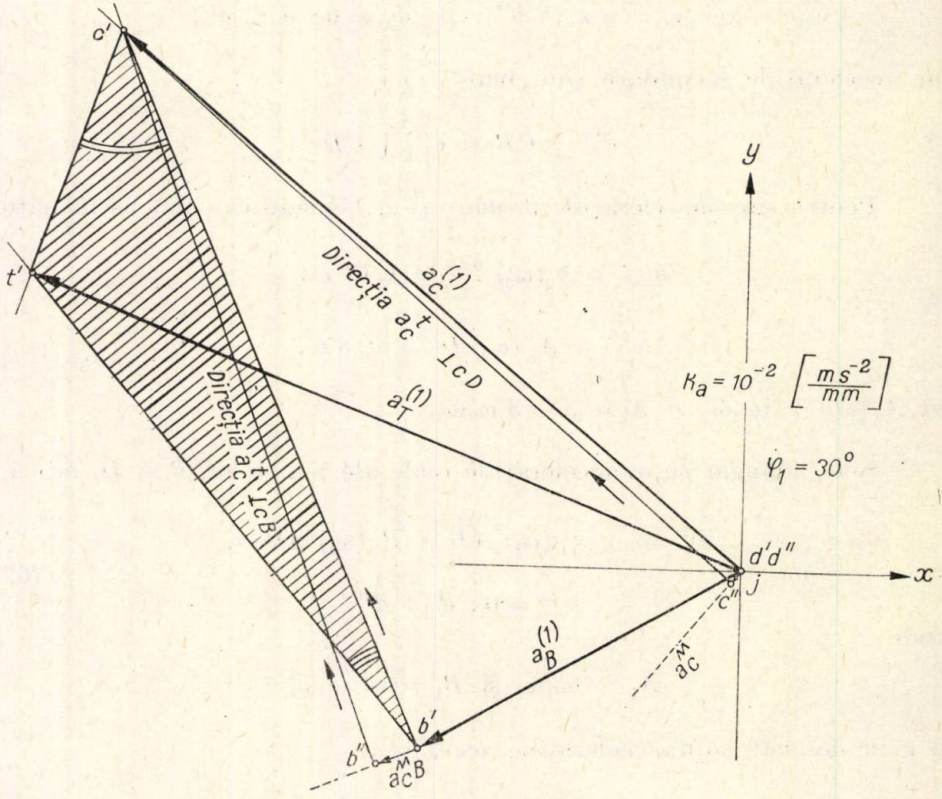

c'
t'
Direcția a_c^t ⊥cD
$a_c^{(1)}$
$a_T^{(1)}$
Direcția a_c^t ⊥cB
y
$K_a = 10^{-2}\left[\frac{m\,s^{-2}}{mm}\right]$
$\varphi_1 = 30°$
d'd''
x
c''
j
$a_B^{(1)}$
a_c^M
b'
b''
a_{cB}^M

Fig. 16

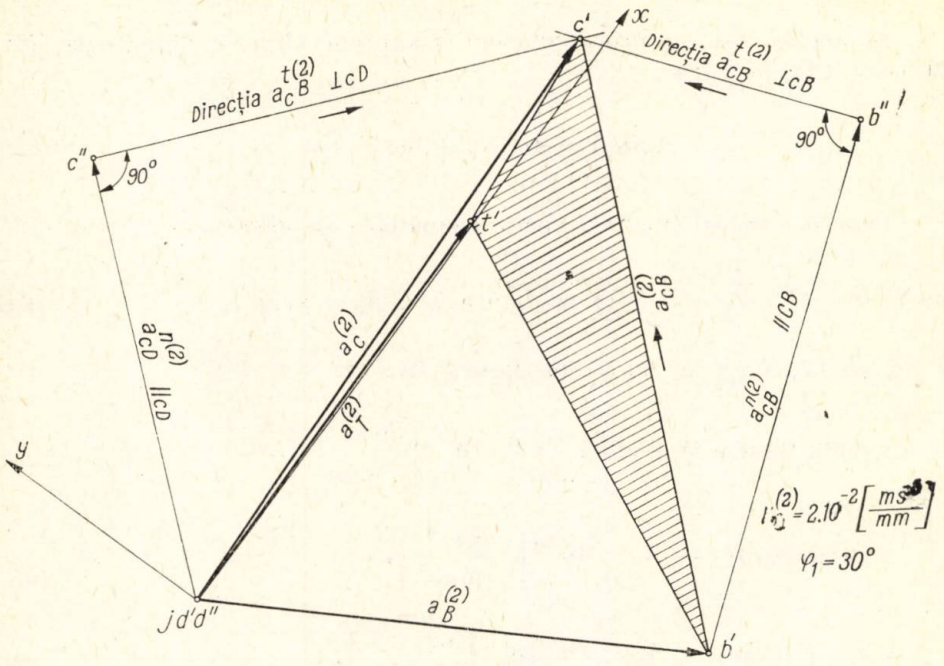

x
c'
Direcția $a_{cB}^{t(2)}$ ⊥cB
Direcția $a_{cB}^{t(2)}$ ⊥cB
c''
90°
90°
b''
t'
$a_{cD}^{n(2)}$ ∥cD
$a_{c}^{(2)}$
$a_{T}^{(2)}$
$a_{cB}^{(2)}$
$a_{cB}^{n(2)}$ ∥CB
y
jd'd''
$a_{B}^{(2)}$
b'
$l'^{(2)}_{\omega} = 2.10^{-2}\left[\frac{ms^{-2}}{mm}\right]$
$\varphi_1 = 30°$

Fig. 17

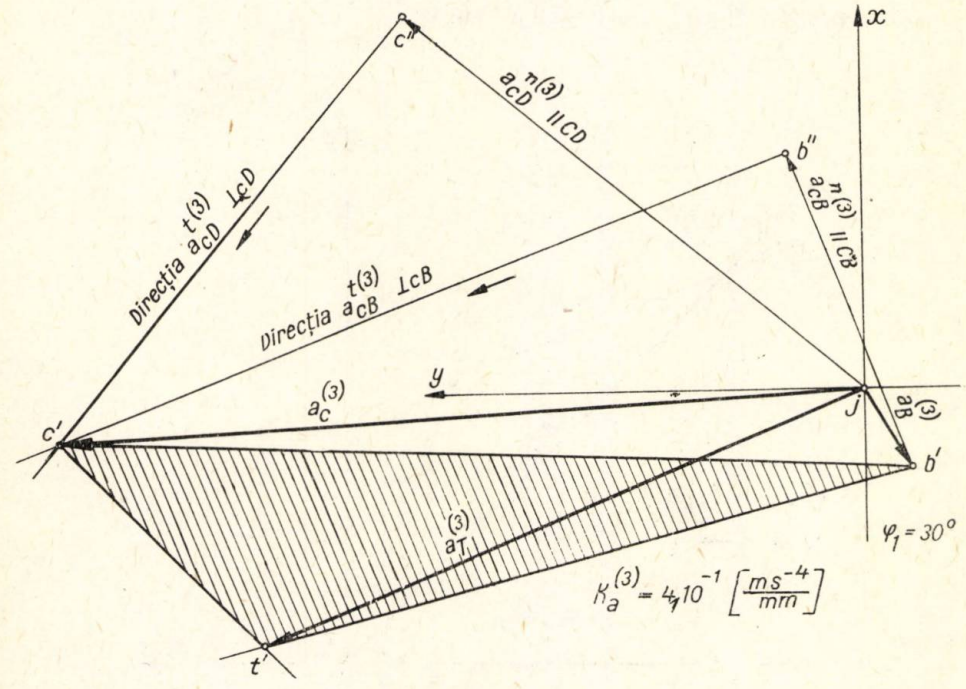

x
c''
$a_{cD}^{n(3)}$ ∥CD
b''
$a_{cB}^{n(3)}$ ∥CB
Direcția $a_{cD}^{t(3)}$ ⊥cD
Direcția $a_{cB}^{t(3)}$ ⊥cB
$a_{c}^{(3)}$
y
j
$a_{B}^{(3)}$
c'
b'
$a_{T}^{(3)}$
t'
$\varphi_1 = 30°$
$K_a^{(3)} = 4_1 10^{-1}\left[\frac{ms^{-4}}{mm}\right]$

Fig. 18

În același fel s-a procedat pentru supraaccelerația următoare $\bar{a}_T^{(3}$ din (fig. 18), la care

$$A_2(\omega_2) = 4\omega_2\ddot{\omega}_2 + 3\dot{\omega}_2^2 - \omega_2^4.$$

Pentru punctul-trasor T, prin asemănare se găsește

pe figura 15 : $\overline{V}_T = k_v(\overline{it})$; pe figura 16 : $\bar{a}_T = k_a(\overline{jt'})$, (64

pe figura 17 : $\bar{a}_T^{(2)} = k_a^{(2)}(\overline{jt'})$; pe figura 18 : $\bar{a}_T^{(3)} = k_a(\overline{jt'})$,

unde pentru figura 15 avem $k_v = 2 \cdot 10^{-3}\left[\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{mm}}\right]$,

pentru figura 16 $k_a = 10^{-2}\left[\frac{\text{m.s}^{-2}}{\text{mm}}\right]$, (65

pentru figura 17 $\text{k}_a^{(2)} = 2 \cdot 10^{-2}\left[\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-3}}{\text{mm}}\right]$,

iar pentru figura 18 $k_a^{(3)} = 4 \cdot 10^{-1}\left[\frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-4}}{\text{mm}}\right]$.

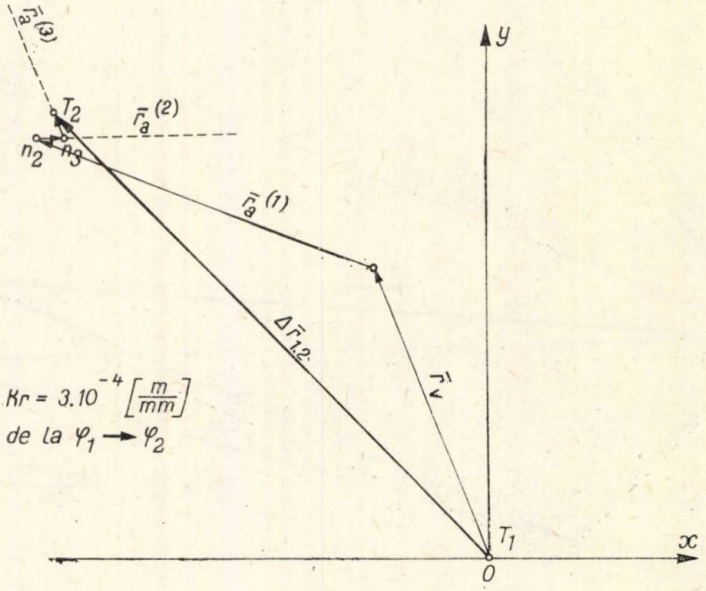


Fig. 19

Tabela 7

$\varphi_1=30°$ la $\varphi_2=60°$

	$\bar{r}_T$ în m	x_T în m	y_T în m
Grafic $\bar{r}_1$ $\varphi_1=30°$	$r_{T1}=0{,}41375$ măsurat pe fig. 7	$x_1=0{,}335$	$y_1=0{,}2425$
$\bar{r}_v$	0,0243333	$r_{v_x}=-0{,}00885$	$r_{v_y}=0{,}02274$
$\Delta\bar{r}$ I	—	0,32615	0,26524
$\bar{r}_a$ (1)	0,0282638	$r_{a_x}(1)=-0{,}02646$	$r_{a_y}(1)=0{,}01005$
$\Delta\bar{r}$ II	—	0,29969	0,27529
$\bar{r}_a(2)$	0,0021604	$r_{a_x}(2)=0{,}00222$	$r_{a_y}(2)=0{,}00006$
$\Delta\bar{r}$ III	—	0,30191	0,27535
$\bar{r}_a(3)$	0,0021861	$r_{a_x}(3)=-0{,}0009$	$r_{a_y}(3)=0{,}00204$
$\Delta\bar{r}$ IV $\varphi_2=60°$	—	0,30101	0,27739
Comparativ Grafic $\bar{r}_2$ $\varphi_2=60°$	$r_{T2}=0{,}407$ măsurat pe figura 7	$x_2=0{,}3045$	$y_2=0{,}2695$

Pentru comparație s-au întocmit tabela 7 și figura 19.

Metoda accelerațiilor are mai multă utilitate în mecanismele unde chiar determinările grafice ale pozițiilor sînt greoaie, adică pentru mecanismele cu triade și tetrade. Spre exemplu, la mecanismul Sthephenson se pot calcula prin diverse metode [1] accelerațiile punctului F, determinîndu-se deplasările aproximative dintr-o poziție în alta, ceea ce permite construcția grafică directă a acestui mecanism pentru orice poziție a manivelei conducătoare.

Expunerea generală și exemplificările executate arată însemnătatea metodei aproximațiilor succesive în problema pozițiilor mecanismelor.

Afară de avantajele preciziei, ea are și avantajul unei aplicări ușoare și sistematizate pentru mecanismele mono- și bicontururi.

Pe același algoritm de calcul se pot efectua programări la mașinile automate de calcul.

Primită la redacție la 15 ianuarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, *Bazele analizei mecanismelor*, București, Edit. Academiei, 1967.

CONTRIBUȚII LA SINTEZA CINEMATICĂ A MECANISMELOR PLANE CU PATRU ELEMENTE*)

de PĂUN ANTONESCU
Institutul politehnic București

În cazul mecanismului patrulater plan, dacă se impune raportul de transmitere într-o poziție absolut asociată a manivelei și balansierului, există o infinitate de mecanisme care îndeplinesc condițiile cerute.
Considerînd mecanismul manivelă-piston și impunînd viteza unghiulară a manivelei, respectiv viteza liniară a pistonului pentru o poziție absolut asociată, rezultă, în general, o singură soluție. Dacă se impune raportul de transmitere în două poziții absolut asociate ale manivelei și balansierului, există soluție numai dacă între datele inițiale există o relație de condiție.
Rezolvarea problemelor enunțate se face analitic, utilizînd proprietatea centrului instantaneu de rotație. Se consideră și cazurile particulare care pot apărea la sinteza mecanismului patrulater și manivelă-piston.

1. SINTEZA CINEMATICĂ PE BAZA POZIȚIILOR ABSOLUT ASOCIATE

Prin poziții absolut asociate se înțeleg [2] pozițiile ocupate în același timp de două sau de mai multe elemente legate la bază. Aceste elemente pot fi legate la batiu prin cuple de rotație sau de translație, poziționarea

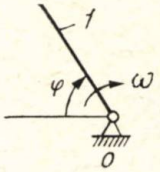


Fig. 1

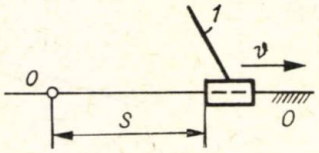


Fig. 2

lor făcîndu-se prin unghiul de rotație (fig. 1), respectiv prin depărtarea față de un reper fix (fig. 2).

Dacă în aceste poziții absolut asociate ale elementelor date se impun și vitezele unghiulare, respectiv liniare, se poate face sinteza cinematică

*) Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23—27 iunie 1969.

a mecanismului plan pentru un număr dat de poziții absolut asociate. Pentru k elemente date (legate la batiu) va rezulta un mecanism cu $2k-1$ elemente mobile, format prin alungire cu diade [5].

2. SINTEZA CINEMATICĂ PENTRU O POZIȚIE ABSOLUT ASOCIATĂ

Problema este tratată în literatura de specialitate [1] pentru cazul mecanismului patrulater (fig. 3). Pentru poziția absolut asociată impusă elementelor *1*, *3*, se poate determina imediat punctul *I*, CIR-ul bielei *2*, care trebuie să transmită în poziția impusă mișcarea de la elementul conducător *1* la cel condus *3* într-un raport dat $i_{13} = \frac{\omega_1}{\omega_3}$.

Se impun deci funcțiile de transmitere de ordinul 0 și 1 [3, 4] și trebuie determinate lungimile elementelor mobile a, b, c.

Din triunghiul A_0B_0I rezultă (fig. 4)

$$A_0I = d\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi-\psi)}, \tag{2.1}$$

$$B_0I = d\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}. \tag{2.2}$$

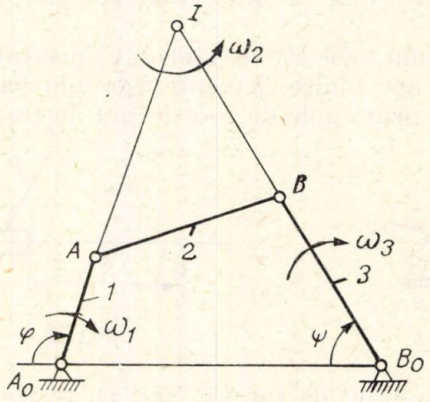


Fig. 3

Se poate scrie

$$A_0I = a + AI,$$

$$B_0I = c + BI.$$

Punctele A, B, aparţinînd şi bielei, se vor roti în jurul punctului I cu aceeaşi viteză unghiulară instantanee ω_2, de unde rezultă

$$\frac{AI}{BI} = \frac{a}{c}\frac{\omega_1}{\omega_3} = \frac{a}{c} i_{13}. \tag{2.3}$$

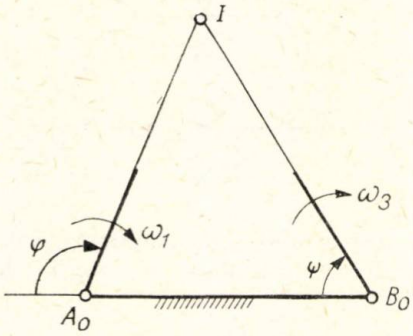


Fig. 4

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Din relaţiile (2.1) şi (2.2) rezultă

$$a = d\frac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)} - AI, \tag{2.1'}$$

$$c = d\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \psi)} - BI. \tag{2.2'}$$

Avînd trei relaţii (2.1'), (2.2'), (2.3) şi patru necunoscute (a, c, AI, BI), rezultă în cazul sintezei pentru o poziţie absolut asociată o infinitate de soluţii (fig. 4).

Se poate astfel alege una dintre necunoscute, de exemplu a (lungimea manivelei), şi rezultă celelalte, dintre care

$$c = \frac{d\dfrac{\sin\varphi}{\sin(\varphi - \psi)}}{1 - \dfrac{\omega_3}{\omega_1}\left[1 + \dfrac{d}{a}\cdot\dfrac{\sin\psi}{\sin(\varphi - \psi)}\right]}. \tag{2.4}$$

Pentru $\omega_1 = \omega_3$ rezultă

$$c = a\frac{\sin\varphi}{\sin\psi}, \tag{2.4'}$$

adică lungimile elementelor *1*, *3* nu depind de lungimea bazei d.

Dar relația (2.4′) se mai poate scrie

$$\frac{c}{\sin\varphi} = \frac{a}{\sin\psi}, \tag{2.4''}$$

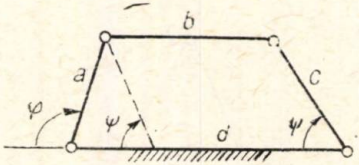


Fig. 5

ceea ce arată că a și c sînt laturile unui triunghi și deci biela $AB=b$ este paralelă cu $A_0B_0=d$, avînd lungimea în funcție de aceasta din urmă (fig. 5):

$$b = d + a\cos\varphi - c\cos\psi. \tag{2.5}$$

Pentru $\omega_3=0$, $\omega_1 \neq 0$ (poziție extremă), din (2.4) rezultă

$$c = d\frac{\sin\varphi}{\sin(\varphi-\psi)}, \tag{2.6}$$

adică $c=B_0B=B_0I$ (fig. 6).

În cazul sintezei mecanismului manivelă-piston se dau φ (poziția manivelei), s (poziția pistonului) și ω_1, respectiv v_3 (fig. 7).

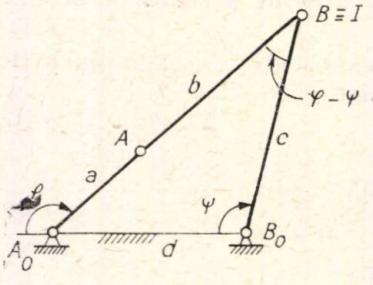


Fig. 6

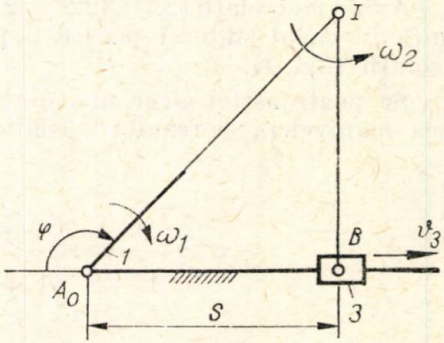


Fig. 7

Din triunghiul A_0IB rezultă

$$A_0I = \frac{s}{\cos(180-\varphi)} \quad \text{sau} \quad a + AI = -\frac{s}{\cos\varphi}. \tag{2.7}$$

Semnul (—) arată că pentru $\varphi > 90°$ punctul I este deasupra ghidajului fix, iar pentru $\varphi < 90°$ dedesubt.

Din rotaţia instantanee în jurul CIR-ului I se obţine

$$\frac{AI}{BI} = \frac{a}{v_3}\omega_1. \tag{2.8}$$

Dar $BI = s\,\mathrm{tg}\,(180 - \varphi) = -s\,\mathrm{tg}\,\varphi$ (pentru $\varphi > 90°$, BI se măsoară deasupra ghidajului fix, iar pentru $\varphi < 90°$, sub ghidaj) şi deci

$$AI = -\frac{s\omega_1}{v_3}a\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{2.9}$$

Folosind relaţia (2.9), din (2.7) rezultă lungimea manivelei :

$$a = \frac{s}{-\cos\varphi + \frac{s\omega_1}{v_3}\sin\varphi}. \tag{2.10}$$

Lungimea bielei se găseşte imediat :

$$b = s + a\cos\varphi. \tag{2.11}$$

Pentru $v_3 = 0$, $\varphi \neq 0$, rezultă din (2.10) $a = 0$, deci nu există soluţie pentru mecanismul manivelă-piston axial.

Dacă însă $a \neq 0$, $v_3 = 0$, din (2.10) rezultă $\varphi = 0, 180°$ chiar în poziţiile extreme ale pistonului, aşa cum era de aşteptat.

Relaţia (2.11) devine $b = s \pm a$; pentru $\varphi = 0°$, $b = s + a$, iar pentru $\varphi = 180°$, $b = s - a$.

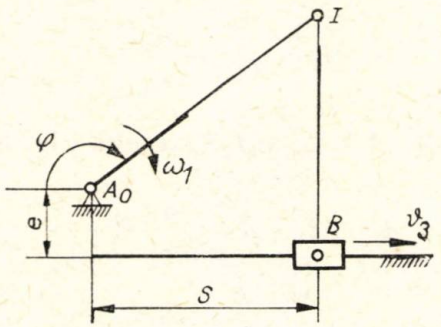


Fig. 8

În cazul mecanismului manivelă-piston excentric, de excentricitate dată e, relaţia (2.10) devine (fig. 8)

$$a = \frac{s}{-\cos\varphi + \frac{\omega_1}{v_3}(s\sin\varphi - e\cos\varphi)}. \tag{2.10'}$$

Pentru $a=0$, $v_3=0$, rezultă valoarea unghiului φ pentru o poziție extremă (fig. 9):

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{e}{s}. \tag{2.12}$$

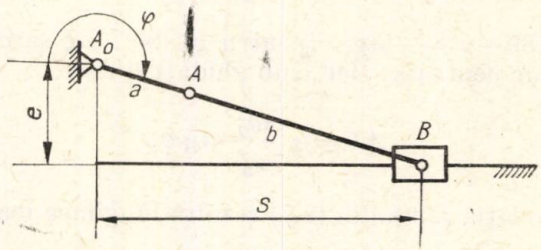


Fig. 9

Relația (2.12) verifică cunoscuta proprietate a mecanismului manivelă-piston că în pozițiile extreme manivela și biela sînt coliniare (fig. 9).

3. SINTEZA CINEMATICĂ PENTRU DOUĂ POZIȚII ABSOLUT ASOCIATE

Pentru două poziții absolut asociate sînt date φ_1, φ_2 pentru elementul *1*; ψ_1, ψ_2 pentru elementul *3* și rapoartele de transmitere

$$i_1 = i_{13(1)} = \frac{\omega_{1(1)}}{\omega_{3(1)}},$$

$$i_2 = i_{13(2)} = \frac{\omega_{1(2)}}{\omega_{3(2)}}.$$

Din triunghiurile $A_0I_1B_0$, $D_0I_2B_0$ rezultă (fig. 10)

$$a + AI_1 = d\frac{\sin\psi_1}{\sin(\varphi_1 - \psi_1)}, \tag{3.1}$$

$$c + BI_1 = d\frac{\sin\varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \psi_1)}, \tag{3.2}$$

$$a + AI_2 = d\frac{\sin\psi_2}{\sin(\varphi_2 - \psi_2)}, \tag{3.3}$$

$$c + BI_2 = d\frac{\sin\varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \psi_2)}. \tag{3.4}$$

Rotaţia instantanee a bielei 2 în jurul CIR-ului I_1, I_2 determină relaţiile

$$\frac{AI_1}{BI_1} = \frac{a}{c}\,\frac{\omega_{1(1)}}{\omega_{3(1)}} = \frac{a}{c}\,i_1, \tag{3.5}$$

$$\frac{AI_2}{BI_2} = \frac{a}{c}\,\frac{\omega_{1(2)}}{\omega_{3(2)}} = \frac{a}{c}\,i_2. \tag{3.6}$$

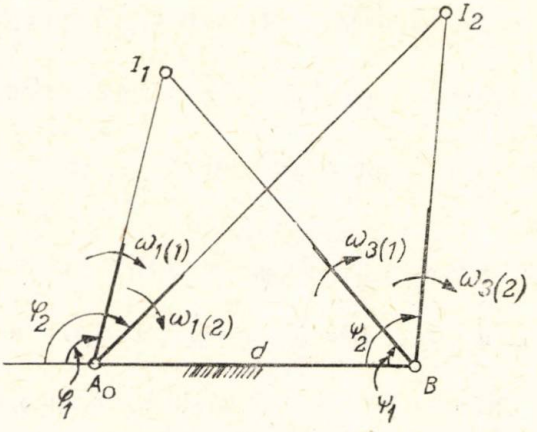


Fig. 10

Din sistemul de ecuaţii (3.1) — (3.6) rezultă pentru a, c soluţiile

$$a = \frac{n_2 i_2 m_1 - n_1 i_1 m_2}{(1 - i_1) n_2 i_2 - (1 - i_2) n_1 i_1}, \tag{3.7}$$

$$c = \frac{n_2 i_2 m_1 - n_1 i_1 m_2}{(1 - i_1) m_2 - (1 - i_2) m_1}, \tag{3.8}$$

unde

$$m_1 = d\,\frac{\sin \psi_1}{\sin(\varphi_1 - \psi_1)}; \qquad m_2 = d\,\frac{\sin \psi_2}{\sin(\varphi_2 - \psi_2)},$$

$$n_1 = d\,\frac{\sin \varphi_1}{\sin(\varphi_1 - \psi_1)}; \qquad n_2 = d\,\frac{\sin \varphi_2}{\sin(\varphi_2 - \psi_2)}.$$

Lungimea bielei 2 trebuie să fie aceeaşi în ambele poziţii considerate, adică

$$b = \sqrt{b_{x_1}^2 + b_{y_1}^2} = \sqrt{b_{x_2}^2 + b_{y_2}^2}, \tag{3.9}$$

unde

$$b_{x_1} = d + a\cos\varphi_1 - c\cos\psi_1; \qquad b_{x_2} = d + a\cos\varphi_2 - c\cos\psi_2,$$

$$b_{y_1} = -a\sin\varphi_1 + c\sin\psi_1, \qquad b_{y_2} = -a\sin\varphi_2 + c\sin\psi_2.$$

Relaţia (3.9) devine

$$(d + a\cos\varphi_1 - c\cos\psi_1)^2 + (-a\sin\varphi_1 + c\sin\psi_1)^2 =$$

$$= (d + a\cos\varphi_2 - c\cos\psi_2)^2 + (-a\sin\varphi_2 + c\sin\psi_2)^2. \qquad (3.9')$$

Înlocuind în (3.9′) relaţiile (3.7) şi (3.8), rezultă relaţia adimensională

$$(i_2\sin\varphi_2\sin\psi_1 - i_1\sin\varphi_1\sin\psi_2)\{(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)[(1-i_1)\sin\psi_2\sin(\varphi_1-\psi_1)-$$

$$-(1-i_2)\sin\psi_1\sin(\varphi_2-\psi_2)]-(\cos\psi_1-\cos\psi_2)[(1-i_1)i_2\sin\varphi_2\sin(\varphi_1-\psi_1)-$$

$$-(1-i_2)i_1\sin\varphi_1\sin(\varphi_2-\psi_2)]-(i_2\sin\varphi_2\sin\psi_1-i_1\sin\varphi_1\sin\psi_2)\times$$

$$\times(\sin\varphi_1\sin\psi_1+\cos\varphi_1\cos\psi_1-\sin\varphi_2\sin\psi_2-\cos\varphi_2\cos\psi_2)\}=0. \qquad (3.10)$$

Din (3.10) rezultă

$$i_2\sin\varphi_2\sin\psi_1 - i_1\sin\varphi_1\sin\psi_2 = 0. \qquad (3.11)$$

Observînd relaţiile (3.7) şi (3.8), ar rezulta în acest caz $a=c=0$, adică problema nu mai are sens.

Problema sintezei cinematice pentru două poziţii absolut asociate are deci soluţie unică dacă între parametrii iniţiali φ_1, ψ_1; φ_2, ψ_2; i_1, i_2 există relaţia de legătură (3.10), cu observaţia că $i_2\sin\varphi_2\sin\psi_1 - i_1\sin\varphi_1\sin\psi_2 \neq 0$.

De altfel, utilizînd formula pentru numărul maxim de poziţii pentru cazul funcţiilor de transmitere de ordinul 0 şi 1 [2], rezultă

$$P'_{01} = \frac{N-1}{4z-2[n-(M+q)]} = \frac{4-1}{4\cdot 1-2[3-(1+1)]} = 1{,}5,$$

ceea ce verifică necesitatea relaţiei de legătură (3.10).

Primită la redacţie la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. R. S. Hartenberg, J. Denavit, *Kinematic Synthesis of Linkages*, New York, 1968.
2. V. Handra-Luca, *Sinteza mecanismelor plane cu* $\nu > 1$ *pe baza funcțiilor de transmitere*, Sesiunea științifică a I.P.B., mai 1969.
3. I. Székely, V. Handra-Luca, *Studiul cinematic al mecanismelor plane cu ajutorul funcțiilor de transmitere*, S.C.M. agricolă, *2—3* (1968).
4. V. Handra-Luca, *Contribuții la sinteza mecanismelor plane pe baza funcțiilor de transmitere de ordinul zero.*
5. N. I. Manolescu, I. Erceanu, P. Antonescu, *Domeniul de aplicabilitate a metodelor de cercetare cinematică a mecanismelor plane articulate*, St. cerc. mec. apl., *6* (1962).

ASUPRA STĂRILOR DE EFORTURI UNITARE ŞI DE DEFORMAŢII DINTR-UN DISC AXIAL-SIMETRIC ÎN MIŞCARE DE ROTAŢIE

de VIRGIL BOGDAN
I.M.F.C.A.

Se cercetează stările de eforturi unitare şi de deformaţii dintr-un disc de formă axial-simetrică aflat în mişcare de rotaţie uniformă în jurul axei sale, fără introducerea ipotezei stării de eforturi plane sau a ipotezei stării de deformaţie plane.
Soluţia problemei este dată de o funcţie Φ care satisface condiţia

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = f_0(z) - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)Ea}\rho\omega^2 r^2$$

şi din care deplasările radială (u) şi axială (w) se deduc cu formulele

$$u = \frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\mu)\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],$$

$$w = -\frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right].$$

Funcţia Φ poate servi drept soluţie şi pentru rezolvarea problemelor referitoare la tuburi de formă axial-simetrică încărcate cu sarcini axial-simetrice dacă se consideră viteza unghiulară $\omega = 0$.

Dacă asupra unui corp de formă axial-simetrică nesolicitat de sarcini masice acţionează sarcini distribuite axial-simetric, atunci ecuaţiile de echilibru scrise în coordonate cilindrice au forma cunoscută

$$\begin{aligned}\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} &= 0,\\ \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} &= 0,\end{aligned} \tag{1}$$

în care σ_r, σ_θ, σ_z, τ_{rz}, sînt eforturile unitare de pe feţele elementului de volum reprezentat în figura 1.

O soluţie a problemei, prezentată în lucrarea [1], se poate obţine dacă se consideră că eforturile unitare derivă dintr-o funcţie Φ conform relaţiilor

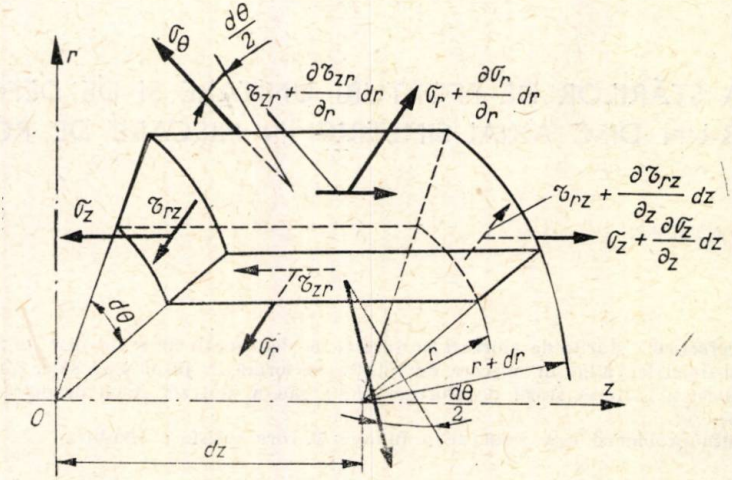


Fig. 1

$$\sigma_r = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}\right),$$

$$\sigma_\theta = \frac{\partial}{\partial z}\left(\mu\nabla^2\Phi - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\mu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right], \qquad (2)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\mu)\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],$$

în care μ este coeficientul lui Poisson.

Substituind expresiile (2) în ecuaţia de echilibru (1), se constată că prima ecuaţie este satisfăcută oricare ar fi funcţia Φ, iar a doua este satisfăcută dacă funcţia Φ este biarmonică.

În lucrarea de faţă se prezintă o soluţie a problemei distribuţiei eforturilor unitare şi a deformaţiilor dintr-un corp de formă axial-simetrică aflat în mişcare de rotaţie uniformă în jurul axei proprii.

Dacă se consideră elementul de volum (fig. 2) delimitat de doi cilindri coaxiali (avînd axa z), de două plane axiale şi de două plane transversale, atunci asupra acestui element acţionează, pe lîngă forţele elementare reprezentate în figura 1, şi forţa de inerţie elementară :

$$\mathrm{d}f_i = r\omega^2\,\mathrm{d}m = r\omega^2\,\rho\mathrm{d}V = \rho\omega^2 r^2\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}z,$$

în care ω este viteza unghiulară a corpului, $\mathrm{d}m$ elementul de masă, ρ masa specifică a corpului şi $\mathrm{d}V$ elementul de volum. Ecuaţiile de echilibru capătă în acest caz forma cunoscută

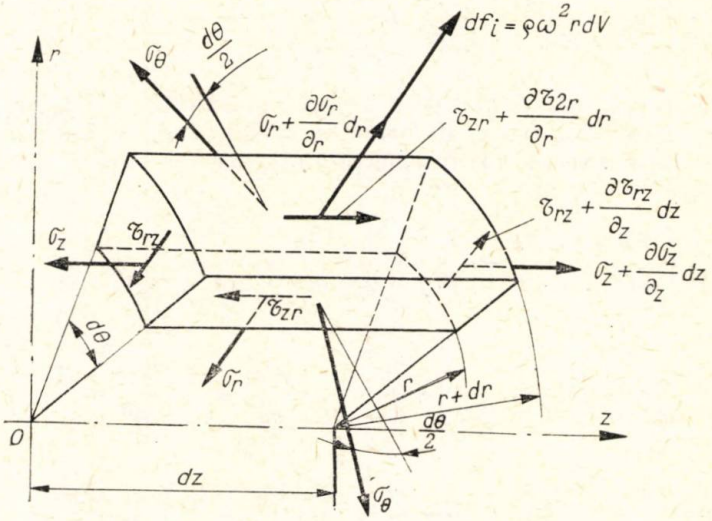


Fig. 2

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial\sigma_r}{\partial r} + \frac{\partial\tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} + \rho\omega^2 r = 0,\\
&\frac{\partial\tau_{rz}}{\partial r} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Este evident că expresiile (2) nu pot satisface prima ecuaţie din sistemul (3), întrucît pentru orice funcţie Φ rezultă $\rho\omega^2 r = 0$, ceea ce contravine ipotezei că discul se află în mişcare de rotaţie uniformă cu viteza unghiulară ω. În consecinţă, se vor stabili alte expresii ale eforturilor unitare care să satisfacă sistemul de ecuaţii (3).

Ţinînd seama de legea lui Hooke generalizată şi de expresiile deformaţiilor specifice scrise în coordonate cilindrice, se obţine

$$\left.\begin{aligned}
\sigma_r &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_r + \frac{\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_v\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
\sigma_\theta &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_\theta + \frac{\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_v\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{u}{r} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
\sigma_z &= \frac{E}{1+\mu}\left[\varepsilon_z + \frac{\mu}{1-2\mu}\,\varepsilon_v\right] = \frac{E}{1+\mu}\left[\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r} + \frac{\partial w}{\partial z}\right)\right],\\
\tau_{rz} &= \frac{E}{1+\mu}\cdot\frac{1}{2}\,\gamma_{rz} = \frac{E}{2(1+\mu)}\left[\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}\right],
\end{aligned}\right\} \tag{4}$$

unde u şi w reprezintă deplasările (radială şi axială), ε_r, ε_θ, ε_z, γ_{rz} sînt deformaţiile specifice, iar ε_v deformaţia specifică de volum.

Înlocuind expresiile (4) în ecuaţiile (3), acestea capătă forma

$$\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{1-\mu}{1-2\mu}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{1}{2}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-2\mu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z}\right] + \rho\omega^2 r = 0, \tag{5}$$

$$\frac{E}{1+\mu}\left[\frac{1}{2(1-2\mu)}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r\,\partial z} + \frac{1}{r}\cdot\frac{\partial u}{\partial z}\right) + \frac{1-\mu}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r}\right)\right] = 0.$$

Întrucît $\dfrac{\partial u^2}{\partial r^2} + \dfrac{1}{r}\cdot\dfrac{\partial u}{\partial r} - \dfrac{u}{r^2} = \dfrac{\partial}{\partial r}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r}\right)$ şi $\dfrac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \dfrac{1}{r}\,\dfrac{\partial u}{\partial z} = \dfrac{\partial}{\partial z}\left(\dfrac{\partial u}{\partial r} + \dfrac{u}{r}\right)$, expresiile (5) devin

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + \frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^2 w}{\partial r\,\partial z} + \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)\,E}\,\rho\omega^2 r = 0, \tag{6}$$

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) + 2(1-\mu)\,\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + (1-2\mu)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0.$$

Deoarece expresiile (2) nu mai satisfac sistemul de ecuaţii (3) datorită termenului $\rho\omega^2 r$ care nu poate fi anulat, expresiile deplasărilor u şi w se vor alege astfel încît a doua ecuaţie din sistemul (6) să fie satisfăcută pentru orice funcţie Φ.

Se poate presupune că deplasările u şi w sînt legate de funcţia Φ prin relaţiile

$$u = \frac{\partial}{\partial r}\left(a\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + b\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + c\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right),$$

$$w = \frac{\partial}{\partial z}\left(d\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + e\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + f\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right), \tag{7}$$

în care, a, b, c, d, e, f sînt constante care urmează a fi determinate astfel încît ecuaţia a doua a sistemului (6) să fie satisfăcută pentru orice funcţie Φ.

Din relaţiile (7) se deduc imediat expresiile

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{u}{r}\right) = a\frac{\partial^5\Phi}{\partial r^4\,\partial z} + (a+b)\frac{1}{r}\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^3\,\partial z} - b\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) +$$

$$+ c\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = d\frac{\partial^5\Phi}{\partial r^2\partial z^3} + e\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial r\partial z^3} + f\frac{\partial^5\Phi}{\partial z^5},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} = d\frac{\partial^5\Phi}{\partial r^4\,\partial z} + (d+e)\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^3\partial z} - e\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) +$$

$$+ f\frac{\partial^3}{\partial z^3}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right),$$

care, înlocuite în ecuaţia a doua din sistemul (6), conduc la ecuaţia

$$[a + (1-2\mu)d]\frac{\partial^5\Phi}{\partial r^4\partial z} + [(a+b) + (1-2\mu)(d+e)]\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial^4\Phi}{\partial r^3\partial z} -$$

$$-[b + (1-2\mu)e]\frac{1}{r^2}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + [c + 2(1-\mu)d + (1-2\mu)f]\frac{\partial^5\Phi}{\partial r^2\partial z^3} +$$

$$+[c + 2(1-\mu)e + (1-2\mu)f]\frac{1}{r}\frac{\partial^4\Phi}{\partial r\partial z^3} + 2(1-\mu)f\frac{\partial^5\Phi}{\partial z^5} \equiv 0. \tag{8}$$

Pentru ca această ecuaţie să fie satisfăcută de orice funcţie Φ este necesar ca

$$\begin{aligned} a + (1 - 2\mu)\, d &= 0, \\ (a + b) + (1 - 2\mu)\,(d + e) &= 0, \\ b + (1 - 2\mu)\, e &= 0, \\ c + 2(1 - \mu)\, d + (1 - 2\mu) f &= 0, \\ c + 2(1 - \mu)\, e + (1 - 2\mu) f &= 0, \\ f &= 0. \end{aligned} \tag{9}$$

Rezolvînd sistemul omogen (9) în funcţie de constanta a, se obţin

$$b = a,$$

$$c = \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\, a,$$

$$d = e = -\frac{a}{1-2\mu},$$

$$f = 0.$$

Rezultă că expresiile deplasărilor u şi w sînt

$$\begin{aligned} u &= \frac{\partial}{\partial r}\left[a\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + a\,\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{2(1-\mu)}{1-2\mu}\, a\,\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right] = \\ &= \frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\mu)\,\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right], \\ w &= \frac{\partial}{\partial z}\left[-\frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} - \frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{1}{r}\,\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right] = \\ &= -\frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial z}\left[\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right]. \end{aligned} \tag{10}$$

Este necesar acum să se stabilească condiţia pe care trebuie s-o satisfacă funcţia Φ astfel încît să verifice prima ecuaţie din sistemul (6).

Din relațiile (10) se deduc expresiile

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{u}{r}\right)=\frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\mu)\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\nabla^2\Phi+\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right)\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],$$

$$\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}=\frac{a}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\left[(1-2\mu)\,\nabla^2\Phi+\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r\partial z}=-\frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\left[\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],$$

care, înlocuite în prima ecuație din sistemul (6), conduc la ecuația

$$a\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial^2}{r^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\nabla^2\Phi+\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)+\right.$$

$$+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\left(\nabla^2\Phi+\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)-$$

$$\left.-\frac{1}{2(1-\mu)(1-2\mu)}\cdot\frac{\partial^3}{\partial r\partial z^2}\left(\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)\right]+$$

$$+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{(1-\mu)E}\rho\omega^2 r=0.$$

Această ecuație se poate integra o dată în raport cu r și se obține

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\nabla^2\Phi+\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\frac{1-2\mu}{2(1-\mu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\nabla^2\Phi+\frac{1}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)-$$

$$-\frac{1}{2(1-\mu)(1-2\mu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(\nabla^2\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right)+$$

$$+\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)Ea}\rho\omega^2 r^2=f_0(z),$$

unde $f_0(z)$ este o funcție arbitrară de variabila z.

După cîteva transformări, ecuația de mai sus capătă forma

$$\nabla^2\nabla^2\Phi = f_0(z) - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)Ea}\rho\omega^2 r^2. \tag{11}$$

Căutînd funcția Φ de forma

$$\Phi = \Phi_1 + \Phi_0,$$

astfel încît

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_1 = 0, \tag{11'}$$

$$\nabla^2\nabla^2\Phi_0 = f_0(z) - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)Ea}\rho\omega^2 r^2, \tag{11''}$$

se observă că expresiile eforturilor unitare și ale deformațiilor se pot obține dintr-o funcție biarmonică Φ_1 și o funcție Φ_0 care să satisfacă relația (11'').

Pentru soluția particulară Φ_0 se poate deduce ușor expresia

$$\Phi_0 = F_0(z) - \frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{1152(1-\mu)Ea}\rho\omega^2 r^6, \tag{12}$$

care satisface ecuația (11'') dacă $F_0(z)$ se alege astfel încît $F_0^{IV}(z) = f_0(z)$.

Substituind expresiile (10) în relațiile (5), se obțin expresiile deformațiilor specifice:

$$\varepsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left[(1-2\mu)\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right],$$

$$\varepsilon_\theta = \frac{u}{r} = \frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-2\mu)\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right], \tag{13}$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{a}{1-2\mu}\cdot\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}\right].$$

Din relațiile (13) se deduce deformația specifică de volum:

$$\varepsilon_0 = \varepsilon_r + \varepsilon_\theta + \varepsilon_z = a\left(\nabla^2\nabla^2\Phi - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi\right) = a\left[f_0(z) - \frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi\right] - \tag{14}$$

$$-\frac{(1+\mu)(1-2\mu)}{2(1-\mu)}\rho\omega^2 r^2.$$

Expresiile eforturilor unitare se deduc din relațiile (4):

$$\sigma_r = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\mu\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2}{\partial r^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi + (1-2\mu)\frac{\partial^2}{\partial r^2}\nabla^2\Phi\right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\mu\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \mu\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi + (1-2\mu)\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2\Phi\right], \tag{15}$$

$$\sigma_z = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\left[\mu\nabla^2\nabla^2\Phi + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\cdot\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - (1+\mu)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\Phi\right],$$

$$\tau_{rz} = \frac{E}{(1+\mu)(1-2\mu)}\cdot\frac{\partial^2}{\partial r\partial z}\left[\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2} - \mu\nabla^2\Phi\right].$$

Din expresiile (10), (13), (14) și (15) se pot deduce deplasările, deformațiile specifice și eforturile unitare cu condiția ca funcția Φ să satisfacă relația (11) și totodată să fie îndeplinite condițiile de contur ale problemei cercetate.

Relațiile sînt aplicabile pentru determinarea stărilor de eforturi unitare și de deformații din tuburi cu forma axial-simetrică încărcate cu sarcini distribuite axial-simetric dacă se consideră $\omega=0$ și deci $\Phi_0=f_0(z)$.

Primită la redacție la 20 septembrie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, J. N. Goodier, *Théorie de l'élasticité*, Paris — Liège, Librairie polytechnique Ch. Béranger, 1961.
2. S. D. Ponomariov și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, vol. III, București, Edit. tehnică, 1964.
3. A. Petre, V. Bogdan, *Discuri neomogene în mișcare de rotație*, St. cerc. mec. apl., **20**, *5* (1965).
4. V. Bogdan, *Expresiile eforturilor unitare care se produc în discuri în rotație solicitate prin eforturi care variază în lungul axei lor*, St. cerc. mec. apl., **26**, *5* (1967).
5. — *Eforturi unitare și deformații într-un disc în mișcare de rotație*, Bulet. Instit. politehnic București, **XXX**, *2* (1968).

O METODĂ EXACTĂ PENTRU CALCULUL ONDULĂRII CIRCUMFERENȚIALE A FLANȘELOR

de MAGDALENA POSEA
Institutul de construcții București

Lucrarea prezintă o metodă exactă pentru determinarea acestei ondulări, pornind de la teoria încovoierii nesimetrice a plăcilor circulare.
Eforturile din șuruburi, care acționează ca forțe concentrate pe flanșă, se descompun în serie Fourier și se ajunge la o încărcare simetrică, avînd o rezultantă egală cu forțele din șuruburi și la o serie de încărcări echilibrate pe cercul de distribuție a șuruburilor.
Expresiile finale obținute pentru săgeți și rotiri în cazul plăcii inelare cu conturul interior simplu rezemat și încastrat pot fi folosite direct în proiectarea flanșelor. Exemplificările numerice date arată modul de aplicare a procedeului propus.

Numeroase lucrări referitoare la studiul factorilor care determină pierderea etanșeității îmbinărilor cu flanșe ale aparatelor și vaselor sub presiune, consemnează ondularea circumferențială a flanșelor drept una dintre cele mai importante cauze.

Acest fenomen de ondulare circumferențială apare ca urmare a strîngerii flanșelor cu ajutorul șuruburilor, adică a încărcării flanșei cu sarcini concentrate situate echidistant pe circumferința de distribuție a șuruburilor.

Literatura tehnică existentă nu furnizează nici o metodă de calcul a deformațiilor flanșelor astfel încărcate. Lucrarea de față prezintă o metodă exactă de calcul a ondulării circumferențiale a flanșelor încărcate cu sarcini concentrate.

Cunoașterea acestei ondulări este deosebit de utilă, întrucît ajută la determinarea gradului de neuniformitate a presiunii pe garnitură și reprezintă în același timp un pas în elaborarea calculului de etanșeitate al îmbinărilor cu flanșe pentru aparate și vase sub presiune.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 935–953

1. SOLUȚIA GENERALĂ A PLĂCII CIRCULARE ÎNCĂRCATE NESIMETRIC

Pentru o placă circulară încărcată nesimetric, ecuația diferențială a deplasării w normale pe suprafața mediană, dată în lucrările [1] și [2], are forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta^2}\right)=\frac{p(r,\theta)}{D}, \tag{1}$$

unde $p(r,\theta)$ reprezintă intensitatea sarcinii exterioare, iar $D=\dfrac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$ rigiditatea cilindrică a plăcii.

Folosind laplaceanul în coordonate polare :

$$\nabla^2 w=\Delta w=\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial\theta}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\theta}, \tag{2}$$

ecuația (1) devine

$$\Delta\Delta w=\frac{p(r,\theta)}{D}. \tag{1'}$$

Soluția acestei ecuații se compune din soluția părții omogene w_0 și o soluție particulară w_p, dependentă de sarcina exterioară.

Soluția părții omogene $\Delta\Delta W_0=0$ se alege sub forma

$$w_0=F_0(r)+\sum_{m=1}^{\infty}F_m(r)\cos m\theta+\sum_{m=1}^{\infty}f_m(r)\sin m\theta, \tag{3}$$

unde

$$F_0(r)=A_0+B_0r^2+C_0\ln\frac{r}{r_0}+D_0r^2\ln\frac{r}{r_0} \tag{4}$$

corespunde încovoierii simetrice a plăcii (r_0 fiind o rază oarecare fixă, iar m parametrul de sumare).

Pentru $m=1$, funcțiile $F_m(r)$, $f_m(r)$ au expresiile particulare

$$F_1(r)=A_1r+B_1r^3+C_1r^{-1}+D_1r\ln\frac{r}{r_0}, \tag{5}$$

$$f_1(r)=A_1'r+B_1'r^3+C_1'r^{-1}+D_1'r\ln\frac{r}{r_0}, \tag{5'}$$

iar pentru $m\geqslant 2$ expresiile generale

$$F_m(r)=A_mr^m+B_mr^{-m}+C_mr^{m+2}+D_mr^{-m+2}, \tag{6}$$

$$f_m(r)=A_m'r^m+B_m'r^{-m}+C_m'r^{m+2}+D_m'r^{-m+2}. \tag{6'}$$

Constantele A, B, C, D și A', B', C', D' se determină din condițiile la limită după determinarea soluției particulare w_p.

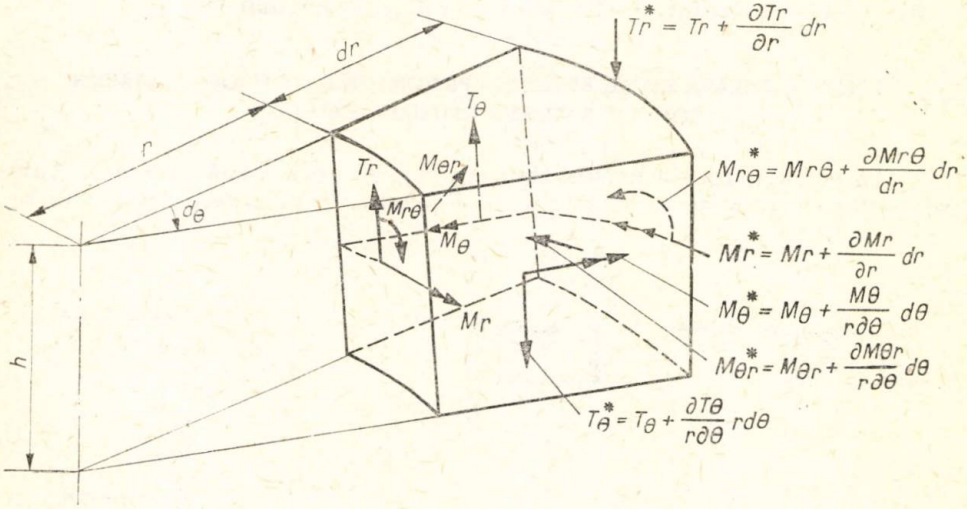


Fig. 1

Dacă unghiul θ se măsoară de la un plan de simetrie al plăcii, atunci funcțiile $f(r)$ sînt nule. În funcție de deplasările w, eforturile secționale, considerate pozitive ca în figura 1, se calculează cu expresiile

— momentele încovoietoare :

$$M_r = -D\left[\mu\nabla^2 w + (1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right], \tag{7}$$

$$M = -D\left[\nabla^2 w - (1-\mu)\frac{\partial^2 w}{\partial r^2}\right]; \tag{8}$$

— momentele de torsiune :

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = H = -D(1-\mu)\frac{\partial^2}{\partial r\,\partial\theta}\left(\frac{w}{r}\right); \tag{9}$$

— forțele tăietoare :

$$T_r = -D\frac{\partial}{\partial r}\nabla^2 w, \tag{10}$$

$$T_\theta = -D\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial\theta}\nabla^2 w; \tag{11}$$

— reacțiunea pe un contur :

$$V = T_r + \frac{1}{r}\frac{\partial M_{r\theta}}{\partial\theta}. \tag{12}$$

În consecință, rezolvarea concretă a unei plăci circulare încărcate nesimetric necesită stabilirea soluției particulare w_p în funcție de sarcinile exterioare, determinarea constantelor în funcție de condițiile la limită și apoi calculul eforturilor cu expresiile de mai sus.

2. PLACĂ INELARĂ SIMPLU REZEMATĂ PE CONTURUL INTERIOR CU SARCINI CONCENTRATE PE CONTURUL EXTERIOR

În construcția de mașini flanșele (fig. 2) au o largă utilizare. Talerele acestora reprezintă pentru calcul plăci inelare acționate de efortu-

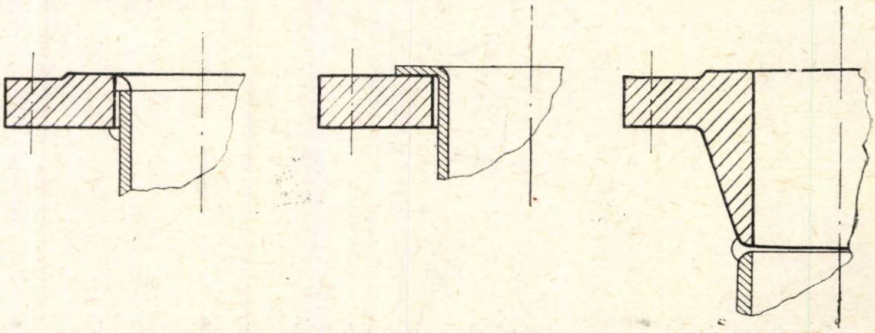


Fig. 2

rile din șuruburi (considerate ca sarcini concentrate), de presiunile de pe garnitură și de forțele de legătură corespunzătoare modului de prindere cu mantaua aparatului sau vasului.

În acest paragraf ne ocupăm însă numai de deformațiile și de eforturile produse în placa inelară de forțele concentrate din șuruburi, care produc fenomenul de ondulare circumferențială.

Se consideră placa inelară din figura 3, simplu rezemată pe conturul interior și acționată de k sarcini, fiecare egală cu P, concentrate pe conturul exterior. Se notează cu 2α unghiul dintre razele în plan (fig. 3*b*) a două forțe concentrate și cu θ unghiul făcut de o rază curentă ($o\,i$) și raza origine (OO_1) din dreptul unei forțe. Descompunînd în serie Fourier sarcinile concentrate, se obține sarcina distribuită pe conturul de rază b :

$$p = \frac{kP}{2\pi b} + \frac{kP}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \cos kn\theta, \tag{13}$$

care are o parte constantă,

$$p_0 = \frac{kP}{2\pi b}, \tag{13'}$$

reprezentînd o încărcare simetrică, și una variabilă,

$$q = \frac{kP}{\pi b} \sum_{n=1}^{\infty} \cos kn\theta, \tag{13''}$$

care are aceleași valori în intervalul $-\alpha$ și $+\alpha$ corespunzător fiecărei forțe concentrate.

Încărcarea exterioară a plăcii, alcătuită din forțele concentrate P (reprezentate pe conturul desfășurat în figura 4*a*), se descompune în încărcarea simetrică din figura 4*b* și încărcarea echilibrată din figura 4*c*, unde $p_0 \cdot 2\pi b = kP$.

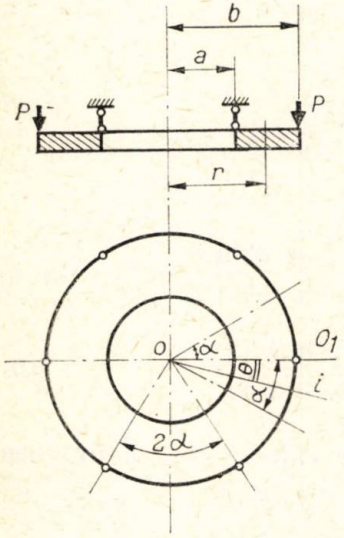


Fig. 3

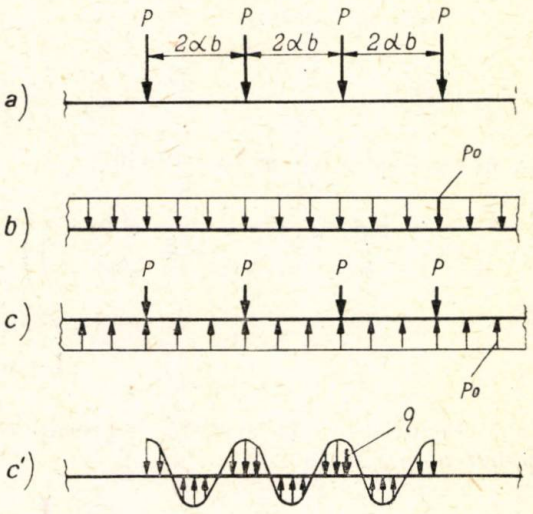


Fig. 4

Încărcarea echilibrată (fig. 4*c*), ținînd seama de (13), se reduce la sarcina q, dată de (13''), compusă dintr-o sumă de cosinusoide pe perioade diferite (fig. 4*c'*). Această componentă a încercării este cea care produce ondularea circumferențială a plăcii.

A. REZOLVAREA PLĂCII PENTRU ÎNCĂRCAREA SIMETRICĂ

În acest caz, datorită faptului că pe intervalul $a < r < b$ nu avem nici o sarcină, ecuația diferențială a plăcii are forma

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r}\right) = 0$$

și soluția generală, ținînd seama de (3) și (4), este

$$w = w_0 = F_0(r) = A_0 + B_0 r^2 + C_0 \ln\frac{r}{a} + D_0 r^2 \ln\frac{r}{a}. \qquad (14)$$

Din condiţiile la limită

$$r = a, \qquad w = 0, \qquad M_r = 0,$$

$$r = b, \qquad M_r = 0, \qquad T_r = p_0,$$

în care M_r şi T_r se calculează cu expresia (7), respectiv (10), pornind de la w dat de (14), se obţin constantele A_0, B_0, C_0, D_0.

Dacă se notează

$$\lambda = \frac{b}{a}; \qquad \rho = \frac{r}{a}, \tag{15}$$

expresia deplasării w (14) devine

$$w = \frac{p_0 b a^2}{8D}\left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} + 2\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\right)\rho^2 + 4\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\ln \rho - \right.$$

$$\left. - 2\rho^2(\ln \rho - 1) - \left(\frac{3+\mu}{1+\mu} + 2\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\right)\right]. \tag{16}$$

Pornind de la această expresie se poate calcula rotirea în orice punct al plăcii :

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{p_0 b a}{4D}\left[\left(\frac{1-\mu}{1+\mu} + 2\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\right)\rho + \right.$$

$$\left. + 2\left(\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\right)\rho^{-1} - \rho(2 \ln \rho - 1)\right], \tag{17}$$

şi momentele încovoietoare cu relaţiile (7) şi (8) :

$$M_r = -\frac{p_0 b}{2}(1+\mu)\left[\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\left(1 - \frac{1}{\rho^2}\right) - \ln \rho\right],$$

$$M_\theta = -\frac{p_0 b}{2}(1+\mu)\left[\frac{1-\mu}{1+\mu} + \frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1}\left(1 + \frac{1}{\rho^2}\right) - \ln \rho\right].$$

B. REZOLVAREA PLĂCII PENTRU ÎNCĂRCAREA ECHILIBRATĂ

Întrucît încărcarea q (13′) acţionează numai pe contur, ecuaţia diferenţială (1) în intervalul $a < r < b$ nu are parte dreaptă şi deci soluţia generală se confundă cu soluţia părţii omogene (3), în care $F_0(r) = 0$, deoarece corespunde încovoierii simetrice, iar q nu are o astfel de componentă.

Alegînd raza origine pentru măsurarea lui θ dreapta OO_1 (fig. 3), care este axa de simetrie, funcțiile $f_m(r)$ din (3) devin nule. Întrucît parametrul m din soluția (3) corespunde lui kn din dezvoltarea în serie $q(13'')$, rezultă $m = kn \geqslant 2$ pentru toate cazurile cînd $k \geqslant 2$. În această situație, expresia deplasării w are formă generală unică

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} (A_n r^{kn} + B_n r^{-kn} + C_n r^{kn+2} + D_n r^{-kn+2}) \cos kn\theta. \tag{18}$$

Pornind de la această expresie, relațiile pentru determinarea eforturilor (7) — (12) devin :

— momentele încovoietoare :

$$M_r = -D(1-\mu)\sum \Big[kn(kn-1)\, r^{kn-2} A_n + kn(kn+1)\, r^{-kn-2} B_n +$$

$$+ (kn+1)\left(kn+2+\frac{4\mu}{1-\mu}\right) r^{kn} C_n + (kn-1)\left(kn-2-\right.$$

$$\left.-\frac{4\mu}{1-\mu}\right) r^{-kn} D_n\Big] \cos kn\theta, \tag{19}$$

$$M_\theta = D(1-\mu)\sum \Big[kn(kn-1)\, r^{kn-2} A_n + kn(kn+1)\, r^{-kn-2} B_n +$$

$$+ (kn+1)\left(kn+2-\frac{4}{1-\mu}\right) r^{kn} C_n + (kn-1)\left(kn-2+\right.$$

$$\left.+\frac{4}{1-\mu}\right) r^{-kn} D_n\Big] \cos kn\theta\,; \tag{20}$$

— momentul de torsiune :

$$M_{r\theta} = M_{\theta r} = H = D(1-\mu)\sum kn[(kn-1)\, r^{kn-2} A_n - (kn+1)\, r^{-kn-2} B_n +$$

$$+ (kn+1)\, r^{kn} C_n - (kn-1)\, r^{-kn} D_n] \sin kn\theta\,; \tag{21}$$

— forțele tăietoare :

$$T_r = -D\sum [4kn(kn+1)\, r^{kn-1} C_n + 4kn(kn-1)\, r^{-kn-1} D_n] \cos kn\theta, \tag{22}$$

$$T_\theta = D\sum [4(kn+1)\, r^{kn-1} C_n - 4(kn-1)\, r^{-kn-1} D_n]\, kn \sin k\, n\theta\,; \tag{23}$$

— reacțiunea pe contur :

$$V = D\sum \{(1-\mu)\, k^2 n^2 (kn-1)\, r^{kn-3} A_n - (1-\mu)\, k^2 n^2 (kn+1)\, r^{-kn-3} B_n -$$

$$- kn(kn+1)\,[4 - kn(1-\mu)]\, r^{kn-1} C_n -$$

$$- kn(kn-1)\,[4 + kn(1-\mu)]\, r^{-kn-1} D_n\} \cos kn\theta. \tag{24}$$

Punînd condiţiile la limită pentru placa inelară considerată

$$r = a, \quad w = 0, \quad M_r = 0,$$

şi

$$r = b, \quad M_r = 0, \quad V = q,$$

obţinem următorul sistem de ecuaţii:

$$a^{kn}A_n + a^{-kn}B_n + a^{kn+2}C_n + a^{-kn+2}D_n = 0,$$

$$kn(kn-1)\,a^{kn-2}A_n + kn(kn+1)\,a^{-kn-2}B_n +$$
$$+ (kn+1)\left(kn+2+\frac{4\mu}{1-\mu}\right)a^{kn}C_n +$$
$$+ (kn-1)\left(kn-2-\frac{4\mu}{1-\mu}\right)a^{-kn}D_n = 0,$$

$$kn(kn-1)\,b^{kn-2}A_n + kn(kn+1)\,b^{-kn-2}B_n +$$
$$+ (kn+1)\left(kn+2+\frac{4\mu}{1-\mu}\right)b^{kn}C_n +$$
$$+ (kn-1)\left(kn-2-\frac{4\mu}{1-\mu}\right)b^{-kn}D_n = 0,$$

$$kn(kn-1)\,b^{kn-3}A_n - kn(kn+1)\,b^{-kn-3}B_n +$$
$$+ (kn+1)\left[kn-\frac{4}{1-\mu}\right]b^{kn-1}C_n -$$
$$- (kn-1)\left(kn+\frac{4}{1-\mu}\right)b^{-kn-1}D_n = \frac{P}{\pi b(1-\mu)}\,\frac{1}{nD}.$$

Rezolvînd sistemul de ecuaţii şi notînd

$$\beta = [k^2n^2(1-\mu)^2 + 8(1+\mu)] + 2(k^2n^2-1)(1-\mu^2)\,\lambda^{-2} -$$
$$- k^2n^2[4-(1+\mu)^2]\,\lambda^{-4} - (3+\mu)(2kn+1+\mu)\,\lambda^{-2kn-2} +$$
$$+ (3+\mu)(2kn-1-\mu)\,\lambda^{2kn-2}, \tag{25}$$

$$\beta_1 = (2kn-1-\mu)\,[kn(1-\mu)+2(1+\mu)]\,\lambda^{kn} -$$
$$- k^2n^2[4-(1+\mu)^2]\,\lambda^{-kn-2} +$$
$$+ (kn-1)(1+\mu)\,[kn(1-\mu)-2(1+\mu)]\,\lambda^{-kn}, \tag{26}$$

$$\beta_2 = (1+\mu)(kn+1)[kn(1-\mu)+2(1+\mu)]\lambda^{kn} - \\ - k^2n^2[4-(1+\mu)^2]\lambda^{kn-2} + (2kn+1+\mu)[kn(1-\mu) - \\ - 2(1+\mu)]\lambda^{-kn}, \tag{27}$$

$$\beta_3 = (2kn-1-\mu)\lambda^{kn-2} - (kn+1)(1+\mu)\lambda^{-kn-2} - \\ - [kn(1-\mu)-2(1+\mu)]\lambda^{-kn}, \tag{28}$$

$$\beta_4 = [kn(1-\mu)+2(1+\mu)]\lambda^{kn} + (kn-1)(1+\mu)\lambda^{kn-2} - \\ - (2kn+1+\mu)\lambda^{-kn-2}, \tag{29}$$

expresiile constantelor de integrare se obțin sub forma

$$A_n = \frac{kP}{2\pi D}a^{-kn+2}\frac{1}{k^2n^2(kn-1)(1-\mu)}\cdot\frac{\beta_1}{\beta}, \\ B_n = -\frac{kP}{2\pi D}a^{kn+2}\frac{1}{k^2n^2(kn+1)(1-\mu)}\cdot\frac{\beta_2}{\beta}, \\ C_n = -\frac{kP}{2\pi D}a^{-kn}\frac{1}{kn(kn+1)}\cdot\frac{\beta_3}{\beta}, \\ D_n = -\frac{kP}{2\pi D}a^{kn}\frac{1}{kn(kn-1)}\cdot\frac{\beta_4}{\beta}. \tag{30}$$

Introducînd valorile constantelor în (18) se obțin:

— expresia deplasării:

$$w = \frac{kPa^2}{2\pi D}\sum\frac{1}{kn\beta}\left[\frac{1}{kn(kn-1)(1-\mu)}\beta_1\rho^{kn} - \right. \\ - \frac{1}{kn(kn+1)(1-\mu)}\beta_2\rho^{-kn} - \frac{1}{kn+1}\beta_3\rho^{kn+2} - \\ \left. - \frac{1}{kn-1}\beta_4\rho^{-kn+2}\right]\cos kn\theta, \tag{31}$$

— expresia rotirii:

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{kPa}{2\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kn\beta}\left[\frac{1}{(kn-1)(1-\mu)}\beta_1\rho^{kn-1} + \right. \\ + \frac{1}{(kn+1)(1-\mu)}\beta_2\rho^{-kn-1} - \frac{kn+2}{kn+1}\beta_3\rho^{kn+1} + \\ \left. + \frac{kn-2}{kn-1}\beta_4\rho^{-kn+1}\right]\cos kn\theta. \tag{32}$$

Înlocuind valorile constantelor în (19) — (24), se obțin expresiile eforturilor :

$$M_r = -\frac{kP}{2\pi}\sum\frac{1}{kn\beta}\{\beta_1\rho^{kn-2}+\beta_2\rho^{-kn-2}-[kn(1-\mu)+$$

$$+2(1+\mu)]\beta_3\rho^{kn}-[kn(1-\mu)-2(1+\mu)]\beta_4\rho^{-kn}\}\cos kn\theta, \qquad (33)$$

$$M_\theta = \frac{kP}{2\pi}\sum\frac{1}{kn\beta}\{\beta_1\rho^{kn-2}-\beta_2\rho^{-kn-2}-[kn(1-\mu)-$$

$$-2(1+\mu)]\beta_3\rho^{kn}-[kn(1-\mu)+2(1+\mu)\beta_4\rho^{-kn}\}\cos kn\theta \qquad (34)$$

ș.a.m.d.

3. PLACĂ INELARĂ ÎNCASTRATĂ PE CONTURUL INTERIOR CU SARCINI CONCENTRATE PE CONTURUL EXTERIOR

Considerînd placa inelară din figura 5 și descompunînd în serie Fourier sarcinile concentrate, se obține sarcina distribuită p, dată de expresia (13). Ca și în paragraful anterior, se rezolvă placa pentru încărcările simetrică (13′) și variabilă (13″).

A. REZOLVAREA PLĂCII PENTRU ÎNCĂRCAREA SIMETRICĂ

Ținînd seama de expresia (14) a deplasării și de condițiile de limită

$$r = a,\ w = 0,\ \frac{w}{r} = 0,$$

$$r = b,\ M_r = 0,\ T_r = p_0,$$

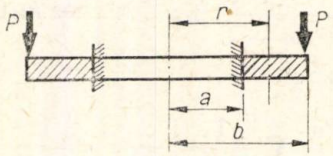


Fig. 5

obținem expresia deplasării :

$$w = -\frac{pba^2}{4D}\left[1+\rho^2(\ln\rho-1)+\frac{\alpha_1}{2}(1-\rho^2)+2\alpha_2\ln\rho\right],$$

și expresia rotirii :

$$\varphi = -\frac{pba}{2D}\left[\rho\left(\ln\rho - \frac{1}{2}\right) - \frac{\alpha_1}{2} + \alpha_2\frac{1}{\rho}\right], \tag{35}$$

în care

$$\alpha_1 = \frac{(\lambda^2-1)(1-\mu) + 2\lambda^2(1+\mu)\ln\lambda}{\lambda^2(1+\mu)+(1+\mu)},$$

$$\alpha_2 = \frac{\lambda^2(1+\mu)\ln\lambda + 1}{\lambda^2(1+\mu)+(1-\mu)}.$$

B. REZOLVAREA PLĂCII PENTRU ÎNCĂRCAREA ECHILIBRATĂ

Relațiile pentru determinarea deplasării și eforturilor sînt date în paragraful precedent (18) — (24). Punînd condițiile la limită pentru placa inelară încastrată

$$r = a,\ w = 0,\ \frac{\partial w}{\partial r} = 0,$$

și

$$r = b,\ M_r = 0,\ V = q,$$

se obține următorul sistem de ecuații :

$$A_n a^{kn} + B_n a^{-kn} + C_n a^{kn+2} + D_n a^{-kn+2} = 0,$$

$$A_n kn a^{kn-1} - B_n kn a^{-kn-1} + C_n(kn+2)\,a^{kn+1} -$$

$$- D_n(kn-2)\,a^{-kn+1} = 0, \tag{36}$$

$$A_n kn(kn-1)(1-\mu)\,b^{kn-2} + B_n kn(kn+1)(1-\mu)\,b^{-kn-2} +$$

$$+ C_n(kn+1)[kn(1-\mu)+2(1+\mu)]\,b^{kn} + D_n(kn -$$

$$- 1)[kn(1-\mu) - 2(1+\mu)]\,b^{-kn} = 0,$$

$$kn(kn-1)(1-\mu)\,b^{kn-3}A_n - kn(kn+1)(1-\mu)\,b^{-kn-3}B_n +$$

$$+ (kn+1)[kn(1-\mu)-4]\,b^{kn-1}C_n - (kn-1)[kn(1 -$$

$$- \mu) + 4]\,b^{-kn-1}D_n = \frac{kP}{D\pi bkn}$$

Rezolvînd sistemul și notînd

$$\beta_1 = [kn(1-\mu)+2(1+\mu)]\,\lambda^{kn} - [kn(1-\mu)-2(1+ \\ +\mu)](kn-1)\,\lambda^{-kn} + (1-\mu)\,k^2n^2\lambda^{-kn-2}, \tag{37}$$

$$\beta_2 = [kn(1-\mu)+2(1+\mu)](kn+1)\,\lambda^{kn} - (1- \\ -\mu)k^2n^2\lambda^{kn-2} + [kn(1-\mu)-2(1+\mu)]\,\lambda^{-kn}, \tag{38}$$

$$\beta_3 = -[kn(1-\mu)-2(1+\mu)]\,\lambda^{-kn} + (1-\mu)(kn+ \\ +1)\lambda^{-kn-2} + (1-\mu)\,\lambda^{kn-2}, \tag{39}$$

$$\beta_4 = [kn(1-\mu)+2(1+\mu)]\,\lambda^{kn} - (1-\mu)(kn- \\ -1)\,\lambda^{kn-2} + (1-\mu)\,\lambda^{-kn-2}, \tag{40}$$

$$\beta = (kn-1)\{[k^2n^2(1-\mu)^2+8(1+\mu)] - 2(k^2n^2- \\ -1)(1-\mu)^2\,\lambda^{-2} + (1-\mu)^2k^2n^2\lambda^{-4} + (1-\mu)(3+ \\ +\mu)\,\lambda^{2kn-2} + (1-\mu)(3+\mu)\,\lambda^{-2kn-2}, \tag{41}$$

expresiile constantelor de integrare devin

$$A_n = \frac{kP}{2\pi D}\cdot a^{-kn+2}\,\frac{1}{k^2n^2}\cdot\frac{\beta_1}{\beta},$$

$$B_n = \frac{kP}{2\pi D}\cdot a^{kn+2}\cdot\frac{(kn-1)}{k^2n^2(kn+1)}\cdot\frac{\beta_2}{\beta}, \tag{42}$$

$$C_n = -\frac{kP}{2\pi D}\cdot a^{-kn}\,\frac{kn-1}{kn(kn+1)}\cdot\frac{\beta_3}{\beta},$$

$$D_n = -\frac{kP}{2\pi D}\cdot a^{kn}\cdot\frac{1}{kn}\cdot\frac{\beta_4}{\beta}.$$

Dacă înlocuim valorile constantelor de integrare (42) în (18), găsim : — expresia deplasării sub forma :

$$w = \frac{kPa^2}{2\pi D}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{kn\beta}\left[\frac{\beta_1}{kn}\,\rho^{kn} + \frac{kn-1}{kn(kn+1)}\,\beta_2\rho^{-kn} - \right. \\ \left. -\frac{kn-1}{kn+1}\,\beta_3\rho^{kn+2} - \beta_4\rho^{-kn+2}\right]\cos kn\theta\,; \tag{43}$$

— expresia rotirii :

$$\varphi = \frac{\partial w}{\partial r} = \frac{kPa}{2\pi D} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{kn\beta} \left[\beta_1 \rho^{kn-1} - \frac{kn-1}{kn+1} \beta_2 \rho^{-kn-1} - \right.$$

$$\left. - \frac{kn-1}{kn+1} (kn+2) \beta_3 \rho^{kn+1} + (kn-2) \beta_4 \rho^{-kn+1} \right] \cos kn\theta. \qquad (44)$$

Înlocuind valorile constantelor de integrare (42) în (18) — (24), se obțin expresiile eforturilor.

4. EXEMPLIFICĂRI NUMERICE

Se vor calcula deformațiile flanșei $D_n = 1300$ mm, $p_n = 6\text{kgf/cm}^2$ avînd dimensiunile din figura 6.

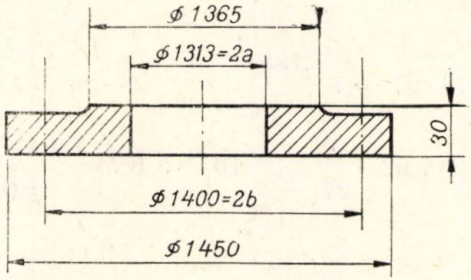


Fig. 6

4.1. Deformațiile flanșei simplu rezemate pe conturul interior cu sarcini concentrate pe circumferința de distribuție a șuruburilor

4.1.1*a*. *Deformațiile din încărcarea echilibrată pe circumferința de distribuție a șuruburilor* ($\rho = \lambda = 1{,}067$)

Pentru $k = 28$; $\theta = 0$; $n = 1$,

$kn = 28$; $kn(1-\mu) = 19{,}6$; $4 - (1+\mu)^2 = 2{,}31$,

$kn + 1 = 29$; $kn - 1 - \mu = 54{,}7$; $2kn - 1 = 55$,

$kn - 1 = 27$; $2kn + 1 + \mu = 57{,}3$;

$k^2n^2 = 784$; $4kn + 1 - \mu = 112{,}7$,

$\lambda^{-kn+1} = 0{,}1735$; $\lambda^{kn+1} = 6{,}547$,

$\lambda^{kn} = 6{,}16$; $\lambda^{-kn-2} = 0{,}1426$; $\lambda^{-2kn-2} = 0{,}0232$,

$\lambda^{-kn} = 0{,}1625$; $\lambda^{-2} = 0{,}878$; $\lambda^{2kn-2} = 33{,}3$

$\lambda^{kn-2} = 5{,}401$; $\lambda^{-4} = 0{,}771$; $\lambda^{kn+2} = 7{,}02$,

$\lambda^{kn-1} = 5{,}76$; $\lambda^{-kn-1} = 0{,}153$; $\lambda^{-kn+2} = 0{,}185$,

$$\beta = 784 \cdot 0{,}49 + 8 \cdot 1{,}3 + 2 \cdot 783 \cdot 0{,}91 \cdot 0{,}787 - 784 \cdot 2{,}31 \cdot 0{,}771 -$$

$$- 3{,}3 \cdot 57{,}3 \cdot 0{,}0232 + 3{,}3 \cdot 54{,}7 \cdot 33{,}3 = 6{,}224 \cdot 10^3,$$

$$\beta_1 = 54{,}7\,(19{,}6 + 2{,}6)6{,}16 - 784 \cdot 2{,}31 \cdot 0{,}1426 + 27 \cdot 1{,}3(19{,}6 -$$

$$- 2{,}6)\,0{,}1625 = 7{,}391.10^3,$$

$$\beta_2 = 1{,}3 \cdot 29 \cdot 22{,}2 \cdot 6{,}16 - 784 \cdot 2{,}31 \cdot 5{,}401 + 57{,}3 \cdot 17 \cdot 0{,}1625 = -45{,}42,$$

$$\beta_3 = 54{,}7 \cdot 5{,}401 - 29 \cdot 1{,}3\ 0{,}1426 - 17 \cdot 0{,}1625 = 287{,}77,$$

$$\beta_4 = 22{,}2 \cdot 6{,}16 + 27 \cdot 1{,}3 \cdot 5{,}401 - 57{,}3 \cdot 0{,}1426 = 318{,}44,$$

$$\frac{\beta_1}{\beta} = 1{,}185\,; \quad \frac{\beta_2}{\beta} = -7{,}27 \cdot 10^{-3}\,; \quad \frac{\beta_3}{\beta} = 4{,}62 \cdot 10^{-2}\,; \quad \frac{\beta_4}{\beta} = 5{,}11 \cdot 10^{-2},$$

$$w = \frac{kPa^2}{2\pi D}\,\frac{1}{28}\left(\frac{1}{28 \cdot 27 \cdot 0{,}7}\,1{,}185 \cdot 6{,}16 + \frac{1}{28 \cdot 29 \cdot 0{,}7}\,7{,}27 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}1625 -\right.$$

$$\left. - \frac{1}{29}\,4{,}62 \cdot 10^{-2} \cdot 7{,}02 - \frac{1}{27}\,5{,}11 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}185\right) = \frac{kPa^2}{2\pi D} \cdot 8{,}10 \cdot 10^{-5}.$$

Notînd

$$\frac{kPa^2}{2\pi D} = w_1,$$

avem

$$w = 8{,}10 \cdot 10^{-5} w_1,$$

$$\varphi = \frac{kPa}{2\pi D}\,\frac{1}{28}\left(\frac{1{,}185}{27 \cdot 0{,}7}\,5{,}76 - \frac{7{,}27 \cdot 10^{-3}}{29 \cdot 0{,}7}\,0{,}153 -\right.$$

$$\left. - \frac{30}{29}\,4{,}62 \cdot 10^{-2} \cdot 6{,}547 + \frac{26}{27}\,5{,}11 \cdot 10^{-2} \cdot 0{,}1735\right) = \frac{kPa}{2\pi D}\,2{,}09 \cdot 10^{-3}.$$

Notînd

$$\frac{kPa}{2\pi D} = \varphi_1,$$

rezultă

$$\varphi = 2{,}09 \cdot 10^{-3} \varphi_1.$$

În tabela 1 sînt înscrise deplasările și rotirile pentru $k = 28$ și $k = 40$ în dreptul șuruburilor și între șuruburi.

Tabela 1

		$\theta = 0$		$\theta = 6°25'$	$\theta = 4°30'$
		$k = 28$	$k = 40$	$k = 28$	$k = 40$
$\frac{w}{w_1} 10^5$	$n=1$	8,10	3,075	−8,10	−3,075
	$n=2$	1,143	0,35	1,143	0,35
	$n=3$	0,345	0,1167	−0,345	−0,1167
	$\sum_n$	9,588	3,5417	−7,302	−2,8417
$\frac{\varphi}{\varphi_1} 10^3$	$n=1$	1,68	0,975	−1,68	−0,975
	$n=2$	0,337	0,225	0,337	0,225
	$n=3$	0,1785	0,1165	−0,1785	−0,1165
	$\sum_n$	2,1955	1,3165	−1,5215	−0,8665

4.1.1*b*. *Deformațiile din încărcarea simetrică pe circumferința de distribuție a șuruburilor* ($\rho = \lambda = 1{,}067$)

$$\ln \lambda = 0{,}06485,$$

$$\frac{1-\mu}{1+\mu} = 0{,}5383\,; \quad 2\,\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1} = 1{,}068,$$

$$\frac{1+\mu}{1-\mu} = 1{,}8571\,; \quad \frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1} = 0{,}534,$$

$$\frac{3+\mu}{1+\mu} = 2{,}5384\,; \quad \frac{1-\mu}{1+\mu} + 2\,\frac{\lambda^2 \ln \lambda}{\lambda^2 - 1} = 1{,}606,$$

$$\lambda^2 = 1{,}138\ ; \quad 4\,\frac{1+\mu}{1-\mu} = 7{,}4284.$$

$$w = \frac{pba^2}{8D}\Big[(0{,}5383 + 1{,}068)1{,}138 + 7{,}428 \cdot 0{,}534 \cdot 0{,}06485 -$$

$$- 2 \cdot 1{,}138(0{,}06485 - 1) - (2{,}538 + 1{,}068)\Big] = \frac{pba^2}{8D}\,0{,}607.$$

Știind că

$$pb = \frac{kP}{2\pi},$$

rezultă

$$w = \frac{kPa^2}{2\pi D} 7{,}6 \cdot 10^{-2} = 7{,}6 \cdot 10^{-2} w_1,$$

$$\varphi = \frac{pba}{4D} [(0{,}5383 + 1{,}068)\, 1{,}067 + 1{,}068 \cdot 1{,}8571 \cdot 0{,}928 -$$

$$- 1{,}067(2 \cdot 0{,}06485 - 1)] = 1{,}14 \cdot \varphi_1.$$

4.1.1*c*. *Deformațiile totale pe cricumferința de distribuție a șuruburilor* ($\rho = \lambda = 1{,}067$)

Sînt înscrise în tabela 2.

Tabela 2

	$\theta = 0$		$\theta = 6°25'$	$\theta = 4°25'$
	$k = 28$	$k = 40$	$k = 28$	$k = 40$
$\frac{w_t}{w_1} \cdot 10^2$	7,6096	7,6035	7,5927	7,5972
$\frac{\varphi_t}{\varphi_1}$	1,1421	1,1413	1,1415	1,1391

În figura 7 este reprezentată diagrama deplasării pentru $k = 28$

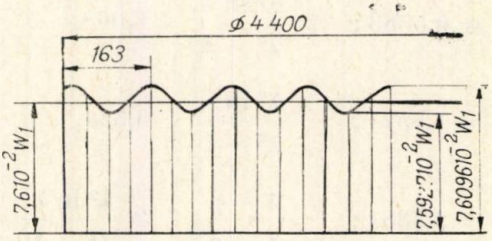


Fig. 7

4.1.2*a*. *Deformațiile din încărcarea echilibrată pe circumferința de rază* $r = 669$ *mm* ($\rho = 1{,}025$; $\lambda = 1{,}067$)

Sînt înscrise în tabela 3.

4.1.2*b*. *Deformațiile din încărcarea simetrică pe circumferința de rază* $r = 669$ *mm* ($\rho = 1{,}025$; $\lambda = 1{,}067$)

$$w = 2{,}8 \cdot 10^{-2} w_1,$$

$$\varphi = 1{,}122 \varphi_1.$$

4.1.2*c*. *Rotirea din încărcarea simetrică pe reazim* ($\rho = 1$)

$$\varphi = 1{,}12 \varphi_1.$$

Tabela 3

		$\theta=0$		$\theta=6°25'$	$\theta = 4°30'$
		$k = 28$	$k = 40$	$k = 28$	$k = 40$
$\frac{w}{w_1} 10^5$	$n=1$	2,678	0,492	−2,678	−0,492
	$n=2$	0,206	0,01435	0,206	0,01435
	$n=3$	0,0285	0,0208	−0,0285	−0,00208
	$\sum_n$	2,9125	0,508	−2,5	−0,47973
$\frac{\varphi_t}{\varphi_1} 10^3$	$n=1$	1,138	0,38	−1,138	−0,38
	$n=2$	0,1072	0,02165	0,1072	0,02165
	$n=3$	0,0196	0,00221	−0,0196	−0,00221
	$\sum_n$	1,2648	0,40386	−1,0504	−0,36056

4.1.2*d*. *Deformațiile totale pe circumferința de rază* $r = 669$ *mm* ($\rho = 1{,}025$; $\lambda = 1{,}067$)

Sînt înscrise în tabela 4.

Tabela 4

	$\theta=0$		$\theta=6°25'$	$\theta=4°30'$
	$k = 28$	$k = 40$	$k = 28$	$k = 40$
$\frac{w_t}{w_1} \cdot 10^2$	2,8029	2,8005	2,7975	2,7996
$\frac{\varphi_t}{\varphi_1}$	1,12326	1,1224	1,12305	1,12164

4.2. DEFORMAȚIILE FLANȘEI ÎNCASTRATĂ PE CONTURUL INTERIOR CU SARCINI CONCENTRATE PE CIRCUMFERINȚA DE DISTRIBUȚIE A ȘURUBURILOR

4.2.1*a*. *Deformațiile din încărcarea echilibrată pe circumferința de distribuție a șuruburilor* ($\rho = \lambda = 1{,}067$)

Sînt înscrise în tabela 5.

4.2.1*b*. *Deformațiile din încărcarea simetrică pe circumferința de distribuție a șuruburilor* ($\rho = \lambda = 1{,}067$)

$$w = 17{,}71 \cdot 50^{-5} w_1,$$

$$\varphi = 12 \cdot 10^{-3} \varphi_1.$$

Tabela 5

		$\theta=0$		$\theta=6°25'$	$\theta=4°30'$
		$k=28$	$k=40$	$k=28$	$k=40$
$\frac{w}{w_1}10^5$	$n=1$	5,64	2,81	−5,64	−2,81
	$n=2$	1,134	0,338	1,134	0,338
	$n=3$	0,333	0,125	−0,333	−0,125
	$\sum_n$	7,107	3,273	−4,839	−2,597
$\frac{\varphi}{\varphi_1}10^3$	$n=1$	1,355	0,698	−1,355	−0,698
	$n=2$	0,339	0,237	0,339	0,237
	$n=3$	0,1545	0,100	−0,1545	−0,100
	$\sum_n$	1,8485	1,035	−1,1705	−0,561

4.2.2*a*. *Deformațiile din încărcarea echilibrată pe circumferința de rază* $r = 669$ *mm* ($\rho = 1{,}025$; $\lambda = 1{,}067$)

Sînt înscrise în tabela 6.

Tabela 6

		$\theta=0$		$\theta=6°25'$	$\theta=4°30'$
		$k=28$	$k=40$	$k=28$	$k=40$
$\frac{w}{w_1}10^5$	$n=1$	0,608	0,475	−0,608	−0,475
	$n=2$	0,0858	0,0285	0,0858	0,0285
	$n=3$	0,0323	0,00295	−0,0323	−0,00295
	$\sum_n$	0,7261	0,50645	−0,5545	−0,44945
$\frac{\varphi}{\varphi_1}10^3$	$n=1$	0,71	0,320	−0,71	−0,320
	$n=2$	0,1165	0,0775	0,1165	0,0775
	$n=3$	0,00906	0,00243	−0,00906	−0,00243
	$\sum_n$	0,83556	0,39993	−0,60256	−0,24493

4.2.2*b*. *Deformațiile din încărcarea simetrică pe cricumferința de rază* $r=669$ *mm* ($\rho = 1{,}025$; $\lambda = 1{,}067$)

$$w = 0,$$

$$\varphi = 1{,}425 \cdot 10^{-3} \varphi_1.$$

CONCLUZII

1. Considerînd flanșa o placă inelară încărcată cu sarcini concentrate pe circumferința de distribuție a șuruburilor, metoda expusă permite determinarea exactă a eforturilor și a deformațiilor.

Se descompun în serie Fourier sarcinile concentrate, obținîndu-se o sarcină distribuită, compusă dintr-o parte constantă și o parte variabilă echilibrată. Placa se rezolvă separat pentru fiecare dintre aceste două încărcări, după care, prin însumare, se determină eforturile și deformațiile totale.

2. Exemplificarea numerică arată că modul de rezemare influențează destul de mult mărimea deformațiilor.

3. Convergența seriei în cazul calculului deplasărilor este mult mai bună decît în cazul calculului rotirilor, de aceea este necesar ca pentru determinarea rotirilor să se ia în considerare un număr mai mare de termeni ai seriei.

4. Pentru o flanșă cu parametrii funcționali și dimensionali cunoscuți, determinarea exactă a deformațiilor ne conduce la un criteriu științific de stabilire a distanței (pasului) dintre șuruburi. Menționăm că literatura tehnică de specialitate furnizează valori numai pentru rotirea admisibilă, întrucît ipotezele de calcul nu puteau evidenția ondulările circumferențiale.

Dată fiind complexitatea calculului și importanța problemei pentru realizarea de îmbinări etanșe, este indicat ca întreg calculul să fie realizat cu calculatoare cifrice. În acest sens, metoda propusă îndeplinește condițiile unui algoritm ușor de programat.

Primită la redacție la 4 noiembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. S. Timoshenko, *Théorie des plaques et des coques*, Paris, 1951.
2. S. D. Ponomariov și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*, trad. din limba rusă, București, Edit. tehnică, 1963.
3. S. K. Iakomov, *Nekotorîe zadaci rasciota kruglih i kolțevîh plit, pagpertih v otdelnîh v otdelnih tacikah*, în *Rasciot prostranstvennîh konstrukții*, vol. III, Moskva, 1955.

ASPECTE ALE CORECTĂRII ABATERILOR DE FORMĂ LA HONUIREA BUCȘELOR CU PEREȚI SUBȚIRI

de V. IONUȚ, L. MORAR
Institutul politehnic Cluj

Lucrarea este consacrată studiului privind condițiile optime de micșorare a abaterilor de formă, în secțiune transversală, la honuirea bucșelor cu pereți subțiri. Metoda aplicată se bazează pe principiul proporționalității corectării abaterilor de la forma geometrică cu lucrul mecanic cheltuit în procesul de honuire.
În baza cercetărilor teoretice și experimentale se indică valorile parametrilor principali ai procesului de honuire care asigură corectarea intensă a abaterilor de formă.

Cercetările privind prelucrările prin honuire se referă îndeosebi la mărirea productivității procesului (volumul de așchii desprinse în unitate de timp) sau la obținerea unei anumite rugozități a suprafețelor prin alegerea adecvată a regimului de așchiere și a sculei abrazive. Problemele privind corectarea abaterilor de formă ale alezajelor, legat de sistemul tehnologic elastic, sînt mai puțin oglindite în literatura tehnică de specialitate.

Corectarea abaterilor de formă a bucșelor cu pereți subțiri prin honuire, ca ultimă operație a procesului tehnologic, are loc în condițiile unui consum mare de timp. Chiar în aceste condiții de prelucrare rămîn piese cu abateri de formă care depășesc valorile admisibile. Rezultă necesitatea de a căuta condițiile optime la honuirea acestor semifabricate sub aspectul corectării abaterilor inițiale de formă.

În lucrare se încearcă a găsi pe cale teoretică condițiile optime de micșorare a abaterilor de formă în secțiune transversală prin honuirea bucșelor cu pereți subțiri. Metodica și considerentele de bază luate aici pot fi utilizate pentru elaborarea teoriei eliminării abaterilor inițiale la alezajele cilindrice a semifabricatelor de orice formă constructivă.

La prelucrări prin așchiere apar abateri de la circularitate, care, în baza cercetărilor întreprinse pînă în prezent [1], au diferite forme în funcție de condițiile concrete de prelucrare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 955–973

În cazul alezării bucșelor cu pereți subțiri, măsurătorile efectuate au arătat că forma profilului se poate asimila în majoritatea cazurilor cu o elipsă. Așa, de exemplu, bucșele din fontă cu grosimea pereților de 8,5 mm și diametrul alezajului de 108 mm, înaintea operației de honuire (după alezare cu cuțitul), prezintă abateri de circularitate ca cele reprezentate în figura 1. Profilul real în secțiune transversală a fost determinat prin măsurători asupra unor piese reale din categoria bucșelor cu pereți subțiri, care se găsesc în producție curentă a întreprinderilor.

Din aceste considerente se vor efectua calculele pentru condițiile corectării acestei forme eliptice în formă circulară.

Se consideră că intensitatea micșorării erorilor inițiale este direct proporțională cu lucrul mecanic L cheltuit în acest sens :

$$L = n\int_0^{2\pi} \mu F \mathrm{d}s = n\int_0^{2\pi} \mu F R \mathrm{d}\varphi, \tag{1}$$

unde

n este numărul barelor de honuit ;

μ — coeficientul de frecare dintre bară și semifabricat (se va considera $\mu=1$) ;

F — forța de apăsare a barei abrazive pe semifabricat, în N ;

R — raza alezajului semifabricatului, în mm ;

φ — parametrul variabil, în radiani (fig. 2).

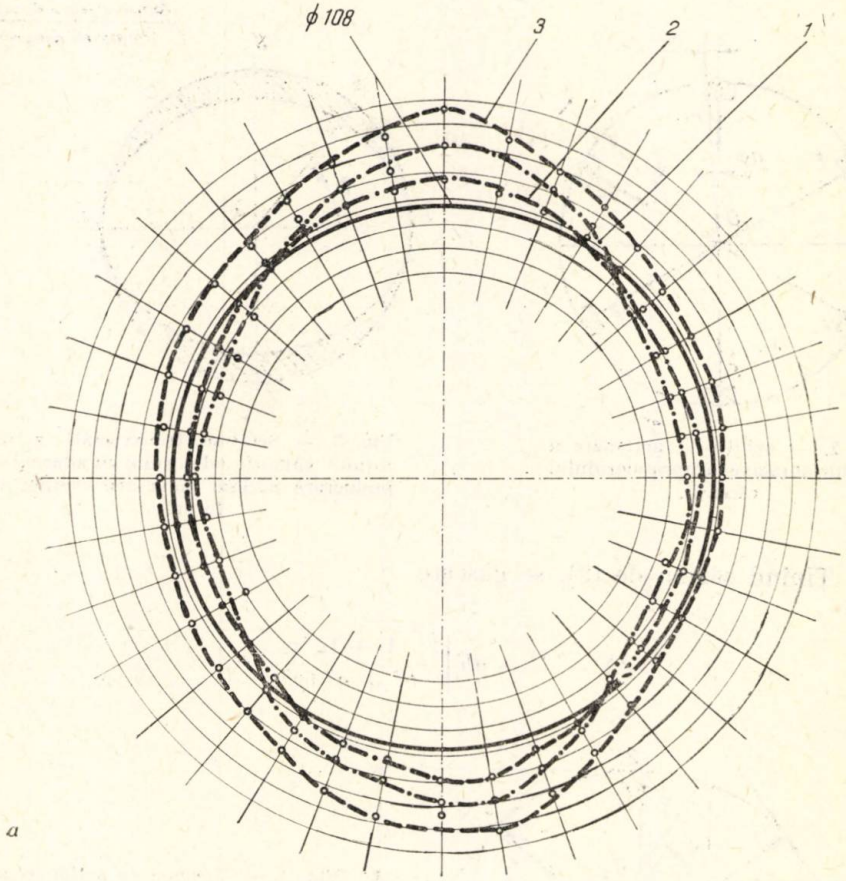
Pentru a corecta eroarea de formă în secțiune transversală (fig. 3), teoretic este necesar a îndepărta numai porțiunea hașurată, adică stratul de metal care conține eroarea. Din experiențele efectuate rezultă că, practic, pentru a micșora eroarea de formă de la 0,06 mm la 0,03 mm, pentru piesele reprezentate în figura 1, este necesar a ridica un adaos de prelucrare de 0,08—0,12 mm. Aceasta se datorește în primul rînd lipsei de rigiditate a acestor bucșe cu pereți subțiri ; honul se consideră perfect rigid, urmînd ca cedarea lui să se ia în considerare numai la prelucrarea semifabricatelor rigide nedeformabile.

Din figura 3 rezultă că prin ridicarea adaosului de prelucrare și pe direcția $I—I$ nu se micșorează erorile de formă, ci se mărește doar diametrul alezajului. Pentru a găsi condițiile optime de corectare a erorilor de formă este necesar, așadar, a căuta condițiile prin care va avea loc o îndepărtare de material în toate secțiunile în afară de secțiunea $I—I$. În acest caz, intensitatea îndepărtării adaosului de metal se va schimba proporțional cu variația segmentului AB. Mărimea segmentului AB, după cum rezultă din figura 3, este distanța dintre punctele de intersecție ale dreptei OA cu elipsa și cu traiectoria circulară a barelor abrazive.

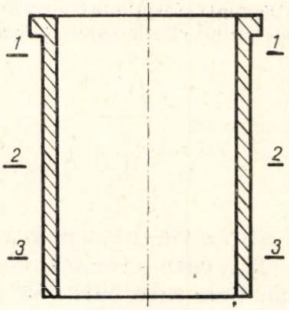
Intersectînd dreapta OA de ecuație $y = x\mathrm{tg}\,\varphi$ cu elipsa de ecuație $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, rezultă coordonatele punctului de intersecție :

$$x = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}},$$

$$y = \frac{ab}{\sqrt{b^2 + a^2\,\mathrm{tg}^2\varphi}}\,\mathrm{tg}\,\varphi. \tag{2}$$



a



b

Fig. 1. — Profilul bucşelor cu pereţi subţiri în secţiune transversală : *a* — forma reală, scara 1000 : 1 pentru profil ; *b* — schema de măsurare.

Din figura 3 rezultă

$$AB = OB - OA = \Delta = R - \sqrt{x^2 + y^2}.$$

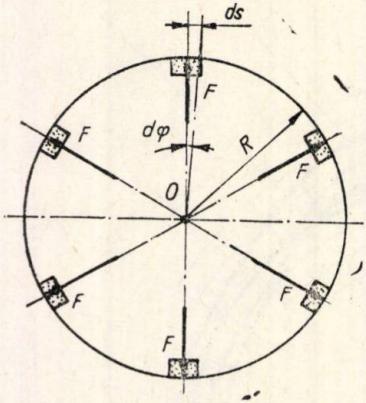


Fig. 2. — Schița de acționare a barelor abrazive asupra alezajului cămășii.

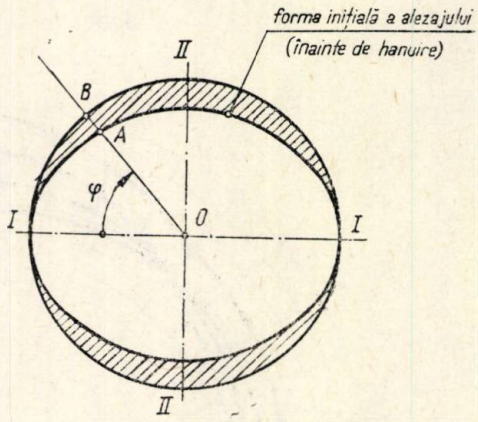


Fig. 3. — Secțiune transversală a alezajului cămășii cilindrului cu adaosul de prelucrare necesar corectării erorilor de formă.

Ținînd seama de (2), se găsește

$$\Delta = R - ab\sqrt{\frac{1 + \operatorname{tg}^2\varphi}{b^2 + a^2\operatorname{tg}^2\varphi}}. \qquad (3)$$

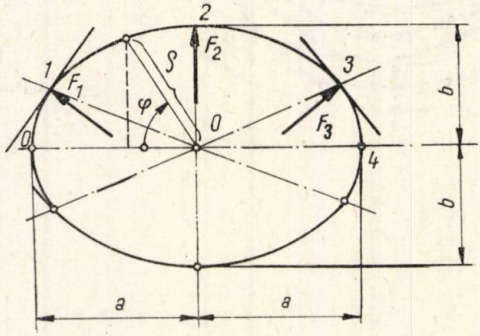


Fig. 4. — Schema de acționare a forțelor într-o secțiune transversală a alezajului eliptic supus honuirii.

Referindu-ne la honuirea cu șase bare abrazive, urmează a determina raza optimă de deschidere a barelor R_0, care creează condițiile optime de corectare a erorilor inițiale de formă. Cele șase bare vor acționa în secțiune eliptică (fig. 4) sub forma unui sistem de șase forțe, avînd ca rezultat teoretic modificarea formei eliptice în formă circulară. În acest scop, prima etapă constă în găsirea dependențelor dintre deformații și forțele care acționează pe direcțiile respective. Aceste calcule conduc

însă la dificultăţi matematice mari, deoarece aprecierea braţelor de pîrghie necesare scrierii momentelor pentru forţele F_1 şi F_3, aplicate după normalele la elipsă în punctele *1* şi *3* este dificilă.

Pentru simplificarea calculelor se consideră că problema inversă este echivalentă, mai ales că raportul semiaxelor elipsei este foarte aproape

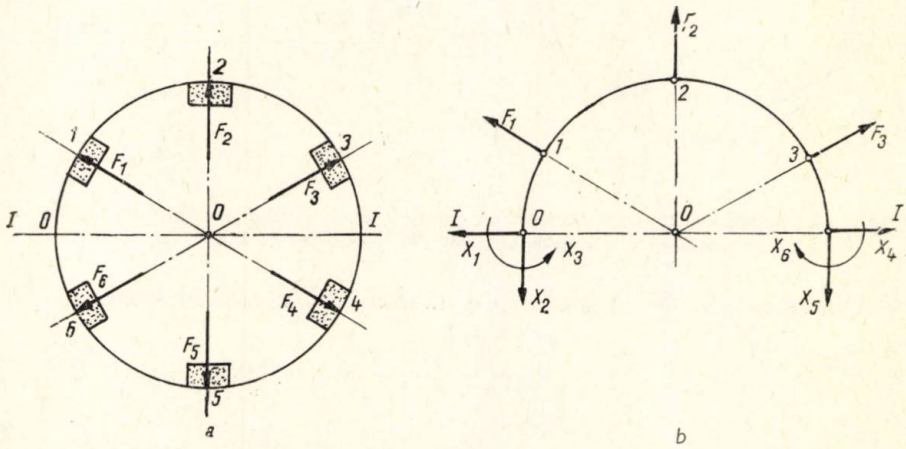


Fig. 5. — Schema de acţionare a forţelor excercitate de barele abrazive : *a* — asupra inelului circular, sistem triplu static nedeterminat ; *b* — asupra inelului secţionat, sistemul de bază corespunzător celui din figura *a*.

de valoarea unitară. Aşa, de exemplu, înaintea operaţiei de honuire a cămăşilor de cilindru reprezentate în figura 1, raportul semiaxelor alezajului eliptic dinsecţiune transversală are o valoare medie de $a/b \approx 0{,}999429$. În acest caz, ecuaţia polară a elipsei, $\rho = \sqrt{a^2 \cos^2\varphi + b^2 \sin^2\varphi}$, se transformă în ecuaţia polară a cercului $R = \text{const}$. Astfel, asupra inelului circular (fig. 5*a*) acţionează sistemul de şase forţe : F_1, F_2, F_3, F_4, F_5 şi F_6.

Avînd în vedere [2], sistemul triplu static nedeterminat, reprezentat în figura 5*a*, se poate transforma într-un sistem de bază, reprezentat în figura 5*b*.

O rezolvare simplă a acestui sistem se poate concepe folosind metoda suprapunerii efectelor, deformaţiile inelului avînd un caracter elastic. Se va considera deformarea inelului reprezentat în figura 6*a*, sub acţiunea unui sistem de două forţe care acţionează succesiv pe direcţiile *I—I*, *II—II* şi *III—III*, pe fiecare direcţie acţionînd cu o anumită intensitate $F_1—F_1$, $F_2—F_2$ şi, respectiv, $F_3—F_3$. Pentru fiecare poziţie a unei perechi de forţe se calculează deformaţiile pe cele trei direcţii, urmînd ca ulterior să se suprapună efectele acestora ca şi cum ar acţiona simultan.

Sistemul static nedeterminat (fig. 6*a*) se transformă într-un sistem de bază, făcînd o secţiune după direcţia perechii de forţe considerate, de exemplu după direcţia de acţionare a forţelor $F_1—F_1$ (*I—I*, fig. 6*b*). Urmează a determina momentele încovoietoare X_1, forţele tăietoare X_2 şi forţele axiale X_3.

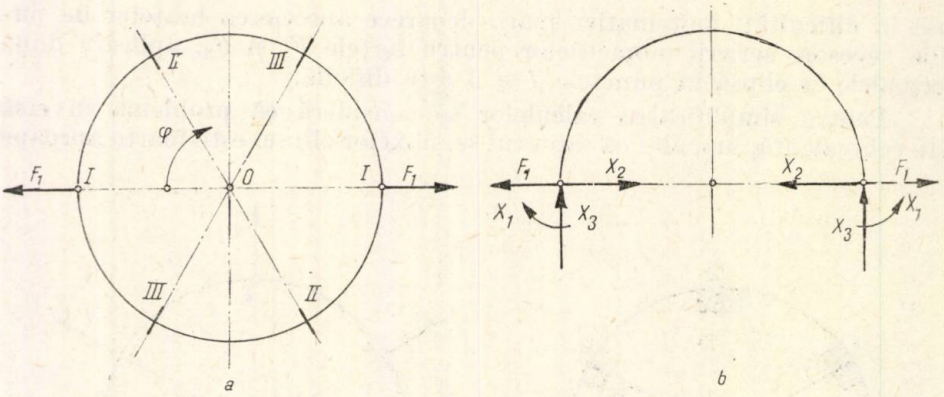


Fig. 6. — Schema sistemelor considerînd acțiunea unei singure perechi de forțe : *a* — sistemul static nedeterminat ; *b* — sistemul de bază.

Din ecuațiile de proiecții pe orizontală și verticală rezultă

$$X_2 = \frac{F_1}{2},$$

$$X_3 = 0. \tag{4}$$

Cunoscînd forțele axiale și tăietoare (4), cadrul devine simplu static nedeterminat, rămînînd ca necunoscută static nedeterminată momentul încovoietor X_1. Se scrie condiția de deplasare, care exprimă faptul că fețele secțiunii nu trebuie să se rotească. Se notează cu α_{11} deplasarea unghiulară sub acțiunea momentului-unitate $X_1=1$ și cu δ_{10} deplasarea unghiulară în cazul încărcării sistemului de bază cu forțele date. Ecuația canonică [2] este

$$\alpha_{11}X_1 + \delta_{10} = 0. \tag{5}$$

Utilizînd formula Maxwell-Mohr pentru calculul săgeții,

$$\delta = \frac{M_x \cdot m}{EJ}\,\mathrm{d}s \;[5],$$

se vor determina deplasările unghiulare α_{11} și δ_{10} :

$$\alpha_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{2\pi} m_1^2 \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi = \frac{2\pi R}{EI}, \tag{6}$$

în care m_1 este momentul-unitate $m_1=1$, și

$$\delta_{10} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_0(\varphi)\, m_1 \cdot R \cdot \mathrm{d}\varphi, \tag{7}$$

în care

$$M_0(\varphi) = \frac{F_1}{2} R \sin\varphi. \tag{8}$$

Introducînd valorile deplasărilor unghiulare α_{11} și δ_{10}, calculate cu formulele (6) și, respectiv, (7), în ecuația canonică (5) și efectuînd calcule matematice necesare, se găsește valoarea momentului încovoietor X_1 :

$$X_1 = -\frac{F_1 R}{\pi}. \tag{9}$$

Momentele reale care acționează asupra sistemului static nedeterminat se vor putea calcula prin însumarea momentului $M_0(\varphi)$ și a momentului X_1 :

$$M_i'(\varphi) = M_0(\varphi) + X_1. \tag{10}$$

Expresia momentului $M_i'(\varphi)$ va fi

$$M_i'(\varphi) = F_1 R\left(\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{\pi}\right). \tag{10'}$$

Deplasarea punctului de aplicație a fiecărei forțe în sens radial sub acțiunea sistemului de o singură pereche de forțe se poate calcula utilizînd formula Maxwell-Mohr, aplicată cadrului a cărui încărcare este cunoscută :

$$\Delta_{I-I}' = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} M_i'(\varphi)\, m(\varphi)\, R\mathrm{d}\varphi, \tag{11}$$

în care momentul încovoietor $m(\varphi)$, datorat sarcinii unitare $F_1 = 1$, este

$$m(\varphi) = \frac{1}{2} R\sin\varphi,$$

astfel că

$$\Delta_{I-I}' = \frac{F_1 R^3}{EI}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi\left(\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{\pi}\right)\mathrm{d}\varphi$$

sau

$$\Delta_{I-I}' = 0{,}07428919\,\frac{R^3 F_1}{EI}. \tag{11'}$$

Pentru a calcula suma deplasărilor pe cele trei direcții, *I—I*, *II—II* și *III—III*, sub acțiunea perechii de forțe $F_1—F_1$, se aplică sistemului de bază static determinat pe cele trei direcții, perechi de forțe-unitate (fig. 7). În acest caz, suma deplasărilor totale în baza considerentelor arătate mai sus va fi

$$\Sigma\Delta' = \frac{4}{EI}\left[\int_0^{\frac{\pi}{3}} M_i'(\varphi)\, m'(\varphi)\, R\mathrm{d}\varphi + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} M_i'(\varphi)\, m''(\varphi)\, R\mathrm{d}\varphi\right],$$

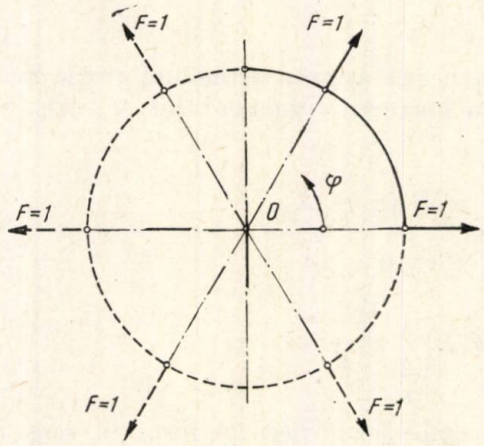


Fig. 7. — Schema de calcul a sumei deplasărilor după cele trei direcții corespunzătoare acționării unei perechi de forțe.

în care

$$m'(\varphi) = \frac{1}{2} R\left(\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{\pi}\right),$$

$$m''(\varphi) = \frac{1}{2} R\left(\frac{1}{2}\sin\varphi - \frac{1}{\pi}\right) + R\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{3}\right).$$

Deplasarea radială a unui punct al inelului pe direcția *II—II* sau *III—III* sub acțiunea perechii de forțe $F_1—F_1$ va fi

$$\Delta'_{II-II} = \Delta'_{III-III} = \frac{1}{2}\Sigma\Delta' - \Delta'_{I-I}. \qquad (12)$$

Efectuînd calculele matematice, expresia (12) devine

$$\Delta'_{II-II} = \Delta'_{III-III} = -\,0{,}03865526\,\frac{R^3F_1}{EI}. \qquad (12')$$

Deformaţiile Δ'_{i-i} se datorează numai sistemului de forţe $F_1 - F_1$. Ţinînd seama de încărcarea reală şi aplicînd pricipiul suprapunerii efectelor, deformaţiile totale vor fi

$$\Delta_1 = k_1 \frac{F_1 R^3}{EI} - k_2 \frac{F_2 R^3}{EI} - k_2 \frac{F_3 R^3}{EI},$$

$$\Delta_2 = -k_2 \frac{F_1 R^3}{EI} + k_1 \frac{F_2 R^3}{EI} - k_2 \frac{F_3 R^3}{EI}, \tag{13}$$

$$\Delta_3 = -k_2 \frac{F_1 R^3}{EI} - k_2 \frac{F_1 R^3}{EI} + k_1 \frac{F_3 R^3}{EI},$$

în care $k_1 = 0{,}07428919$ şi $k_2 = 0{,}03865526$.

Considerînd egalităţile (13) ca un sistem de trei ecuaţii şi rezolvîndu-l în raport cu forţele F_1, F_2 şi F_3, se obţine

$$F_1 = c_1 \frac{EI}{R^3} \Delta_1 + c_2 \frac{EI}{R^3} \Delta_2 + c_2 \frac{EI}{R^3} \Delta_3,$$

$$F_2 = c_2 \frac{EI}{R^3} \Delta_1 + c_1 \frac{EI}{R^3} \Delta_2 + c_2 \frac{EI}{R^3} \Delta_3, \tag{14}$$

$$F_3 = c_2 \Delta_1 \frac{EI}{R^3} + c_2 \Delta_2 \frac{EI}{R^3} + c_1 \Delta_3 \frac{EI}{R^3},$$

în care $c_1 = 113{,}22354$; $c_2 = 104{,}37372$.

Sub acţiunea sistemului de forţe reprezentat în figura 8, pereţii inelului eliptic se deformează, astfel că punctele 1, *2* şi *3* se deplasează spre punctele *1'*, *2'* şi, respectiv, *3'*. Honul va fi reglat în aşa fel, încît barele abrazive, dispuse pe axa mare a elipsei (pe direcţia $I-I$ din figura 8), să vină în contact cu peretele semifabricatului fără a exercita nici o presiune pe acesta. La rotirea honului, apăsarea specifică pe care o exercită o bară abrazivă pe semifabricat va creşte de la zero pentru $\varphi = 0$ la o valoare maximă pentru $\varphi = \frac{\pi}{2}$, în continuare scade pînă la zero pentru $\varphi = \pi$ ş.a.m.d. Rezultă că presiunea de contact între sculă şi semifabricat variază ciclic. Se poate calcula raza optimă de extindere a barelor abrazive.

Condiţia de tangentă pe direcţia $I-I$ (fig. 8) se scrie sub forma

$$a = R_0 + |\Delta_{I-I}|, \tag{15}$$

în care

a este semiaxa mare a elipsei, în mm;

R_0 — raza optimă (minimă) de extindere a barelor abrazive, în mm;

Δ_{I-I} — deformarea unilaterală a peretelui alezajului în direcţia $I-I$ sub acţiunea forţelor F_1, F_2 şi F_3, în mm.

Avînd în vedere că $F_1 = 0$, din ecuația (14) se obține

$$113{,}22354\Delta_1 + 104{,}37372\Delta_2 + 104{,}37372\Delta_3 = 0,$$

de unde

$$\Delta_1 = -\,0{,}92183745\ (\Delta_2 + \Delta_3). \tag{16}$$

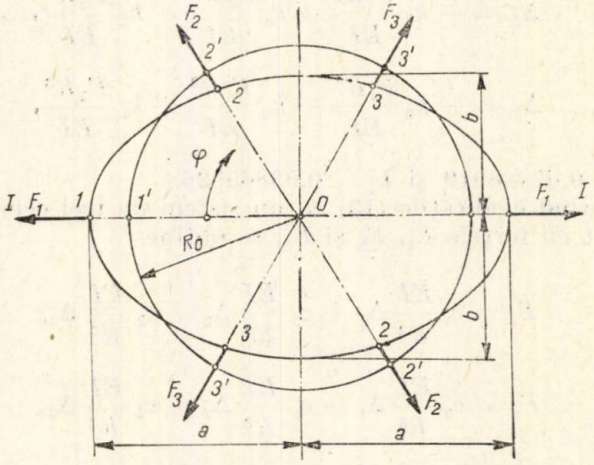


Fig. 8. — Schema deformării inelului sub acțiunea încărcării reale.

Deplasările Δ_2 și Δ_3, avînd loc pe direcțiile de acționare a forțelor F_2 și, respectiv, F_3, caracterizate prin unghiul $\varphi = \pm \frac{\pi}{3}$, se pot exprima cu ajutorul expresiei (3), în care $\operatorname{tg} \varphi = \operatorname{tg} \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$:

$$\Delta_2 = \Delta_3 = R_0 - \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + 3a^2}}.$$

Introducînd această valoare în (16), se obține

$$\Delta_{I-I} = \Delta_1 = 1{,}84367490\left(R_0 - \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + 3a^2}}\right). \tag{17}$$

Raza optimă R_0 de extindere a barelor abrazive se determină din expresiile matematice (15) și (17) :

$$R_0 = 0{,}35135428\ a + 0{,}63294718\ \frac{2ab}{\sqrt{b^2 + 3a^2}}. \tag{18}$$

Lucrul mecanic se calculează cu formula (1), fiind cunoscuți acum toți parametri necesari pentru porțiunea de la 0 la $\frac{\pi}{2}$; pentru a deter-

mina lucrul mecanic consumat la o rotație completă a honului este suficient a înmulți rezultatul obținut cu patru, deoarece apăsarea specifică a barei abrazive pe suprafața de prelucrat, după cum s-a văzut mai sus, se schimbă ciclic în timpul unei rotații:

$$L = 4n\frac{EI}{R_0^2}\left[c_1\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R_0 - ab\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\varphi}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\varphi}}\right)d\varphi + \right.$$

$$+ c_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R_0 - ab\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)}}\right)d\varphi + \qquad (19)$$

$$\left. + c_2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(R_0 - ab\sqrt{\frac{1+\operatorname{tg}^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}{b^2+a^2\operatorname{tg}^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}}\right)d\varphi\right]$$

sau

$$L = 4n\frac{EI}{R_0^2}\left[c_1\frac{\pi}{2}R_0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c_1 a}{\sqrt{1+k^2\sin^2\varphi}}d\varphi + \right.$$

$$+ c_2\frac{\pi}{2}R_0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c_2 a}{\sqrt{1+k^2\sin^2\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)}}d\varphi +$$

$$\left. + c_2\frac{\pi}{2}R_0 - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{c_2 a}{\sqrt{1+k^2\sin^2\left(\varphi+\frac{2\pi}{3}\right)}}\right], \qquad (20)$$

în care $k^2 = \dfrac{b^2-a^2}{b^2}$ este modulul integralelor din expresia (20), iar coeficienții c_1 și c_2 au fost determinați anterior (vezi formula (14)).

Cele trei integrale ale egalității (20) sînt eliptice complete de speța întîi. Soluția acestor integrale se găsește sub formă de serii [3]. Pentru valori mici ale lui k și φ se poate folosi seria

$$F(\varphi, K) = \frac{2}{\pi}K\varphi - \sin\varphi\cos\varphi\left(a_0 + \frac{2}{3}a_1\sin^2\varphi + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}a_2\sin^4\varphi + \ldots\right), \qquad (21)$$

în care

$$K = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 k^4 + \ldots + \left[\frac{(2_n - 1)!!}{2^n \cdot n!}\right]^2 k^{2n} + \ldots\right\},$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} K - 1, \tag{22}$$

$$a_n = a_{n-1} - 1\left[\frac{(2n-1)!!}{2^n \cdot n!}\right] K^{2n}.$$

În cazul studiat se poate limita la primii doi termeni ai seriei, calculele arătînd că prin aceasta eroarea este mai mică de 1%. În acest caz, expresia (22) devine

$$K = \frac{\pi}{2}\left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 \frac{b^2 - a^2}{b^2}\right],$$

$a_0 = \frac{1}{4} \cdot \frac{b^2 - a^2}{b^2}$, iar K fiind constant, funcția (21) devine

$$F(\varphi) = \frac{\varphi}{4} \cdot \frac{5b^2 - a^2}{b^2} - \frac{1}{4} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin\varphi \cos\varphi. \tag{23}$$

Prima integrală din expresia (20) va fi

$$I_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{c_1 a}{\sqrt{1 + K^2 \sin^2\varphi}} \, d\varphi = 113{,}22354a \left| \frac{\varphi}{4} \frac{5b^2 - a^2}{b^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin\varphi \cos\varphi \right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

a doua din expresia (20) în mod similar va fi

$$I_2 = 104{,}37372 \left| \frac{\varphi + \frac{\pi}{3}}{4} \frac{5b^2 - a^2}{b^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \cos\left(\varphi + \frac{\pi}{3}\right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}},$$

iar a treia integrală

$$I_3 = 104{,}37372 \left| \frac{\varphi + \frac{2\pi}{3}}{4} \frac{5b^2 - a^2}{b^2} - \right.$$

$$\left. - \frac{1}{4} \frac{b^2 - a^2}{b^2} \sin\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \cos\left(\varphi + \frac{2\pi}{3}\right) \right|_0^{\frac{\pi}{2}}.$$

Efectuînd calculele numerice pentru I_1, I_2 și I_3 și introducînd valorile obținute în expresia (20), rezultă lucrul mecanic cheltuit la o rotație completă a honului în scopul corectării erorilor de formă :

$$L = 965{,}91294 \frac{\pi EI}{R_0^2} \left(4R_0 - a \frac{5b^2 - a^2}{b^2}\right). \qquad (24)$$

Din expresia (24) rezultă că prin mărirea rigidității semifabricatului (EI) se micșorează timpul necesar corectării erorilor de formă ale alezajului, deoarece în felul acesta crește lucrul mecanic necesar eliminării erorilor inițiale care se consumă la fiecare rotație a honului.

Cu ajutorul formulei (18) se poate calcula raza minimă de extindere a barelor abrazive. Depășind valoarea calculată, adaosul de metal îndepărtat prin honuire va crește, însă lucrul mecanic cheltuit la o rotație a honului prin corectarea erorilor de formă va rămîne neschimbat. Totuși, la presiuni mici, granulele abrazive pot să nu pătrundă suficient în materialul semifabricatului, astfel că nu poate avea loc îndepărtarea adaosului de prelucrare și corectarea erorilor de formă. Urmează ca în acest caz să se mărească raza de extindere a barelor abrazive la o valoare $R > R_0$. Rezultă că extinderea barelor abrazive poate fi considerată ca avînd loc în două etape : 1) pînă în momentul în care toate barele abrazive încep să vină în contact cu semifabricatul oricare ar fi poziția honului ; 2) pînă în momentul în care se ajunge la apăsarea de așchiere prescrisă.

Adaosul de prelucrare la honuire se alege, de regulă, în așa fel încît să fie suficient pentru ca erorile de formă să nu depășească valorile admisibile. Corectarea erorilor de formă în condițiile îndepărtării unei cantități minime de metal duce, desigur, la micșorarea adaosului de prelucrare și urmează ca pe aceste considerente să se aleagă condițiile prelucrării.

În scopul creșterii productivității procesului de honuire, indicațiile din literatură converg spre recomandarea unor presiuni cît mai ridicate. Dependența dintre productivitatea muncii Q și apăsarea specifică de așchiere p pe baza datelor din literatură [4] are alura reprezentată în figura 9, exprimîndu-se matematic sub forma

$$Q = kp^m, \qquad (25)$$

în care k este un coeficient care ține seama de ceilalți factori tehnologici ai procesului, iar m un exponent care depinde de viteza periferică a honului.

Corectarea erorilor de formă însă are loc ca urmare a variației presiunii din timpul unei rotații a honului. Această variație a presiunii, de exemplu Δp_2 dacă se lucrează cu presiuni p mai mari decît o valoare medie p_m ($p > p_m$, fig. 9), produce o creștere a adaosului de metal ridicat ΔQ_2 foarte mică, astfel că intensitatea corectării erorilor de formă va fi scăzută. Dacă se lucrează cu presiunea aleasă în porțiunea $p < p_m$ (vezi fig. 9), atunci o mică variație a presiunii Δp_1 duce la o creștere însemnată a adaosului de prelucrare ΔQ_1, adică se asigură condițiile corectării rapide a erorilor inițiale de formă.

Rezultă că pentru o intensă corectare a erorilor inițiale de formă în secțiune transversală este de recomandat a alege apăsări specifice de așchiere p în porțiunea curbei $Q = f(p)$, unde $f'(p) = \operatorname{tg}\alpha$ are valoare.

Condițiile optime de corectare a erorilor de formă la honuirea cilindrică interioară au fost deduse pentru cazul semifabricatelor inelare. În scopul extinderii rezultatelor obținute și asupra pieselor cilindrice de lungime variabilă se va considera semifabricatului real, cilindru cu pereți subțiri, avînd capetele libere, asupra căruia acționează sistemul de forțe cunoscut. Urmează a stabili dependența dintre forță și deformația de

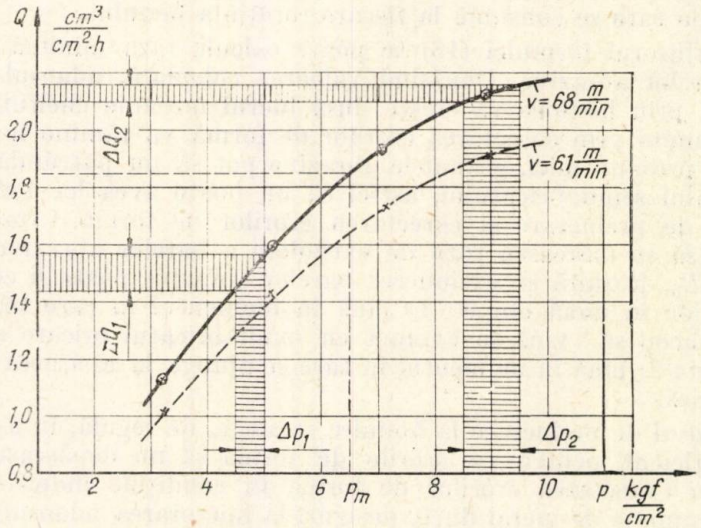


Fig. 9. — Productivitatea muncii Q în funcție de presiunea specifică p la honuirea cămășilor de cilindru de la tractorul U—650 (scula abrazivă; carbură verde de siliciu; granulație 40; structura 8; porozitatea 20; liant bachelitic; viteza axială a honului $W = 13{,}3$ m/min).

încovoiere a cilindrului. Această deformație se poate determina cu precizie suficientă dacă se neglijează complet alungirea suprafeței mediane a cilindrului. Se va utiliza expresia matematică a deformației, dedusă [5] pentru cazul unei cămăși cilindrice solicitată de perechi de forțe

F_i (fig. 10), care acţionează diametral opus la distanţa c_i de la mijlocul cilindrului :

$$\Delta = \frac{F_i R^3}{\pi D l} \sum_{n=2,4,6\ldots} \left\{ \frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{n^2 cx}{(n^2-1)^2 \left[\frac{1}{3} n^2 l^2 + 2(1-\nu) R^2 \right]} \right\} \cos n\varphi, \quad (26)$$

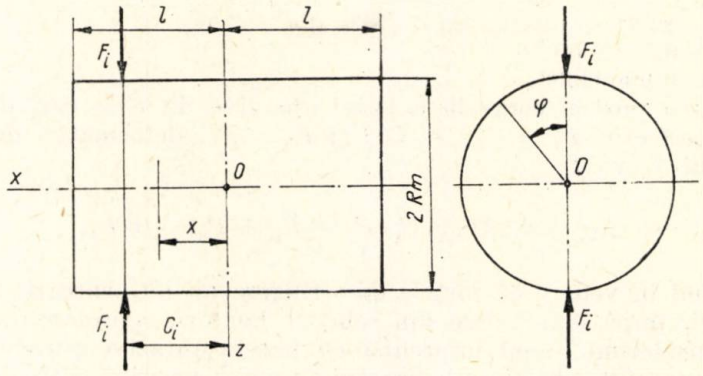


Fig. 10. — Schema solicitării unei bucşe cu perechi de forţe $F_i - F_i$.

în care

$$D = \frac{E\delta^3}{12(1-\nu^2)},$$

l este semilungimea cilindrului ;

δ — grosimea peretelui bucşei ;

c_i — distanţa de la axa radială de simetrie la punctul de aplicaţie al forţei ;

x — distanţa de la axa transversală de simetrie pînă la punctul în care se calculează deformaţia ;

ν — coeficientul lui Poisson.

Luînd în considerare condiţiile reale ale honuirii cămăşilor cilindrilor de tractor :

$$l = 131{,}5 \text{ mm}; \quad \nu = 0{,}3; \quad R_m = R + \frac{1}{2}\delta = 52{,}5 \text{ mm}; \quad \varphi = 0,$$

pentru primii doi termeni ai sumei din expresia (26), $n = 2$, 4, valoarea deformaţiei radiale în dreptul unei perechi de bare abrazive va fi

$$\Delta = \frac{F R_m^3}{\pi D l} (0{,}11555555 + 0{,}00002391 cx). \quad (27)$$

Deformația cilindrului de-a lungul unei bare abrazive în oricare dintre punctele 1, 2,..., 7, unde acționează forțele $F_1, F_2, \ldots, F_7$ conform schemei din figura 11, în baza principiului suprapunerii efectelor, se calculează cu expresia

$$\Delta_\Sigma = \sum_{i=1}^{i=7} kF_i(k_1 + k_2 c_i x_i), \tag{28}$$

în care

$$k = \frac{R_m^3}{\pi D l},$$

$k_1 = 0{,}1155555,$

$k_2 = 0{,}00002391.$

Pentru poziția centrală a barei abrazive, în care caz, datorită simetriei perfecte, $F_1 = F_7$; $F_2 = F_6$; $F_3 = F_5$, deformația, de exemplu în punctul *1*, va fi

$$\Delta_{\Sigma_1} = 0{,}2311111k\,(F_1 + F_2 + F_3) + k_1 F_4. \tag{29}$$

Avînd în vedere că forțele de strîngere nu influențează deformația cilindrului, după cum reiese din schema honuirii reprezentată în figura 12, și considerînd honul împreună cu barele abrazive perfect rigid, rezultă că suprafața de lucru a barelor abrazive va rămîne în permanență paralelă cu axa honului, deformația Δ_{Σ_1} fiind aceeași în orice secțiune, independent de numărul considerat de forțe F_i.

În cazul spațial, cilindru, considerînd că pe un centimetru de lungime a barei abrazive acționează o forță F, expresia (26) a deformației Δ într-un punct de aplicație a oricărei forțe devine

$$\Delta' = \frac{FR_n^3}{\frac{\pi}{2}\frac{EI}{1-\nu^2}} \sum_{n=2,4,6\ldots} \left[\frac{1}{(n^2-1)^2} + \frac{n^2 cx}{(n^2-1)^2\left[\frac{1}{3}\, n^2 l^2 + 2(1-\nu)\, R_m^2\right]} \right] \cos n\varphi. \tag{29-a}$$

Calculînd cu formula (29 a) deformația cilindrului în punctul *4* (fig. 11) aferentă forței medii F, se găsește

$$\Delta'_{\Sigma_0} = 0{,}11555555, \quad \frac{FR_n^3}{\frac{\pi}{2}\frac{EI}{1-\nu^2}},$$

de unde forța F care acționează pe unitatea de lungime a barei abrazive va fi

$$F = 15{,}10050 \frac{\Delta'_{\Sigma_0} EI}{R_n^3}. \tag{30}$$

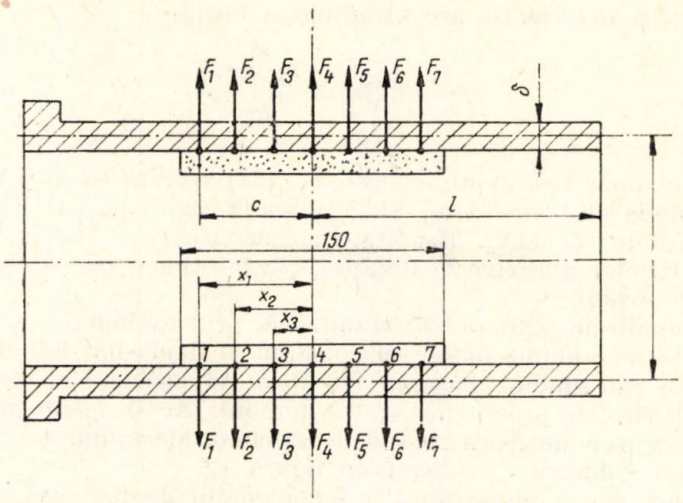


Fig. 11. — Schema de calcul a deformațiilor cămășii de cilindru (bucșă cu pereți subțiri) supusă honuirii.

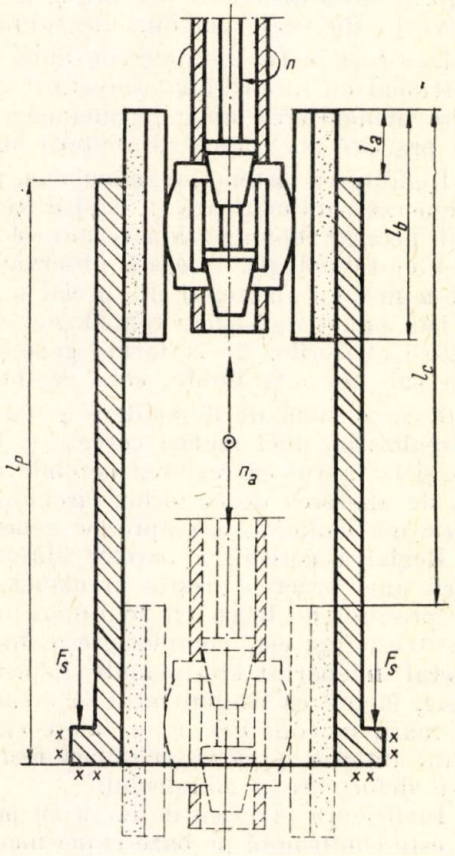


Fig. 12. — Schema honuirii cu indicarea fixării bucșei.

Pentru cazul unui inel de un centimetru lungime [6], dependența dintre forță și deformație are următoarea formă:

$$F = 13{,}5135 \frac{\Delta_\Sigma EI}{R_m^3}. \tag{31}$$

Din compararea expresiei (30) cu (31) rezultă că prin extinderea calculelor de la problema rezolvată în plan la cazul spațial se face o eroare de aproximativ 11%. Rezultate asemănătoare se obțin și în cazul deplasării barelor abrazive la dreapta sau la stînga axei de simetrie radiale a cilindrului.

Din expresiile (26) și (29) rezultă că, prin extinderea barelor abrazive pînă la un anumit diametru constant și deplasînd honul spre unul din capetele alezajului, apăsarea specifică de așchiere va scădea logic, iar productivitatea procesului se va micșora. Acest fenomen constituie una dintre cauzele depășirii parțiale a capetelor alezajului de către barele abrazive, cu valoarea l_d indicată în figura 12.

A doua cauză importantă a fenomenului de mai sus o constituie neuniformitatea drumului parcurs și a vitezei de deplasare a granulelor abrazive pe diferitele porțiuni ale suprafeței de prelucrat.

Deoarece lucrul mecanic consumat în procesul de honuire este direct proporțional cu intensitatea corectării abaterilor de formă, formula (24) permite evidențierea unor recomandări menite să îmbunătățească condițiile practice ale corectării abaterii bucșelor cu pereți subțiri.

Rigiditatea sistemului tehnologic, un factor important al procesului de prelucrare, influențează în mod direct corectarea abaterilor de formă, timpul necesar honuirii micșorîndu-se în condițiile creșterii rigidității sistemului tehnologic. Această observație face posibilă alegerea în mod corect a mașinii-unelte, și în special a dispozitivului.

Din punct de vedere tehnologic, al productivității și al rapidității corectării abaterilor de la forma geometrică, rigiditatea piesei nu poate scădea sub anumite limite, ceea ce interesează proiectarea.

Raza optimă de deschidere a barelor abrazive (formula (18)) permite realizarea unei reglări corecte și bine determinate. Acest lucru se referă și la faptul că reglarea depinde de lotul de piese care se va prelucra, de abaterea de la forma circulară, prin cele două axe ale elipsei, statistic determinată, caz aproape general.

Reglarea corectă a barelor abrazive atrage după sine excluderea folosirii unei practici greșite în uzinele noastre, privind concepția de a folosi presiuni de lucru cît mai mari în „scopul" micșorării timpului de lucru. Acest fapt este complet greșit din două puncte de vedere: adaosul de metal îndepărtat crește mult, nejustificat pentru o corectare optimă a piesei, făcînd ca timpul total să crească; pe de altă parte, presiuni de lucru mari, în condițiile unor bucșe cilindrice cu pereți subțiri produce tensiuni interne a căror echilibru restabilit după prelucrare are drept scop o deformare a cilindrului.

Ineficiența practicii de lucru cu presiuni mari, fapt determinat teoretic, este confirmată pe baze experimentale [4], unde dependența dintre productivitatea Q și presiunea specifică de așchiere p (fig. 9) permite

alegerea domeniului de lucru unde la o creştere a presiunii se obţine şi un spor de productivitate.

Pe baza lucrului mecanic efectuat este recomandat honul cu şase bare. Un număr mai mare de bare abrazive (8) realizează un spor nesubstanţial de îndepărtare a abaterilor de formă (formula (24)), fiind în aceste condiţii neeconomic. Posibilitatea de a construi capete de honuit cu un număr mare de bare pentru diametre mici este mai dificilă.

De asemenea, reglarea barelor abrazive în condiţiile concrete ale lotului respectiv atrage după sine îndepărtarea unei cantităţi de metal minimă pentru o corectare bună a abaterilor de formă ceea ce creează posibilitatea realizării unei tehnologii optime şi din punctul de vedere al productivităţii.

Primită la redacţie la 7 februarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. P. Dodoc, *Strunjirea de înaltă precizie*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1970.
2. M. Tripa, *Rezistenţa materialelor*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1967.
3. I. M. Rîjik, I. S. Gradştein, *Tabele de integrale, sume, serii şi produse*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1955 (trad. din limba rusă).
4. V. Ionuţ, D. B. Vakser, *Studii şi cercetări asupra productivităţii muncii la honuirea cilindrilor din fontă, cu scule abrazive de granulaţie mijlocie şi liant bachelitic*, Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic Cluj, **10** (1967).
5. S. Timoshenko, Woinowsky-Krieger, *Theory of Plates and Shells*, New York — Londra, McGraw-Hill Book Comp., 1959.
6. V. S. Korsakov, *Tocinosti mehaniceskoi obrabotki*, Moskva, Maşghiz, 1951.

CALCULUL DURABILITĂȚII SCULEI ȘI REGIMULUI DE AȘCHIERE FOLOSIND PROGRAMAREA MATEMATICĂ *)

de GHERMAN DRĂGHICI, SERGIU T. CHIRIACESCU
Institutul politehnic Brașov

În lucrare se analizează metodele actuale de determinare a durabilității sculei și a regimului de așchiere și se prezintă o metodă originală care are avantajul folosirii mașinilor de calcul la găsirea rapidă a soluțiilor optime.

1. CONSIDERAȚII PRINCIPIALE

Orice operație de prelucrare mecanică are drept scop obținerea unei suprafețe așchiate cu o anumită precizie dimensional-geometrică și o anumită rugozitate a suprafeței. Prelucrarea este cu atît mai rațională, cu cît costul ei este mai mic sau productivitatea este mai mare. Atît costul, cît și productivitatea prelucrării sînt determinate de un număr mare de factori. Dintre aceștia, o pondere însemnată o dețin parametrii regimului de așchiere : turația piesei (sau sculei) n (rot/min), adîncimea de așchiere t (mm) și avansul de generare s (mm/rot).

Pentru determinarea prin calcul a parametrilor n, t și s, se cunosc două metode de calcul ale căror principii sînt analizate comparativ în lucrarea [10]. În cazul ambelor metode, durabilitatea sculei se calculează din condiția obținerii unui preț de cost minim (durabilitate economică) sau unei productivități maxime a operației de prelucrare mecanică (durabilitatea optimă), avînd la bază relația Time-Taylor de legătură dintre viteza principală de așchiere v și durabilitatea sculei T :

$$v = \frac{ct}{T^m}. \tag{1}$$

a) După determinarea durabilității sculei, în cazul primei metode (numită metoda clasică), alegerea parametrilor regimului de așchiere

*) Lucrarea a fost susținută la Sesiunea științifică jubiliară a Institutului politehnic Brașov, 6—7 decembrie 1968.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 4, 1971, P. 975—999

se face respectînd relația de legătură dintre v (sau n), t și s, care, în cazul strunjirii, burghierii etc., are forma

$$v = \frac{C_v}{T^m t^{x_v} s^{y_v}}, \tag{2}$$

și ținînd seama de unii dintre factorii care limitează mărimile n, t, și s (de exemplu, dacă se execută o operație de finisare, atunci s și v sînt determinați de rugozitatea suprafeței prelucrate, iar dacă se execută o prelucrare de degroșare valorile lui t și s sînt limitate de puterea mașinii-unelte sau de rigiditatea sculei).

După alegerea valorilor parametrilor regimului de așchiere urmează etapa verificării lor. Se verifică astfel:

— posibilitățile de prelucrare furnizate de cinematica mașini-unelte;

— rezistența și stabilitatea elementelor sistemului tehnologic elastic (mașină-unealtă-dispozitiv-piesă-sculă);

—ritmul liniei tehnologice;

b) Avantajul metodei a doua [1], [2] este acela că elimină arbitrariul în alegerea parametrilor n, t și s. Aplicarea programării liniare permite calcularea parametrilor regimului de așchiere, astfel încît *pentru o durabilitate impusă* să se obțină un preț de cost minim sau o productivitate maximă a operației de prelucrare mecanică.

Cu toate meritele acestei metode, din punct de vedere matematic ea nu poate garanta un preț de cost minim sau o productivitate maximă a operației de prelucrare mecanică, deoarece durabilitatea sculei (de care depinde atît prețul de cost, cît și productivitatea) este calculată în baza relației (1) și nu în baza relației (2).

c) Pornind de la observația că durabilitatea sculei nu are aceeași valoare, se propune un nou mod de calcul al parametrilor regimului de așchiere.

Durabilitatea unei anumite scule este funcție de un număr mare de factori: parametrii funcționali ai tăișului, parametrii regimului de așchiere etc. Ceea ce poate fi considerată ca absolută (constantă, dată) pentru o anumită sculă și un anumit gen de prelucrare (degroșare sau finisare) este mărimea formei de uzură care impune înlocuirea sculei [10], [11]. Ca urmare, *durabilitatea sculei trebuie determinată o dată cu parametrii regimului de așchiere*, astfel încît prețul de cost sau productivitatea operației de prelucrare mecanică să fie optime în condițiile în care se ține seama de o serie de factori restrictivi, cum sînt:

— ritmul liniei tehnologice;

— cinematica și dinamica mașini-unelte folosite;

— rezistența și stabilitatea elementelor sistemului tehnologic elastic;

— temperatura rezultată în procesul de așchiere;

— calitatea suprafeței prelucrate:

—adaosul de prelucrare și adîncimea minimă de așchiere.

Dacă se reușește ca prețul de cost al operației (sau productivitatea acesteia) și factorii restrictivi să fie exprimați analitic în funcție de mărimile T, n, t și s, atunci se obține modelul problemei de programare matematică prin care se determină valorile optime ale parametrilor T, n, t, și s.

2. MODELUL MATEMATIC AL PROBLEMEI DETERMINĂRII DURABILITĂȚII SCULEI ȘI REGIMULUI DE AȘCHIERE

Pentru întocmirea modelului matematic al problemei puse spre rezolvare, trebuie să se precizeze funcția de optimizare și relațiile de restricție.

2.1. FUNCȚIA DE OPTIMIZARE

În lucrarea [10] se arată că, după cum obiectivul urmărit de operația de prelucrare mecanică în cauză este prețul de cost sau productivitatea, funcția de optimizare (de eficientă sau de scop) are expresia

$$C = C_1 \frac{l \cdot a}{n \cdot t \cdot s}\left(1 + \frac{C_2}{C_1 T}\right), \tag{3}$$

respectiv

$$\tau = \frac{l\,a}{n\,t\,s}\left(1 + \frac{\tau_s}{T}\right), \tag{4}$$

în care

C [lei] este partea variabilă cu T, n, t, s a prețului de cost al operației,

C_1 [lei/min] — salariul muncitorului de la mașina-unealtă plus cota-parte aferentă din regia secției,

l [mm] — lungimea cursei de lucru a sculei (lungimea suprafeței care se prelucrează, la care se adaugă porțiunile de intrare și de ieșire ale sculei din așchiere),

a [mm] — adaosul de prelucrare radial,

C_2 [lei/min] — cheltuielile legate de schimbarea sculei,

τ [min] — partea variabilă cu T, n, t, s din norma tehnică de timp,

τ_s [min] — timpul de schimbare a sculei uzate și de reglare a mașinii-unelte cu această ocazie.

2.2. RELAȚIILE DE RESTRICȚIE

Relațiile de restricție se obțin luînd în considerare toți factorii care limitează alegerea parametrilor T, n, t și s. Dintre aceștia, cei mai importanți sînt :

2.2.1. *Relația durabilității.* Se cunoaște că pentru determinarea vitezei principale de așchiere la prelucrări, ca strunjire, găurire etc., se

folosește o relație de forma (2), în care s-a notat cu C_v coeficientul determinat experimental, fiind funcție de materialul de prelucrat, materialul sculei, parametrii funcționali ai tăișului sculei, lichidul de așchiere etc., iar cu m, x_v, y_v coeficienții determinați experimental în funcție de materialul de prelucrat și cel al sculei.

Notînd cu d (mm) diametrul suprafeței așchiate și ținînd seama că viteza principală de așchiere se calculează cu relația

$$v = \frac{\pi d n}{1000} \text{ [m/min]}, \tag{5}$$

relația (2) se poate scrie

$$T^m \cdot n t^{x_v} s^{y_v} = \frac{1000\, C_v}{\pi d}. \tag{6}$$

2.2.2. *Ritmul liniei tehnologice.* Ritmul liniei tehnologice se calculează cu formula

$$R_l = \frac{F_r}{P_{af}} \text{ [min/buc]},$$

unde F_r [min] este fondul real anual de timp, iar P_{af} [buc] planul anual de fabricație.

Notînd cu $\tau_{buc.}$ (min) norma tehnică de timp pentru operația considerată, numărul de mașini-unelte necesare operației se determină cu relația

$$Q'_{mu} = \frac{\tau_{buc.}}{R_l}. \tag{7}$$

Dacă k_i este coeficientul de încărcare al mașinilor-unelte folosite la operația în cauză, atunci

$$k_i = \frac{Q'_{mu}}{Q_{mu}}, \tag{8}$$

unde Q_{mu} reprezintă numărul de mașini-unelte folosite efectiv la prelucrare (Q_{mu} este numărul întreg imediat superior lui Q'_{mu}).

Ținînd seama de (7) și (8), rezultă

$$\tau_{buc} = R_l \cdot Q_{mu} \cdot k_i. \tag{9}$$

După cum se știe [7], norma tehnică de timp se poate calcula cu o relație de forma

$$\tau_{buc} = \tau_b + \tau_1, \tag{10}$$

unde τ_b [min] este timpul de bază de mașină și τ_1 [min] partea din norma tehnică de timp care nu depinde de parametrii regimului de așchiere.

Ținînd seama că

$$\tau_b = \frac{la}{nts},$$

relația (10) se scrie

$$\tau_{buc.} = \frac{la}{nts} + \tau_1. \tag{10'}$$

La proiectarea unui anumit proces tehnologic, numărul de mașini-unelte este de obicei cunoscut. În acest caz, pentru un anumit coeficient (mediu) de încărcare al utilajului k_i și un anumit ritm al liniei tehnologice , este necesar ca timpul pe bucată determinat de (10′) să fie cel mult cît cel determinat de relația (9). De aici rezultă condiția

$$nts \geqslant \frac{l \cdot a}{R_l Q_{mu} k_i - \tau_1}. \tag{11}$$

2.2.3. *Cinematica și dinamica mașinilor-unelte* a) Alegerea turației piesei (sau sculei) este limitată și de cinematica mașinii-unelte. Aceasta nu permite prelucrarea decît în limitele $n_{min} \div n_{max}$ și $s_{min} \div s_{max}$, care sînt determinate de lanțul cinematic al mișcării principale de așchiere, respectiv al mișcării de avans.

Parametrii n și s trebuie deci să satisfacă relațiile

$$\begin{aligned} n_{min} &\leqslant n \leqslant n_{max}, \\ s_{min} &\leqslant s \leqslant s_{max}. \end{aligned} \tag{12}$$

b) Pentru o mașină-unealtă dată, puterea necesară mișcării principale de așchiere nu trebuie să depășească pe cea furnizată în acest scop de sursa energetică a mașinii-unelte.

Notînd cu

P [kW] — puterea motorului care dă mișcarea principală de așchiere,

η — randamentul lanțului cinematic principal,

F_z [N] — componenta principală a forței de așchiere, această condiție se scrie

$$\frac{F_z \cdot v}{6{,}12 \cdot 10^4} \leqslant \eta P. \tag{13}$$

Forța F_z se calculează cu ajutorul relațiilor semiempirice cunoscute din teoria așchierii metalelor. De exemplu, pentru strunjire, această relație este

$$F_z = 10\, C_{F_z}\, t^{x_{F_z}}\, s^{y_{F_z}}, \tag{14}$$

în care C_{Fz}, x_{Fz}, y_{Fz} sînt coeficienți determinați experimental pentru fie-

care tip de sculă, fiind funcție de materialul sculei, materialul de prelucrat etc.

Ținînd seama de relațiile (5) și (14), condiția (13) se scrie

$$nt^{x_{F_z}} s^{y_{F_z}} \leqslant \frac{6{,}12\ 10^6\ \eta P}{\pi\alpha\ C_{F_z}}. \tag{13'}$$

Procedînd similar, se pot găsi relații de forma (13') și pentru celelalte tipuri de prelucrări. De exemplu, pentru burghiere, această relație se poate scrie sub forma

$$ns^{y_M} \leqslant \frac{9{,}75.\ 10^5\ \eta P}{C_M\ d^{y_M}}, \tag{13''}$$

în care coeficienții C_M, x_M și y_M au aceeași semnificație ca și C_{Fz}, x_{Fz}, y_{Fz} [3].

2.2.4. *Rigiditatea piesei care se prelucrează.* În funcție de schema de prindere a piesei la prelucrare se poate calcula deformația statică la încovoiere a acesteia pe direcția componentei radiale a forței de așchiere (f_s). Dacă se iau în considerare factorii dinamici care apar în timpul așchierii, atunci deformația radială a piesei, după [13], se scrie

$$f_\alpha = \mu f_s, \tag{15}$$

unde μ este un coeficient dinamic care se poate determina după o metodică cunoscută [13].

În lucrarea [13] se prezintă modul de calcul al deformațiilor care apar la strunjirea axelor. Calculele sînt însă orientative, deoarece nu se ia în considerare variația forței de așchiere cu deformația. Un calcul mult mai apropiat de realitate este efectuat în lucrarea [15]. Conform acesteia din urmă deformația maximă a unui ax care se prelucrează după schema figura 1 este

$$f_s = \frac{\overline{C}_1\left[\dfrac{(l-x)^2}{k_2 l^2} + \dfrac{x^2}{k_3 l^2} + \dfrac{x^2\,(l-x)^2}{3\,EIL} + \dfrac{1}{k_1}\right]}{1 + \overline{C}_2\left[\dfrac{(l-x)^2}{k_2 l^2} + \dfrac{x^2}{k_3 l^2} + \dfrac{x^2\,(l-x)^2}{3\,EIL} + \dfrac{1}{k_1}\right]}, \tag{16}$$

unde

k_2 (N/mm) reprezintă rigiditatea statică a păpușii mobile a strungului,

k_3 (N/mm) — rigiditatea statică a ansamblului ax-principal,

k_1 (N/mm) — rigiditatea statică a ansamblului suportului portsculă,

l (mm) — lungimea piesei care se prelucrează (fig. 1),

EI (N. mm²) — rigiditatea la încovoiere a piesei care se prelucrează,

$\overline{C}_1$, $\overline{C}_2$ — mărimi care depind de condiţiile de aşchiere şi de t şi s,

$x = sn\tau$ — lungimea cursei de generare.

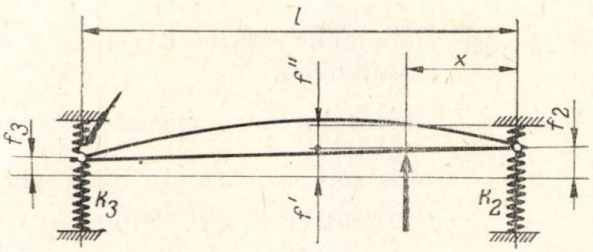


Fig. 1

Pentru o anumită săgeată admisibilă f_a (impusă în funcţie de precizia dimensională a suprafeţei prelucrate), este necesar ca

$$f_d \leqslant f_a,$$

unde $f_a \leqslant f_{s\max}$.

În acest caz, formulele (15) şi (16) permit a determina relaţia care leagă deformaţia maximă admisă a piesei de parametrii n, t, s.

Relaţii similare se pot scrie şi în cazul altor scheme de prindere a piesei pentru prelucrare.

2.2.5. *Rezistenţa şi stabilitatea elastică a sculei.* a) Studiindu-se solicitările sculelor de către forţele care apar în timpul procesului de aşchiere, în literatura de specialitate [3], [4] sînt redate relaţiile de verificare sau de dimensionare ale acestora.

În cazul cuţitului drept folosit la strunjire, după [3], această relaţie are forma

$$\frac{\xi}{B^2} F_z \leqslant \sigma_a, \tag{17}$$

unde

ξ este coeficientul care depinde de secţiunea părţii de prindere a sculei, de proporţiile dintre componentele forţei de aşchiere etc.,

B[mm] — dimensiunea secţiunii de calcul a cuţitului, măsurată perpendicular pe suportul forţei F_z,

σ_a [N/mm²] — rezistenţa admisibilă la încovoiere a materialului sculei.

Ţinînd seama de (14), relaţia (17) se scrie

$$t^{x_{F_z}} s^{y_{F_z}} \leqslant \frac{\sigma_a B^2}{\xi C_{F_z}}. \tag{17'}$$

Pentru sculele de găurire, în locul relației (17′) se folosește o relație care rezultă luînd în considerare solicitarea de torsiune și de compresiune. Astfel, pentru burghierea cu burghiul elicoidal, după [3], se poate scrie

$$\frac{1{,}73\,M}{W_p} \leqslant \sigma_a, \tag{18}$$

unde

W_p [mm³] este modulul de rezistență polar al secțiunii de calcul a burghiului,

$\sigma_a = \frac{\sigma_r}{C}$ [N/mm²] — efortul maxim admisibil al burghiului,

σ_r [N/mm²] — rezistența la rupere a materialului burghiului,

c — coeficientul de siguranță.

În acest caz, ținînd seama că

$$M = 10\,C_M\,d^{x_M}\,s^{y_M}\ [\text{N mm}],$$

relația (18) se scrie

$$s^{y_M} \leqslant \frac{\sigma_r\,W_p}{1{,}73\,c\,C_M\,d^{x_M}}. \tag{18′}$$

b) Condiția stabilității elastice a sculei se referă la stabilitatea echilibrului elastic al acestuia în anumite condiții de încărcare și de prindere. Astfel, în cazul burghiului, condiția evitării flambajului are forma

$$F_A \leqslant \frac{F_f}{c_1}, \tag{19}$$

unde

F_A[N] este componenta axială a forței de așchiere,

F_f[N] — componenta critică de flambaj,

c_1 — coeficientul de siguranță la flambaj.

Dacă se ține seama că [3]

$$F_A = C_F\,d^{x_F}\,s^{\,y_F},$$

$$F_f = \frac{\pi^2 E I_{\min}}{L^2},$$

în care

C_F, x_F, y_F reprezintă coeficienți cu aceeași semnificație ca și C_{Fz}, x_{Fz}, y_{Fz},

I_{min}. [mm⁴] — momentul de inerție al barei (burghiului) de lungime L care este supusă flambajului,
atunci relația (19) va da

$$s^{y_F} \leqslant \frac{\pi^2 E I_{min}}{c\, C_F L^2 d^{x_F}}. \tag{20}$$

2.2.6. *Încărcarea maximă admisă de mecanismul de avans.* Dacă se notează cu F_0 forța maximă admisă de mecanismul de avans al mașinii-unelte, atunci se poate scrie

$$F_A \leqslant F_0. \tag{21}$$

Relația (21), particularizată pentru strunjire, capătă forma

$$t^{x_{F_x}} s^{y_{F_x}} \leqslant \frac{F_0}{C_{F_x}}. \tag{21'}$$

În cazul burghierii, ținînd seama de formula prin care se calculează forța axială, relația (21) ne permite să scriem

$$s^{y_F} \leqslant \frac{F_0}{C_F d^{x_F}}. \tag{21''}$$

2.2.7. *Temperatura rezultată în zona de așchiere.* Dacă θ_0(°C) este temperatura maximă admisă de tăișul sculei (în cazul sculelor din oțel rapid $\theta_0 \approx 550$°C), atunci prelucrarea este posibilă numai cînd este respectată condiția

$$\theta \leqslant \theta_0, \tag{22}$$

unde, după [4], temperatura rezultată la strunjire se calculează cu o relație de forma

$$\theta = C_\theta\, n^{x_\theta} t^{y_\theta} s^{z_\theta}. \tag{22'}$$

Dintre parametrii v, t, și s, cea mai mare influență asupra lui θ o are viteza principală de așchiere. Din acest motiv, ținînd seama că pentru burghiere nu sînt cunoscute relații de forma $\theta = \theta(v, s, d, \ldots)$, în locul temperaturii-limită θ_0 se va considera o viteză de așchiere maximă v_0. Astfel, ținînd seama de (5), rezultă pentru burghiere

$$n = \frac{1000\, v_0}{\pi d} \tag{23}$$

2.2.8. *Calitatea suprafeței prelucrate.* În literatura de specialitate există relații empirice și numeroase diagrame care indică influența parametrilor regimului de așchiere asupra rugozității suprafețelor prelucrate. În cazul strunjirii, rugozitatea suprafeței prelucrate este influențată în cea mai mare măsură de avans și de raza de rotunjire a muchiei tăișului r.

După [8], legătura dintre rugozitatea maximă R_{max} (μm) și avans la strunjirea pieselor din OLC 45 cu scule din oțel rapid se exprimă prin relația

$$R_{max} = 0{,}21 \frac{s^{1{,}07}}{r^{0{,}65}} \cdot \tag{24}$$

Pentru R_{max} impus, în funcție de calitatea suprafeței prelucrate, rezultă

$$s^{1{,}07} \leqslant \frac{R_{max} r^{0{,}65}}{0{,}21} \cdot \tag{24'}$$

2.2.9. *Adaosul de prelucrare și adîncimea minimă de așchiere.* Adîncimea de așchiere este limitată superior și de adaosul de prelucrare a și inferior de către adîncimea minimă la care așchierea nu se transformă încă într-o tasare (t_0). Se poate scrie deci

$$t_0 \leqslant t \leqslant a \tag{25}$$

2.3. MODELUL MATEMATIC AL PROBLEMEI

Dacă se consideră drept funcție de optimizare relația (3), atunci, de exemplu, pentru cazul strunjirii unei piese suficient de rigide, formulate matematică a problemei determinării durabilității sculei și a regimului de așchiere este:

Să se determine valorile parametrilor T, n, t, s care fac minimă funcția (3):

$$C = \frac{C_1 l a}{nts}\left(1 + \frac{C_2}{C_1 T}\right),$$

în condițiile

$$T^m n t^{x_v} s^{y_v} = \frac{1000\, C_v}{\pi d},$$

$$nts \geqslant \frac{l \cdot a}{R_l Q_{mu} k_i - \tau_1},$$

$$n_{min} \leqslant n \leqslant n_{max},$$

$$s_{min} \leqslant s \leqslant s_{max},$$

$$n t^{x_{F_z}} s^{y_{F_z}} \leqslant \frac{6{,}12 \cdot 10^6 \eta P}{\pi d\, C_{F_z}}$$

$$t^{x_{F_z}} s^{y_{F_z}} \leqslant \frac{\sigma_a B^2}{\zeta C_{F_z}},$$

$$t^{x_{F_x}} s^{y_{F_x}} \leqslant \frac{F_0}{C_{F_x}},$$

$$n^{x_\theta} t^{y_\theta} s^{z_\theta} \leqslant \frac{\theta_0}{C_\theta}, \qquad \text{(I)}$$

$$s^{1,07} \leqslant \frac{R_{max} r^{0,65}}{0,21},$$

$$t_0 \leqslant t \leqslant a.$$

Problema se pune în mod analog dacă se caută minimul funcţiei (4).

a) Dacă în relaţiile (3) şi (4) se consideră T=const, aşa cum se procedează în lucrările [1], [2], [12], atunci acestea pot fi puse sub forma generală

$$f = \frac{k}{n t s}. \qquad (26)$$

În acest caz, notînd cu

$$\begin{aligned} x_1 &= \lg n, \\ x_2 &= \lg (100\, t), \\ x_3 &= \lg (100\, s), \end{aligned} \qquad (27)$$

modelul matematic (3) — (I) devine cel al unei probleme de programare liniară:

$$\underline{f = f_0 - x_1 - x_2 - x_3 \to \min} \qquad (3')$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_v x_2 + y_v x_3 &= b_1, \\ x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant b_2, \\ x_1 &\leqslant b_3, \\ x_1 &\geqslant b_4, \\ x_3 &\leqslant b_5, \\ x_3 &\geqslant b_6, \end{aligned} \qquad (I')$$

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_{F_z} x_2 + y_{F_z} x_3 &\leqslant b_7, \\
x_{F_z} x_2 + y_{F_z} x_3 &\leqslant b_8, \\
x_{F_x} x_2 + y_{Fx} x_3 &\leqslant b_9, \\
x_0 x_1 + y_0 x_2 + z_0 x_3 &\leqslant b_{10}, \\
x_3 &\leqslant b_{11}, \\
x_2 &\leqslant b_{12}, \\
x_2 &\geqslant b_{13}, \\
x_1 &\geqslant 0, \\
x_2 &\geqslant 0, \\
x_3 &\geqslant 0.
\end{aligned}
\qquad (I')
$$

După cum se cunoaşte, mulţimea soluţiilor posibile (mulţimea soluţiilor x_1, x_2, x_3 care satisfac condiţiile (I')) formează un poliedru convex. Soluţiile optime (soluţiile care fac minimă funcţia f) se găsesc printre soluţiile posibile care alcătuiesc vîrfurile (punctele extreme) mulţimii soluţiilor posibile (fig. 2).

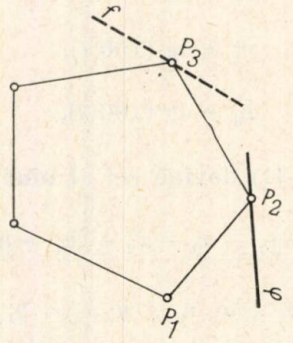


Fig. 2.

În figura 2, soluţia optimă se află în punctul $P_3(x_{1\,opt}, x_{2\,opt}, x_{3\,opt})$, deoarece în acest punct funcţia f îşi atinge optimul (minimul).

Modelul matematic (3') — (I') permite deci determinarea valorilor optime ale parametrilor regimului de aşchiere pentru $T=\text{const}$. Se poate naşte însă abaterea: deoarece durabilitatea şi parametrii regimului de aşchiere sînt legaţi prin relaţia de condiţie (6), există certitudinea că mărimile n, t, s astfel calculate sînt într-adevăr cele optime?

Răspunsul la întrebare rezultă imediat dacă se ține seama că T s-a determinat, așa cum se cunoaște [1] — [4] etc., din ecuația

$$\frac{dC}{dT} = 0$$

sau

$$\frac{d\tau}{dT} = 0.$$

Pentru acesta, în relațiile (3) și (4) s-a considerat $n = \text{const}$, $t = \text{const}$, $s = \text{const}$, adică în locul relației (6), care apare în modelul matematic, s-a luat în considerare relația aproximativă (1).

De aici rezultă că principial problema determinării regimului de așchiere (și deci și modelul ei matematic) este greșit formulată. Este un caz similar aceluia în care extremele unei funcții de mai multe variabile s-ar determina anulînd numai o singură derivată parțială a funcției.

b) Plecînd de la observația că durabilitatea sculei nu are o valoare constantă (ea variind în funcție de parametrii regimului de așchiere, așa cum rezultă din relația (6), în cazul metodei pe care o propunem *T se determină o dată cu n, t și s.*

În acest fel, durabilitatea optimă a sculei este indisolubil legată de parametrii optimi ai regimului de așchiere.

Dacă se logaritmează funcțiile de eficiență (3) și (4), se obține

$$\lg C = \lg (C_1 la) + \lg \left(1 + \frac{C_2}{C_1 T}\right) - \lg n - \lg t - \lg s, \tag{28}$$

respectiv

$$\lg \tau = \lg (la) + \lg \left(1 + \frac{\tau_s}{T}\right) - \lg n - \lg t - \lg s, \tag{29}$$

care se observă că în cazul unor substituții de forma (27) nu mai devin funcții liniare. Ca urmare, în prima etapă, modelul matematic al problemei determinării durabilității sculei și regimului de așchiere nu mai este cel al unei probleme de programare liniară.

În cazul general, pentru problemele de programare neliniară nu există o metodă generală de rezolvare. Au fost însă studiate problemele la care funcția de optimizare este cu variabile separabile, iar relațiile de condiție sînt liniare. Pentru aceste tipuri de probleme, în care se încadrează și problema de față, au fost date soluții aproximative [5].

Particularitatea problemei pe care o studiem constă în aceea că variabila T apare într-una din relațiile de condiție care se prezintă sub forma unei egalități. Acest lucru permite a elimina variabila T din modelul matematic.

Datorită valorilor întîlnite în practică pentru constantele C_1, C_2, T și τ_s, mărimile $\left(1 + \frac{C_2}{C_1 T}\right)$ din relația (3) și $\left(1 + \frac{\tau_s}{T}\right)$ din relația (4)

au valori cuprinse între 1 şi 2. Ca urmare, pentru aceste domenii relativ restrînse, funcţiile

$$\psi_1(T) = 1 + \frac{C_2}{C_1 T}, \tag{30}$$

respectiv

$$\psi_2(T) = 1 + \frac{\tau_s}{T}, \tag{31}$$

pot fi aproximate printr-o funcţie de forma

$$\psi(T) = \alpha T^{-\beta}, \tag{32}$$

în care α şi β sînt coeficienţi care se determină din condiţia ca curba (32) să treacă prin două puncte corespunzător alese pe curbele $\psi_1(T)$ sau $\psi_2(T)$. Alegerea acestor două puncte se face prin estimarea prealabilă a valorii funcţiei $\psi_1(T)$ sau $\psi_2(T)$ pentru T determinat după metoda clasică (T_c). Rezultă de aici că prin aproximarea (32) se caută a se determina diferenţa dintre durabilitatea calculată după metoda clasică şi după cea propusă (evident, cu o anumită eroare).

Dacă se presupune că pentru o anumită operaţie de prelucrare mecanică, avînd drept obiectiv costul prelucrării, punctul de pe curba

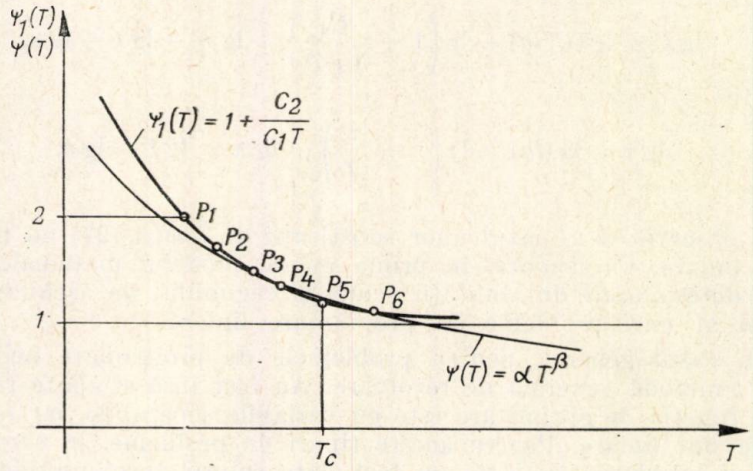


Fig. 3.

$\psi_1(T)$ corespunzător durabilităţii T_c calculată după metoda clasică este P_5 (fig. 3), atunci pentru determinarea coeficienţilor α şi β pot fi considerate punctele P_4 şi P_6 (fig. 3).

Pentru facilitatea calculelor, în tabela 1 se dau coordonatele a şase puncte de pe curba $\psi_1(T)$.

Tabela 1

Punctul	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
Abscisa	$\frac{C_2}{C_1}$	$\frac{4C_2}{3C_1}$	$\frac{2C_2}{C_1}$	$\frac{5C_2}{2C_1}$	$\frac{4C_2}{C_1}$	$\frac{10C_2}{C_1}$
Ordonata	2	$\frac{7}{4}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{7}{5}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{11}{10}$

Admiţînd deci pe un anumit domeniu aproximarea funcţiei $\psi_1(T)$ cu $\psi(T)$, relaţia (28) devine

$$\lg C \approx \lg \frac{C_1 \alpha l a}{n t s} - \beta \lg T. \tag{28'}$$

Logaritmînd egalitatea (6) şi eliminînd variabila T între expresia rezultată şi relaţia (28'), se obţine

$$C \approx \left(\frac{1000\, C_v}{\pi d}\right)^{-\frac{\beta}{m}} \frac{C_1 \alpha l a}{n^{\frac{m-\beta}{m}} t^{\frac{m-\beta x_v}{m}} s^{\frac{m-\beta y_v}{m}}}. \tag{33}$$

O relaţie analogă se poate stabili pe aceeaşi cale şi pentru cazul cînd funcţia de optimizare este (4).

Abstracţie făcînd de aproximările amintite, relaţia (33) reprezintă *funcţia de optimizare* (a preţului de cost al operaţiei) *pentru cazul corect în care durabilitatea T se determină împreună cu parametrii regimului de aşchiere.* În acest caz (ţinînd seama de substituţiile (27)), modelul matematic al problemei determinării parametrilor T, n, t şi s din condiţia unui preţ de cost minim la strunjirea pieselor rigide este

$$\varphi \approx \varphi_0 - \frac{m-\beta}{m} x_1 - \frac{m-\beta x_v}{m} x_2 - \frac{m-\beta y_v}{m} x_3 \to \min \tag{33'}$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant b_2 ,\\
x_1 &\leqslant b_3 ,\\
x_1 &\geqslant b_4 ,\\
x_3 &\leqslant b_5 ,\\
x_3 &\geqslant b_6 ,\\
x_1 + x_{F_z} x_2 + y_{F_z} x_3 &\leqslant b_7 ,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_{F_x} x_2 + y_{F_z} x_3 &\leqslant b_8 \,, \\
x_{F_x} x_2 + y_{F_x} x_3 &\leqslant b_9 \,, \\
x_0\, x_1 + y_0\, x_2 + z_0\, x_3 &\leqslant b_{10}, \\
x_3 &\leqslant b_{11}, \\
x_2 &\leqslant b_{12}, \\
x_2 &\geqslant b_{13}, \\
x_1 &\geqslant 0 \,, \\
x_2 &\geqslant 0 \,, \\
x_3 &\geqslant 0 \,.
\end{aligned}
\qquad \text{(II)}
$$

Modelul problemei de programare liniară la care s-a ajuns diferă de cel al determinării parametrilor n, t și s pentru $T = \text{const}$.

Într-adevăr, dacă din prima relație restrictivă din sistemul (I') se scoate valoarea

$$x_1 = b_1 - x_v\, x_2 - y_v\, x_3$$

și se introduce în funcția de eficiență f și în celelalte relații din (I'), atunci soluțiile problemei se caută într-un spațiu cu două dimensiuni și nu într-un spațiu cu trei dimensiuni, așa cum se întîmplă în cazul metodei propuse.

Dacă se consideră că poliedrul soluțiilor posibile din figura 2 aparține spațiului tridimensional, soluția optimă determinată prin modelul matematic (33′) — (II) se poate găsi în vîrful $P_2 \neq P_3$. Acest lucru se datorește faptului că, așa după cum rezultă din ecuațiile funcțiilor f și φ, parametrii directori ai normalelor la planele pe care aceste funcții le reprezintă sînt diferiți. În consecință, în cazul general cele două funcții atingîndu-și extremele în puncte diferite, valorile optime n, t și s calculate după cele două metode sînt diferite.

După determinarea valorilor n, t, s care fac minimă funcția în condițiile (II), durabilitatea sculei se determină folosind relația (6).

3. APLICAȚIE

În vederea indicării modului de aplicare a noii metode de calcul a parametrilor T, n, t și s, se consideră cazul simplu al burghierii alezajului din figura 4, aparținînd unei piese cu o rigiditate foarte mare.

Piesa este executată din OLC 45, prelucrarea executîndu-se cu un burghiu elicoidal Ø 20 STAS 575—63 pe o mașină verticală de găurit

tip A—2, avînd caracteristicile P=1,7 kw, $n_{min} = 56$ rot/min; $n_{max} =$ =2240 rot/min; $s_{min} = 0{,}08$ mm/rot, $s_{max} = 0{,}31$ mm/rot; $F_0 = 6000$ N [9].

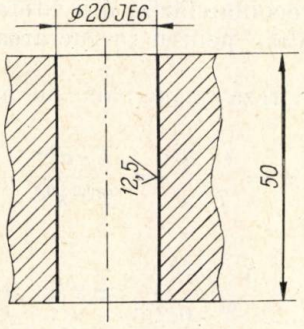


Fig. 4.

Pentru a indica diferențele dintre metodele prin care se determină parametrii T, n, t și s, se vor efectua calculele succesiv pentru metoda obișnuită (clasică), metoda redată în lucrările [1], [2] și metoda propusă.

3.1. METODA CLASICĂ

Dacă se urmărește obținerea unui preț de cost minim al operației de prelucrare mecanică, atunci, luînd în considerare relația (1), durabilitatea sculei se calculează cu formula [3]:

$$T_c = \frac{1-m}{m}\left(\tau_s + \frac{S}{C_1}\right). \tag{34}$$

În cazul concret din figura 4,

$m = 0{,}2$ [4] — exponentul durabilității;
τ_s [min] — timpul de schimbare a sculei uzate și de reglare a mașinii-unelte cu această ocazie;
$S = \tau_1 C_3 + \frac{C_{sc}}{N_s}$ [lei] — costul legat de exploatarea sculei între două reascuțiri;
$\tau_1 \approx 2$ min — timpul de ascuțire a sculei uzate;
$C_3 = 0{,}1$ lei/min — salariul muncitorului de la ascuțitorie plus cota-parte din regia ascuțitoriei;
$C_{sc} = 20$ de lei — costul sculei noi;
$N_s = \frac{L_0}{U_{ma}}$ — numărul de reascuțiri ale sculei;

Pentru burghiul ales avem:
$l_1 = 140$ mm — lungimea porțiunii cu canale;
$l_0 = l_1 - 50 = 90$ mm — lungimea totală a porțiunii care poate fi îndepărtată prin reascuțire;
$U_{mu} = 1{,}22$ mm [6] — porțiunea din lungimea sculei care este îndepărtată la o reascuțire.

Considerînd salariul muncitorului de la maşina de găurit, plus cota-parte aferentă din regia secţiei $C_1 = 0{,}1$ lei/min, rezultă $S = 0{,}47$ lei, în care caz relaţia (34) dă $T_{ec} = 22{,}8$ min.

Ţinînd seama din recomandările din literatura de specialitate [3], [4] etc. şi de indicaţiile date pentru prelucrarea pe maşina A—2 [9], se alege $s = 0{,}2$ mm/rot.

Pentru burghiere, viteza principală de aşchiere se calculează cu relaţia

$$v = \frac{C_v\, d^{x_v}}{T^m s^{y_v}} = \frac{5 \cdot d^{0,4}}{T^{0,2} s^{0,7}},$$

deci

$$v = \frac{5 \cdot 20^{0,4}}{22{,}8^{0,2} \cdot 0{,}2^{0,7}} \approx 27{,}3 \text{ m/min}.$$

În acest caz, conform relaţiei (5), turaţia sculei este $n \approx 435$ rot/min.

În mod obişnuit, după calcularea parametrilor s şi n se adoptă valorile cele mai apropiate permise de cinematica maşinii-unelte. În cazul de faţă, pentru compararea cantitativă a rezultatelor ce se vor obţine cu fiecare dintre cele trei metode, se vor lua în considerare parametrii calculaţi şi nu cei ce se pot realiza pe maşina-unealtă.

După alegerea parametrilor n şi s urmează etapa verificării lor. Dacă se execută aceste verificări, se constată că valorile găsite pentru n şi s nu contravin relaţiilor restrictive prezentate în paragraful 2.2.

Ştiind că [3]

$$C_2 = \tau_s C_3 + \tau_1 C_1 + \frac{C_{sc}}{N_s} = 0{,}57 \text{ lei},$$

relaţia (3) particularizată,

$$C = \frac{C_1 l}{n \cdot s}\left(1 + \frac{C_2}{C_1 T}\right), \tag{35}$$

dă

$$C \approx 7{,}2 \cdot 10^{-2} \text{ lei}.$$

Dacă se presupune un plan anual de fabricaţie $P_{af} = 10^5$ găuri, atunci partea variabilă (cu n, T, s) din preţul de cost total al prelucrării este $C_{tot} = 7{,}2 \cdot 10^3$ lei.

Pentru mărimile T, n, s determinate ca mai sus, relaţia (4), scrisă sub forma particulară

$$\tau = \frac{l}{n s}\left(1 + \frac{\tau_s}{T}\right), \tag{36}$$

dă

$$\tau \approx 0{,}6 \text{ min}.$$

3.2. METODA PREZENTATĂ ÎN LUCRĂRILE [1], [2]

La calculul după această metodă, durabilitatea sculei se determină cu relația (34), deci $T=22{,}8$ min.

Pentru aplicarea metodei se determină formele particulare ale funcției de optimizare și ale relațiilor de restricție.

3.2.1. *Funcția de optimizare* se obține din relația (35), în care se înlocuiesc mărimile cunoscute. Se găsește astfel

$$C = \frac{6{,}25}{n \cdot s} \cdot \tag{35'}$$

3.2.2. *Relațiile de restricție*

a) Relația durabilității (6), scrisă pentru burghierea considerată [3], devine

$$n \cdot s^{0,7} = 141. \tag{37}$$

b) Ținînd seama că la lucrul într-un singur schimb fondul real anual de timp este $F_r \approx 1{,}4 \cdot 10^5$ min, rezultă ritmul liniei tehnologice:

$$R_l = \frac{F_r}{P_{af}} = 1{,}4 \text{ min/buc.}$$

Considerîndu-se lotul de fabricație egal cu numărul de piese executate într-un schimb,

$$N = \frac{480}{R_l} \approx 343 \text{ buc,}$$

și ținînd seama de componentele timpului τ_1 [7], se obține $\tau_1 \approx 0{,}6$ min.

Presupunînd că linia tehnologică dispune de o singură mașină-unealtă ($Q_{mu}=1$) și adoptînd un coeficient mediu de încărcare al utilajelor din linie $k_i = 0{,}85$, relația (11) devine

$$n \cdot s \geqslant 8{,}50. \tag{38}$$

c) Din schema cinematică a mașinii-unelte A—2 rezultă condițiile

$$56 \leqslant n \leqslant 2240,$$
$$0{,}08 \leqslant s \leqslant 0{,}31.$$

d) Relația (13'') scrisă pentru $C_M = 33{,}8$; $x_M = 1{,}9$; $y_M = 0{,}8$ [3] și $\eta = 0{,}8$, devine

$$n \cdot s^{0,8} \leqslant 132. \tag{39}$$

e) Pentru [3]

$$\sigma_{max} = \frac{\sigma_r}{c} = 840 \text{ N/mm}^2,$$

$$W_p \approx 0{,}02 \text{ d}^3 = 160 \text{ mm}^3,$$

condiția rezistenței mecanice a sculei (18′) se scrie

$$s^{0,8} \leqslant 0{,}776. \tag{40}$$

f) De asemenea, pentru [3] $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ N/mm^2; $I_{min} = 0{,}043$ d^4 mm^4; $C_F = 84{,}7$; $x_F = 1$; $y_F = 0{,}7$, relația (20) devine

$$s^{0,7} \leqslant 0{,}550. \tag{41}$$

g) Relația (21″), în care se înlocuiesc mărimile cunoscute, se poate scrie

$$s^{0,7} \leqslant 0{,}354. \tag{42}$$

h) Impunînd o viteză maximă admisibilă $v_0 = 50$ m/min din condiția păstrării stabilității termice a tăișului, relația (23) devine

$$n \leqslant 800.$$

Celelalte condiții care apăreau în cazul strunjirii (rigiditatea piesei, calitatea suprafeței etc.), fiind de mică importanță pentru burghierea considerată, se neglijează.

3.2.3. *Modelul matematic* al problemei determinării parametrilor n și s pentru $T = 22{,}8$ min rezultă luînd în considerare funcția de optimizare (35′) și relațiile restrictive (37) — (42). În acest caz, eliminînd variabila n, se obține

$$\underline{C = 0{,}0444\, s^{-0,3} \rightarrow \min}$$

$$s^{0,3} \geqslant 0{,}0603,$$

$$s^{0,7} \leqslant 2{,}520,$$

$$s^{0,7} \geqslant 0{,}603,$$

$$s \leqslant 0{,}310,$$

$$s \geqslant 0{,}080,$$

$$s^{0,1} \leqslant 0{,}936,$$

$$s^{0,8} \leqslant 0{,}776,$$

$$s^{0,7} \leqslant 0{,}550,$$

$$s^{0,7} \leqslant 0{,}354,$$

$$s^{0,3} \geqslant 0{,}176.$$

Dacă se notează

$$\lg C = f,$$

$$\lg (100\, s) = x$$

şi se păstrează numai relaţiile de condiţie care sînt esenţiale, problema pusă spre rezolvare se enunţă astfel: să se determine x astfel ca funcţia

$$f = -0{,}752 - 0{,}3x$$

să fie minimă în condiţiile

$$x \leqslant 1{,}351,$$

$$x \geqslant 0{,}903.$$

Evident că, în acest caz simplu de programare liniară, soluţia este $x_{opt} = 1{,}351$, iar valoarea minimă a funcţiei de optimizare $f_{opt} = \overline{2},8427$. În acest caz, ţinînd seama de substituţiile (43), rezultă

$$s \approx 0{,}224 \text{ mm/rot},$$

$$C \approx 6{,}95 \cdot 10^{-2} \text{ lei}.$$

Pentru $s = 0{,}224$, relaţia (37) permite a determina turaţia sculei: $n \approx 402$ rot/min.

Ţinînd seama de preţul de cost al celor 10^5 găuri la prelucrarea cu parametrii n şi s determinaţi după metoda clasică şi după metoda redată în lucrările [1], [2], rezultă o economie în favoarea celei de-a doua: $\Delta C_1 = 250$ de lei, adică 3,5%.

Pentru $s = 0{,}224$ mm/rot şi $n = 402$ rot/min, relaţia (36) dă $\tau = 0{,}58$ min, ceea ce indică o productivitate mai mare decît în cazul metodei clasice.

3.3. METODA PROPUSĂ

Pentru $T = T_{ec} = 22{,}8$ min; $C_2 = 0{,}57$ lei; $C_1 = 0{,}1$ lei/min, funcţia (30) capătă valoarea $\psi_1(22{,}8) = 1{,}25$, care, conform tabelei 1, corespunde ordonatei punctului P_5. De aceea coeficienţii α şi β se determină impu-

nînd condiția ca prin punctele P_4 și P_6 să treacă curba $\psi(T)$. Procedînd astfel, se obține $\beta \approx -0{,}153$.

În acest caz, ținînd seama de forma particulară a relației (33), modelul matematic al determinării durabilității și regimului de așchiere pentru prelucrarea prin burghiere a alezajului din figura 4 este

$$C \approx \frac{C_0}{n^{0{,}235}\, s^{0{,}5}} \to \min$$

$$\begin{aligned}
n \cdot s &\geqslant 8{,}50,\\
n &\leqslant 2240,\\
n &\geqslant 56,\\
s &\leqslant 0{,}31,\\
s &\geqslant 0{,}08,\\
n \cdot s^{0{,}8} &\leqslant 132,\\
s^{0{,}8} &\leqslant 0{,}776,\\
s^{0{,}7} &\leqslant 0{,}354,\\
s^{0{,}7} &\leqslant 0{,}550,\\
n &\leqslant 800.
\end{aligned} \tag{43}$$

Pentru substituțiile

$$\begin{aligned}
\lg C &= \varphi,\\
\lg n &= x_1,\\
\lg (100\, s) &= x_2,
\end{aligned} \tag{44}$$

modelul matematic al problemei devine

$$\varphi \approx \varphi_0 - 0{,}235\, x_1 - 0{,}5\, x_2 \to \min$$

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 &\geqslant 2{,}929,\\
x_1 &\leqslant 3{,}351,\\
x_1 &\geqslant 1{,}794,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x_2 &\leqslant 1{,}492,\\
x_2 &\geqslant 0{,}903,\\
x_1 + 0{,}8\,x_2 &\leqslant 3{,}721,\\
x_2 &\leqslant 1{,}865,\\
x_2 &\leqslant 1{,}644,\\
x_2 &\leqslant 1{,}351,\\
x_1 &\leqslant 2{,}903,\\
x_1 &\geqslant 0,\\
x_2 &\geqslant 0,
\end{aligned}
$$

Dacă problema de programare liniară la care s-a ajuns se rezolvă prin metoda grafică, atunci, așa cum rezultă din figura 5, avem $x_{1opt} = 2{,}62$, $x_{2opt} = 0{,}903$.

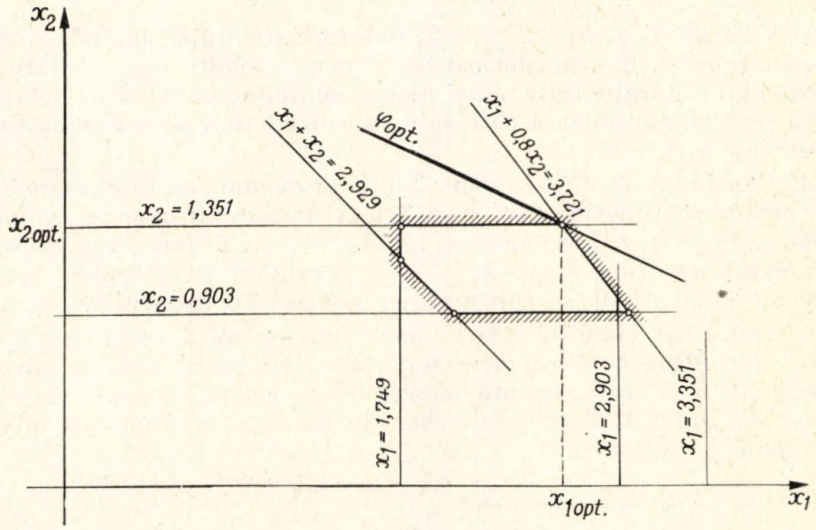


Fig. 5.

În acest caz, folosind substituțiile (44), se obține $n \approx 415$ rot/min, $s = 0{,}224$ mm/rot. Pentru aceste valori ale lui n și s, relația (6), scrisă pentru burghierea considerată, va da $T \approx 19{,}5$ mm.

Pentru T, n și s astfel calculate, relațiile (35) și (36) dau $C \approx 6{,}95 \cdot 10^{-2}$ lei, respectiv $\tau \approx 0{,}565$ min.

De aici rezultă că, la același preț de cost al prelucrării ca și în cazul metodei redate în lucrările [1], [2], se obține o reducere totală a normei tehnice de timp de $(0{,}58 - 0{,}565) \cdot 10^5$ min $= 25$ de ore.

4. CONCLUZII

1. În conformitate cu metoda de calcul propusă, durabilitatea sculei se determină o dată cu parametrii regimului de aşchiere din condiţia optimizării preţului de cost sau productivităţii operaţiei de prelucrare mecanică în anumite condiţii de prelucrare. Din această cauză, considerăm că noţiunile de durabilitate optimă sau de durabilitate economică [3], [4] etc. sînt improprii. Corect este să se vorbească despre o durabilitate şi un regim optim de aşchiere din punctul de vedere al preţului de cost al operaţiei sau al productivităţii acesteia etc.

2. Întocmirea modelului matematic al problemei de programare liniară prin care se determină valorile T_{opt}, n_{opt}, t_{opt}, s_{opt} se bazează pe o serie de relaţii semiempirice din teoria aşchierii metalelor, relaţii care intră în formularea restricţiilor problemei. Rezultă de aici că metoda este cu atît mai exactă, cu cît timpul de prelucrare mecanică respectiv este mai bine cercetat (şi deci relaţiile respective sînt mai exacte).

Chiar şi în cazul strunjirii sau burghierii, modelul matematic prezentat trebuie aplicat ţinîndu-se seama de particularităţile prelucrării (degroşare, finisare etc.). Aceste modele matematice trebuiesc privite creator şi, mai ales, prin prisma modului de abordare corectă a problemei în cauză.

3. Valorile T_{opt}, n_{opt}, t_{opt}, s_{opt}, determinate după metoda propusă, diferă, în general, de valorile calculate prin celelalte metode care au la baza calculului durabilităţii sculei relaţia simplificată (1) şi nu relaţia (2). Aceasta rezultă din eroarea care se face, considerînd T=const la calculul parametrilor n, t, s.

4. Căutînd a se obţine modelul unei probleme de programare liniară, a fost nevoie ca funcţiile (30) sau (31) să fie aproximate, pe un domeniu restrîns, cu funcţia (32). Ca urmare, funcţia (33) va fi folosită numai pentru determinarea valorilor $x_{1\,opt}$, $x_{2\,opt}$, $x_{3\,opt}$, urmînd ca valoarea optimă a funcţiei de eficienţă să se calculeze cu relaţia (3), respectiv (4).

5. Dat fiind volumul relativ mare de calcule, metoda propusă este deosebit de eficace în cazul utilizării maşinilor electronice de calcul [1], [2], [12]. În acest caz prezintă interes tehnic-economic deosebit şi determinarea durabilităţilor şi regimurilor de aşchiere la prelucrările cu mai multe scule.

Primită la redacţie la 3 iulie 1968

BIBLIOGRAFIE

1. K. G. Goranski, *K teorii avtomatizaţii injenernovo truda*, Minsk, 1962.
2. — *Rascet rejimov rezaniia pri pomoşci electronovcislitelinih maşin*, Minsk, 1963.
3. I. D. Lăzărescu, *Teoria aşchierii metalelor şi proiectarea sculelor*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1964.
4. A. M. Vulf, *Rezanie metallov*, Moskva — Leningrad, 1963.
5. G. B. Dantzig, *Linear Programming and Extensions*, Princenton University Press, 1963.
6. * * * *Normî iznosa, stoikosti i rashoda rejuşceva instrumenta*, Maşghiz, 1961.
7. M.I.C.M., *Normative unificate de timpi auxiliari la maşini-unelte*, I.D.T., 1962.
8. St. Enache, *Calitatea suprafeţelor prelucrate*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.

9. Gh. Zamfir, *Mașini de găurit fabricate în R.S.R.*, București, Edit. tehnică, 1964.
10. Gh. Drăghici, S. T. Chiriacescu, *Contribuții la calculul durabilității sculei și regimului de așchiere*, Buletinului științific al Inst. politehnic Brașov, **X** (1968).
11. L. Sauer, Gh. Drăghici, S. T. Chiriacescu, *Die äquiwalente Drehzall und Standzeit des werkzeuges beim Drehen mit wechselnder Beanspruchung*, Werkstattstechnik, **59**, *2* (1969).
12. Hirsch, Bernd, *Bestimmung optimaler Schnittbedingungen bei der maschinellen Programmierung von NC-Dreehmaschinen mit EXAPT-2*, Industrie-Anzeiger, **90**, *24* (1968).
13. K. S. Kolev, *Tocinosti abrabotki i rejimi rezaniia*, Moskva, 1968.
14. V. S. Korsakov, *Tocinosti mehaniceskoi abrabotki*, Mașghiz, 1961.
15. V. A. Kudinov, *Dinamika stankov*, Moskva, 1967.
16. T. S. Chiriacescu, *Autovibrații la strunjirea axelor zvelte*, St. cerc. mec. apl., **29**, *3* (1970).
17. — *Contribuții la sinteza cinematicii și dinamicii mașinilor-unelte așchietoare*, Construcția de mașini *8* (1970).

INFLUENȚA NEOMOGENITĂȚILOR STRUCTURALE ALE MATERIALULUI ASUPRA APARIȚIEI FENOMENULUI DE OBOSEALĂ ÎN MIȘCAREA DE ROSTOGOLIRE

de GH. VASILCA[1], S. MOLDOVAN[2], V. RASZILLIER[1] și N. DUCA[2]

Încercările de laborator arată o împrăștiere mare în ceea ce privește numărul de cicluri de solicitare pînă la degradarea suprafețelor active prin oboseală în cazul mișcării de rostogolire. Apariţiile premature ale unor astfel de fenomene nu sînt clarificate complet pînă în prezent, deoarece prin exfolierea materialului la scară macro microzona de amorsare a oboselii dispare. În lucrare se analizează din acest punct de vedere influența neomogenităților structurale, care, prezente în material uneori la scară macro, nu dispar totdeauna complet o dată cu materialul exfoliat prin pitting.

1. INTRODUCERE

Un mod caracteristic de distrugere a coeziunii unui material prin efecte de oboseală este dat de solicitarea ciclică rezultată sau asociată cu mișcarea de rostogolire întîlnite la rulmenți. Materialul se distruge în acest caz la nivelul suprafețelor active, luînd de obicei forma unei exfolieri, o astfel de degradare a suprafeței fiind cunoscută în tehnică sub denumirea de pitting. În condiții egale cinematice și de solicitare s-a constatat însă că numărul de cicluri, în expresie uzuală durata de funcționare a rulmentului, pînă la apariția pittingului nu este însă aceeași. Mai ales laboratoarele uzinale ale fabricilor de rulmenți, care fac încercări sistematice pentru controlul și verificarea nivelului calitativ al produselor lor, posedă un material foarte bogat pentru studii în această privință. Împrăștierile privind durata de funcționare apărute în aceste încercări s-au constatat a fi foarte importante. Astfel [1], în cazul rulmentului cu bile seria 6208, dacă media aritmetică a duratei de funcționare a unui lot de 20 de rulmenți încercați se consideră unitatea, durata cea mai scurtă a fost de 0,135, iar cea mai lungă de 3,14. Media relativă

[1] Institutul de mecanică a fluidelor și construcții aerospațiale.
[2] Uzina Rulmentul Brașov.

a duratei celor 12 rulmenţi cu numărul de cicluri situat sub media-unitate se prezintă de asemenea scăzută, fiind de numai 0,55, faţă de 1,67 cît este media relativă a celor opt rulmenţi cu durata de funcţionare peste cea medie a lotului.

Cunoaşterea cauzelor şi acţiunii corespunzătoare de remediere pot prezenta un interes dublu : ştiinţific şi tehnic-economic ; în primul caz pentru că se leagă de străduinţele actuale de pretutindeni pe linia cunoaşterii şi utilizării cît mai complete a proprietăţilor materialelor, iar în al doilea caz din cauza caracterului de masă pe care îl are în prezent folosirea rulmenţilor în tehnică.

2. PARTICULARITĂŢILE OBOSELII MATERIALULUI ÎN CAZUL MIŞCĂRII TIP RULMENT CU BILE

Specificul mişcării în acest caz este o rostogolire asociată cu alunecare [2], deci cu forţa de frecare trangenţială la suprafaţă diferită de zero. Degradarea suprafeţelor este, în consecinţă, specifică şi marchează efecte de oboseală, modificări de structură, deformaţii plastice, precum şi efecte ale unor procese chimice ca oxidarea, coroziunea etc. În marea majoritate a cazurilor practice, efectele reacţiilor chimice sînt însă neînsemnate în comparaţie cu efectele celorlalte procese cu viteze de dezvoltare mult superioare şi, în consecinţă, pot fi neglijate în cazul de faţă.

În ceea ce priveşte oboseala materialului, aceasta diferă în mod esenţial de oboseala sub sarcină continuă, constatîndu-se anume că în acest ultim caz o probă care a rezistat la 10^7 cicluri nu se mai rupe dacă sarcina rămîne neschimbată [3]. Dimpotrivă, în cazul mişcării de rostogolire, toate standardele admit că pînă la urmă fenomenul de oboseală apare, deşi relaţia dintre durata de funcţionare şi sarcină are caracter hiperbolic. Caracterul mişcării, dacă este rostogolire pură sau asociată cu alunecare, influenţează de asemenea relaţia experimentală sarcină-durată de funcţionare.

În condiţiile tehnice normale de funcţionare în stare lubrificată a rulmenţilor, natura regimului de lucru este hidrodinamică, iar solicitarea mecanică a suprafeţelor este elastică hertziană, lubrificaţia avînd astfel caracter elastohidrodinamic [4]. Astfel de regimuri se caracterizează prin aceea că filmul portant nenewtonian de lubrifiant îndeplineşte şi o funcţie amortizatoare, iar caracterul solicitării mecanice a materialului în suprafaţa activă fiind intermitent, materialul se degradează prin oboseală. În legătură cu solicitarea materialului mai trebuie menţionat că partea de alunecare a mişcării este complexă. Astfel o componentă se datoreşte diferenţelor de rază în calea de rulare, deoarece viteza unghiulară este constantă. A doua componentă ia naştere în cadrul ariei hertziene de contact [2]. Aceasta se datoreşte faptului că, la deformarea elastică a suprafeţelor sub acţiunea sarcinii exterioare normale, linia de contact a bilei se scurtează, iar a inelului interior se lungeşte. Acest proces de deformare este însă posibil numai cu mişcări relative între diferitele puncte ale suprafeţelor în cadrul ariei de contact. Aria aparentă de contact devine astfel sediul unor eforturi unitare tangenţiale, deci de forfecare, amintite. În ceea ce priveşte eforturile unitare normale, din felul acestor deformaţii rezultă că scurtarea liniei de contact produce

la bilă eforturi de compresiune atît la nivelul suprafeței, cît și în straturile susținătoare de material. La suprafața conjugată a inelului interior, deformarea prin creștere a suprafeței de contact arată că la nivelul suprafeței efortul unitar este de întindere, care se transformă apoi în straturile următoare de material în eforturi unitare de compresiune.

Acțiunea repetată a sarcinii în cazul rulmenților produce o solicitare la oboseală a materialului cu două particularități, care fac ca și efectele acesteia să se prezinte sub o formă specială. Mai întîi, contactul hertzian al suprafețelor de rulare face ca solicitarea și deci deformarea aferentă a materialului să aibă caracter local și intens. În al doilea rînd, procesul de solicitare la oboseală se desfășoară în prezența unui mediu lubrifiant, care conține compuși cu un potențial fizic și reactiv chimic active [5]. Prezența lubrifiantului are de asemenea ca urmare creșterea regimului termic al procesului de solicitare la oboseală.

Experiența și practica arată că în cazul rulmenților efectul solicitării la oboseală este distrugerea coeziunii materialului din suprafețele de rulare prin apariția de fisuri și de exfolieri superficiale de material, efect denumit pitting. În timp ce cu privire la procesul de oboseală a materialului în cazul solicitării continue există o imagine în mare măsură clară, nu s-a reușit pînă în prezent să se clarifice în mod univoc solicitarea intermitentă ciclică a materialului și mecanismul formării pittingului. Discrepanța care există, pe de o parte, între valorile optime de rezistență obținute în cazul comportării materialului la solicitare statică și la oboseală prin încovoiere, iar pe de altă parte între comportarea materialului în cazul solicitării tip rulment constituie mai degrabă o dovadă a particularității procesului de oboseală la rulmenți [6].

Analizînd cele două aspecte particulare ale oboselii în cazul rulmenților, rezultă că, după ipoteza Kostețki [7], materialul este solicitat la eforturi unitare de compresiune și de forfecare, conjugate cu tensiunile remanente. Primele ating valori de aproximativ 100—150 kgf/mm², iar ultimele de 150—200 kgf/mm². Această stare complexă de tensiuni provoacă în volumele active de material din suprafața de frecare și din imediata apropiere a acesteia curgeri plastice de material în straturile superficiale. Aceste curgeri microplastice au ca urmare ecruisarea și, prin aceasta, creșterea volumului specific al materialului în aceste straturi. Prin aceasta tensiunile interne remanente cresc și mai mult, ajungîndu-se astfel treptat, în condiții de solicitare exterioară rămase neschimbate, la distrugerea coeziunii materialului prin apariția de fisuri în straturile superficiale.

Procesul de ecruisare a materialului care se produce în straturile sub suprafața activă, derivînd de asemenea din solicitarea mecanică exterioară, se analizează mai jos, ca și propagarea fisurilor în material.

Mai trebuie menționat că, în cazul solicitării obișnuite la oboseală, oțelul cu rezistența mecanică mai mare posedă și rezistența la oboseală mai ridicată. Încercările arată că această relație este valabilă pînă la valori ale rezistenței la rupere de aproximativ 160 kgf/mm², respectiv duritatea de 450 kgf/mm². Date empirice arată [8] în acest caz că între rezistența la rupere σ_r, limita de curgere σ_c și rezistența la oboseală de încovoiere σ_{oi} există relația $\sigma_{oi} = 0{,}285\ (\sigma_r + \sigma_c)$. Această relație, precum și altele similare, nu au suport fizic și nici nu ar putea să aibă, deoarece în cazul

solicitării la întindere ruperea este precedată de o deformare plastică însemnată, în timp ce deformarea plastică în cazul solicitării la oboseală de încovoiere este adesea chiar mai redusă decît deformarea elastică.

În procesul de degradare a suprafețelor prin solicitarea mecanică la oboseală tip rulment, prezența lubrifiantului contribuie la intensificarea acestuia. Acțiunile caracteristice ale mediului lubrifiant cu conținut de compuși fizic și chimic activi sînt producerea adsorbției și chemisorbției [5], precum și reacției chimice cu caracter corosiv. Astfel [9] straturile de adsorbție și de chemisorbție pot reduce în cazul unui monocristal limita de curgere și pot facilita alunecarea în pachete. În conformitate cu efectul Rebinder, aceasta se datorește reducerii energiei superficiale libere a stratului superficial metalic prin acțiunea substanței active adsorbite și pătrunderii acestei substanțe în metal prin microfisurile acestuia. Moleculele stratului de adsorbție, migrînd de-a lungul pereților microfisurii, fac ca stratul de adsorbție să dezvolte o presiune suplimentară asupra pereților acesteia, facilitînd nașterea unei rețele de microfisuri și reducînd astfel rezistența mecanică a corpului solid. Acțiunea corosivă a compușilor chimic activi din lubrifiant poate promova efectul de oboseală, microzonele de coroziune constituind centre de amorsarea microfisurilor. La toate acestea se mai poate adăuga efectul de pană a lubrifiantului în propagarea fisurilor. Procesele chimice fiind funcție de temperatură, acestea pot fi facilitate de căldura suplimentară rezultată din componenta lubrifiant a frecării.

3. INFLUENȚA PARTICULARITĂȚILOR MATERIALULUI ASUPRA COMPORTĂRII ACESTEIA LA OBOSEALĂ TIP PITTING

Degradarea suprafeței active prin efecte tip pitting poate fi ameliorată folosind materiale cu o bună rezistență la oboseală sub sarcină ridicată. Se constată că pentru aceasta materialul trebuie să posede următoarele proprietăți [10]: o bună stabilitate dimensională, rezistență mare la uzură și o limită elastică ridicată pentru ca deformațiile plastice să rămînă în limite reduse. Un oțel cu conținut ridicat de carbon satisface, în general, aceste condiții dacă conține și un element, care formează carburi pentru ridicarea durității materialului, îi conferă călibilitate și permite răcirea în ulei pentru evitarea deformărilor la călire. Oțelul cu 1% C și circa 1,5% Cr, de tipul RUL, STAS 1456—61, satisface în general aceste cerințe, avînd temperatura de revenire sub 200°C. Dacă această temperatură scăzută este însă depășită în timpul funcționării rulmentului, austenita reziduală existentă se transformă în martensită cu variație de volum, impunînd materialului o instabilitate dimensională. Pentru a putea admite la rulmenți temperaturi de funcționare mai ridicate trebuie deci redus procentul de austenită reziduală printr-un tratament de stabilizare și de asemenea ridicată temperatura de revenire peste cea de funcționare. Temperaturi de revenire mai ridicate conduc însă la pierderi de duritate și deci la durate de funcționare mai scurte. Trebuie menționat că tratamente la temperaturi sub zero grade în această direcție nu s-au dovedit eficace pentru sporirea duratei de funcționare a rulmenților.

Cerințele față de oțelul de rulmenți arătate mai sus se referă la masa materialului. Datorită materiilor prime și proceselor metalurgice de elaborare, oțelurile conțin totdeauna și elemente însoțitoare, metalice sau nemetalice, precum și sulfuri, care formează discontinuități de masă metalică și deci microzone de rezistență mecanică scăzută. Conținutul acestor incluziuni este reglementat prin standard și reflectă deci nivelul tehnic la un moment dat al industriei metalurgice.

În ceea ce privește masa metalică a oțelului, comportarea la oboseală de tip pitting a acesteia este legată în principal, cum s-a arătat, de proprietățile sale de deformare plastică. În cazul unui cristal cu rețea regulată și izotrop, solicitat ciclic cu o sarcină sub limita elastică, procesul de încărcare-descărcare este reversibil. Lucrul mecanic absorbit în faza de încărcare este restituit integral în faza următoare de descărcare și corpul nu se încălzește. Dacă sarcina depășește limita elastică, apar deformări plastice remanente, lucrul mecanic absorbit în final de corp transformîndu-se în căldură. Prin această pierdere de energie, ciclul inițial de solicitare se amortizează. Experiențele arată că amortizarea crește mult cu sarcina, dar că o astfel de amortizare apare și la eforturi de mărime mult sub limita elastică [8].

Cele de mai sus arată că materialele tehnice nu sînt solide ideal elastice, chiar dacă multe dintre ele se comportă macroscopic izotrop. Datorită orientării neregulate a cristalitelor anizotrope, proprietățile elastice se modifică în cadrul unor spații microscopice, scăzînd. Această scădere se produce în salturi mai ales pe conturul cristalitelor, accentuîndu-se o dată cu modificarea formei contactului acestora, de la o suprafață în cazul a două cristalite la o linie în cazul a trei și la un punct în cazul atingerii a patru cristalite. Din această cauză, în cazul unei solicitări, repartiția efortului nu este niciodată uniformă pe întreaga secțiune, această repartiție prezentîndu-se sub formă de vîrfuri și văi cu înălțimea medie egală cu rezistența macroscopică a materialului. Datorită neomogenității structurale, vacanțelor etc. din cadrul cristalitelor însăși se produce o deranjare a repartiției uniforme a eforturilor, creîndu-se de asemenea vîrfuri și văi de tensiuni. Materialele tehnice, fiind apoi structural eterogene, sînt chiar în stare neîncărcată sediul unor tensiuni interne remanente cu distribuție vîrfuri-văi, însă cu valoare medie zero.

Dacă peste o astfel de distribuție a tensiunilor interne se suprapune prin încărcare o distribuție analogă de eforturi unitare, rezultă că chiar la sarcinile cele mai mici trebuie să apară locuri unde valoarea solicitării depășește limita elastică și se produce deformare plastică. Ponderea microvolumelor de material deformate față de masa întregii piese poate fi, după o singură solicitare, atît de redusă, încît comportarea elastică a piesei la scară macro să nu fie afectată. Repetînd solicitarea de mai multe ori, se constată că aceste microdeformații dau o deplasare relativă a suprafețelor și valori măsurabile pentru amortizare, marcînd astfel trecerea efectului solicitării repetate, adică deformarea plastică la rece, de la scară micro la scară macro.

Pe baza acestui model al relației dintre eforturi și deformații în cazul materialelor tehnice, se poate conchide că la mișcarea de tip rulment încărcarea elastică la scară macro produce asupra materialului efecte

de deformare plastică la început la scară micro, care se transformă la scară macro cu creşterea numărului de solicitări ciclice.

Procesul de deformare plastică este fundamentat în prezent cu ajutorul teoriei dislocaţiilor [11], conform căreia în cristal există sau se pot crea deranjări ale reţelei, iar migrarea acestor deranjamente poate fi privită astăzi drept mecanismul elementar al deformării plastice. Dislocaţiile percepînd solicitarea exterioară a corpului prin intermediul cîmpului de eforturi unitare (în cazul corpurilor deformabile aceste eforturi sînt de forfecare), dacă valoarea acestora atinge o anumită limită, dislocaţiile încep să migreze şi se produce deformarea plastică. Dislocaţiile fiind elemente ale cristalului, migrarea acestora este limitată de marginile cristalului. Gradul de deformare plastică este deci şi el limitat, iar pe măsură ce deformarea plastică creşte, alunecarea în cristal decurge după planuri corespunzătoare la solicitări tot mai mari. Se zice că materialul se ecruisează. Cînd sub acţiunea forţelor exterioare toate dislocaţiile au fost oprite la marginile cristalului, alunecări nu mai pot avea loc şi ruperea materialului devine casantă.

În cazul solicitării materialului la eforturi relativ mici, dar repetate, de tip oboseală, micro sau macrodeformaţiile plastice ecruisează de asemenea materialul, însă treptat cu creşterea numărului solicitărilor [8] pînă la ecruisarea totală, după un mecanism similar producerii deformărilor plastice însăşi.

În consecinţă, la baza pittingului poate fi admis următorul mecanism : deformaţiile de natură elastică la scară macro iau caracter plastic micro local, apoi apare ecruisarea locală, care se accentuează treptat pînă ce coeziunea materialului se distruge prin rupere casantă. Microfisurile produse astfel constituie în evoluţia procesului de distrugere crestături care, prin concentrările de tensiuni pe care le produc, extind zona de ecruisare şi de rupere casantă, microfisurile dezvoltîndu-se la forme de macrofisuri, cunoscute ca reprezentînd practic efectele de oboseală.

Microfisurarea plastică va începe în zona de material unde proprietăţile elastice ale acestuia sînt cel mai scăzute, adică, după cum s-a arătat mai sus, la contactul punctiform a patru grăunţi. Cele mai numeroase zone de acest fel se află însă în masa materialului, la nivelul suprafeţei putînd exista numai contacte a doi sau trei grăunţi, deci cu proprietăţi elastice mai ridicate. Din aceste consideraţii rezultă că probabilitatea producerii microfisurilor de oboseală este mai mare în straturile de material de sub suprafaţă decît în suprafaţă.

Pe de altă parte, discontinuităţile de masă metalică trebuie privite de asemenea ca zone cu proprietăţi elastice mult mai scăzute decît ale metalului de bază. Zonele conţinînd incluziuni nemetalice vor constitui deci primele centre de fisurare la oboseală. Din acest punct de vedere, între comportarea materialului din masa corpului şi de la suprafaţă nu pot exista diferenţe importante.

Un alt aspect al acestei probleme este propagarea fisurilor formate. Pe considerentele de mai sus, direcţiile de dezvoltare a fisurilor vor urma limitele sau zonele din material caracterizate prin neomogenitate de compoziţie chimică sau de alcătuire structurală. Aceasta deoarece în zonele respective materialul, avînd proprietăţi elastice microzonele mai

scăzute, deformarea plastică va începe și se va propaga preferențial aici. Fibrele din material constituind astfel de zone de neomogenitate, poate fi presupus că direcțiile de dezvoltare a fisurilor pot fi influențate de orientarea fibrelor. Problema aceasta este însă complexă și dificultățile pe care le ridică o investigare în această direcție apar legate de factori multipli în ceea ce privește diversitatea aspectelor de neomogenitate și caracteristicile specifice ale solicitării repetate tip rulment, inclusiv modificările de structură produse în astfel de cazuri.

Concluziile rezultate în această privință din practică și din experiment sînt că, în cazul bilelor de rulment cu orientarea polară a fibrelor, fisurile se dezvoltă cu preferință în zona polilor unde fibrele intersectează suprafața sub un unghi ascuțit, direcția dezvoltării lor făcînd cu suprafața aproximativ același unghi ca și fibrele. Scott [10] găsește că acest unghi este de 10—40°, Ishida și Mita citați în [10] de 28—30°, Bear și Butler [10] în planul efortului unitar maxim de forfecare (~45°), iar Kosteţki [7] de ~30°. Aceste date pot fi mai bine verificate în cazul bilei decît la celelalte elemente componente ale unui rulment.

Fisurile produse în masa materialului și datorite incluziunilor sau suflurilor interne se propagă către suprafață, începînd de la unghiurile ascuțite ale acestora, prin efecte de crestătură. Dacă aceste incluziuni sînt situate în zona eforturilor de forfecare maxime, fisurile se vor propaga în planul acestor eforturi la 45°. Din celelalte poziții fisurile se pot dezvolta în funcție de neomogenitatea materialului (fibre), putînd lua, într-un anumit stadiu de dezvoltare, o orientare paralelă cu suprafața activă, ieșind însă în suprafață de obicei tot după o direcție înclinată.

Forma de pitting a degradării suprafețelor se constată că are la bază tocmai direcția înclinată a fisurilor față de această suprafață.

4. INVESTIGAREA CAUZELOR UNOR DEGRADĂRI TIP PITTING

Defectele tip pitting pot fi atribuite factorilor legați de material, în principal de constituția sa structurală, omogenitatea structurii, condițiile de stare (tensiuni interne), discontinuității de masă metalică (incluziuni nemetalice, sufluri etc.), precum și unor factori externi legați de mediul lubrifiant, mediul ambiant, suprasolicitările rezultate din abaterile de la geometria și microgeometria suprafețelor, vibrații, microfisurile superficiale rezultate din prelucrare etc. Factorii externi pot influența în general procesul de dezvoltare a fenomenului de oboseală, sursele de amorsare a fenomenului rămînînd în principal tot cei legați de material. Trebuie apoi ținut seama că acest tip de fenomen de oboseală se dezvoltă în timp relativ brusc, iar materialul exfoliat este fărîmițat și eliminat. Faza la scară macro, la care defectul rămîne pe suprafață și poate fi examinat, nu mai conține deci elementele incipiente la scară micro care l-au generat. Complexitarea fenomenului, dar mai ales aspectul din urmă menționat, constituie încă o piedică în calea elucidării sale mai complete și mai ales a cazurilor de pitting prematur.

În fața unui pitting produs, rămîn deci de investigat factorii legați de material privind constituția și neomogenitatea structurală și discontinuitatea de masă din zona defectului și din zonele mai depărtate de

calea de rulare. Dacă defectul produs s-a datorat condiţiilor de stare ale materialului (tensiuni interne şi microfisurări provenite din procesele tehnologice de tratament şi de prelucrare) sau discontinuităţilor de masă (incluziuni nemetalice, sufluri) de extindere redusă ca de obicei, acestea dispărînd o dată cu materialul exfoliat, identificarea lor este, evident, cu neputinţă.

Cîmpul de investigaţie se restrînge astfel la aspecte privind constituţia şi neomogenitatea structurală. Dacă aceste două elemente au avut o extindere micro, ele au dispărut de asemenea o dată cu materialul exfoliat, identificarea motivelor devenind şi în acest caz imposibilă. În ceea ce priveşte constituenţii structurali rezultaţi din tratamentul termic, aceştia depind de acest tratament şi, dacă acesta s-a efectuat greşit, efectele apar pe macrozone comparabil mai mari decît ariile afectate de pitting. Deci eventuale decarburări, zone cu reveniri prea înalte etc. se vor regăsi în jurul ariei pittingului. În ceea ce privesc aspectele de neomogenitate structurală, dată în cazul de faţă mai ales de distribuţia carburilor libere, chiar dacă tratamentul termic a fost corect, această distribuţie reflectă [12] textura structurii oţelului semiprodus, respectiv fibrele, dacă există, precum şi tehnologia de forjare a elementelor rulmentului prin orientarea acestor fibre. Existenţa fibrelor în material creează neomogenitatea structurii, aceasta perpetuîndu-se şi după tratamentul martensitic. Aceste fibre, care sînt frecvent concentrări de carburi [12], alternează mai mult sau mai puţin regulat cu constituentul de bază — martensita — a structurii şi au la inelul interior al rulmentului, în secţiunea transversală, o arie de $\sim 400 \mu m^2$, deci micro. Faţă de matricea martensitică, proprietăţile mecanice ale conglomeratului fibră şi ale amestecului din zona de frontieră matrice-fibră diferă, aceste zone de neomogenitate chimică putînd constitui amorse de oboseală datorită deformaţiilor plastice neegale învecinate. Fibrele pot intersecta sau să fie paralele după raza mică la calea de rulare, apărînd astfel în suprafaţa activă a rulmentului microzone amorse de fenomene de oboseală. Distribuţia aleatorie a fibrelor în material vine în concordanţă şi cu faptul că, datorită numai fibrelor, pittingul nu trebuie neapărat să aibă pe suprafaţă caracter generalizat. Faptul că în lungime fibrele au de obicei dimensiuni macro, prezenţa lor nu poate fi ştearsă în toate cazurile prin volumul de material exfoliat al defectului. Rezultă astfel că, chiar în cazul defectului pitting macro rămas pe suprafaţă, examinarea texturii structurii din zona acestuia poate furniza indicaţii privind amorsarea unor astfel de fenomene.

Pentru studiul de faţă s-a dispus de defecte tip pitting apărute pe suprafaţa de rulare a inelului interior de la rulmenţii cu bile. În consecinţă, studiul acestor defecte s-a făcut din punctul de vedere al mărimii, formei şi repartiţiei carburilor libere în zona pittingului şi în masa materialului.

Au fost investigaţi 20 de rulmenţi cu bile de diferite tipodimensiuni, la care defectul tip pitting a apărut la diferite durate de funcţionare, variind între 7 şi $749 \cdot 10^6$ cicluri. Aceşti rulmenţi au făcut parte din loturi de încercare pe stand efectuate de către uzina „Rulmentul" din Braşov, sarcina P şi turaţia de încercare, presiunea specifică medie hertziană p_m şi maximă $p_{max} = 1{,}5 p_m$ fiind arătate în tabela 1. Presiunea specifică

medie hertziană de contact a fost calculată după [5], rezultatele nediferind în mod sensibil [1] de cele obținute cu metoda Timoshenko [13]. Turația și sarcina P pe rulment sînt cele uzuale în astfel de încercări. Din tabelă se vede că, de la o tipodimensiune la alta, presiunea de contact diferă cu mai puțin de 10%, unele diferențe putîndu-se datora și calculului cu rigla a funcțiilor $\Sigma 1/R$ și $F(1/R)$ [5]. Din punctul de vedere al mărimii solicitării, toți rulmenții au fost deci încercați la fel. Mai trebuie apoi remarcat că au fost studiate și defecte pitting rezultate la același tip de rulment și după același număr de cicluri (pozițiile 9, 10 și 11 din tabela 1) pentru aspecte de reproductibilitate a producerii defectului. De asemenea au fost analizate și cazurile 19 și 20 din tabelă, reprezentînd rulmenți la care nu au apărut pittingul obișnuit, degradarea suprafeței prin oboseală producîndu-se sub formă de fisuri generalizate pe întreaga cale de rulare a inelului interior.

Investigațiile cu ajutorul microscopiei optice asupra defectului și structurii au fost materializate, în ceea ce s-a apreciat ca fiind mai caracteristic, prin macrofotografii redînd mărimea, forma și poziția pittingului

Tabela 1

Nr. crt.	Tipodimensiunea	Simbol	Durata de funcționare		Condiții de încercare			
			cicluri $\times 10^6$	ore	P kgf	p_m kgf/mm^2	p_{max} kgf/mm^2	n rot/min
1	6304	2	7,04	81	350	223	334,5	1450
2	6204	4	12,0	50	,,	218	337	4000
3	6208	17	15,64	88	650	212	318	2850
4	6205	1	17,74	204	300	228	342	1450
5	6208	7	19,98	116,5	650	212	318	2850
6	6206	7	26,67	156	450	232	348	,,
7	,,	3N	38,6	225	,,	,,	,,	,,
8	,,	11	45,9	268	,,	,,	,,	,,
9	6209	10	47,5	278	750	221	331,5	,,
10	,,	3	,,	,,	,,	,,	,,	,,
11	,,	2	,,	,,	,,	,,	,,	,,
12	6208	16	61,56	360,5	650	212	318	,,
13	6209	6	64,98	380	750	221	331,5	,,
14	6208	21	66,0	386	650	212	318	,,
15	,,	14	83,76	489,5	,,	,,	,,	,,
16	6209	15	128,0	748	750	221	331,5	,,
17	6206	7N	240,0	1402	450	232	348	,,
18	,,	4N	309,0	1805	,,	,,	,,	,,
19	6208	2	498,8*	2917	650	212	318	,,
20	6206	2N	749,0*	4388	450	232	348	,,

*) Nu au prezentat pitting, ci fisuri generalizate pe calea de rulare la inelul interior.

pe calea de rulare a inelului interior și prin microfotografii metalografice pentru redarea particularităților de structură. În figurile 2 și 3 sînt prezentate aceste aspecte numai pentru două din cele 20 de cazuri studiate, apreciate ca reprezentative pentru caracterizarea cazului. Imaginile privind structura redau aceasta în secțiune axială prin pitting și în zona acestui defect, și anume începînd de la calea de rulare, indicativele *b*,

c, *d*,... ale figurilor referindu-se la zonele, conform figurii 1, din suprafaţa secţiunii. Diferitele poziţii *b*, *c*, *d*, *e* nu sînt la distanţe egale între ele, ci corespund microsuprafeţei din zona în care structura prezintă o particularitate.

Pentru ilustrarea posibilităţii existenţei unei dependenţe a producerii fenomenului pitting de particularităţile de structură, s-a ales cazul modelului 6204/4, cu o durată de funcţionare extrem de redusă, s-ar putea spune de pitting prematur, şi cazul modelului 6206/2N, la

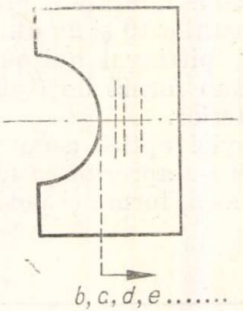


Fig. 1. — Secţiune axială prin inelul interior al rulmentului : *b*, *c*, *d*, ... — ordinea redării prin imagine a structurii (schemă).

care forma obişnuită de pitting nu a apărut nici după 749 000 000 de cicluri de solicitare. Pentru cazul cu durată minimă nu s-a ales modelul 6304/2, cu $7{,}04 \cdot 10^6$ cicluri, aceleaşi particularităţi de structură apărînd mai clar în cazul modelului 6204/4.

Examenul general al structurii celor două cazuri extreme arată mai întîi o densitate mai mare de carburi libere în cazul modelului 6304/2. În al doilea rînd, structura aceluiaşi model este mai neomogenă sub raportul distribuţiei carburilor, a formei şi a mărimii acestora. Astfel, imediat sub defectul de pitting s-a putut constata o dispunere într-o fibră lată a carburilor (fig. 2*b*), în cadrul căreia apar şi carburi puţin alungite, orientate aproximativ în lungul fibrei. În continuare, sub acest strat apare o zonă cu distribuţia destul de orientată a carburilor, şi anume într-o cvasireţea, aproape în monorînd, cîteva carburi alungite din cadrul reţelei fiind chiar destul de mari. O altă fibră din carburi urmează în continuare (fig. 2*d*), în care carburile alungite din cadrul fibrei au o orientare aproape transversală pe fibră. Apar şi carburi mai mari cvasisferice în şi în afara fibrei. În zona următoare, între două fibre apare o concentrare de carburi alungite mai mari (fig. 2*e*), iar sub aceasta o zonă cu carburi cvasisferice de asemenea mai mari (fig. 2*f*). Ultima fibră mai lată din această secvenţă (fig. 2*g*) conţine mai ales carburi cvasisferice nu prea mari, precum şi unele puţin alungite. Structura la acest material prezintă deci sub raportul formei, mărimii şi distribuţiei carburilor o neomogenitate destul de accentuată.

În cazul modelului 6206/2N, neomogenităţi pronunţate ca la modelul 6204/4 nu au putut fi constatate. Începînd cu stratul situat imediat sub calea de rulare, materialul nu prezintă concentrări masive de carburi sub formă de fibre, nuclee sau reţele. O uşoară orientare în monorînd a carburilor apare în figura 3*b*, pentru ca imediat în stratul următor de material să apară o pronunţată omogenitate în ceea ce priveşte distribuţia, forma

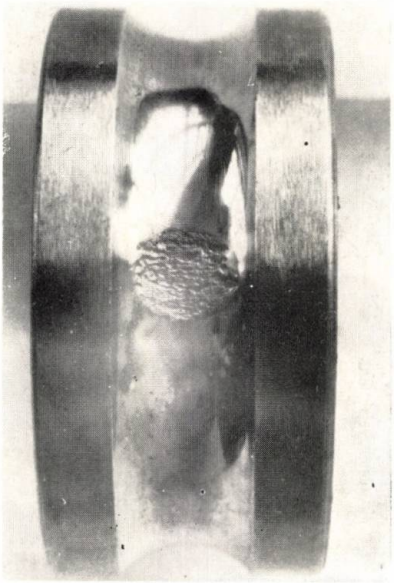
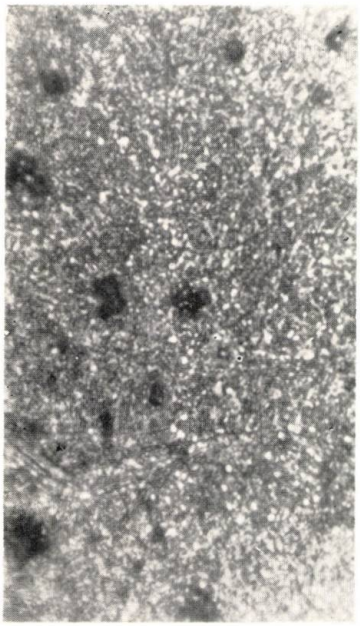
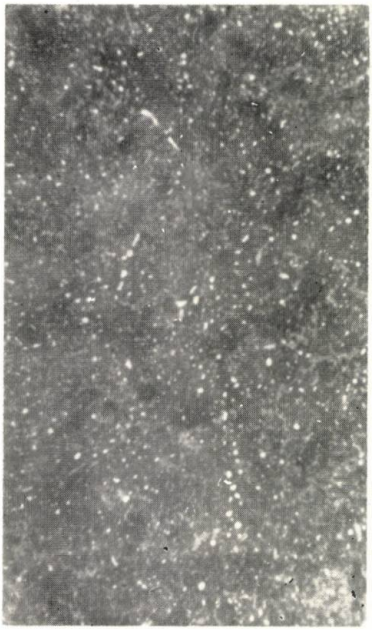


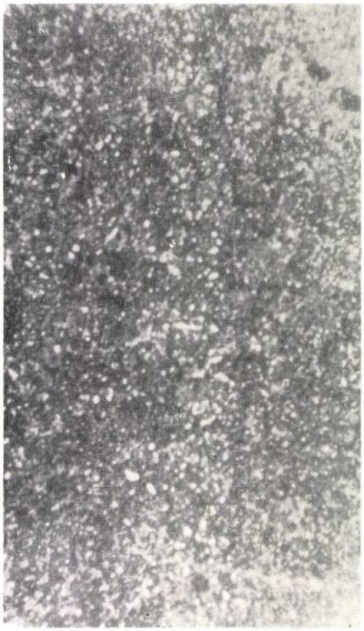
Fig. 2. — Modelul 6204/4, $12 \cdot 10^6$ cicluri :
2*a* — defectul pitting (3 : 1) ;



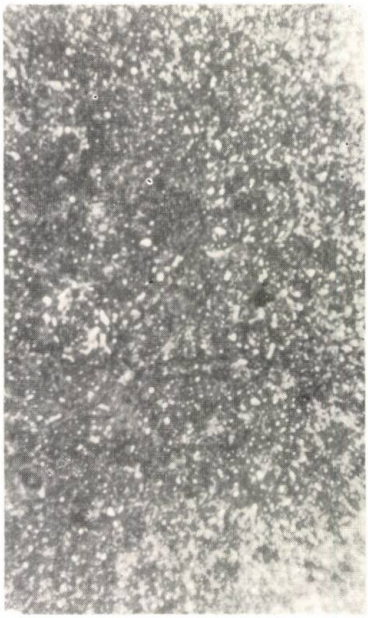
2*b* — fibră lată de carburi sferice și alungite (456 : 1) ;



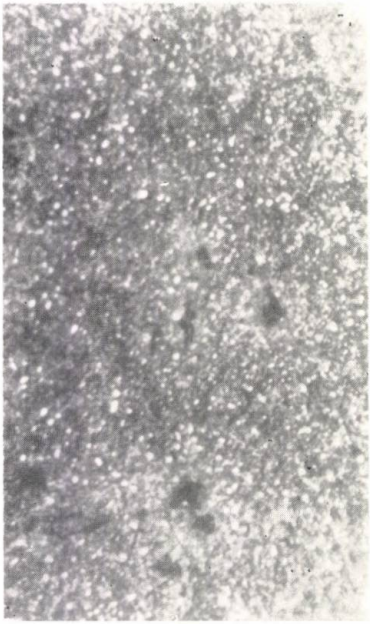
2*c* — rețea monorînd cu carburi sferice și alungite (456 : 1) ;



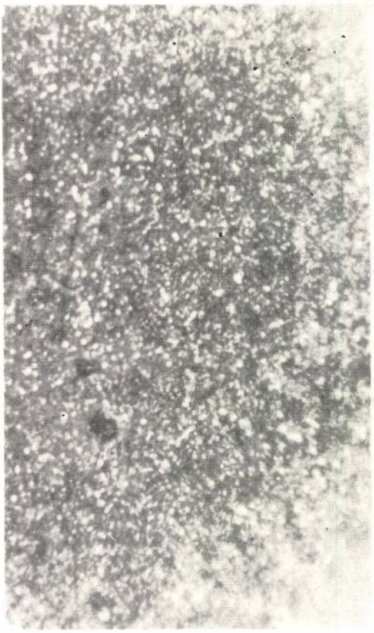
2*d* — altă fibră cu carburi sferice şi alungite mai mari (456 : 1);



2*e* — aglomerare de carburi alungite, densitate mare de carburi (456 : 1);



2*f* — carburi sferice mai mari, densitate mai redusă de carburi (456 : 1);



2*g* — altă fibră cu carburi, carburi alungite mai mari (456 : 1).

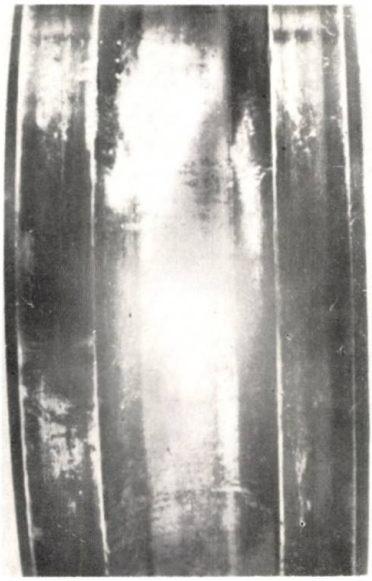
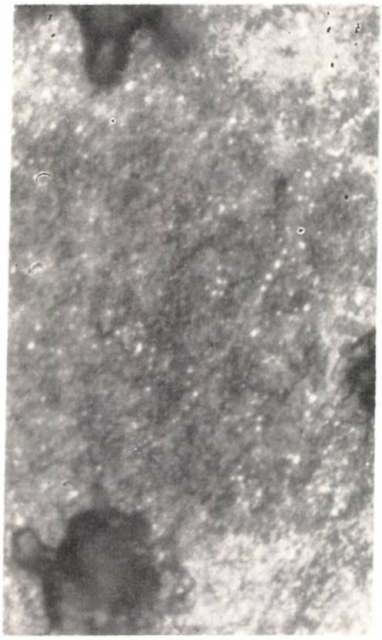
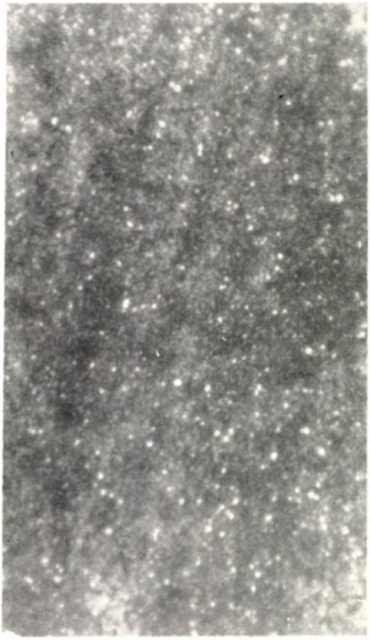


Fig. 3. — Modelul 6206/2N, $749 \cdot 10^6$ cicluri :
3*a* — microdegradarea suprafeţei active fără pitting obişnuit (2,9 : 1);

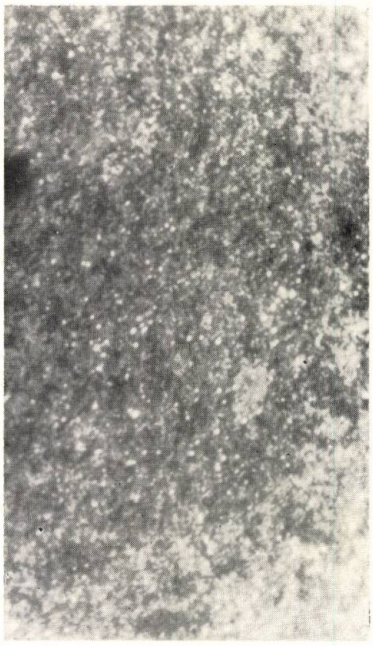


3*b* — densitate mai redusă de carburi, slabe monorînduri (456 : 1);



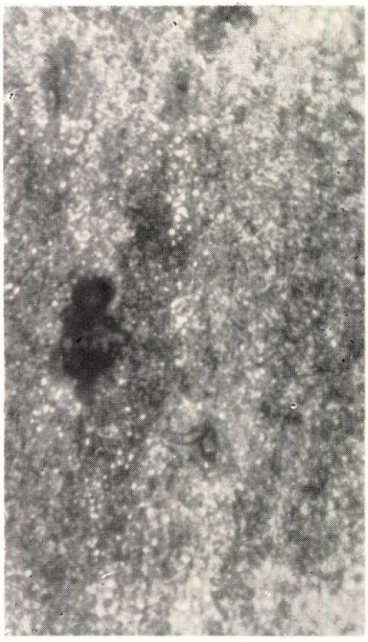
3*c* — carburi regulate ca mărime, formă, distribuţie şi densitate, structură omogenă (456 : 1);

3*d* — omogenitate relativ bună (456 : 1);



3*e* — omogenitatea relativ bună, slabe aglomerări de carburi (456 : 1);

3*f* — omogenitate relativ bună, uşoară orientare în monorînd a carburilor (456 : 1);



3*g* — omogenitate puţin perturbată de o fibră slab pregnantă şi îngustă de carburi (456 :1).

și mărimea carburilor (fig. 3*c*). În restul secțiunii această omogenitate se menține în general, fără ca unele foarte slabe orientări în rînduri înguste (fig. 3*d* și 3*g*), în monorînd (fig. 3*f*) sau concentrări sferice (fig. 3*e*) să modifice în mod mai pronunțat densitatea de carburi din zonele învecinate acestora. Materialul de la acest model se caracterizează deci printr-o bună omogenitate structurală.

5. CONCLUZII

Din analizarea factorilor care pot constitui amorse de oboseală a materialului în condițiile de solicitare ciclică tip rulment cu bile, a rezultat că marea majoritate a acestor factori dispar o dată cu materialul exfoliat în cadrul ariei defectului de tip pitting. Din acest motiv, stabilirea cauzelor producerii unui astfel de defect nu este totdeauna posibilă. Neomogenitatea structurală sub raportul mărimii, formei, distribuției și densității carburilor libere în structură se constată a fi unul dintre factorii care persistă în jurul defectului produs și în restul masei de material și deci poate servi pentru investigații în legătură cu producerea defectului. Constatarea de față că la cazurile cu pitting examinate structura a prezentat neomogenități arată existența dependenței producerii defectului de gradul de omogenitate în alcătuirea structurală a materialului, ceea ce concordă și cu ipotezele existente în legătură cu amorsarea și cu dezvoltarea unor astfel de defecte.

Primită la redacție la 3 decembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Vasilca, V. Raszillier, Gh. Ionescu, URB : *Cercetări privind cauzele apariției premature a fenomenului tip pitting la rulmenții cu bile*, Memoriu IMFCA – URB, 1970 (lucrare nepublicată).
2. A. Palmgren, *Grundlagen der Wälzlagertechnik*, ed. a 3-a, Stuttgart, 1964.
3. W. J. Davies, K. L. Dey, *Surface Fatigue in Ball Bearings, Roller Bearings and Gears in Aircraft Engenes*, Fatigue in Rolling Contact, J. Mech. E., Londra, 1964, p. 23.
4. D. Dowson, G. R. Higginson, *Elasto-Hydrodynamic Lubrication*, Oxford, 1966, p. 65.
5. Gh. Vasilca, O. Biță, *Procese de lubrificație, frecare și uzură la suprafețele metalice*, București, Edit. Academiei, 1967.
6. H. Schlicht, *Strukturelle Anderungen in Wälzelementen*, Wear, 12, 3, 151 (1968).
7. B. J. Kostețki, *Soprotivlenie iznașivaniu detalei mașini*, Kiew, Mașghiz, 1959, p. 105.
8. E. Siebel, *Die Prüfung der metallischen Werkstoffe*, Berlin, Springer, 1955, p. 222.
9. A. S. Akhmatov, *Molecular Physics of Boundary Friction*, Jerusalem, 1956, p. 399.
10. D. Scott, B. Loy, G. H. Mills, *Metallurgical Aspects of Rolling Contact Fatigue*, Lubrication and Wear, Fifth Convention, Plymouth, 1967, p. 94.
11. A. Seeger, *Moderne Probleme der Metallphysik*, Berlin, Springer, 1965, p. 4.
12. Gh. Vasilca, V. Raszillier, *Cercetări asupra comportării la mișcarea de rostogolire a straturilor superficiale de oțel, în cazul fibrelor materialului orientate diferit față de calea de rulare*, memoriu IMF – URB, 1968 (lucrare nepublicată).
13. S. Timoshenko, *Strength of Materials*, partea a II-a, New York, 1956, p. 343.

RECENZII

DITER RÜDIGER și ALFRED KNESCHKE, *Technische Mechanik*, Band I, Statik starrer Körper; Band II, Festigkeitslehre, Leipzig, B. G. Teubner Verlagsgesellschaft.

Manualul a întrunit de la publicarea sa aprecieri cu totul elogioase privind conținutul și modul de prezentare al diverselor probleme de mecanică necesare inginerilor.

Afirmîndu-se ca o lucrare cu înalte calități didactice, am putea spune chiar ca un exemplu privind modul cum trebuie expusă mecanica în învățămîntul ingineresc, manualul autorilor Rüdiger și Kneschke a cunoscut o largă solicitare, motiv pentru care, la cîțiva ani după apariție, a fost necesară publicarea celei de-a doua sau chiar de-a treia ediții.

Primul volum conține nouă capitole, în care sînt prezentate problemele principale ale staticii solidului rigid. După un capitol introductiv se tratează pe larg reducerea sistemelor de forțe concurente, coplanare, ca și a unui sistem oarecare de forțe cu metode analitice și grafice. Capitolul conține elemente de calcul vectorial, utilizate apoi pentru exprimarea vectorială a rezultatelor.

Un capitol special este consacrat determinării centrului de greutate cu multe și variate exemple concrete.

Studiul legăturilor ideale ale solidului se remarcă atît prin sistematizarea și claritatea lui, cît mai ales prin exemplele interesante și utile în practica inginerească.

În continuare se prezintă studiul grinzilor cu zăbrele plane și spațiale, noțiuni privind frecarea de alunecare, de pivotare, de rostogolire, frecarea firelor, studiul forțelor tăietoare și al momentelor încovoietoare pentru grinzi plane și spațiale. Volumul se încheie cu expunerea problemelor principale ale staticii firelor.

Volumul al doilea cuprinde problemele principale ale rezistenței materialelor.

Primul capitol este consacrat teoriei momentelor de inerție ale suprafețelor. În următoarele trei capitole se prezintă succesiv elementele fundamentale privind starea plană și spațială a tensiunilor și deformațiilor, precum și legătura dintre tensiuni și deformații.

Se expun apoi elementele fundamentale privind întinderea, compresiunea, forfecarea și torsiunea pură. Ultimele trei capitole sînt destinate diferitelor aspecte ale încovoierii.

Stilul concis, tratarea riguros științifică și expunerea clară sînt calități prezente în întreaga lucrare. Exemplele numeroase de calcul și mai ales prezentarea grafică cu totul deosebită întregesc valoarea și utilitatea lucrării.

M. M. Niță

Revista

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

publică:

● Studii originale de înalt nivel cu caracter fundamental de interes general ştiinţific şi reflectare în practică.

● Note (lucrări mai scurte) cu caracter original sau constituind o punere la punct a unei anumite chestiuni.

● Referate ştiinţifice şi tehnice, în care se expun stadiul actual al unei anumite probleme subliniindu-se aspectul nou, observaţii şi discuţii asupra unor lucrări de mecanică aplicată.

● Recenzii asupra cărţilor şi studiilor române şi străine. Domeniile de specialitate ale revistei sînt:

● Astrodinamica (optimizarea traiectoriilor, calculul orbitelor sau al segmentelor de orbite, optimizarea transferului interorbital, impactul vehiculelor spaţiale cu meteoriţi, orbite sincrone, astrorelativitate, zborul în atmosferă rarefiată, în atmosferă densă, frînarea şi captarea aerodinamică a unui vehicul cosmic).

● Aerodinamica (mecanica fluidelor, aerodinamica, dinamica gazelor, mecanica avionului, aeroelasticitate, aerodinamica motoarelor cu ardere internă, termo-aerodinamica motoarelor cu reacţie, ventilaţie, aeromotori).

● Hidrodinamica (hidraulică, construcţii hidrotehnice, irigaţie, turbine şi pompe, amenajări hidraulice).

● Construcţii de maşini (cinematica şi dinamica mecanismelor, frecare, ungere, uzură, metode moderne de calculul maşinilor, automatizare, studiul suprafeţelor, tehnologia mediilor solide continue).

● Mecanica generală (rezistenţa materialelor, elasticitate, plasticitate, vibraţii şi şocuri stabilite, analogii electrice şi hidraulice).

● Statica şi dinamica construcţiilor (metode pentru calculul static şi dinamic al construcţiilor, studiul materialelor neomogene, stabilitatea terenurilor, metode de executare a lucrărilor de construcţii).

● Tehnica măsurătorilor (aparate electrice pentru măsurarea mărimilor mecanice, utilizarea ultrasunetului şi a izotopilor radioactivi în tehnică).

● Revista urmăreşte stimularea activităţii ştiinţifice şi difuzarea lucrărilor valoroase primind în acest scop spre publicare articole de la toţi specialiştii din ţară şi de la colaboratorii din străinătate.

★

● Manuscrisele se vor trimite la sediul Comitetului de redacţie, Bucureşti, str. Const. Mille nr. 15, sectorul 7.

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 30, nr. 5 1971

SUMAR

Pag.

STUDII

VASILE IONESCU, CIPRIAN COZMA, Problema generală a dezlocuirii plane necapilare şi negravitaţionale în medii poroase omogene şi neomogene 1017

VALERIU PANAITESCU, În legătură cu mişcarea permanentă plană a două fluide în contact 1035

D. TAŞCĂ, GH. ZIDARU, Studiul reţelelor circulare de profile subţiri alcătuite din arce de spirale logaritmice, prin transformare conformă pe reţele liniare Weinig 1047

T. OROVEANU, Asupra transferului de căldură în gaura de sondă în timpul injecţiei unui lichid cald în zăcământ 1061

IOAN CRĂCIUN, Algoritmi în calculul sistemelor „în lanţ" şi „ramificate" cu ajutorul grafelor liniare de fluenţă 1075

GH. NIŢESCU, V. OLARIU, M. TOFAN, Asupra unui program de calcul al vibraţiilor proprii de torsiune ale arborelui cu mai mulţi volanţi. 1111

N. I. MANOLESCU, G. C. POPA, Contribuţii la stabilirea formei curbelor (r_c), Γ_0 şi Γ_j cu ajutorul ecuaţiei Veldkamp 1137

CHR. PELECUDI, I. SAVA, Optimizări în sinteza numerică a mişcării mecanismelor cu came 1149

CORNELIA FLOREA, Contribuţii la studiul cinematic al unui mecanism bielă- manivelă spaţial 1167

AMEDEU ORĂNESCU, Cinematica patrulaterului articulat spaţial, rezolvată prin metode plane 1195

DAN COŞA, Unele aspecte legate de studiul stabilităţii arcelor prin metoda micilor deplasări 1203

AL. EFTIMIE, GH. BOTEZ-POPESCU, Deplasările punctelor şi mărimea tasărilor pentru un teren de fundaţie transversal anizotrop în cazul problemei plane. . 1217

D. RAŞEEV, V. ULMANU, Solicitările la oboseală a îmbinărilor filetate ale racordurilor speciale şi metodologia de cercetare a rezistenţei acestora 1229

SIMION CONSTANTINESCU–CĂTUNEŞTI, O recrudescenţă a relaxării de efort la elemente longitudinale din oţel supuse la coroziune sub tensiune. 1247

PETRE DODOC, Contribuţii la cercetarea mecanismului apariţiei erorilor la rectificarea şi frezarea de înaltă precizie a pieselor cu suprafeţe de revoluţie. 1257

C. STĂNESCU, B. DIMITROV, Unele aspecte ale frecării şi uzurii cuplelor fir-captator în tracţiunea electrică. I. 1269

St. cerc. mec. apl., tom. 30, nr. 5, 1971, p. 1015–1278

PROBLEMA GENERALĂ A DEZLOCUIRII PLANE NECAPILARE ŞI NEGRAVITAŢIONALE ÎN MEDII POROASE OMOGENE ŞI NEOMOGENE

de VASILE IONESCU şi CIPRIAN COZMA
Centrul de cercetări hidraulice Bucureşti

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

Lucrarea este consacrată studiului dezlocuirii fluidelor într-un mediu poros plan în care se află sonde de injecţie şi de extracţie. Se stabilesc ecuaţiile fenomenului în ipoteza valabilităţii legii lui Darcy pentru fiecare fază. Apoi se expune un procedeu de integrare prin aproximaţii succesive folosind funcţiile analitice generalizate şi ţinînd seama de condiţia iniţială pentru saturaţie. O situaţie specială apare cînd saturaţia devine o funcţie multiformă impunîndu-se aplicarea procedeului de balanţă materială. Pe linia de salt a saturaţiei se pun condiţii la limită, problema reducîndu-se în acest caz la rezolvarea unei ecuaţii integrale singulare. În continuare se arată că procedeul expus se poate aplica şi atunci cînd două fronturi se intersectează şi, deasemenea, se indică calea pentru reducerea problemei pentru domeniul mărginit de o curbă impermeabilă la cazul expus anterior.

Ne propunem, în lucrarea de faţă, să abordăm problema generală a dezlocuirii plane, necapilare şi negravitaţionale a două fluide nemiscibile în medii poroase omogene sau neomogene într-un domeniu limitat de pereţi impermeabili la distanţă finită, în prezenţa unui sistem de sonde de injecţie şi de extracţie amplasate arbitrar în domeniul poros considerat.

De probleme similare ne-am ocupat şi în alte lucrări [1]—[3], în care am considerat cazul particular al unei singure sonde de injecţie, plasată într-un punct la distanţă finită, în mediu omogen sau neomogen. Faţă de acestea, lucrarea de faţă constituie o generalizare şi rezolvă, în plus, o problemă neabordată încă, dezlocuirea cu front de saturaţie în domenii multiplu conexe, care se pune în cazul nostru după apariţia saltului de saturaţie.

Ca şi în cazul dezlocuirii integrale pe domenii multiplu conexe, [4], apare problema interferenţei fronturilor vecine şi comportarea soluţiei problemei în punctele de intersecţie, problemă de care ne vom ocupa în cursul lucrării. Atenţia principală va fi acordată studiului mişcării

în tot planul complex; cazul domeniului mărginit de o frontieră impermeabilă poate fi redus la acesta printr-o transformare conformă, așa încît nu prezintă un interes deosebit în sine. Modalitatea de reducere va fi arătată la sfîrșitul lucrării.

1. CONDIȚIILE DE STUDIU. ECUAȚIILE FUNDAMENTALE

Considerăm că în planul complex $z = x + iy$ este dat un sistem arbitrar de n sonde de injecție plasate în punctele z_i cu debitele respective Q_i^+ și m sonde de extracție plasate în punctele ζ_j de debite Q_j^- ($i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$). Între Q_i^+ și Q_j^- trebuie să avem, evident, relația

$$\sum_{i=1}^{n} Q_i^+ = \sum_{j=1}^{m} Q_j^-.$$

Considerăm de asemenea că în tot planul poros nu există nici un obstacol impermeabil. Mediul poros este presupus neomogen de permeabilitate $k(x, y)$; funcția $k(x, y)$ este pozitivă și de clasă C^1 în tot planul. La momentul inițial este cunoscută distribuția de saturație $S_0(x, y)$, supusă acelorași condiții ca și $k(x, y)$, dar în plus

$$0 \leqslant S_0(x, y) \leqslant 1.$$

Admitem ca legi de filtrație pentru cele două faze

$$\vec{V}_a = -k \frac{k_{ra}(S)}{\mu_a} \nabla p\,; \quad \vec{V}_t = -k \frac{k_{rt}(S)}{\mu_t} \nabla p, \tag{1}$$

$\vec{V}_a$ și $\vec{V}_t$ fiind vitezele de filtrare ale celor două faze fluide nemiscibile (apă și țiței), k_{ra} și k_{rt} permeabilitățile relative, funcții cunoscute de saturație, μ_a și μ_t viscozitățile lor respective, S saturația în apă și $p(x, y, t)$ presiunea în domeniul fluid.

Se știe că, [2], saturația și presiunea satisfac sistemul fundamental

$$\begin{aligned} &\Delta p(x, y, t) + [\alpha(S) \nabla S(x, y, t) + \nabla \alpha_1(x, y)] \nabla p(x, y, t) = 0, \\ &\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta(S) \nabla S(x, y, t) \nabla p(x, y, t) = 0, \end{aligned} \tag{2}$$

unde $\alpha(S)$ și $\beta(S)$ sînt funcții continue și cunoscute de saturație, iar

$$\alpha_1(x, y) = \ln k(x, y).$$

Pentru detalii trimitem la lucrarea [2]. În cazul mediului omogen ($k = \text{const}$), sistemul (2) devine

$$\Delta p + \alpha(S)\nabla S \nabla p = 0,$$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \beta(S)\nabla S \nabla p = 0, \tag{2'}$$

unde $\alpha(S)$ şi $\beta(S)$ au aceleaşi expresii ca şi în (2) cu diferenţa că permeabilitatea şi porozitatea mediului trebuie considerate constante. Întrucît (2) şi (2') sînt similare ca formă, consideraţiile noastre vor fi făcute numai asupra sistemului (2) care este mai general. Pentru integrarea lui folosim acelaşi proces iterativ propus şi pentru (2') în [1].

Condiţiile la limită şi iniţiale sînt cele care decurg din configuraţia geometrică a mişcării; căutăm soluţia sistemului de ecuaţii în tot planul complex, ţinînd seama de sondele care debitează sau extrag cantităţi cunoscute de fluid. Saturaţia la momentul $t = 0$, constitue condiţia iniţială a problemei.

2. SISTEMUL DE APROXIMAŢII SUCCESIVE

Introducînd în prima relaţie a sistemului (2) saturaţia iniţială $S_0(x, y)$, acesta devine

$$\Delta p(x, y) + [\alpha(S_0)\nabla S_0(x, y) + \nabla \alpha_1(x, y)]\nabla p(x, y) = 0. \tag{3}$$

Cu notaţia

$$f(x, y) = \int_0^{S_0(x,y)} \alpha(S_0)\, dS_0,$$

ecuaţia (3) capătă forma

$$\Delta p(x, y) + [\nabla f(x, y) + \nabla \alpha_1(x, y)]\nabla p(x, y) = 0$$

sau

$$\Delta p(x, y) + \nabla F(x, y)\nabla p(x, y) = 0, \tag{3'}$$

în care s-a pus

$$F(x, y) = f(x, y) + \alpha_1(x, y).$$

Coeficientul $F(x, y)$ fiind o funcţie cunoscută, ecuaţia (3') este, în condiţiile problemei noastre, de tip eliptic şi trebuie integrată cu condiţiile la limită enunţate în punctul precedent. Ea se întîlneşte şi în mişcarea fluidelor monofazice în medii poroase neomogene şi soluţia ei ne dă distribuţia de presiune corespunzătoare saturaţiei iniţiale. Aceasta este prima aproximaţie a presiunii.

În [6] ne-am ocupat de integrarea ecuației (3′) în detaliu. Dăm aici numai rezultatele finale ale studiului. Dacă în (3′) facem notațiile :

$$u = \frac{\partial p}{\partial x}; \quad v = -\frac{\partial p}{\partial y}; \quad U(x, y) = u(x, y) + iv(x, y),$$

ea devine

$$\frac{\partial U}{\partial \bar{z}} = A \,.\, U + \overline{A} \,.\, \overline{U}, \tag{4}$$

în care s-a ținut seama de notațiile

$$A(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Cu ajutorul schimbării de funcție

$$U(z) = V(z)\, e^{\omega(z)},$$

unde

$$\omega(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_E \frac{A(\xi, \eta)}{\zeta - z}\, d\xi\, d\eta,$$

(E este întregul plan complex și $\zeta = \xi + i\eta$), ecuația (4) ia forma mai simplă :

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}} = B(z) \cdot \overline{V}(\bar{z}), \tag{5}$$

coeficientul $B(z)$ avînd expresia

$$B(z) = \overline{A(z)}\, e^{\overline{\omega(z)} - \omega(z)}.$$

În lucrările consacrate ecuațiilor de tip eliptic se dau mai multe metode de integrare a ecuației (5). Soluția ei generală este [7], [8],

$$V(z) = \Phi(z) + \iint_E \Gamma_1(z, \zeta)\, \Phi(\zeta)\, d\xi\, d\eta + \iint_E \Gamma_2(z, \zeta)\, \overline{\Phi(\zeta)}\, d\xi\, d\eta, \tag{6}$$

unde $\Phi(z)$ este o funcție analitică arbitrară ce trebuie determinată din condițiile la limită ale mișcării (singularități date în sonde), iar $\Gamma_1(z, \zeta)$ și $\Gamma_2(z, \zeta)$ sînt

$$\Gamma_1(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j}(z, \zeta), \quad \Gamma_2(z, \zeta) = \sum_{j=1}^{\infty} K_{2j-1}(z, \zeta). \tag{6′}$$

La rîndul lor funcţiile $K_j(z, \zeta)$ sînt definite de relaţiile de recurenţă

$$K_1 = \frac{1}{2\pi} \frac{\partial f}{\partial \zeta} \frac{1}{\zeta - z} e^{\vec{\omega} - \omega},$$

. . . . . .

. . . . . .

$$K_n(z, \zeta) = \iint_E K_1(\zeta_1, z) K_{n-1}(\zeta, \zeta_1) \, d\xi_1 \, d\eta_1 .$$

Funcţia $\Phi(z)$ va fi dedusă din comportamentul soluţiilor în jurul sondelor de injecţie şi de extracţie aşa cum s-a procedat în [6].

Ea va avea expresia

$$\Phi(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{z - \zeta_j},$$

unde A_i şi B_j sînt constante reale, soluţii ale unui sistem liniar de $m + n$ ecuaţii independente. Cu aceasta soluţia ecuaţiei este complet determinată şi, ţinînd seama de transformările făcute, este cunoscută repartiţia de presiuni la momentul iniţial, $p_0(x, y)$.

Dacă introducem $p_0(x, y)$ în cea de a doua ecuaţie a sistemului (2) acesta devine

$$\frac{\partial S(x, y, t)}{\partial t} + \beta(s) \nabla p_0(x, y) \nabla S(x, y, t) = 0, \tag{7}$$

ecuaţie cvasiliniară în $S(x, y, t)$ a cărei soluţie poate fi determinată cu condiţia iniţială $S(x, y, 0) = S_0(x, y)$. Pentru a da o interpretare fizică sugestivă soluţiei problemei şi pentru a folosi unele generalizări privitoare la dezlocuirea în tuburi de curent de secţiune variabilă în medii omogene sau neomogene, obţinute de D. A. Efros [9], I. A. Ciarnîi [10] şi Cen Cijan-Sian [11], vom considera că de la momentul $t = 0$ dezlocuirea are loc pe tuburile de curent determinate de $p_0(x, y)$. În acest caz ecuaţia (7) devine o ecuaţie pentru $S(\sigma, t)$ de forma

$$\frac{\partial S(\sigma, t)}{\partial t} + \gamma(S, \sigma) \frac{\partial S(\sigma, t)}{\partial \sigma} = 0$$

pe fiecare tub de curent al mişcării, unde σ este abscisa curbilinie a liniei de curent mediane; $\gamma(S, \sigma)$ este o funcţie cunoscută de argumentele sale. În acest fel problema se reduce la o dezlocuire unidimensională pentru fiecare tub de curent, în care se cunoaşte saturaţia iniţială $S_0(\sigma)$.

Soluţia acestei ecuaţii, luată la momentul t_1, $S_1(x, y) = S(x, y, t_1)$, ne dă distribuţia de saturaţie la acest moment. Procedeul de aproximaţii

poate fi continuat de la momentul t_1, așa cum a fost început la $t = 0$ și putem obține, din timp în timp, distribuția de saturație și presiuni, prin metodele folosite mai sus. Pentru determinarea saturației la momentul t_j avem de integrat ecuația

$$\frac{\partial S(x,y,t)}{\partial t} + \beta[S(x,y,t)]\nabla p_{j-1}(x,y)\nabla S(x,y,t) = 0, \tag{8}$$

iar pentru presiune la $t = t_j$ ecuația

$$\Delta p(x,y) + \nabla F_j(x,y)\nabla p(x,y) = 0, \tag{9}$$

unde

$$F_j(x,y) = \int_0^{S_j(x,y)} \alpha(S_j)\,\mathrm{d}S_j + \alpha_1(x,y).$$

Condițiile la limită pentru ecuația (9) rămîn aceleași la orice moment t_j, dar condiția inițială pentru saturație se schimbă de la un moment la altul : pentru determinarea saturației la momentul t_j se ia drept condiție inițială saturația de la momentul t_{j-1}.

Procedeul iterativ descris poate fi continuat pînă la apariția triplei valori în distribuția de saturație pe toate liniile de curent în jurul uneia sau mai multor sonde de injecție, sau numai pe o parte din ele. Faptul că el nu mai poate fi continuat se explică prin aceea că în ecuația (9) coeficienții devin multiformi și au valori infinite în unele puncte din domeniul de mișcare. Conform generalizărilor amintite [9]—[11], și celor arătate în [2], neomogeneitatea mediului poate influența momentul apariției și evoluția triplei valori, dar nu o poate elimina complet din soluția problemei.

3. SALTUL DE SATURAȚIE. PROBLEMA LA LIMITĂ

Prin aplicarea procedeului de balanță materială se formează în planul complex o configurație ca în figura 1 ; curbele $L_1, L_2 \ldots L_p$ sînt linii de salt a saturației la un moment t_j, formate în jurul unor sonde de injecție și care vor evolua în timp. Se pune problema determinării formei lor la orice moment cunoscîndu-se legea de injecție în sonde.

O configurație similară am întîlnit și la problema dezlocuirii integrale în medii poroase neomogene [12]. Diferența constă în faptul că în acel caz saltul de saturație era constant și egal cu unitatea (în acest fel variază continuu între 0 și 1). Metoda din lucrarea citată poate fi folosită și în acest caz, pentru a se obține o soluție similară în clasa funcțiilor analitice generalizate. Ea va fi o generalizare a celei menționate, care se va regăsi pentru cazul cînd saltul de saturație este constant și egal cu unitatea.

Pentru formularea problemei la limită, să notăm $L = \bigcup_{i=1}^{p} L_i$ frontiera domeniului multiplu conex D^+ (fig. 1). Avem de integrat ecuația

(9) în domeniile D^+ și D^-, în care coeficientul $F_j(x, y)$ are un salt de prima speță pe L (în rest de clasă C^1), așa încît pe L să fie satisfăcută o relație între valorile limită ale presiunii $p^+(\tau)$ și $p^-(\tau)$ din cele două domenii complementare. Condiția la limită va rezulta din condițiile fizice pe linia de trecere și o vom stabili în punctul următor. Pentru a nu complica notația, suprimăm în (9) indicele j. Avem așadar de integrat simultan ecuațiile:

$$\Delta p^+(x, y) + \nabla F^+(x, y)\nabla p^+(x, y) = 0, \tag{10}$$

$$\Delta p^-(x, y) + \nabla F^-(x, y)\nabla p^-(x, y) = 0,$$

în D^+, respectiv D^-, în condițiile enunțate.

Dacă în sistemul precedent facem substituțiile

$$u^\pm = \frac{\partial p^\pm}{\partial x}; \quad v^\pm = -\frac{\partial p^\pm}{\partial y}; \quad U^\pm(z) = u^\pm(x, y) + iv^\pm(x, y), \tag{10'}$$

unde semnele se corespund, el ia forma

$$\begin{aligned} \frac{\partial U^+}{\partial \bar{z}} &= A^+(z)\,U^+(z) + \overline{A^+(z)\,U^+(z)} \quad \text{în } D^+, \\ \frac{\partial U^-}{\partial \bar{z}} &= A^-(z)\,U^-(z) + \overline{A^-(z)\,U^-(z)} \quad \text{în } D^-, \end{aligned} \tag{11}$$

unde

$$A^\pm(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial F^\pm}{\partial \bar{z}}.$$

Dacă introducem funcția

$$\omega^\pm(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^\pm}\frac{A^\pm(\xi, \eta)}{\zeta - z}\,d\xi\,d\eta$$

și apoi notația

$$B^\pm(z) = \overline{A^\pm(z)}\cdot e^{\overline{\omega^\pm(z)} - \omega^\pm(z)},$$

prin schimbarea de funcție

$$U^\pm(z) = V^\pm(z)\cdot e^{\omega^\pm(z)}, \tag{11'}$$

sistemul (11) devine

$$\begin{aligned} \frac{\partial V^+(z)}{\partial \bar{z}} &= B^+(z)\,\overline{V^+(z)} \quad \text{în } D^+, \\ \frac{\partial V^-(z)}{\partial \bar{z}} &= B^-(z)\,\overline{V^-(z)} \quad \text{în } D^-. \end{aligned} \tag{12}$$

Chiar dacă am adăuga acestuia o condiție la limită pe L, el tot nu poate fi integrat, întrucît în domeniul de existență al soluției se găsesc punctele singulare din sondele de injecție și de extracție. Pentru a le izola observăm că soluția poate fi scrisă sub forma

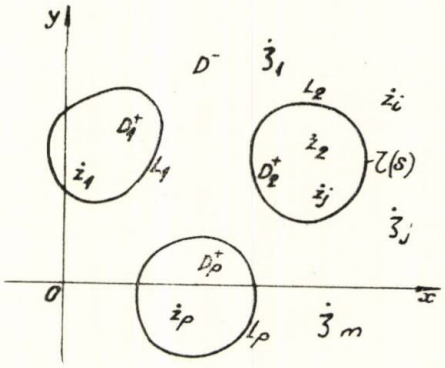


Fig. 1

$$V(z) = V_0(z) + W(z), \tag{13}$$

unde $V_0(z)$ este potențialul de mișcare al unui singur fluid în mediul poros de permeabilitate $k(x, y)$ în prezența sistemului de sonde dat (care conține toate punctele singulare ale soluției), iar $W(z)$ este partea regulată a soluției. Funcția $V_0(z)$ este cunoscută (vezi pentru deducerea ei [6]) și are expresia

$$V_0(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{z - \zeta_j} + \iint_E \Gamma_1(z, \zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\zeta - z_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{\zeta - \zeta_j} \right] d\xi d\eta +$$

$$+ \iint_E \Gamma_2(z, \zeta) \left[\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\overline{\zeta} - \overline{z}_i} - \sum_{j=1}^{m} \frac{B_j}{\overline{\zeta} - \overline{\zeta}_j} \right] d\xi\, d\eta,$$

în care $\Gamma_1(z, \zeta)$ și $\Gamma_2(z, \zeta)$ sînt rezolventele întîlnite și în §2 iar A_i și B_j sînt constante reale, soluții ale unui sistem de $m + n$ ecuații liniare cu $m + n$ necunoscute.

Dacă în (12) considerăm că $V(z)$ are expresia (13), noua funcție necunoscută va satisface sistemul

$$\frac{\partial W^+}{\partial \overline{z}} = B_1^+(z) \cdot \overline{W^+(z)} + C_1^+(z),$$

$$\frac{\partial W^-}{\partial \overline{z}} = B_1^-(z) \cdot \overline{W^-(z)} + C_1^-(z), \tag{14}$$

unde coeficienţii au expresiile :

$$B_1^{\pm}(z) = -\frac{1}{2}\frac{\partial F^{\pm}}{\partial \bar{z}} e^{\overline{\omega^{\pm}(z)} - \omega^{\pm}(z)},$$

$$C_1^{\pm}(z) = \frac{1}{2}\frac{\partial F^{\pm}}{\partial \bar{z}}\left(1 - e^{\overline{\omega^{\pm}(z)} - \omega^{\pm}(z)}\right) \cdot \overline{V_0(z)}.$$

Soluţia sa generală este soluţia generală a sistemului omogen la care se adaugă o soluţie particulară a ecuaţiei neomogene [7], [8],

$$W^{\pm}(z) = \Phi^{\pm}(z) + \iint_{D^{\pm}} \Gamma_1^{\pm}(z, \zeta)\, \Phi^{\pm}(\zeta)\, d\xi d\eta +$$

$$+ \iint_{D^{\pm}} \Gamma_2^{\pm}(z, \zeta)\, \overline{\Phi^{\pm}(\zeta)}\, d\xi d\eta + W_0^{\pm}(z), \tag{15}$$

unde $\Phi^{\pm}(z)$ este o funcţie olomorfă pe porţiuni cu linia de salt L care urmează să fie determinată din condiţiile la limită pe L, $W_0^{\pm}(z)$ este soluţia particulară a ecuaţiei neomogene ; ea are expresia

$$W_0^{\pm}(z) = -\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \frac{C_1^{\pm}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta}{\zeta - z} -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \Gamma_1^{\pm}(z, \zeta)\left[\iint_{D^{\pm}} \frac{C_1^{\pm}(\xi_1, \eta_1)\, d\xi_1\, d\eta_1}{\zeta_1 - \zeta}\right] d\xi\, d\eta -$$

$$-\frac{1}{\pi}\iint_{D^{\pm}} \Gamma_2^{\pm}(z, \zeta)\left[\iint_{D^{\pm}} \frac{C_1^{\pm}(\xi_1, \eta_1)}{\zeta_1 - \zeta}\, d\xi_1 d\eta_1\right] d\xi\, d\eta.$$

În sistemul neomogen (14) facem o nouă schimbare de funcţie pentru a-l face omogen. Vom nota anume

$$Y^{\pm}(z) = W^{\pm}(z) - W_0^{\pm}(z), \tag{15'}$$

unde $Y(z)$ este noua funcţie necunoscută. Ea va satisface sistemul omogen

$$\frac{\partial Y^{+}}{\partial \bar{z}} = B_1^{+}(z)\, \overline{Y^{+}(z)} \quad \text{în } D^{+}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial Y^{-}}{\partial \bar{z}} = B_1^{-}(z)\, \overline{Y^{-}(z)} \quad \text{în } D^{-},$$

care poate fi integrat cu metodele cunoscute dacă este dată condiţia la limită pe L. De această problemă ne ocupăm în punctul următor.

4. CONDIȚIILE LA LIMITĂ ALE MIȘCĂRII

Și în acest caz se ridică, în ceea ce privește condițiile la limită, problemele care au fost discutate în lucrările [1]—[3]; se pot pune pe L sau condiții de egalitate a presiunilor și a debitelor, sau condiții de egalitate a vitezelor. În această lucrare vom pune ambele condiții și vom arăta care sînt problemele la limită care corespund fiecăreia în parte.

a) În cazul egalității presiunilor și a debitelor pe L:

$$p^+(\tau) = p^-(\tau); \quad V_n^+(\tau) = V_n^-(\tau),$$

dacă ținem seama de notațiile (10′) deducem,

$$p^+(\tau) = p^-(\tau); \quad \frac{1}{\mu_a}\frac{\partial p^+}{\partial n} = \frac{1}{\mu_l}\frac{\partial p^-}{\partial n}. \tag{17}$$

Derivînd prima relație după arcul s al curbei L și explicitînd derivata normală în cea de doua, obținem

$$\frac{\partial p^+}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial p^+}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} = \frac{\partial p^-}{\partial x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s} + \frac{\partial p^-}{\partial y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},$$

$$\frac{1}{\mu_a}\left[\frac{\partial p^+}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial p^+}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right] = \frac{1}{\mu_l}\left[\frac{\partial p^-}{\partial x}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s} - \frac{\partial p^-}{\partial y}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right].$$

Notînd cu

$$\tau(s) = x(s) + \mathrm{i}y(s)$$

ecuația complexă a conturului L și ținînd seama din nou de notațiile (10′), obținem condiția pe L sub forma

$$U^+(\tau) - \frac{\mu_a + \mu_l}{2\mu_l}U^-(\tau) + \frac{\mu_a - \mu_l}{2\mu_l}\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\overline{U^-(\tau)} = 0.$$

Datorită relației (11′) între $U(z)$ și $V(z)$, condiția la limită precedentă devine

$$V^+(\tau)\,\mathrm{e}^{\omega^+(\tau)} - \frac{\mu_a + \mu_l}{2\mu_l}V^-(\tau)\,\mathrm{e}^{\omega^-(\tau)} + \frac{\mu_a - \mu_l}{2\mu_l}\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\mathrm{e}^{\overline{\omega^-(\tau)}}\,\overline{V^-(\tau)} = 0,$$

iar substituția (13) ne permite să scriem relația pe care o satisface funcția necunoscută $W(z)$ pe conturul L

$$W^+(\tau) - \frac{\mu_a + \mu_l}{2\mu_l}\mathrm{e}^{\omega^-(\tau)-\omega^+(\tau)}W^-(\tau) + \frac{\mu_a - \mu_l}{2\mu_l}\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)}\mathrm{e}^{\overline{\omega^-(\tau)}-\omega^+(\tau)}\,\overline{W^-(\tau)} = G(\tau),$$

unde

$$G(\tau) = V_0(\tau)\left[\frac{\mu_a + \mu_t}{2\mu_t} e^{\omega^-(\tau) - \omega^+(\tau)} - 1\right] - \frac{\mu_a - \mu_t}{2\mu_t}\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(\tau)} - \omega^+(\tau)}\,\overline{V_0(\tau)},$$

iar substituția (15′) ne dă condiția la limită pentru funcția $Y(z)$,

$$Y^+(\tau) - \frac{\mu_a + \mu_t}{2\mu_t} e^{\omega^-(\tau) - \omega^+(\tau)} Y^-(\tau) + \frac{\mu_a - \mu_t}{2\mu_t}\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(\tau)} - \omega^+(\tau)}\,\overline{Y^-(\tau)} = G_1(\tau), \tag{18}$$

în care membrul drept are expresia

$$G_1(\tau) = G(\tau) - W_0^+(\tau) + \frac{\mu_a + \mu_t}{2\mu_t} e^{\omega^-(\tau) - \omega^+(\tau)} W_0^-(\tau) -$$

$$- \frac{\mu_a - \mu_t}{2\mu_t}\frac{\overline{\tau'(s)}}{\tau'(s)} e^{\overline{\omega^-(\tau)} - \omega^+(\tau)}\,\overline{W_0(\tau)}.$$

Cu aceasta problema la limită a mișcării în condițiile (17) se poate formula în modul următor: să se găsească în planul complex o funcție analitică generalizată pe porțiuni cu linia de salt L, care să satisfacă sistemul (16), așa încît valorile limită $Y^+(\tau)$ și $Y^-(\tau)$ să verifice pe L condiția (18). În punctul următor vom arăta cum poate fi rezolvată această problemă la limită.

b) Ne ocupăm acum de condiția ce rezultă din ipoteza egalității vitezelor pe L. Din egalitatea

$$\overrightarrow{V^+(s)} = \overrightarrow{V^-(s)}$$

deducem prin explicitarea ambilor membri

$$\left\{\frac{k_{ra}[S^+(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S^+(s)]}{\mu_t}\right\}\nabla p^+(s) = \left\{\frac{k_{ra}[S^-(s)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S^-(s)]}{\mu_t}\right\}\nabla p^-(s), \tag{19}$$

relație vectorială echivalentă cu două relații scalare

$$G^+(s)\frac{\partial p^+}{\partial x} = G^-(s)\frac{\partial p^-}{\partial x},$$

$$G^+(s)\frac{\partial p^+}{\partial y} = G^-(s)\frac{\partial p^-}{\partial y},$$

unde

$$G[S(x,y)] = \frac{k_{ra}[S(x,y)]}{\mu_a} + \frac{k_{rt}[S(x,y)]}{\mu_t}.$$

Dacă ţinem seama în condiţiile precedente de substituţiile (10'), ele capătă forma

$$G^+(s)\,u^+(s) = G^-(s)\,u^-(s); \quad G^+(s)\,v^+(s) = G^-(s)\,v^-(s).$$

Înmulţind a doua relaţie cu i şi adunînd cu prima, deducem condiţia la limită pe care trebuie să o satisfacă $U(z)$ pe L

$$G^+(\tau)\cdot U^+(\tau) = G^-(\tau)\cdot U^-(\tau)$$

sau, ţinînd seama de (11'), condiţia pentru $V(z)$,

$$G^+(\tau)V^+(\tau)\,e^{\omega^+(\tau)} = G^-(\tau)V^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)}.$$

Aceasta din urmă se transcrie, cu ajutorul lui (13), pentru funcţia $W(z)$ sub forma

$$G^+(\tau)\,e^{-(\tau)}W^+(\tau) - G^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)}\,W^-(\tau) = V_0(\tau)\,G^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)} - G^+(\tau)\,e^{\omega^+(\tau)},$$

şi, în sfîrşit, utilizînd relaţia (15'), se deduce condiţia pe care trebuie să o satisfacă funcţia căutată $Y(z)$ pe linia de discontinuitate L,

$$G^+(\tau)\,e^{\omega^+(\tau)}\,Y^+(\tau) - G^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)}\,Y^-(\tau) = G(\tau), \tag{20}$$

în care s-a notat

$$G(\tau) = V_0(\tau)\,G^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)} - G^+(\tau)e^{\omega^+(\tau)} + G^-(\tau)\,e^{\omega^-(\tau)}W_0^-(\tau) -$$

$$- G^+(\tau)\,e^{\omega^+(\tau)}\,W_0^+(\tau).$$

Am ajuns astfel la o problemă a lui Riemann pentru funcţii analitice generalizate referitoare la domeniul multiplu conex din figura 1, problemă asupra căreia nu ne vom opri fiind complet rezolvată (de ex. în [13], [14]). Ne vom ocupa în schimb în punctul următor de rezolvarea problemei la limită definită de (18) şi vom arăta că ea poate fi adusă la rezolvarea unei ecuaţii integrale singulare pe L.

5. SOLUŢIA PROBLEMEI LA LIMITĂ

În [12] am întîlnit o problemă la limită similară cu (18) cu diferenţa că ea era definită pe un domeniu simplu conex. Vom arăta acum că metoda folosită se poate extinde şi la cazul de faţă. În principiu vom urmări raţionamentele din [15] pentru acest caz mai general.

Vom separa în (18) partea reală şi imaginară. Notînd

$$Y(z) = y_1(x, y) + iy_2(x, y),$$

relaţia (18) este echivalentă cu sistemul

$$\begin{aligned} L_1(s)\,y_1^+(s) + M_1(s)\,y_1^-(s) + N_1(s)\,y_2^-(s) &= Q_1(s), \\ L_2(s)\,y_1^+(s) + M_2(s)\,y_1^-(s) + N_2(s)\,y_2^+(s) &= Q_2(s), \end{aligned} \tag{21}$$

unde coeficienţii au expresii bine determinate pe care, pentru a nu lungi expunerea, nu le vom mai scrie. Dacă vom mai găsi încă două relaţii între cele patru funcţii necunoscute $y_1^{\pm}(s)$ şi $y_2^{\pm}(s)$ care apar în (21), se poate pune problema rezolvării acestui sistem de patru ecuaţii. Aceste două relaţii ne vor fi date de formulele care rezolvă problema interioară şi exterioară a lui Dirichlet pentru cazul funcţiilor analitice generalizate şi pentru domeniul multiplu conex din figura 1.

Pornim pentru aceasta de la soluţia generală a ecuaţiei (16) pentru D^+ stabilită în [8] sub forma

$$Y(z) = \Phi(z) + \iint_{D^+} \Phi(\zeta)\Gamma_1^+(\zeta,z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta + \iint_{D^+} \overline{\Phi(\zeta)}\,\Gamma_2^+(\zeta,z)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta, \tag{22}$$

unde $\Phi(z)$ este o funcţie olomorfă pe porţiuni cu linia de salt L, care trebuie determinată din condiţia la limită

$$\mathrm{Re}\,Y(t) = \gamma(t) \text{ pe } L, \tag{23}$$

cu $\gamma(t)$ funcţie cunoscută. Vom căuta pe $\Phi(z)$ sub forma

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi\mathrm{i}} \int_L \frac{\mu(s)}{\tau - z}\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{i}\frac{C}{2}, \tag{23'}$$

unde $\mu(s)$ este o funcţie reală necunoscută, iar C o constantă reală. Dacă introducem expresia precedentă a lui $\Phi(z)$ în (23) obţinem

$$\mathrm{Re}\left\{\mu(s) + \frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mu(s)}{\tau - t}\,\mathrm{d}\tau + \mathrm{i}C + \iint_{D^+} \Gamma_1^+(\zeta,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\left[\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mu(s)}{\tau-\zeta}\,\mathrm{d}\tau + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \mathrm{i}C\right] - \iint_{D^+} \Gamma_2^+(\zeta,t)\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}\eta\left[\frac{1}{\pi\mathrm{i}}\int_L \frac{\mu(s)}{\bar\tau - \bar\zeta}\,\mathrm{d}\bar\tau + \mathrm{i}C\right]\right\} = 2\gamma(s), \tag{24}$$

relaţie ce reprezintă o ecuaţie integrală pentru determinarea lui $\mu(s)$. Separînd partea reală în egalitatea precedentă şi inversînd integralele duble cu cele curbilinii, se poate arăta că ecuaţia pe care o satisface $\mu(s)$ este singulară, similară cu cea obţinută în [15]. În lucrarea citată am arătat că inversarea ordinii de integrare se poate face pentru un domeniu simplu conex, dacă $\mu(s)$ satisface o condiţie de tip Hölder pe L. Se poate arăta că proprietatea subzistă şi în cazul domeniului multiplu conex, deoarece curba L este o reuniune de contururi simple închise.

Funcția $\mu(s)$ fiind cunoscută, $\Phi(z)$ este complet determinată și din (22), trecută la limită pe L din D^+, rezultă relația căutată între $y_1^+(s)$ și $y_2^+(s)$ sub forma

$$y_2^+(s) = -\frac{\tau'(s)}{\pi}\int_L \frac{y_1^+(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau - \frac{1}{\pi}\int_L y_1^+(\sigma)T^+(\sigma,t)\,d\sigma - \frac{C}{2}q_1^+(s), \qquad (25)$$

unde $\tau(s) = x(s) + iy(s)$ este ecuația parametrică complexă a curbei L, iar $T^+(\sigma,t)$ și $q_1^+(s)$ funcții cunoscute, prima slab polară și a doua hölderiană.

Dacă trecem la limită pe L din D^- obținem în mod asemănător relația între $y_1^-(s)$ și $y_2^-(s)$, de aceeași formă cu (25),

$$y_2^-(s) = \frac{\tau'(s)}{\pi}\int_L \frac{y_1^-(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_L y_1^-(\sigma)\,T^-(\sigma,t)\,d\sigma - \frac{D}{2}q_1^-(s). \qquad (25')$$

Ecuațiile (21), (25) și (25') constitue sistemul de ecuații căutat a cărei soluție urmează să fie determinată. Înlocuind în (21) funcțiile $y_2^+(s)$ și $y_2^-(s)$ date de (25), respectiv de (25'), obținem două relații pentru $y_1^+(s)$ și $y_1^-(s)$. Rezolvînd a doua ecuație în raport cu $y_1^-(s)$ și introducînd-o în prima obținem ecuația integrală singulară

$$f_1(s)\,y_1^+(s) + f_2(s)\int_L \frac{y_1^+(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau + \frac{N_1(s)}{\pi}\int_L y_1^+(\sigma)f_3(\sigma,t)\,d\sigma = J_2(s), \qquad (26)$$

care determină pe $y_1^+(s)$. Din (25) deducem $y_2^+(s)$, iar din (21) pe $y_1^-(s)$ și $y_2^-(s)$. Cu aceasta problema poate fi considerată rezolvată deoarece aceste funcții sînt suficiente pentru determinarea tuturor elementelor mișcării la un moment arbitrar t_j, și, deasemenea, poziția frontului de saturație la momentul t_{j+1}, după metoda deja utilizată în lucrările citate. În modul acesta se poate stabili evoluția frontului ca succesiune a pozițiilor sale la intervale finite de timp.

6. INTERSECȚIA FRONTURILOR

O problemă specială se ridică în cazul cînd în evoluția lor se întîlnesc două sau mai multe fronturi vecine, formîndu-se în punctele de întîlnire vîrfurile din A și B de unghiuri α_A, respectiv α_B (fig. 2); pentru a nu complica figura și notațiile luăm în considerare cazul particular cînd se întîlnesc numai două fronturi vecine. Prezența acestora introduce anumite singularități în studiul problemei, dar rezultatele obținute mai sus se pot extinde și la acest caz.

Observăm că pentru un domeniu ca în figura 2 se poate stabili, pe baza unor raționamente identice, o condiție la limită de forma (18), în care coeficientul $\overline{\frac{\tau'(s)}{\tau'(s)}}$ și $G_1(\tau)$ au discontinuități de prima speță în punc-

tele A şi B. Separînd partea reală şi imaginară în această relaţie se ajunge la un sistem de forma (21) în care, evident, coeficienţii au discontinuităţi în aceleaşi puncte. Sistemul corespunzător lui (21) se poate completa cu

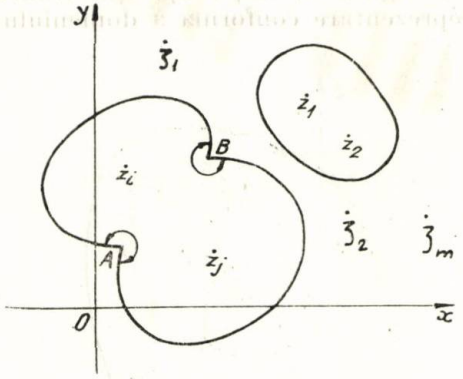


Fig. 2

alte două relaţii între $y_1^{\pm}(s)$ şi $y_2^{\pm}(s)$. Într-adevăr, şi în acest caz soluţia generală a ecuaţiei (16) pentru domeniul D^+ din figura 2 va avea forma (22), unde funcţia olomorfă pe porţiuni arbitrară $\Phi(z)$ va fi determinată din condiţia (23).

Vom căuta această funcţie sub forma (23′) pe care o introducem în (23); se obţine o ecuaţie similară cu (24) pentru determinarea lui $\mu(s)$. Trecerea la limită în (23′) se poate face conform relaţiilor generalizate ale lui Plemelj [8],

$$\Phi^+(t) = \left(1 - \frac{\alpha}{2\pi}\right)\mu(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau,$$
$$\Phi^-(t) = -\frac{\alpha}{2\pi}\mu(s) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(\sigma)}{\tau - t}\,d\tau, \tag{27}$$

în care $\alpha = \pi$ în punctele netede şi $\alpha \neq \pi$ în punctele unghiulare. În relaţia corespunzătoare lui (24) se poate inversa ordinea de integrare, obţinîndu-se în acest fel o ecuaţie integrală singulară a cărei soluţie $\mu(s)$ va fi discontinuă în punctele unghiulare. Aceasta permite să se scrie relaţia căutată între $y_1^{\pm}(s)$ şi $y_2^{\pm}(s)$ de forme similare cu (25) şi (25′), în care coeficientul $\tau'(s)$ este o funcţie discontinuă în punctele unghiulare. Eliminarea a trei dintre aceste funcţii (de ex. $y_1^-(s)$, $y_2^{\pm}(s)$) între relaţiile găsite şi sistemul corespunzător lui (21) ne conduce la o ecuaţie integrală similară cu (26) în care coeficienţii sînt discontinui în punctele unghiulare, cu discontinuităţi de prima speţă.

Din considerente de ordin fizic se impune ca soluţia unei astfel de ecuaţii să fie mărginită în punctele de discontinuitate ale coeficienţilor. Acest lucru se poate realiza, după cum se arată în [8]. Funcţia $y_1^+(s)$ fiind determinată se pot găsi toate elementele hidrodinamice ale mişcării şi deci evoluţia fronturilor.

7. CAZUL DOMENIULUI MĂRGINIT

Ne mai rămîne să ne ocupăm de cazul domeniului poros la distanţă finită reprezentat în figura 3, după apariţia fronturilor de saturaţie. Dacă efectuăm o reprezentare conformă a domeniului mărginit de C pe

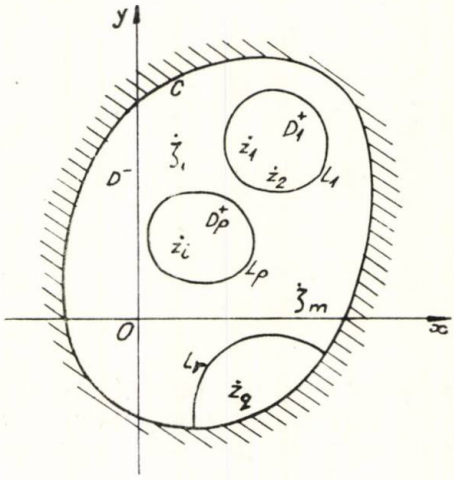


Fig. 3

semiplanul superior al planului Z, vom obţine o configuraţie geometrică ca în figura 4. Transformarea conformă nu schimbă nici forma ecuaţiei (16), nici caracterul condiţiei la limită (18).

Considerînd şi configuraţia simetrică faţă de oX ajungem la o situaţie asemănătoare cu cea considerată pînă acum : sondele de injecţie şi de extracţie sînt plasate în tot planul Z, fără obstacole impermeabile, iar pe linia de salt se dă o condiţie la limită similară cu cea considerată mai

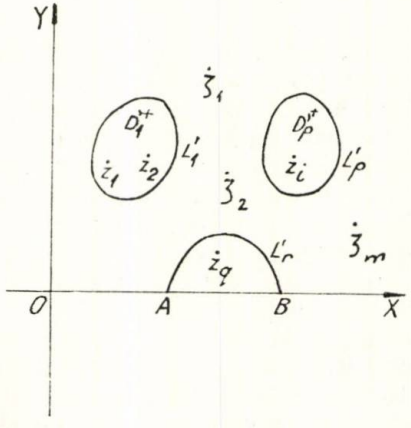


Fig. 4

sus. Este posibil ca prin simetrizarea menţionată să se formeze vîrfuri în punctele A şi B, în care contururile L'_r întîlnesc axa oX. Acestea trebuie considerate puncte unghiulare, care au fost analizate în punctul precedent.

Rezultă din cele spuse mai sus că metoda folosită în lucrările citate pentru studiul dezlocuirii în medii omogene poate fi extinsă şi la medii neomogene, căutînd soluţiile problemei în clasa funcţiilor analitice generalizate. Caracterul ecuaţiei finale la care este redusă problema rămîne neschimbat, variind numai coeficienţii ei. Celelalte dificultăţi şi caracteristici ale problemei (intersecţia fronturilor, domenii limitate de pereţi impermeabili) se întîlnesc şi în acest caz şi pot fi rezolvate prin aceleaşi metode ca şi în cazul mediului omogen.

Primită la redacţie la 14 aprilie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ionescu, C. Cozma, *Dezlocuirea necapilară a fluidelor în medii poroase omogene*, St. cerc. mec. apl., **29**, *5* (1970).
2. — *Mişcarea bifazică necapilară în medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **30**, *3* (1971).
3. — *Asupra unor condiţii la limită în dezlocuirea necapilară în medii poroase*, St. cerc. mec. apl. **30**, *1* (1971).
4. — *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase pe domenii multiplu conexe*, St. cerc. mec. apl. **29**, *3* (1970).
5. S. E. Buckley, M. C. Levetett, *Mechanism of fluid displacement in sands*, Trans. A.I. M.E. 195, 1942.
6. V. Ionescu, C. Cozma, *Mişcarea fluidului într-un mediu poros neomogen determinată de un sistem arbitrar de sonde*, St. cerc. mec. apl., **28**, *5*, (1969).
7. N. I. Vekua, *Obobşcionîie analiticeskie funcţii*, Fizmatiz. Moskva. 1959.
8. F. D. Gahov, *Kraevîie zadaci*, Gostehizdat, Moskva 1963.
9. D. A. Efros, *Issledovaniia filtraţii neodnorodnîh sistem*, Gostoptehizdat, Leningrad, 1963.
10. I. A. Ciarnîi, *Podzemnaia ghidrogazodinamika*, Gostoptehizdat, Moskva 1963.
11. Cen Cijan-Sian, *Filtraţia dvuhfaznoi jidkosti s masovîmi silami v neodnorodnoi poristoi srede*, J. Prikl. Meh. i Teh. Fiz. 2, 1962.
12. V. Ionescu, C. Cozma, *Dezlocuirea integrală a fluidelor în medii poroase neomogene*, St. cerc. mec. apl., **28**, *6* (1969).
13. L. G. Mihailov, *Tocinîe teoremî o razreşimosti zadaci sopreajeniia s proizvodnîmi*, Sbornik : Issledovaniia po kraevîm zadaciam.
14. G. S. Barhin, Z. D. Usmanov, *Zadacia Ghilberta dlea kusocino regulearnoi obobşcionoi analiticeskoi funkţii*, Sbornik : Issledovanniia po kraevîm zadaciam.
15. V. Ionescu, C. Cozma, *Problema lui Riemann generalizată în clasa funcţiilor analitice generalizate*, St. cerc. mat. **21**, *10* (1969).
16. N. I. Mushelişvili, *Singulearnîie uravnenia*, Fizmatiz. Moskva, 1962.

sus. Este posibil ca prin simetrizarea menţionată să se formeze vîrfuri în punctele A şi B, în care contrariile Z' intîlnesc axa oX. Aceasta trebuie considerate puncte unghiulare, care au fost realizate în punctul precedent.

Rezultă din cele spuse mai sus că metoda folosită în lucrările citate pentru studiul dezlocuirii în medii omogene poate fi extrasă şi la medii neomogene, căutînd soluţiile problemei [illegible] fiind [illegible] generalizate. Caracterul ecuaţiei [illegible] reduse problemele [illegible] nesimulat, variind numai coeficienţii [illegible] dificultăţi [illegible] tici ale problemei (intersecţii, [illegible] domenii liniare [illegible] imperfectului) se întîlnesc şi în acest caz [illegible] metode ca şi în cazul mediului omogen.

Primită la redacţie la [illegible]

BIBLIOGRAFIE

1. V. [illegible], [illegible] 29, 4 (1970).
2. [illegible] 30, 1 (1971).
3. [illegible] 30, 1 (1971).
4. [illegible] 29, 3 (1970).
5. S. [illegible], M. C. [illegible], [illegible] 105, 1963.
6. V. [illegible], [illegible] 29, 4 (1970).
7. S. [illegible], [illegible] 1959.
8. [illegible], [illegible] 1960.
9. D. V. [illegible], [illegible] 1963.
10. [illegible] 1963.
11. [illegible] 1962.
12. [illegible] 28, 6 (1969).
13. [illegible] Sibiriu.
14. [illegible] Sibiriu.
15. V. [illegible] 21, 16 (1969).
16. [illegible] 1962.

ÎN LEGĂTURĂ CU MIŞCAREA PERMANENTĂ PLANĂ A DOUĂ FLUIDE ÎN CONTACT

de VALERIU PANAITESCU
Institutul Politehnic, Bucureşti

Se examinează mişcarea plană permanentă a două fluide vîscoase în contact. Se dau diferite forme ale expresiilor tensiunii normale şi tangenţiale într-un punct al liniei de contact. Se particularizează aceste expresii pentru cazul în care liniile de contact dintre cele două fluide sînt curbe izometrice şi se stabilesc unele condiţii de existenţă a unor asemenea mişcări.

1. INTRODUCERE

În diferitele probleme practice de hidrodinamica fluidelor vîscoase este necesară considerarea mişcării a două fluide în contact. Astfel, în tehnica exploatării petrolului se foloseşte un procedeu de extracţie numit injecţie de fluid care constă în introducerea sub presiune a unui fluid (apă sau gaze) în zăcămîntul de ţiţei; în acest caz trebuie să se examineze mişcarea fluidului de injecţie în contact cu ţiţeiul. La mişcarea unui lichid vîscos printr-o conductă, în situaţiile în care acesta nu umple complet secţiunea, este necesar să se ţină seama de mişcarea de antrenare a aerului în contact. În cazul mişcării jeturilor de fluid trebuie să se ia în consideraţie mişcarea a două fluide în contact. Studiul mişcării a două fluide în contact prezintă un rol important în examinarea proceselor de cavitaţie, la studiul mişcării bulelor cavitaţionale în lichid. În toate aceste cazuri se pune problema determinării tensiunilor care apar în punctele suprafeţei de separaţie a celor două fluide.

Există mişcări ale fluidelor în contact care pot fi asimilate unor mişcări plane. În această lucrare se studiază mişcarea plană permanentă a două fluide vîscoase în contact şi se stabilesc diferite expresii ale tensiunii în punctele de contact.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1035–1046

2. FORMULAREA PROBLEMEI

Se consideră două fluide vîscoase incompresibile F_1 și F_2 care sînt în contact și execută o mișcare plană permanentă. Se presupune că în lungul liniilor de contact nu există o mișcare relativă a celor două fluide. Fiecare linie de contact este o linie de curent comună celor două fluide.

Fie un punct P pe linia de contact C și un element ds al liniei C, în jurul punctului P (fig. 1). Sensul pozitiv de parcurgere al liniei C este

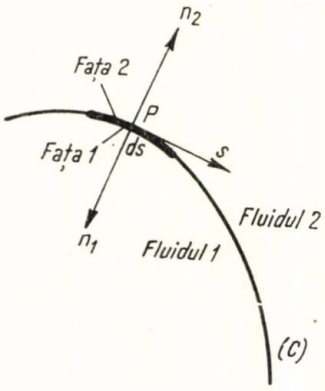


Fig. 1

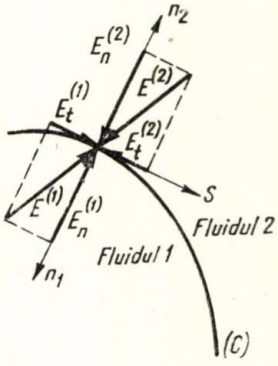


Fig. 2

dat de vectorul unitar $\vec{s}$ al tangentei și corespunde sensului vitezelor. Se notează fața *1* și fața *2* cele două fețe ale elementului ds, considerate ca aparținînd fluidului F_1 și, respectiv, F_2, și $\vec{n}_1$ și $\vec{n}_2$ normalele feței *1* și feței *2*, cu sensul pozitiv către fluidul F_1, respectiv F_2. Vectorul de tensiune $\vec{E}^{(1)}$ care acționează asupra elementului ds considerat ca aparținînd fluidului F_1 este egal în valoare absolută și are direcția contrară vectorului de tensiune $\vec{E}^{(2)}$ care acționează asupra acestui element, considerat ca aparținînd fluidului F_2. Se notează cu $E_n^{(1)}$ și $E_n^{(2)}$ componentele normale și cu $E_t^{(1)}$ și $E_t^{(2)}$ componentele tangențiale ale vectorilor de tensiune $E^{(1)}$ și $E^{(2)}$ (fig. 2).

În prezenta lucrare se stabilesc expresii generale ale tensiunilor normale și tangențiale într-un punct al liniei de contact. Se examinează mișcările fluidelor în care liniile de contact sînt curbe izometrice și se particularizează expresiile tensiunilor pentru aceste cazuri. În cazul particular al mișcării plane permanente a două fluide vîscoase în contact în care liniile de curent sînt semidrepte concurente în origine se stabilește condiția de existență al acestui tip de mișcare.

3. STABILIREA UNOR FORMULE DE CALCUL PENTRU COMPONENTELE NORMALĂ ȘI TANGENȚIALĂ ALE TENSIUNII ÎNTR-UN PUNCT AL LINIEI DE CONTACT

În cazul general al mișcării în spațiu a unui fluid vîscos, efortul $\vec{E}$ care se exercită într-un punct P asupra părții pozitive a unui element de suprafață este dat de formula vectorială

$$\vec{E} = -p\vec{n} + 2\mu(\vec{n}\nabla)\vec{V} + \mu\vec{n}\times(\nabla\times\vec{V}) - \frac{2}{3}\mu\Theta\vec{n}, \tag{1}$$

în care p este presiunea medie, $\vec{n}$ este vectorul unitar normal suprafeței considerate, μ este coeficientul de viscozitate, $\vec{V}$ este vectorul vitezei și Θ este dilatația cubică [1], [4].

În mișcarea plană a unui fluid vîscos incompresibil, expresia efortului $\vec{E}$ se poate scrie sub o formă în care se pun în evidență componentele normală și tangențială unei linii de curent. Se notează cu l și m cosinusurile directoare ale versorului normalei $\vec{n}$, dirijat față de direcția $\vec{s}$ a tangentei la linia de curent C ca axa y-ilor față de axa x-ilor. Rezultă

$$\vec{n} = l\vec{i} + m\vec{j}, \quad \vec{s} = m\vec{i} - l\vec{j}. \tag{2}$$

În mișcarea plană rotorul vitezei $\nabla\times\vec{V}$ este normal planului și are expresia

$$\nabla\times\vec{V} = 2\zeta\vec{k} = \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\vec{k}. \tag{3}$$

Ținînd seama de relațiile (2), se verifică ușor că derivata vectorului viteză după direcția normală, $(\vec{n}\nabla)\vec{V}$, se poate scrie sub forma

$$(\vec{n}\nabla)\vec{V} = \left(l\frac{\partial u}{\partial n} + m\frac{\partial v}{\partial n}\right)\vec{n} + \left(m\frac{\partial u}{\partial n} - l\frac{\partial v}{\partial n}\right)\vec{s}. \tag{4}$$

Pentru mișcarea plană $\Theta = \dfrac{\partial u}{\partial x} + \dfrac{\partial v}{\partial y} = 0$ și relația (1) devine:

$$\vec{E} = \left[-p + 2\mu\left(l\frac{\partial u}{\partial n} + m\frac{\partial v}{\partial n}\right)\right]\vec{n} + 2\mu\left[\left(m\frac{\partial u}{\partial n} - l\frac{\partial v}{\partial n}\right) + \zeta\right]\vec{s}. \tag{5}$$

Se obține un prim grup de formule pentru componentele E_n și E_t.

$$\begin{aligned} E_n &= -p + 2\mu\left[lm\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) + m^2\frac{\partial v}{\partial y} + l^2\frac{\partial u}{\partial x}\right], \\ E_t &= 2\mu\left[lm\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) + \frac{1}{2}(m^2 - l^2)\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right)\right]. \end{aligned} \tag{6}$$

Dacă se notează cu ψ funcţia de curent, atunci componentele vitezei şi valoarea vitezei sînt date de relaţiile :

$$u = \psi_y,\ v = -\psi_x;\ V = \sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}. \tag{7}$$

Se exprimă parametrii directori l şi m ai normalei $\vec{n}$ cu ajutorul funcţiei de curent ; se notează cu θ unghiul pe care-l face linia de curent cu axa x-ilor.

$$l = \frac{\psi_x}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}} = -\sin\theta,\ m = \frac{\psi_y}{\sqrt{\psi_x^2 + \psi_y^2}} = \cos\theta. \tag{8}$$

Se obţine un al doilea grup de formule pentru componentele E_n şi E_t

$$\begin{aligned} E_n &= -p + 2\mu\frac{1}{V^2}[\psi_{xy}(\psi_x^2 - \psi_y^2) + \psi_x\psi_y(\psi_{yy} - \psi_{xx})], \\ E_t &= 2\mu\frac{1}{V^2}\left[2\psi_{xy}\psi_x\psi_y + \frac{1}{2}(\psi_y^2 - \psi_x^2)(\psi_{yy} - \psi_{xx})\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Se calculează curburile $\frac{\partial\theta}{\partial s}$ şi $\frac{\partial\theta}{\partial n}$ ale liniilor de curent C şi ale curbelor ortogonale lor C^*

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial s} &= \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial s}(\operatorname{tg}\theta) = \frac{\psi_y^2}{V^2}\frac{\partial}{\partial s}\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) = \\ &= \frac{1}{V^2}[2\psi_{xy}\psi_x\psi_y - \psi_x^2\psi_{yy} - \psi_y^2\psi_{xx}], \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta}{\partial n} &= \cos^2\theta\frac{\partial}{\partial n}(\operatorname{tg}\theta) = \frac{\psi_y^2}{V^2}\frac{\partial}{\partial n}\left(-\frac{\psi_x}{\psi_y}\right) = \\ &= \frac{1}{V^3}[\psi_{xy}(\psi_x^2 - \psi_y^2) + \psi_x\psi_y(\psi_{yy} - \psi_{xx})]. \end{aligned} \tag{11}$$

Cu ajutorul relaţiilor (10) şi (11), din expresiile (9) se obţine un nou grup de formule pentru componentele E_n şi E_t

$$\begin{aligned} E_n &= -p + 2\mu V\frac{\partial\theta}{\partial n}, \\ E_t &= \mu\Delta\psi + 2\mu V\frac{\partial\theta}{\partial s}. \end{aligned} \tag{12}$$

4. MIȘCAREA PLANĂ PERMANENTĂ A DOUĂ FLUIDE VÎSCOASE ÎN CONTACT, ÎN CARE LINIILE DE CURENT SÎNT CURBE IZOMETRICE GENERALE

Se examinează mișcarea plană a două fluide vîscoase incompresibile, în care liniile de contact sînt curbe izometrice.

Fie $\alpha = \alpha(x, y)$ o funcție armonică; familia de curbe

$$\alpha(x, y) = C \tag{13}$$

se zice o familie izometrică. Dacă $\beta = \beta(x, y)$ este funcție armonică conjugată lui α astfel încît funcția $w(z) = \alpha + i\beta$ să fie o funcție analitică de $z = x + iy$, atunci coordonatele curbilinii ortogonale α și β se numesc coordonate izometrice [1], [2]. Ecuația funcției de curent pentru mișcarea plană permanentă este

$$\nu\Delta\Delta\psi + \frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(x, y)} = 0. \tag{14}$$

Se notează

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \beta_x^2 + \beta_y^2 = \frac{1}{h^2}; \quad a = -2\frac{h_\alpha}{h},$$

$$b = 2\frac{h_\beta}{h}; \quad \Delta'\psi = \psi_{\alpha\alpha} + \psi_{\beta\beta}. \tag{15}$$

Rezultă

$$\Delta\psi = \frac{1}{h^2}\Delta'\psi,$$

$$\Delta(\Delta\psi) = \frac{1}{h^2}\Delta'\left(\frac{1}{h^2}\Delta'\psi\right), \quad \frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(x, y)} = \frac{1}{h^2}\frac{D(\psi, \Delta\psi)}{D(\alpha, \beta)}, \tag{16}$$

În coordonate izometrice ecuația (14) se scrie

$$\nu\left[\Delta'\Delta'\psi + (a^2 + b^2)\Delta'\psi + 2a(\Delta'\psi)_\alpha - 2b(\Delta'\psi)_\beta\right] +$$

$$+ \frac{D(\psi, \Delta'\psi)}{D(\alpha, \beta)} - (a\psi_\beta + b\psi_\alpha)\Delta'\psi = 0. \tag{17}$$

Funcția de curent $\psi = \psi(\alpha, \beta)$ în coordonate izometrice trebuie să verifice ecuația (17). Ținînd seama de notațiile (15), se verifică ușor că funcția $a + ib$ este o funcție analitică și se poate exprima în funcție de $\alpha + i\beta = w(z)$ prin expresia

$$a + ib = 2\frac{w''}{w'^2}. \tag{18}$$

Prin integrare se obține relația $w = \alpha + i\beta = -\frac{2}{a + ib} \ln(z - z_0) + w_0$; se ia $w_0 = 0$ și se notează $z - z_0 = re^{i\theta}$. Rezultă

$$\alpha = -\frac{2}{a^2 + b^2}(a \ln r + b\theta),$$
$$\beta = \frac{2}{a^2 + b^2}(b \ln r - a\theta); \quad r^2 = e^{b\beta - a\alpha}. \tag{19}$$

Revenind la studiul mișcării plane a două fluide în contact se notează cu ψ^i, $i = 1,2$ funcțiile de curent ψ ale celor două fluide F_i, $i = 1,2$. Ne propunem să determinăm componentele normale $E_n^{(i)}$, $i = 1,2$ și tangențiale $E_t^{(i)}$, $i = 1,2$ care acționează asupra unui element ds al liniei de contact. Se utilizează formula (9). Se calculează

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_x}{V^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\psi_y}{V^2}\right) = \frac{1}{V^4}[V^2\Delta\psi - 2\psi_x(\psi_{xx}\psi_x + \psi_{xy}\psi_y) -$$
$$- 2\psi_y(\psi_{xy}\psi_x + \psi_{yy}\psi_y)] = -\frac{1}{V^4}[4\psi_x\psi_y\psi_{xy} + (\psi_y^2 - \psi_x^2)(\psi_{yy} - \psi_{xx})]. \tag{20}$$

Folosind cea de a doua relație (9), se obține

$$E_t = -\mu V^2\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\psi_x}{V^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\psi_y}{V^2}\right)\right]. \tag{21}$$

Se calculează derivatele α_x, α_y; β_x, β_y din primele două relații (19) și derivatele funcției de curent $\psi_x = \psi_\alpha \alpha_x + \psi_\beta \beta_x$, respectiv ψ_y și rezultă expresiile:

$$\alpha_x^2 + \alpha_y^2 = \frac{4}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}, \tag{22}$$

$$V^2 = \psi_x^2 + \psi_y^2 = \frac{4}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}(\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2). \tag{23}$$

Se calculează derivatele $\frac{\partial V^2}{\partial x} = \frac{\partial V^2}{\partial \alpha}\alpha_x + \frac{\partial V^2}{\partial \beta}\beta_x$ și analog $\frac{\partial V^2}{\partial y}$; rezultă

$$\psi_x \frac{\partial V^2}{\partial x} + \psi_y \frac{\partial V^2}{\partial y} = \frac{4}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}\left(\psi_\alpha \frac{\partial V^2}{\partial \alpha} + \psi_\beta \frac{\partial V^2}{\partial \beta}\right). \tag{24}$$

Se ține seama de relația (23) și de cea de a treia relație (19) și se calculează derivatele $\frac{\partial V^2}{\partial \alpha}$ și $\frac{\partial V^2}{\partial \beta}$,

$$\frac{\partial V^2}{\partial \alpha} = \frac{4}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \alpha}(\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2) + a(\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2)\right], \tag{25}$$

$$\frac{\partial V^2}{\partial \beta} = \frac{4}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}\left[\frac{\partial}{\partial \beta}(\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2) - b(\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2)\right]. \tag{26}$$

Cu ajutorul expresiilor (22)—(26) și utilizînd notațiile introduse de ultima relație (15) și ultima relație (19), formula (21) care dă valoarea efortului tangențial E_t se scrie

$$E_t = -\frac{4\mu}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}\left[\Delta'\psi - (a\psi_\alpha + b\psi_\beta) - 2\frac{\psi_\alpha^2\psi_{\alpha\alpha} + 2\psi_\alpha\psi_\beta\psi_{\alpha\beta} + \psi_\beta^2\psi_{\beta\beta}}{\psi_\alpha^2 + \psi_\beta^2}\right]. \tag{27}$$

În mod asemănător, folosind prima relație (9), se deduce expresia corespunzătoare a efortului E_n, prin trecerea de la coordonatele carteziene x, y la coordonatele izometrice α, β. Presiunea medie p care intervine în expresia componentei normale E_n se calculează din următoarea relație, dedusă din ecuația Navier-Stokes, în ipoteza neglijării forțelor exterioare de masă:

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2\right) = \Delta\psi\,\mathrm{d}\psi - \nu\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}\mathrm{d}x + \nu\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}\mathrm{d}y. \tag{28}$$

Se calculează derivatele $\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y}$ și $\frac{\partial\Delta\psi}{\partial x}$ introducînd coordonatele izometrice

$$\frac{\partial\Delta\psi}{\partial y} = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\alpha}\alpha_y + \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\beta}\beta_y;\quad \frac{\partial\Delta\psi}{\partial x} = \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\alpha}\alpha_x + \frac{\partial\Delta\psi}{\partial\beta}\beta_x. \tag{29}$$

Cu ajutorul relațiilor (29) și ținînd seama de relațiile (19), formula (28) se transformă succesiv

$$\mathrm{d}\left(\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}V^2\right) = \Delta\psi\,\mathrm{d}\psi + \nu\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\alpha}\mathrm{d}\beta - \nu\frac{\partial\Delta\psi}{\partial\beta}\mathrm{d}\alpha =$$

$$= \frac{4}{a^2 + b^2} e^{a\alpha - b\beta}\left[\Delta'\psi\,\mathrm{d}\psi + \nu\frac{\partial\Delta'\psi}{\partial\alpha}\mathrm{d}\beta - \nu\frac{\partial\Delta'\psi}{\partial\beta}\mathrm{d}\alpha + \right.$$

$$\left. + \nu a\Delta'\psi\,\mathrm{d}\beta + \nu b\Delta'\psi\,\mathrm{d}\alpha\right]. \tag{30}$$

5. MIŞCAREA PLANĂ PERMANENTĂ A DOUĂ FLUIDE VÎSCOASE ÎN CONTACT, ÎN CARE LINIILE DE CURENT SÎNT CURBELE IZOMETRICE ALE LUI HAMEL

Dintre mişcările plane ale căror linii de curent sînt curbe izometrice, se examinează mişcările studiate de G. Hamel. G. Hamel şi-a pus problema determinării tuturor mişcărilor plane permanente ale unui fluid vîscos care, fără să fie irotaţionale, să aibă aceleaşi linii de curent ca şi o mişcare irotaţională. Hamel a demonstrat că singurele mişcări care satisfac această condiţie sînt acelea ale căror linii de curent sînt : 1) spirale logaritmice omototice, 2) cercuri concentrice, 3) drepte concurente, 4) drepte paralele. Aceaste mişcări au funcţia de curent de forma

$$\psi = F(\alpha) \tag{31}$$

şi în acelaşi timp $\Delta\psi \neq 0$. Din ecuaţia generală (17) se obţine ecuaţia lui Hamel [2],

$$F^{IV} + 2aF''' + (a^2 + b^2)F'' - \frac{b}{\nu} F'F'' = 0. \tag{32}$$

Se integrează o dată această ecuaţie şi se notează

$$F' = f. \tag{33}$$

Se obţine

$$f'' + 2af' = \frac{b}{2\nu} f^2 - (a^2 + b^2)f + K_1, \tag{34}$$

în care K_1 este o constantă arbitrară. Formal această ecuaţie coincide cu ecuaţia de mişcare a unui punct material care execută o mişcare oscilatorie amortizată sub acţiunea forţei $\frac{b}{2\nu} f^2 - (a^2 + b^2)f + K_1$ şi a rezistenţei de amortizare $2af'$.

Liniile de curent sînt spirale logaritmice omotetice de ecuaţie

$$r = K\, e^{-\frac{b}{a}\theta}. \tag{35}$$

Componentele vitezei în coordonate plane, sînt date de relaţiile

$$v_r = -\frac{2b}{a^2 + b^2} \cdot \frac{f}{r}, \quad v_\theta = \frac{2a}{a^2 + b^2} \cdot \frac{f}{r}. \tag{36}$$

Din ecuaţia Navier-Stokes, în ipoteza neglijării forţelor exterioare, se obţine expresia presiunii :

$$p = \frac{4\mu}{b(a^2 + b^2)} \frac{1}{r^2} [K_1 - af' - (a^2 + b^2)f] + K_2, \tag{37}$$

în care K_2 este o constantă arbitrară.

Se consideră că linia de contact dintre cele două fluide vîscoase F_1 și F_2 este o spirală logaritmică de ecuație (35) sau, în coordonate izometrice, $\alpha = \alpha_0$. În acest caz, ecuația (27) a efortului tangențial E_t se simplifică, ținînd seama de faptul că toate derivatele în raport cu β dispar. Cu notațiile $\psi = F(\alpha)$ și $F' = f$, se obține

$$E_t = \frac{4\mu}{a^2 + b^2} \cdot \frac{1}{r^2} \cdot (f' + af). \tag{38}$$

Pentru componenta normală a efortului într-un punct al liniei de contact al celor două fluide, se folosește prima relație (9). Se calculează expresiile derivatelor ψ_x, ψ_y, ψ_{xx}, ψ_{yy} și ψ_{xy} în coordonate izometrice, ținînd seama că ψ este funcție numai de α. Se obține

$$E_n = -p + 2\mu \frac{1}{V^2} \{(\psi_{\alpha\alpha}\alpha_x\alpha_y + \psi_\alpha\alpha_{xy})(\alpha_x^2 - \alpha_y^2)\psi_\alpha^2 +$$

$$+ \psi_\alpha^2\alpha_x\alpha_y [\psi_{\alpha\alpha}(\alpha_y^2 - \alpha_x^2) + \psi_\alpha(\alpha_{yy} - \alpha_{xx})]\}. \tag{39}$$

Derivatele funcției α se calculează din prima relație (19). Efectuînd toate calculele și folosind notația (31) se obține

$$E_n = -p - 16\,\mu \frac{1}{V^2} \frac{b}{(a^2 + b^2)^2 r^4} F'^3$$

sau încă, ținînd seama că din relația (23) rezultă $V^2 = \frac{4}{(a^2 + b^2) r^2} F'^2$, iar din a treia relație (19) se deduce $r^2 = e^{-a\alpha}$, rezultă în final, folosind notația (33), următoarea formulă de calcul a componentei normale a efortului unitar:

$$E_n = -p - 4\mu \frac{b}{a^2 + b^2} e^{a\alpha} f, \tag{40}$$

în care presiunea p este dată de relația (37).

Pentru componentele normală E_n și tangențială E_t se pot deduce formule utile, introducînd curburile $\frac{\partial\theta}{\partial s}$ și $\frac{\partial\theta}{\partial n}$ ale liniilor de curent C și ale curbelor ortogonale lor C^*, corespunzătoare formulelor (12). Se obține, cu notațiile introduse:

$$E_n = -p + 4\mu \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{\frac{1}{2}a\alpha} f \frac{\partial\theta}{\partial n}, \tag{41}$$

$$E_t = 4\mu \frac{1}{a^2 + b^2} e^{a\alpha} f' + 4\mu \frac{1}{\sqrt{a^2 + b^2}} e^{\frac{1}{2}a\alpha} f \frac{\partial\theta}{\partial s}. \tag{42}$$

6. MIȘCAREA PLANĂ PERMANENTĂ A DOUĂ FLUIDE VÎSCOASE ÎN CONTACT, ÎN CARE LINIILE DE CURENT SÎNT SEMIDREPTE CONCURENTE ÎN ORIGINE

Se studiază mișcarea permanentă plană a două fluide vîscoase în contact, pentru care liniile de curent sînt semidrepte concurente în origine [3]. Dreptele concurente pot fi considerate ca niște curbe izometrice particulare, cu coordonatele izometrice α și β egale respectiv cu θ și $\ln r$. Pentru mișcarea pe drepte concurente a unui fluid vîscos, funcția de curent este de forma $\psi = F(\theta)$, iar mărimile a și b introduse prin relațiile (15) sînt

$$a = 0, \quad b = -2. \tag{43}$$

Ecuația diferențială a funcției de curent se obține din ecuația (32)

$$F^{IV} + 4F'' + \frac{2}{\nu} F'F''' = 0. \tag{44}$$

Se integrează o dată și se folosește notația $F' = f$. Rezultă

$$f'' + 4f + \frac{1}{\nu} f^2 = \frac{1}{2} C, \tag{45}$$

în care C este o constantă de integrare. Se înmulțește această relație cu $2f'$ și se integrează. Se obține

$$f'^2 = -\frac{2}{3\nu} f^3 - 4f^2 + Cf + C'. \tag{46}$$

Se notează cu F_1 și F_2 cele două funcții de curent $\psi = F(\theta)$, corespunzătoare celor două fluide și cu f_1, f_2 și f derivatele F_1', F_2' și F'. Pentru cele două fluide în contact, relația (46) se scrie :

$$f_1'^2 = -\frac{2}{3\nu_1} f_1^3 - 4f_1^2 + C_1 f_1 + C_1', \tag{46'}$$

$$f_2'^2 = -\frac{2}{3\nu_2} f_2^3 - 4f_2^2 + C_2 f_2 + C_2'. \tag{46''}$$

Se înmulțesc aceste relații cu μ_1^2 și μ_2^2 și se scad. Rezultă

$$\mu_1^2 f_1'^2 - \mu_2^2 f_2'^2 = -\frac{2}{3}(\rho_1\mu_1 f_1^3 - \rho_2\mu_2 f_2^3) - 4(f_1^2\mu_1^2 - f_2^2\mu_2^2) +$$

$$+ (C_1\mu_1^2 f_1 - C_2\mu_2^2 f_2) + (C_1'\mu_1^2 - C_2'\mu_2^2). \tag{47}$$

În cazul mișcării radiale, componentele vitezei în coordonate polare se obțin din relațiile (36), ținînd seama de (43), avem

$$v_r = \frac{1}{r} f, \quad v_\theta = 0. \tag{48}$$

Expresia presiunii rezultă din ecuația Navier-Stokes, în ipoteza neglijării forțelor exterioare

$$p = \frac{2\mu}{r^2}\left(f - \frac{C}{4}\right) + p_0, \tag{49}$$

în care p_0 este o constantă arbitrară de integrare, și care poate fi luată $p_0 = 0$.

Expresia componentei normale E_n a efortului unitar într-un punct oarecare al razei de contact se obține din formula (40), ținînd seama de (43),

$$E_n = -p + \frac{2\mu}{r^2} f$$

sau de mărimea presiunii date de (49),

$$E_n = \frac{C\mu}{2r^2}. \tag{50}$$

Expresia componentei tangențiale E_t a efortului unitar se poate obține folosind relația (38). Rezultă

$$E_t = \frac{\mu}{r^2} f'. \tag{51}$$

Pe o rază de contact, în afara condiției evidente $f_1 = f_2$, mai trebuie îndeplinite alte două condiții de continuitate și anume $C_1\mu_1 = C_2\mu_2$ și $\mu_1 f_1' = \mu_2 f_2'$, rezultate din egalitățile $E_n^{(1)} = E_n^{(2)}$ și $E_t^{(1)} = E_t^{(2)}$. Aceste condiții, introduse în relația (47), conduc la următoarea ecuație :

$$\frac{2}{3}(\rho_1\mu_1 - \rho_2\mu_2) f^3 + 4(\mu_1^2 - \mu_2^2) f^2 - (\mu_1 -$$

$$- \mu_2) C_2\mu_2 f - C_1'\mu_1^2 + C_2'\mu_2^2 = 0. \tag{52}$$

Această ecuație trebuie să fie satisfăcută de valorile lui f aparținînd razelor de separație ale celor două fluide în contact și constituie o condiție de existență a mișcării plane permanente a două fluide vîscoase în contact în care liniile de curent sînt semidrepte concurente în origine.

Primită la redacție la 14 decembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. R. Berker, *Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible*, Handbuch der Physik, Berlin, **VIII**, *2* (1963).
2. G. Hamel, *Spiralförmige Bewegungen zäher Flüssigkeiten*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung, **XXV** (1917).
3. V. Panaitescu, *Asupra mișcării plane permanente a două fluide viscoase în contact*, A XIII-a Sesiune științifică a Institutului politehnic București, 1970.
4. A. Rosenblatt, *Sur certains mouvements des liquides visqueux*, Bulletin des sciences mathématiques 2-ième série t. 51, Paris 1927.

STUDIUL REȚELELOR CIRCULARE DE PROFILE SUBȚIRI ALCĂTUITE DIN ARCE DE SPIRALE LOGARITMICE, PRIN TRANSFORMARE CONFORMĂ PE REȚELE LINIARE WEINIG

de D. TAȘCĂ și GH. ZIDARU

Studiul rețelelor circulare de profile prin metoda transformărilor conforme a fost abordat în literatură, asociind transformarea Sörensen cu transformarea König, ceea ce a condus la dificultăți de calcul. În prezentul studiu, transformarea Sörensen se asociază cu transformarea Weinig, pentru rețelele liniare de profile. Se obțin astfel simplificări destul de importante, care permit evaluarea tuturor mărimilor fizice și geometrice ale rețelelor circulare de profile, imediat aplicabile la studiul turbomașinilor.
Studiul comportă patru variante: rețea fixă și rețea mobilă (centrifuge și centripete).

1. INTRODUCERE

Studiul unei rețele circulare fixă alcătuită din arce de spirale logaritmice subțiri a fost făcut pentru prima dată de către Sörensen [2]. Rețeaua liniară de profile rectilinii corespunzătoare prin transformare conformă era studiată cu metoda König [1].

Deoarece metoda Weinig este mai simplă și mai bine studiată decît metoda König [1], autorii acestei lucrări își propun să studieze aceeași rețea circulară prin transformare conformă pe o rețea liniară de profile rectilinii studiată cu metoda Weinig.

2. REȚEA CIRCULARĂ FIXĂ DE POMPĂ

În planul Z, se consideră o rețea circulară formată din n arce de spirale logaritmice (fig. 1*a*).

Unghiul ascuțit format de tangenta la profil și tangenta la un cerc $|Z| = R$ este constant și egal cu β_0.

Cu funcția de transformare Sörensen

$$Z = \sqrt{R_1 R_2}\, \exp \frac{2\pi z_1}{nt}, \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1047–1060

planul Z se transformă conform pe planul z_1 al rețelei liniare (fig. 1*b*), în care axa x_1 este normală la frontul rețelei, iar y_1 paralelă cu acesta. Rețeaua circulară cu raza de intrare R_1 și de ieșire R_2 se transformă conform pe rețeaua liniară cu pasul t.

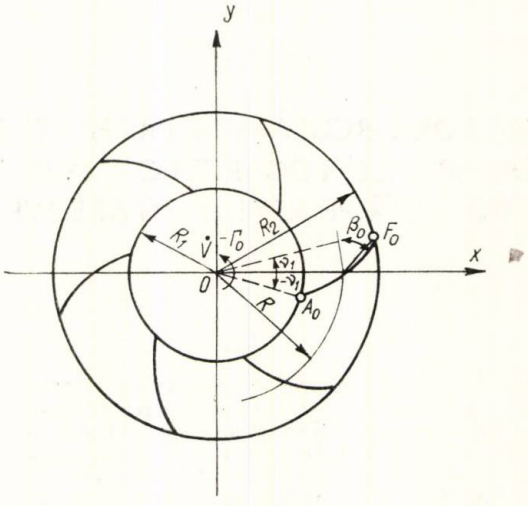


Fig. 1 *a*

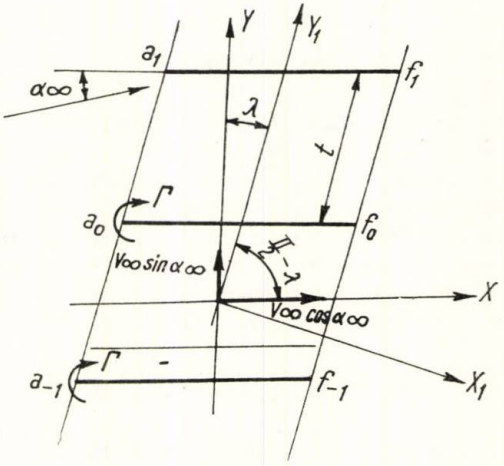


Fig. 1 *b*

În expresia funcției de transformare $Z(z_1)$, sînt respectate condițiile dimensionale : funcția exponențială se aplică unei variabile adimensionale.

Funcția inversă este

$$z_1 = \frac{nt}{2\pi} \ln \frac{Z}{\sqrt{R_1 R_2}}. \qquad (2)$$

Înlocuind $Z = Re^{iv}$, $z_1 = x_1 + iy_1$ și separînd partea reală și cea imaginară în egalitatea (2), se obțin coordonatele :

$$x_1 = \frac{nt}{2\pi} \ln \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}}; \quad y_1 = \frac{nt}{2\pi}(\nu + 2k\pi) = \frac{nt}{2\pi}\nu + knt \tag{3}$$

$$(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

Cercurile $R = \text{const}$ se transformă în dreptele paralele cu frontul rețelei, $x_1 = \text{const}$. Punctul de la infinit al planului Z ($R = \infty$) se transformă în infinitul aval al planului z_1 ($x_1 = +\infty$), iar originii planului Z ($R = 0$) îi corespunde infinitul amonte al planului z_1($x_1 = -\infty$). Cercurile de intrare $R = R_1$ și ieșire $R = R_2$ ale rețelei circulare devin fronturile rețelei liniare. O semidreaptă radială $\nu = \text{const}$. se transformă în dreptele congruente paralele cu axa x_1, anume după relația

$$y_1 = \frac{nt}{2\pi} \cdot \text{const} + knt.$$

Cînd ν are un salt egal cu pasul unghiular $\frac{2\pi}{n}$ al rețelei, y_1 primește un salt egal cu pasul t.

Cu rotația de axe

$$z_1 = ze^{i\lambda} = ze^{i\left(\frac{\pi}{2} - \beta_0\right)} = ie^{-i\beta_0} z,$$

funcția (1) devine

$$Z = \sqrt{R_1 R_2} \exp\left(\frac{2\pi}{nt} ie^{-i\beta_0} z\right), \tag{4}$$

unde $\lambda = \frac{\pi}{2} - \beta_0$ este unghiul de instalare a rețelei liniare.

Funcția inversă a transformării (4) este

$$z = -\frac{nt}{2\pi} ie^{i\beta_0} \ln \frac{Z}{\sqrt{R_1 R_2}}. \tag{5}$$

Separînd partea reală și cea imaginară în (5), se obțin coordonatele :

$$x = \frac{nt}{2\pi}\left[\sin \beta_0 \ln \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} + \cos \beta_0 (\nu + 2k)\right],$$

$$y = \frac{nt}{2\pi}\left[-\cos \beta_0 \ln \frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} + \sin \beta_0 (\nu + 2k\pi)\right] \tag{6}$$

$$(k = 0; \pm 1; \pm 2; \ldots).$$

Extremităţile A_0 şi F_0 ale profilului A_0F_0 fiind date de coordonatele $(R_1; -\nu_1)$, respectiv $(R_2; \nu_1)$, se poate calcula relaţia între unghiurile ν_1 şi β_0.

Ecuaţia spiralei logaritmice A_0F_0 este

$$R = Ce^{m\nu}, \tag{7}$$

A_0 şi F_0 fiind pe spirală, se obţin condiţiile la limită:

$$R_1 = Ce^{-m\nu_1}; \quad R_2 = Ce^{m\nu_1},$$

de unde rezultă constantele C şi m:

$$\operatorname{tg}\beta_0 = \frac{dR}{Rd\nu} = m = \frac{1}{2\nu_1}\ln\frac{R_2}{R_1}; \qquad C = \sqrt{R_1R_2}. \tag{8}$$

Spirala logaritmică se transformă în profilul rectiliniu al reţelei, paralel cu axa x, deoarece diferenţiind a doua relaţie (6) pentru $y = \text{const}$, se obţin

$$dy = \frac{nt}{2\pi}\left(-\cos\beta_0\frac{dR}{R} + \sin\beta_0\, d\nu\right) = 0,$$

adică

$$\frac{dR}{Rd\nu} = \operatorname{tg}\beta_0.$$

În egalităţile (6) se dau R şi ν şi, admiţînd succesiv valorile $k = 0$ şi $k = 1$, se deduce

$$\frac{y(1) - y(0)}{x(1) - x(0)} = \operatorname{tg}\beta_0,$$

ceea ce arată că într-adevăr frontul reţelei liniare este înclinat cu unghiul β_0 faţă de axa x.

Punctele a_0 şi f_0 fiind transformatele pentru $k = 0$ ale capetelor A_0 şi F_0 ale profilului din planul Z, se utilizează prima relaţie (6) şi se obţine

$$x_{f_0} = \frac{nt}{2\pi}\left(\frac{1}{2}\sin\beta_0\ln\frac{R_2}{R_1} + \cos\beta_0\nu_1\right) = -x_{a_0}.$$

Însă, coarda este în acest caz

$$c = x_{f_0} - x_{a_0},$$

de unde rezultă desimea reţelei liniare

$$\frac{c}{t} = \frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin\beta_0\ln\frac{R_2}{R_1} + \cos\beta_0\nu_1\right). \tag{9}$$

Așadar, dîndu-se parametrii R_1, R_2, ν_1 ai rețelei circulare, se calculează cu (8) unghiul β_0.

De asemenea, pot fi date valorile R_1, R_2 și β_0 și atunci se obține ν_1. Cu expresia (9) se obține raportul $\frac{c}{t}$, iar $\lambda = \frac{\pi}{2} - \beta_0$.

Perechii de valori $\frac{c}{t}$, λ determinate îi corespunde constanta $b>1$ din planul ajutător ζ al metodei Weinig [1], [3], [4], [5].

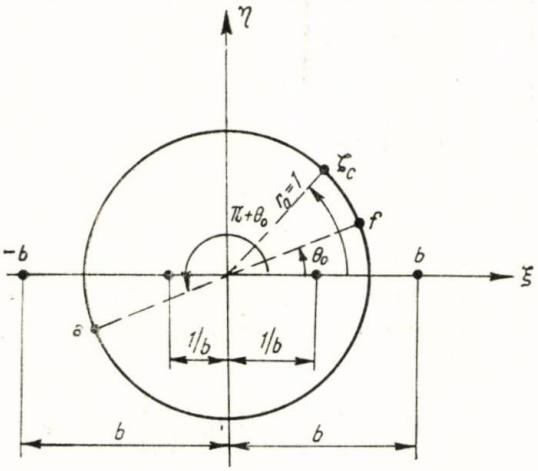


Fig. 1c

Unghiul θ_0 al punctului de stagnare f de pe cercul $|\zeta| = 1$ se calculează cu formula [1],

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{b^2 - 1}{b^2 + 1} \operatorname{tg} \lambda. \tag{10}$$

Celălalt punct de stagnare a are argumentul $\pi + \theta_0$ (fig. 1c).

Transformarea conformă a rețelei liniare din planul z pe infinitatea de foi Riemann suprapusă planului ζ este [1]

$$z = \frac{t}{2\pi}\left(e^{-i\lambda} \ln \frac{\zeta + b}{\zeta - b} + e^{i\lambda} \ln \frac{\zeta + \frac{1}{b}}{\zeta - \frac{1}{b}}\right). \tag{11}$$

Presupunînd că viteza asimptotică a mișcării prin rețeaua liniară este $\overline{v}_\infty = v_\infty e^{-i\alpha_\infty}$, circulația în jurul profilului rectiliniu $a_0 f_0$, conform cu [1], are expresia

$$\Gamma = \frac{4bt}{b^2 + 1} \cdot \frac{\cos \theta_0}{\cos \lambda} \cdot v_\infty \sin \alpha_\infty, \tag{12}$$

iar viteza pe profil, conform cu [4], este

$$v = v_\infty \left[\cos \alpha_\infty + \sin \alpha_\infty \frac{b^2 \cos(\lambda - \theta) - \cos(\lambda + \theta) - (b^2 - 1)\frac{\cos \theta_0}{\cos \lambda}}{b^2 \sin(\lambda - \theta) - \sin(\lambda + \theta)} \right]. \quad (13)$$

O formulă echivalentă se obține ținînd seama de (10)

$$v(\theta) = v_\infty \left[\cos \alpha_\infty + \sin \alpha_\infty \left(\operatorname{ctg} \lambda - \frac{2 \cos \theta_0}{\sin 2\lambda} \cdot \frac{\cos \frac{\theta + \theta_0}{2}}{\cos \frac{\theta - \theta_0}{2}} \right) \right]. \quad (13')$$

Modulul funcției de transformare (4) este

$$\left| \frac{dZ}{dz} \right| = \frac{2\pi R}{nt}. \quad (14)$$

Curentul general prin rețeaua circulară este indus de o sursă pozitivă $\dot{V}$ și un vîrtej Γ_0 cu sens trigonometric, plasate în origine ; deci potențialul său complex este

$$f_0(Z) = \frac{\dot{V} - i\Gamma_0}{2\pi} \ln \frac{Z}{\sqrt{R_1 R_2}}. \quad (15)$$

Ținînd seama de (5), curentul general corespunzător din planul z este translația asimptotică

$$f_0(z) = f_0(Z(z)) = \frac{\dot{V} - i\Gamma_0}{2\pi} i e^{-i\beta_0} z = \bar{v}_\infty z,$$

de unde se obțin componentele vitezei asimptotice :

$$v_{\infty x} = \frac{1}{nt}(\Gamma_0 \cos \beta_0 + \dot{V} \sin \beta_0); \quad v_{\infty y} = \frac{1}{nt}(\Gamma_0 \sin \beta_0 - \dot{V} \cos \beta_0). \quad (16)$$

Modulul vitezei asimptotice este

$$v_\infty = \frac{1}{nt} \sqrt{\dot{V}^2 + \Gamma_0^2}, \quad (17)$$

iar incidența α_∞ se deduce cu formula

$$\operatorname{tg} \alpha_\infty = \frac{1 - \frac{\Gamma_0}{\dot{V}} \operatorname{tg} \beta_0}{\frac{\Gamma_0}{\dot{V}} + \operatorname{tg} \beta_0}. \quad (18)$$

Circulația vitezei în jurul profilului rețelei circulare, luată în sens orar, este egală cu circulația în jurul profilului rectiliniu din rețeaua liniară, dată de expresia (12).

Momentul de reacțiune al palelor directoare asupra fluidului este dat de expresia

$$M = \rho \dot{V} B \frac{n\Gamma}{2\pi} = \frac{2}{\pi} \rho n B \dot{V} \frac{bt}{b^2+1} \frac{\cos\theta_0}{\cos\lambda} \sin\alpha_\infty, \tag{19}$$

unde B este anvergura palei directoare.

Acest moment este nul dacă $\alpha_\infty = 0$, deci, conform relației (18), dacă $\operatorname{tg}\beta_0 = \dfrac{\dot{V}}{\Gamma_0}$.

Viteza pe profilul rețelei circulare are expresia

$$V = \frac{v(\theta)}{\left|\frac{dz}{dZ}\right|} = \frac{nt}{2\pi R} v_\infty \left[\cos\alpha_\infty + \sin\alpha_\infty \left(\operatorname{ctg}\lambda - \frac{2\cos\theta_0}{\sin 2\lambda} \cdot \frac{\cos\frac{\theta+\theta_0}{2}}{\cos\frac{\theta-\theta_0}{2}}\right)\right]. \tag{20}$$

Calculul vitezei se face astfel : se dau valori unghiului $\theta \in [\theta_0 ; \pi + \theta_0]$ și se obține abscisa corespunzătoare x a profilului $a_0 f_0$, [1]

$$x = \frac{t}{2\pi}\left[\cos\lambda \ln\frac{b^2+2b\cos\theta+1}{b^2-2b\cos\theta+1} + \sin\lambda\left(2\operatorname{arc\,tg}\frac{2b\sin\theta}{b^2-1} + 2k\pi+\pi\right)\right], \tag{21}$$

în care se ia $k = 0$; pe de altă parte, din prima formulă (6), această abscisă rezultă ca funcție de R, deoarece, conform relației (7),

$$\nu = \frac{1}{m} \ln\frac{R}{C}.$$

Deci, pentru $k = 0$, se obține

$$x = \frac{nt}{2\pi}\left(\frac{1}{2\nu_1} \ln\frac{R_2}{R_1} + \frac{2\nu_1}{\ln\frac{R_2}{R_1}}\right) \ln\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}}. \tag{22}$$

Astfel, se calculează valorile lui R pentru diferite valori ale unghiului θ. Intervalului $\theta \in [\theta_0 ; \pi + \theta_0]$ îi corespunde fața superioară (extradosul) a profilului rectiliniu din rețeaua liniară, deci fața concavă (notată cu plus) a profilului rețelei circulare, pe care repartiția vitezei este dată de formula (20).

Unghiurilor $\theta \in [\pi + \theta_0 ; 2\pi + \theta_0]$ le corespund punctele de pe fața convexă (notată cu minus) a profilului rețelei circulare, în care viteza e dată tot de formula (20).

3. REȚEA CIRCULARĂ FIXĂ DE TURBINĂ

Mișcare într-o asemenea rețea fiind centripetă, rezultă că $R_1 > R_2$ (fig. 2). Funcția de transformare conformă pe rețeaua liniară este în acest caz

$$Z = \sqrt{R_1 R_2}\, \exp\left(-\frac{2\pi z_1}{nt}\right). \tag{23}$$

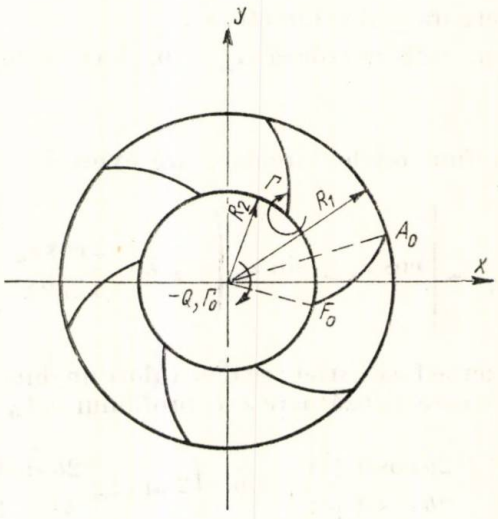


Fig. 1

Punctului de la infinit al planului Z ($Z = \infty$) îi corespunde infinitul amonte al planului z_1 ($x_1 = -\infty$), iar originii $Z = 0$ îi corespunde infinitul aval ($x_1 = +\infty$).

Ținînd seama de rotația $z_1 = ie^{-i\beta_0} z$, se obțin coordonatele:

$$\begin{aligned} x &= -\frac{nt}{2\pi}\left[\sin\beta_0 \ln\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} + \cos\beta_0\,(\nu + 2k\pi)\right], \\ y &= \frac{nt}{2\pi}\left[\cos\beta_0 \ln\frac{R}{\sqrt{R_1 R_2}} - \sin\beta_0\,(\nu + 2k\pi)\right] \end{aligned} \tag{24}$$

$$(k = 0\,;\ \pm 1\,;\ \pm 2\,;\ \ldots).$$

Ecuația spiralei logaritmice A_0F_0 are, de asemenea, forma anterioară (7), în care

$$m = \operatorname{tg}\beta_0 = \frac{1}{2\nu_1}\ln\frac{R_1}{R_2}, \qquad C = \sqrt{R_1 R_2}. \tag{25}$$

Analog, rezultă

$$\frac{c}{t} = \frac{n}{\pi}\left(\frac{1}{2}\sin\beta_0 \ln\frac{R_1}{R_2} + \cos\beta_0 \nu_1\right). \tag{26}$$

Dîndu-se aici $\frac{R_1}{R_2}$ și β_0, din (25) se obține ν_1, iar cu formula (26) se calculează desimea $\frac{c}{t}$.

Avînd și unghiul $\lambda = \frac{\pi}{2} - \beta_0$, din [1] se determină b, iar cu formula (10) se obține θ_0. Argumentele punctelor de stagnare pe cercul $|\zeta| = 1$ sînt $\theta_f = \theta_0$ și $\theta_a = \pi + \theta_0$.

Rețeaua liniară corespunzătoare este aceeași ca în cazul precedent (fig. 1*b*), deci se mențin expresiile (10)—(13′). Din (23) rezultă că modulul transformării $\left|\frac{dZ}{dz}\right|$ e dat tot de relația (14).

Potențialul complex al curentului general din planul Z este

$$f_0(Z) = \frac{-\dot{V} + i\Gamma_0}{2\pi} \ln\frac{Z}{\sqrt{R_1 R_2}}.$$

Inversînd funcția de transformare (23), cu $z_1 = ie^{-i\beta_0} z$,

$$z = \frac{nt}{2\pi} ie^{i\beta_0} \ln\frac{Z}{\sqrt{R_1 R_2}},$$

se obține potențialul complex al curentului general corespunzător din planul rețelei liniare

$$f_0(z) = f_0(Z(z)) = \frac{-\dot{V} + i\Gamma_0}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{nt} ie^{-i\beta_0} z\right) = \frac{\Gamma_0 + i\dot{V}}{nt} e^{-i\beta_0} z = \overline{v}_\infty z.$$

Viteza asimptotică din planul z are componentele:

$$v_{\infty x} = \frac{1}{nt}(\Gamma_0 \cos\beta_0 + \dot{V}\sin\beta_0), \quad v_{\infty y} = \frac{1}{nt}(\Gamma_0 \sin\beta_0 - \dot{V}\cos\beta_0). \tag{27}$$

Modulul vitezei v_∞ se calculează tot cu formula (17), iar incidența α_∞ rezultă din relația

$$\operatorname{tg}\alpha_\infty = \frac{1 - \frac{\Gamma_0}{\dot{V}}\operatorname{tg}\beta_0}{\frac{\Gamma_0}{\dot{V}} + \operatorname{tg}\beta_0}. \tag{28}$$

Momentul hidrodinamic (19) se anulează cînd $\alpha_\infty = 0$, deci cînd $\operatorname{tg} \beta_0 = \frac{\dot{V}}{\Gamma_0}$. În acest caz, liniile de curent ale mișcării sînt congruente cu profilele rețelei circulare. Viteza e dată tot de formula (20).

4. REȚEA CIRCULARĂ ROTITOARE

Se consideră pentru precizarea metodei, o rețea de pompă (fig. 1*a*) și, pornind de la suprapunerea mișcărilor componente, viteza absolută de curgere prin rețeaua rotitoare se obține prin însumarea vectorială a

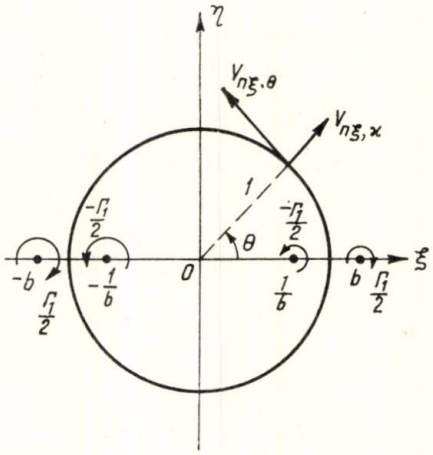


Fig. 3

vitezei V pe profilul rețelei fixe, dată de formula (20), cu viteza datorată rotației rețelei; a doua viteză are componenta normală la profil dată de expresia

$$V_n = u_n = \omega R \sin \beta_0. \tag{29}$$

Valoarea acestei viteze se caută în planul ζ, folosind relația

$$\overline{v}_{n\zeta} = \overline{V}_n \frac{dZ}{dz} \cdot \frac{dz}{d\zeta}, \tag{30}$$

unde $\overline{v}_{n\zeta}$ este viteza complexă corespunzătoare în planul ζ, componentei V_n.

Viteza V_n fiind normală la profilul rețelei circulare și orientată în sensul de rotație (sensul orar) rezultă

$$\overline{V}_n = \omega R \sin \beta_0 \, e^{i(\beta_0 - \nu)} = \omega \sin \beta_0 \, e^{i\beta_0} \, R e^{-i\nu} = \omega \sin \beta_0 \, e^{i\beta_0} \, \overline{Z}. \tag{31}$$

Ținînd seama de transformarea (1), se obține

$$\frac{dZ}{dz} = \frac{2\pi}{nt} ie^{-i\beta_0} Z, \tag{32}$$

iar derivata funcției Weinig (11) este

$$\frac{dz}{d\zeta} = -\frac{bt}{\pi} \cdot \frac{e^{-i\lambda}(b^2\zeta^2 - 1) + e^{i\lambda}(\zeta^2 - b^2)}{(\zeta^2 - b^2)(b^2\zeta^2 - 1)}.$$

Pe cerc, $\zeta_c = e^{i\theta}$, deci derivata devine

$$\left(\frac{dz}{d\zeta}\right)_c = \frac{2bt}{\pi} ie^{-i\theta} \frac{b^2 \sin(\theta - \lambda) + \sin(\lambda + \theta)}{b^4 - 2b^2 \cos 2\theta + 1}. \tag{33}$$

Înlocuind expresiile (31)—(33) în formula (30), rezultă:

$$\overline{v}_{n\zeta} = -\omega R^2 \frac{4b}{n} \sin\beta_0 \frac{b^2 \sin(\theta - \lambda) + \sin(\theta + \lambda)}{b^4 - 2b^2 \cos 2\theta + 1} e^{-i\theta}.$$

Din relația cunoscută

$$v_{n\zeta,\,r} - iv_{n\xi,\,\theta} = e^{i\theta}\,\overline{v}_{n\zeta},$$

se deduce

— componenta tangențială $v_{n\zeta,\,\theta}$ pe cercul $|\zeta| = 1$ este nulă;
— componenta radială este

$$v_{n\zeta,\,r} = -\frac{4\omega b}{n} \sin\beta_0 R^2 \frac{b^2 \sin(\theta - \lambda) + \sin(\theta + \lambda)}{b^4 - 2b^2 \cos 2\theta + 1}. \tag{34}$$

Efectul componentei V_n, normale la profilul rețelei circulare, este apariția unei componente tangențiale suplimentare, care se determină mai întîi pe cercul $|\zeta| = 1$.

Pentru aceasta se utilizează formula lui Schwarz [1]:

$$\psi(\theta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varphi(\theta') \operatorname{ctg} \frac{\theta - \theta'}{2} d\theta' + \psi(0), \tag{35}$$

în care $\varphi + i\psi$ este o funcție olomorfă, iar $\psi(0)$ este valoarea părții imaginare în $\zeta = 0$.

Deoarece centrul cercului nu face parte din domeniul de mișcare din planul ζ (exteriorul rețelei circulare se transformă pe exteriorul cercului), rezultă că substituind

$$\varphi + i\psi = v_{n\zeta,\,r} - iv_{i\zeta},$$

se obţin :

$$\varphi = v_{n\zeta,\,r}\,; \quad \psi = -\,v_{t\zeta} \quad \text{şi} \quad \psi\,(0) = 0.$$

Astfel, din formula (35), se deduce viteza tangenţială pe cerc datorată vitezei radiale $v_{n\zeta,\,r}$.

$$v_{t\zeta}(\theta) = \frac{4\omega b}{n} \sin\beta_0 \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} R^2 \frac{b^2\sin(\theta'-\lambda)+\sin(\theta'+\lambda)}{b^4 - 2b^2\cos 2\theta' + 1} \operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta'}{2}\,\mathrm{d}\theta'. \quad (36)$$

Punctul f de argument $\theta = \theta_0$ trebuie să rămînă însă punct de stagnare pentru satisfacerea ipotezei lui Jukovski în bordul de fugă F_0 al profilului reţelei circulare. Deoarece în prima mişcare componentă, corespunzătoare reţelei circulare fixe, această condiţie este îndeplinită, în a doua mişcare componentă, datorată rotaţiei reţelei, trebuie introdus în planul cercului un curent cu circulaţie pură. În acest scop, se plasează în punctele $\zeta = \pm b$ vîrtejurile suplimentare $\frac{\Gamma_1}{2}$, de exemplu în sens orar, iar în imaginile lor, $\zeta = \pm\frac{1}{b}$, se dispun imaginile primelor vîrtejuri faţă de cerc. Potenţialul complex al tuturor este

$$f_{\Gamma_1}(\zeta) = \frac{\mathrm{i}\Gamma_1}{4\pi} \ln \frac{\zeta^2 - b^2}{\zeta^2 - \frac{1}{b^2}}. \quad (37)$$

Derivînd această funcţie, rezultă

$$\frac{\mathrm{d}f_{\Gamma_1}(\zeta)}{\mathrm{d}\zeta} = \frac{\mathrm{i}\Gamma_1(b^4-1)}{2\pi(\zeta^2-b^2)(b^2\zeta^2-1)}$$

şi viteza indusă pe cercul $|\zeta| = 1$ devine

$$v_{\theta\Gamma_1} = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\cdot\frac{b^4-1}{b^4 - 2b^2\cos 2\theta + 1}. \quad (38)$$

Viteza tangenţială totală $v'_{t\zeta}$ pe cerc se obţine însumînd expresiile (36) şi (38)

$$v'_{t\zeta}(\theta) = \frac{\Gamma_1}{2\pi}\cdot\frac{b^4-1}{b^4-2b^2\cos 2\theta+1} + \frac{4\omega b}{n}\sin\beta_0\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta')\operatorname{ctg}\frac{\theta-\theta'}{2}\mathrm{d}\theta', \quad (39)$$

în care

$$F(\theta') = R^2(\theta')\frac{b^2\sin(\theta'-\lambda)+\sin(\theta'+\lambda)}{b^4 - 2b^2\cos 2\theta' + 1}. \quad (40)$$

Efectuînd integrala

$$I(\theta) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F(\theta')\operatorname{ctg}\frac{\theta - \theta'}{2}\,d\theta' \tag{41}$$

în raport cu θ', se obține o expresie în funcție de θ și de circulația necunoscută Γ_1. Această circulație se determină din condiția anulării vitezei $v'_{i\zeta}(\theta)$ în punctul f, deci

$$v'_{i\zeta}(\theta_0) = 0. \tag{42}$$

Dacă valoarea circulației Γ_1 este negativă, se schimbă sensurile vîrtejurilor.

Circulația totală pe cerc, deci și pe profil, este

$$\Gamma_t = \Gamma - \Gamma_1, \tag{43}$$

unde Γ este circulația (12) pe profilul rețelei fixe.

Calculul integralei singulare $I(\theta)$ se efectuează după ce în prealabil se trasează graficul funcției continue $F(\theta')$. Acest grafic se obține după ce s-a dedus expresia funcției $R(\theta)$, așa cum s-a arătat în aliniatul 2.

Integrala $I(\theta)$ fiind singulară, se calculează după metoda prezentată în [1]. Cu notațiile

$$\tau = \theta' - \theta; \qquad \Delta F(\tau) = F(\tau) - F(-\tau), \tag{44}$$

și utilizînd formula de aproximare a lui Cebîșev cu $p = 7$ termeni ai sumei, rezultă

$$I(\theta) = -0{,}125\left(\frac{dF}{d\theta'}\right)_{\theta'=\theta} - 0{,}1507\sum_{i=1}^{7}\Delta F_i, \tag{45}$$

unde $\Delta F_i = F(\tau_i) - F(-\tau_i)$.

După efectuarea integralei $I(\theta)$ și determinarea circulației Γ_1 din condiția (42), se calculează cu formula (39) repartiția vitezei $v'_{i\zeta}(\theta)$ pe cerc, datorată rotației rețelei. Această valoare se transpune pe profil prin formula

$$V'_i = \frac{v'_{i\zeta}(\theta)}{\left|\frac{dZ}{dz}\right|\cdot\left|\frac{dz}{d\zeta}\right|} = \frac{n}{4bR}\cdot\frac{b^4 - 2b^2\cos 2\theta + 1}{|b^2\sin(\theta - \lambda) + \sin(\lambda + \theta)|}\,v'_{i\zeta}(\theta). \tag{46}$$

Dacă viteza $v'_{i\zeta}(\theta)$ are sens trigonometric pe semicercul $\theta \in [\theta_0;\ \pi + \theta_0]$, atunci pe fața concavă (notată cu plus) se obține o viteză V'_i dinspre F_0 spre A_0, deci viteza tangențială totală pe profil este

$$V_t^+ = V^+ - V_t'^+, \tag{47}$$

unde V^+ are expresia (20) cu $\theta \in [\theta_0 ; \pi + \theta_0]$. Dacă sensul vitezei $v'_{t\zeta}(\theta)$ pe semicercul $\theta \in [\theta_0 ; \pi + \theta_0]$ este cel orar, atunci $v'_{t\zeta}(\theta) < 0$, iar relația (47) se aplică și în acest caz. Raționamente analoge arată că pe fața convexă (notată cu minus), deci pentru $\theta \in [\pi + \theta_0 ; 2\pi + \theta_0]$ se aplică relația

$$V_t^- = V^- + V_t'^-. \tag{48}$$

Formulele (47) și (48) se unifică astfel:

$$V_t^{\pm} = V^{\pm} \mp V_t'^{\pm}. \tag{49}$$

Avînd repartiția vitezei absolute tangente la profil, se calculează viteza relativă pe profil cu ajutorul relației evidente

$$w^{\pm} = V_t^{\pm} + \omega R \cos \beta_0. \tag{50}$$

Repartiția presiunii pe profil rezultă utilizînd formula lui Bernoulli, respectiv coeficientul (adimensional) de presiune

$$c_p^{\pm} = \frac{p^{\pm} - p_1^*}{\frac{1}{2} \rho \omega^2 R_2^2} = \left(\frac{R}{R_2}\right)^2 - \left(\frac{w^{\pm}}{R_2}\right)^2. \tag{51}$$

OBSERVAȚII

1). Circulația Γ_0 la rețeaua directoare de pompă este egală cu circulația la ieșirea din rotorul situat în amonte de această rețea.

2). Circulația Γ_0 la rețeaua directoare de turbină reprezintă intensitatea turbionară la intrarea în rotorul situat în aval de această rețea.

3). La rețeaua rotorică de pompă, ventilator sau turbocompresor centrifug, lipsită de aparat director în amonte, intrarea este ortogonală și deci $\Gamma_0 = 0$.

Primită la redacție la 17 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. D. TAȘCĂ, GH. ZIDARU, *Curs de teoria hidrodinamică a rețelelor de profile* (manuscris).
2. E. CARAFOLI, T. OROVEANU, *Mecanica fluidelor*, vol. II, Edit. Academiei, 1955.
3. D. TAȘCĂ, GH. ZIDARU, *Studiul rețelelor circulare de profile prin metoda Weinig*, Sörensen, comunicare la ses. șt. a IPB, 1968.
4. D. PAVEL, GH. ZIDARU, *Opredelenie skorosti na vîhodnoi kromke i tociki zastoia dlia nekotorîh izolirovannîh profilei ili v lineinoi profilnoi reșiotke*, Buletin IPB, **30**, *3—4*, p. 113—120 (1968).
5. GH. ZIDARU, *Contribuții la hidrodinamica rețelelor circulare de profile cu aplicație la turbomașini*, Teză de doctorat, IPB, 1971.

ASUPRA TRANSFERULUI DE CĂLDURĂ ÎN GAURA DE SONDĂ ÎN TIMPUL INJECȚIEI UNUI LICHID CALD ÎN ZĂCĂMÎNT

de T. OROVEANU
Institutul de petrol, Ploiești

Se consideră problema determinării pierderilor de căldură în gaura de sondă atunci cînd se injectează în stratul productiv un lichid cald în scopul de a se mări eficiența procesului de dezlocuire a petrolului. În literatura de specialitate sînt cunoscute formule care permit determinarea temperaturii la talpa sondei, deduse prin considerații elementare de bilanț energetic. În lucrare se încearcă o tratare a problemei pe baze teoretice mai riguroase, considerîndu-se mișcarea lichidului cald în sondă, de la suprafață pînă în dreptul stratului supus procesului de injecție, împreună cu procesul de transfer de căldură către formația care înconjoară gaura de sondă. Rezolvarea exactă a acestei probleme fiind dificilă, se recurge la unele aproximații care permit să se găsească formule pentru calculul variației temperaturii lichidului injectat în gaura de sondă.

1. **Introducere.** Procedeul de reducere a viscozității petrolului prin dezlocuirea lui cu un fluid cald injectat în zăcămînt pare a fi unul dintre cele mai recomandabile, în special în cazurile în care valoarea mare a viscozității stînjenește exploatarea zăcămîntului. Pentru o bună aplicare a acestui procedeu este necesar, pe de o parte, să se studieze problema pierderilor de căldură de la suprafață pînă la talpa sondei, iar pe de alta, să se cerceteze procesul de dezlocuire, realizat în acest caz în condiții mai complicate, datorite efectului termic.

Prima dintre aceste probleme, relativ mai simplă decît a doua, prezintă însă o importanță deosebită deoarece cunoașterea cît mai precisă a temperaturii la talpa sondei este absolut necesară pentru stabilirea eficacității procesului de dezlocuire care se petrece în stratul productiv. Pe baza unor considerații elementare de bilanț energetic, H. J. Ramey Jr. [5] a găsit formule pentru calculul temperaturii la talpa sondei atît în cazul în care se injectează un lichid încălzit cît și în acela în care se efectuează o injecție de abur. O extindere a metodei preconizate de acest autor, pe care am efectuat-o într-o lucrare recent publicată [4], permite calculul temperaturii la talpa sondei, dacă se injectează un lichid încălzit, ținîndu-se seama de faptul că parametrii termici ai mediului poros nu sînt constanți ci depind de temperatură.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1061 – 1074

În cele ce urmează, ne propunem să reluăm această problemă pe baze teoretice mai riguroase, considerînd posibilităţile de găsire a soluţiei care satisface ecuaţiile diferenţiale ale mişcării cu transfer de căldură a unui fluid. Pentru evitarea unor complicaţii prea mari, ne vom limita la cazul în care se injectează un lichid încălzit şi vom presupune de asemenea că parametrii termici ai stratului productiv sînt constanţi. După cum se va putea observa însă mai departe, chiar şi cu aceste ipoteze care simplifică într-o oarecare măsură problema, găsirea unei soluţii relativ simple nu este posibilă decît prin introducerea unor aproximaţii.

2. **Ecuaţiile problemei.** Vom considera mişcarea unui lichid încălzit printr-un tub de secţiune circulară, cu axa verticală. Mişcarea se produce de sus în jos, corespunzînd deci injecţiei lichidului prin tubingul sondei, Origina axelor de coordonate cilindrice, impuse de simetria axială a mişcării. o alegem în planul secţiunii de la suprafaţă a tubingului, axa avînd deci sensul verticalei descendente.

Datorită faptului că lichidul este incompresibil iar mişcarea poate fi presupusă laminară, viteza de injecţie fiind mică, ecuaţiile Navier-Stokes ne dau

$$\mu\left(\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}r^2}+\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)=\frac{\partial p}{\partial z}-\gamma, \tag{1}$$

în ipoteza bine justificată că mişcarea este permanentă. Viteza v depinde numai de coordonata r, ca urmare a simetriei axiale ; p reprezintă presiunea iar γ şi μ sînt greutatea specifică, respectiv viscozitatea dinamică a lichidului.

A doua ecuaţie a problemei este aceea a energiei care, în acest caz, capătă forma

$$\rho C\left(\frac{\partial T}{\partial t}+\frac{\partial T}{\partial z}v\right)=\mu\left(\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}r}\right)^2+k\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right) \tag{2}$$

T fiind temperatura, ρ masa specifică a lichidului, C căldura lui specifică iar k, conductivitatea lui termică. Am admis, aşa cum este normal, că fenomenul de transfer de căldură este nestaţionar.

Deoarece constantele fizice ale lichidului, şi în special viscozitatea, depind de temperatură, ecuaţiile (1) şi (2) trebuie rezolvate în principiu împreună, fapt care complică însă în mod considerabil găsirea soluţiei. O simplificare importantă, care a mai fost utilizată şi în alte probleme, se obţine presupunînd că viscozitatea este constantă, ceea ce permite determinarea cîmpului de viteze independent de modul în care variază temperatura. În cazul de faţă, aproximaţia este cu atît mai bună cu cît pierderea de căldură între suprafaţă şi stratul în care se injectează lichidul cald este mai mică.

Din ecuaţia (1), tratată separat, rezultă expresia bine cunoscută a vitezei

$$v = 2v_m\left(1 - 4\frac{r^2}{d^2}\right) \tag{3}$$

în care v_m este viteza medie iar d diametrul interior al tubului.

Cu acest rezultat, ecuaţia (2) devine

$$\frac{\partial T}{\partial t} + 2v_m\left(1 - 4\frac{r^2}{d^2}\right)\frac{\partial T}{\partial z} = 256\,\frac{\mu}{\rho C}\,v_m^2\frac{r^2}{d^4} + \\ + \varkappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2}\right), \tag{4}$$

unde am introdus notaţia

$$\varkappa = \frac{k}{\rho C}. \tag{5}$$

Urmează acum să stabilim condiţiile pe care trebuie să le satisfacă soluţia ecuaţiei (4). Avem astfel

$$t = 0,\ T = T_i \tag{6}$$

T_i fiind temperatura iniţială din tub, care este presupus umplut cu lichid. Mai departe, vom reveni cu precizări asupra acestei condiţii.

De asemenea, apare evidentă condiţia

$$z = 0,\ T = T_0, \tag{7}$$

T_0 fiind temperatura constantă cu care se injectează lichidul la suprafaţă.

O a treia condiţie are forma

$$r = \frac{d}{2},\ \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{\alpha D}{kd}(T - T_e) = 0, \tag{8}$$

D fiind diametrul exterior al burlanelor iar T_e temperatura suprafeţei externe a acestora. Pentru a obţine această condiţie, egalăm cantitatea de căldură cedată de lichid în unitatea de timp, prin suprafaţa elementară $\pi d\mathrm{d}z$

$$\mathrm{d}q = -k\frac{\partial T}{\partial r}\pi d\mathrm{d}z, \tag{9}$$

cu aceea transmisă mediului poros înconjurător

$$dq = \alpha(T - T_e)\,\pi D\,dz. \tag{10}$$

În această ultimă formulă, apare coeficientul total de transmisie a căldurii care poate fi calculat cu o formulă cunoscută [2]. Reamintim numai că în expresia acestui coeficient trebuie inclusă transmisia căldurii de la lichid la peretele interior al tubingului, prin metalul din care sînt construite ţevile acestuia, de la peretele exterior al tubingului la lichidul din spaţiul inelar, de la acesta la peretele interior al burlanelor şi prin metalul din care sînt construite burlanele.

Pentru a putea elimina temperatura necunoscută T_e din condiţia (8), utilizăm una din formulele care exprimă transmisia căldurii de la sondă la formaţia înconjurătoare. Întrucît această problemă nu face obiectul cercetărilor noastre, vom alege una dintre situaţiile care au mai fost luate în consideraţie [5] şi anume vom asimila sonda cu o sursă liniară de căldură de intensitate $\frac{dq}{dz}$ ceea ce ne dă

$$T - T_f = -\frac{1}{4\pi k_f}\frac{dq}{dz}\,Ei\left(-\frac{r^2}{4\varkappa_f t}\right), \tag{11}$$

T fiind temperatura la o rază oarecare r, T_f temperatura formaţiei, k_f conductivitatea ei termică, iar

$$\varkappa_f = \frac{k_f}{\rho_f C_f}, \tag{12}$$

unde ρ_f şi C_f sînt, respectiv, masa specifică şi căldura specifică a rocii.

Pe suprafaţa exterioară a burlanelor $\left(r = \frac{D}{2}\right)$, avem $T = T_e$ şi din (11) obţinem

$$T_e - T_f = -\frac{1}{4\pi k_f}\frac{dq}{dz}\,Ei\left(-\frac{D^2}{16\varkappa_f t}\right) \tag{13}$$

Din (10) şi (13) deducem imediat

$$T - T_e = \frac{T - T_f}{1 - \frac{\alpha D}{4k_f}\,Ei\left(-\frac{D^2}{16\varkappa_f t}\right)} \tag{14}$$

şi după substituirea în condiţia (8) aceasta ia forma

$$r = \frac{d}{2}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{T - T_f}{\frac{kd}{\alpha D} - \frac{kd}{4k_f} Ei\left(-\frac{D^2}{16\varkappa_f t}\right)} = 0. \tag{15}$$

Observăm că în (15) intervine timpul, fapt care este de natură să complice rezolvarea problemei propuse. O altă complicaţie provine şi din faptul că temperatura T_f a formaţiei nu este constantă ci depinde de adîncimea z.

În sfîrşit, mai putem scrie condiţia

$$r = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0, \tag{16}$$

care rezultă imediat din considerente de ordin fizic, temperatura trebuind să aibă, din cauza simetriei axiale, valoarea maximă în axa tubului.

Ar mai trebui scrisă încă o condiţie la talpa sondei, respectiv pentru $z = h$, h fiind adîncimea găurii de sondă. Stabilirea acestei condiţii prezintă unele dificultăţi şi deoarece vom recurge la o simplificare în urma căreia o astfel de condiţie nu mai este necesară, vom lăsa la o parte consideraţiile care ar putea conduce la găsirea ei.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\bar{t} = \frac{4\nu t}{d^2}, \quad \bar{r} = \frac{2r}{d}, \quad \bar{z} = \frac{2z}{d} \tag{17}$$

ν fiind viscozitatea cinematică a lichidului precum şi notaţia

$$\overline{T} = \frac{T}{T_0} \tag{18}$$

ecuaţia (4) ia forma

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{t}} + \mathcal{R}(1 - \bar{r}^2)\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{z}} = 32\,\mathcal{E}n\,\bar{r}^2 + \frac{1}{\mathcal{P}t}\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \bar{r}^2} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \bar{z}^2}\right), \tag{19}$$

în care

$$\mathcal{R} = \frac{v_m d}{\nu} \tag{20}$$

este numărul Reynolds,

$$\mathcal{P}r = \frac{\nu}{\varkappa} \tag{21}$$

numărul lui Prandtl iar

$$\mathcal{E}n = \frac{v_m^2}{2CT_0} \tag{22}$$

un parametru adimensional ce reprezintă raportul dintre energia cinetică şi energia calorică la intrarea în tubing, ambele raportate la unitatea de volum de lichid. Acest lucru se poate uşor constata dacă înmulţim membrul drept al formulei precedente cu $\frac{\rho}{2}$, atît la numărător cît şi la numitor.

La rîndul lor, condiţiile stabilite mai înainte devin

$$\bar{t} = 0,\ \overline{T} = \overline{T}_i;\ \bar{z} = 0,\ \overline{T} = 1 \tag{23}$$

respectiv

$$r = 1,\ \frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\overline{T} - \overline{T}_f}{\frac{2}{\mathcal{N}u} - \frac{k}{2k_f} Ei\left(-\frac{\nu D^2}{4\varkappa_f d^2 t}\right)} = 0 \tag{24}$$

şi

$$r = 0,\ \frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{r}} = 0, \tag{25}$$

unde

$$\mathcal{N}u = \frac{\alpha D}{k} \tag{26}$$

este numărul lui Nusselt.

Vom observa însă că parametrul $\mathcal{E}n$ definit prin (22) are o valoare mică, mult subunitară, astfel că termenul corespunzător din ecuaţia (10) poate fi neglijat fără a se comite o eroare apreciabilă. De altfel, într-o mişcare cu variaţii relativ mari de temperatură, din cauza pierderilor în mediul înconjurător, cum este aceea de care ne ocupăm, căldura disipată prin frecare, reprezentată de termenul la care ne referim, nu joacă un rol important.

O altă simplificare a ecuaţiei (19) se poate obţine dacă observăm că variaţia temperaturii în lungul axei tubingului se produce în cea mai mare parte datorită convecţiei, efectul conducţiei fiind mult mai mic.

Prin urmare, în ecuația (19) termenul $\mathcal{R}(1-\bar{r}^2)\dfrac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{z}}$ este mai important decît $\dfrac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \bar{z}^2}$, acesta din urmă putînd fi deci neglijat, aproximație care este uzuală în astfel de probleme. Ajungem astfel la ecuația

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{t}} + \mathcal{R}(1-\bar{r}^2)\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\mathcal{P}_t}\left(\frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{r}}\right) \tag{27}$$

și se observă că în urma acestei ultime simplificări condițiile (23), respectiv (24) și (25), determină soluția problemei pe care o studiem. Cu toate acestea, găsirea soluției rămîne dificilă, în primul rînd din cauza formei pe care o are condiția (24) și în al doilea rînd din cauza însăși a ecuației (27). Din aceste motive, vom căuta să examinăm posibilitățile de rezolvare aproximativă a problemei la care se poate ajunge atît prin simplificarea condiției amintite cît și prin aceea a ecuației însăși.

3. **Posibilități de rezolvare aproximativă.** Scopul pe care îl urmărim este acela de a găsi o soluție relativ simplă și prin urmare ușor de utilizat în calcule numerice, fără ca aproximațiile introduse să conducă la erori importante. Ni se pare nimerit să trecem în revistă cîteva dintre modalitățile de realizare a acestui obiectiv, oprindu-ne în cele din urmă la cea mai simplă dintre ele.

3.1. *Condiții la limită independente de timp.* Faptul că una dintre condițiile la limită și anume (24) depinde de timp îngreunează în mod considerabil găsirea soluției. Observăm însă că funcția $-Ei\left(-\dfrac{\nu D^2}{4\varkappa_f d^2 t}\right)$ are valori foarte mici atunci cînd argumentul ei este mare. Prin urmare, cel puțin în faza inițială a procesului de injecție, căreia îi corespund de fapt cele mai importante pierderi de căldură, putem neglija în condiția (24) termenul care conține funcția menționată mai sus. La valori suficient de mici ale timpului, această aproximație conduce la o eroare cu totul nesemnificativă iar dacă numărul lui Nusselt nu are o valoare mare, eroarea rămîne acceptabilă chiar într-o fază mai tîrzie a procesului de injecție.

Ca urmare a considerațiilor precedente, ecuația (27) trebuie rezolvată cu condițiile (23) și (25) în timp ce în loc de (24) avem

$$\bar{r} = 1, \quad \frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{r}} + \frac{\mathcal{N}u}{2}(\overline{T} - \overline{T}_f) = 0. \tag{28}$$

Remarcăm însă că în acest mod problema nu s-a simplificat prea mult, datorită faptului că în (28) apare temperatura formației care este variabilă. Urmează deci să examinăm și acest aspect al problemei.

3.2. *Schimbare de funcție.* După cum se știe, pentru temperatura formației se poate considera o variație liniară cu adîncimea de forma

$$T_f = az + b. \tag{29}$$

În ecuația (27), facem schimbarea de funcție

$$\overline{T}_1 = \frac{T_0}{T_0 - T_f}(1 - \overline{T}) = \frac{T_0 - T}{T_0 - T_f} \tag{30}$$

și deoarece T_0 este o constantă iar T_f nu depinde de $\bar{t}$ și de $\bar{r}$, obținem

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{t}} = -\frac{T_0 - T_f}{T_0}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{t}},$$

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{r}} = -\frac{T_0 - T_f}{T_0}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{r}}, \quad \frac{\partial^2 \overline{T}}{\partial \bar{r}^2} = -\frac{T_0 - T_f}{T_0}\frac{\partial^2 \overline{T}_1}{\partial \bar{r}^2}, \tag{31}$$

respectiv

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{z}} = -\frac{T_0 - T_f}{T_0}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{z}} + \frac{T_0 - T}{T_0 - T_f}\frac{1}{T_0}\frac{\mathrm{d}T_f}{\mathrm{d}\bar{z}}. \tag{32}$$

Diferența $T_0 - T$ este însă mult mai mică decît $T_0 - T_f$ iar $\frac{1}{T_0}\frac{\mathrm{d}T_f}{\mathrm{d}\bar{z}} = \frac{d}{2T_0}\frac{\mathrm{d}T_f}{\mathrm{d}z}$ are o valoare destul de mică deoarece temperatura formației nu crește prea repede cu adîncimea. Rezultă de aici că putem adopta pentru derivata $\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{z}}$ expresia aproximativă

$$\frac{\partial \overline{T}}{\partial \bar{z}} \approx -\frac{T_0 - T_f}{T_0}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{z}}, \tag{33}$$

astfel că ecuația (27) devine

$$\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{t}} + \mathcal{R}(1 - \bar{r}^2)\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\mathcal{P}_t}\left(\frac{\partial^2 \overline{T}_1}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \overline{T}_1}{\partial \bar{r}}\right). \tag{34}$$

Apare acum necesar să ne oprim asupra primei condiții (23) pentru a aduce unele clarificări în legătură cu aceasta. În principiu, există cel puțin trei posibilități de a preciza temperatura inițială T_i din coloana sondei și anume:

a) putem admite că în momentul în care începe injecția, coloana este plină cu un lichid aflat în echilibru termic cu formația înconjurătoare; în acest caz ar trebui să punem $T_i = T_f = az + b$;

b) se poate presupune că la $t = 0$ coloana este umplută cu un lichid care are o temperatură diferită de aceea a formației, constantă sau eventual depinzînd de z;

c) pentru calcule, cea mai comodă ipoteză este aceea de a admite că în coloana sondei se găsește lichidul ce urmează a fi injectat în stratul productiv și că acesta are o temperatură constantă și egală cu aceea de la suprafață; ipoteza poate fi acceptată dacă presupunem că în primele momente după începerea injecției transferul de căldură de la lichidul din coloană către formația înconjurătoare nu a condus încă la o variație apreciabilă a temperaturii din coloană.

După adoptarea acestei ultime ipoteze, condițiile cu care trebuie găsită soluția ecuației (34) devin

$$\bar{t} = 0,\ \bar{T}_1 = 0;\ \bar{z} = 0,\ \bar{T}_1 = 0$$
$$\bar{r} = 1,\ \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{r}} - \frac{\mathcal{N}u}{2}(1 - \bar{T}_1) = 0;\ \bar{r} = 0,\ \frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{r}} = 0. \tag{35}$$

Observăm că prin schimbarea de funcție (30) temperatura T_f nu mai apare în a treia condiție (35); în schimb, această condiție nu este omogenă ceea ce poate conduce la unele dificultăți în găsirea soluției. De asemenea, rezolvarea problemei este îngreunată și de faptul că în ecuația (34) coeficientul derivatei $\frac{\partial \bar{T}_1}{\partial \bar{z}}$ este funcție de $\bar{r}$.

3.3. *Varianta de rezolvare aproximativă.* Pentru a se putea ajunge la rezolvarea problemei pe o cale cît mai simplă, apare indicat să facem o nouă schimbare de funcție și anume

$$\bar{T}_2 = 1 - \bar{T}_1 = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} \tag{36}$$

care ne conduce la ecuația

$$\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{t}} + \mathcal{R}(1 - \bar{r}^2)\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\mathcal{P}_t}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{r}}\right) \tag{37}$$

de aceeași formă cu (34).

Ecuațiile de această formă mai sînt întîlnite în literatura de specialitate, referitor la alte probleme, în special de difuzie convectivă. În general, nu au fost date încă soluții exacte ci numai soluții numerice sau obținute prin diferite procedee de aproximații succesive.

O simplificare importantă se realizează dacă în termenul de transport convectiv se introduce în loc de viteza variabilă, reprezentată prin factorul $1 - \bar{r}^2$, o valoare medie. Obținem astfel, în loc de (37)

$$\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{t}} + \frac{\mathcal{R}}{2}\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{\mathcal{P}_t}\left(\frac{\partial^2 \bar{T}_2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \bar{T}_2}{\partial \bar{r}}\right) \tag{38}$$

şi condiţiile pe care trebuie să le satisfacă soluţia acestei ecuaţii sînt

$$\bar{t} = 0,\ \overline{T}_2 = 1\,;\ \bar{z} = 0,\ \overline{T}_2 = 1$$
$$\bar{r} = 1,\ \frac{\partial \overline{T}_2}{\partial \bar{r}} + \frac{\mathcal{N}u}{2}\overline{T}_2 = 0\,;\ \bar{r} = 0,\ \frac{\partial \overline{T}_2}{\partial \bar{r}} = 0, \tag{39}$$

rezultînd imediat din (35).

În felul acesta am ajuns la o problemă a cărei soluţie se poate găsi fără nici un fel de dificultate.

4. **Rezolvarea problemei.** Examinarea ecuaţiei (38) şi a condiţiilor (39) conduce la concluzia că aplicarea transformărilor integrale reprezintă procedeul de soluţionare cel mai indicat în acest caz.

Vom începe astfel prin introducerea transformatei finite a lui Hankel

$$\overline{T}_{2H} = \int_0^1 \bar{r}\overline{T}_2 J_0(\lambda_n \bar{r})\, \mathrm{d}\bar{r}, \tag{40}$$

în care λ_n reprezintă rădăcinile ecuaţiei

$$\lambda_n J_0'(\lambda_n) + \frac{\mathcal{N}u}{2} J_0(\lambda_n) = 0. \tag{41}$$

Se poate arăta [6] că în acest caz

$$\int_0^1 \bar{r}\left(\frac{\partial^2 \overline{T}_2}{\partial \bar{r}^2} + \frac{1}{\bar{r}}\frac{\partial \overline{T}_2}{\partial \bar{r}}\right) J_0(\lambda_n \bar{r})\, \mathrm{d}\bar{r} = -\lambda_n^2 \overline{T}_{2H} \tag{42}$$

dacă funcţia $\overline{T}_2$ satisface a treia condiţie (39).

În felul acesta, ecuaţia (38) devine

$$\frac{\partial \overline{T}_{2H}}{\partial \bar{t}} + \frac{\mathcal{R}}{2}\frac{\partial \overline{T}_{2H}}{\partial \bar{z}} = -\frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}t}\overline{T}_{2H} \tag{43}$$

şi condiţiile pe care trebuie să le satisfacă soluţia sînt

$$\bar{t} = 0,\ \overline{T}_{2H} = \frac{1}{\lambda_n} J_1(\lambda_n)\,;\ \bar{z} = 0,\ \overline{T}_{2H} = \frac{1}{\lambda_n} J_1(\lambda_n) \tag{44}$$

obţinute din (39) prin aplicarea aceleeaşi transformări integrale.

Observăm, de asemenea, că ultima condiţie (39) este satisfăcută automat deoarece derivata funcţiei $J_0(\lambda_n \bar{r})$ se anulează pentru $\bar{r} = 0$.

Soluția ecuației (43) cu condițiile (44) poate fi găsită ușor dacă utilizăm transformata lui Laplace în raport cu variabila $\bar{t}$

$$\overline{T}_{2HL} = \int_0^\infty \overline{T}_{2H}\, e^{-s\bar{t}}\, d\bar{t}. \tag{45}$$

Dacă ținem seama de prima condiție (44) și efectuăm cîteva calcule simple, ecuația (43) ia forma

$$\frac{d\overline{T}_{2HL}}{d\bar{z}} + \frac{2}{\mathcal{R}}\left(s + \frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}_t}\right)\overline{T}_{2HL} = \frac{2}{\mathcal{R}\lambda_n} J_1(\lambda_n). \tag{46}$$

De asemenea, a doua condiție (44) devine

$$z = 0, \quad \overline{T}_{2HL} = \frac{1}{s\lambda_n} J_1(\lambda_n) \tag{47}$$

iar soluția care satisface această condiție este

$$\overline{T}_{2HL} = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} e^{-\frac{2\lambda_n^2}{\mathcal{R}\mathcal{P}_t}\bar{z}} \left[\frac{1}{s} - \frac{1}{s + \frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}_t}}\right] e^{-\frac{2}{\mathcal{R}}s\bar{z}} + \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n\left(s + \frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}_t}\right)}. \tag{48}$$

Cu ajutorul tabelelor [1], [3], găsim originalul care este

$$\overline{T}_{2H} = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}_t}\bar{t}} \tag{49}$$

pentru $\bar{t} < \frac{2\bar{z}}{\mathcal{R}}$ și

$$\overline{T}_{2H} = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} e^{-\frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}_t}\bar{t}} e^{-\frac{2\lambda_n^2}{\mathcal{R}\mathcal{P}_t}\left(\bar{z} - \frac{\mathcal{R}}{2}\bar{t}\right)} \tag{50}$$

pentru $\bar{t} > \frac{2\bar{z}}{\mathcal{R}}$.

Pentru interpretarea acestui rezultat, vom observa că ecuația (43) are sistemul caracteristic

$$\frac{d\bar{t}}{1} = \frac{2d\bar{z}}{\mathcal{R}} = -\frac{\mathcal{P}_t}{\lambda_n^2}\frac{d\overline{T}_{2H}}{\overline{T}_{2H}} \tag{51}$$

ale cărui soluţii sînt

$$\bar{z} - \frac{\mathcal{R}}{2}\bar{t} = C_1, \quad \ln \overline{T}_{2H} + \frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}t}\bar{t} = C_2, \tag{52}$$

C_1 şi C_2 fiind constante arbitrare.

Prin urmare, soluţia generală a ecuaţiei (43) este

$$\varphi\left(\ln \overline{T}_{2H} + \frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}t}\bar{t}, \quad \bar{z} - \frac{\mathcal{R}}{2}\bar{t}\right) = 0 \tag{53}$$

funcţia φ fiind de asemenea arbitrară. Dacă rezolvăm în raport cu $\ln \overline{T}_{2H} + \frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}t}\bar{t}$, rezultă

$$\overline{T}_{2H} = e^{-\frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}t}\bar{t}} f\left(\bar{z} - \frac{\mathcal{R}}{2}\bar{t}\right), \tag{54}$$

expresie în care funcţia f este arbitrară.

Se constată că atît (49) cît şi (50) se încadrează drept cazuri particulare în soluţia (54), funcţia f fiind în (49) egală cu o constantă.

De fapt, soluţia (50) este

$$\overline{T}_{2H} = \frac{J_1(\lambda_n)}{\lambda_n} e^{-\frac{2\lambda_n^2}{\mathcal{R}\mathcal{P}t}\bar{z}} \tag{55}$$

forma (50) fiind dată numai pentru consideraţiile legate de soluţia generală (54).

Condiţia $\bar{t} < \frac{2\bar{z}}{\mathcal{R}}$ se mai scrie

$$\bar{z} - \frac{\mathcal{R}}{2}\bar{t} > 0 \tag{56}$$

şi ne arată că soluţia (49) este valabilă, pentru orice $\bar{t} > 0$, în domeniul definit prin inegalitatea (56) care nu conţine punctul $\bar{z} = 0$. Din acest motiv, (49) nu satisface a doua condiţie (44).

De asemenea, condiţia $\bar{t} > \frac{2\bar{z}}{\mathcal{R}}$ este echivalentă cu

$$\bar{z} - \frac{\mathcal{R}}{2}\bar{t} < 0 \tag{57}$$

şi prin urmare, pentru orice $\bar{t} > 0$, soluţia (55) este valabilă în domeniul astfel definit şi satisface a doua condiţie (44). Cele două soluţii se racordează continuu pentru

$$\bar{z} = \frac{\mathcal{R}}{2}\,\bar{t}. \tag{58}$$

Prin urmare, soluţia problemei propuse este [6]

$$\overline{T}_2 = 2\sum_n \frac{\lambda_n^2 \overline{T}_{2H}}{\lambda_n^2 + \frac{\mathcal{N}u^2}{4}}\,\frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{J_0^2(\lambda_n)} \tag{59}$$

şi pentru $\bar{t} < \frac{2\bar{z}}{\mathcal{R}}$ ia forma

$$\overline{T}_2 = 2\sum_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n)\, e^{-\frac{\lambda_n^2}{\mathcal{P}t}\bar{t}}}{\lambda_n^2 + \frac{\mathcal{N}u^2}{4}}\,\frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{J_0^2(\lambda_n)} \tag{60}$$

în timp ce pentru $\bar{t} > \frac{2\bar{z}}{\mathcal{R}}$ devine

$$\overline{T}_2 = 2\sum_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n)\, e^{-\frac{2\lambda_n^2}{\mathcal{R}\mathcal{P}t}\bar{z}}}{\lambda_n^2 + \frac{\mathcal{N}u^2}{4}}\,\frac{J_0(\lambda_n \bar{r})}{J_0^2(\lambda_n)}. \tag{61}$$

Pentru utilizarea acestor soluţii la determinarea variaţiei temperaturii în tubing în diferite momente, se fixează $\bar{t}$ şi se calculează $\overline{T}_2$ cu ajutorul formulei (61) pentru orice $\bar{z} < \frac{\mathcal{R}}{2}\,\bar{t}$, respectiv cu ajutorul formulei (59) pentru orice $\bar{z} > \frac{\mathcal{R}}{2}\,\bar{t}$. Aşa cum am menţionat mai sus, la $\bar{z} = \frac{\mathcal{R}}{2}\,\bar{t}$ cele două soluţii au aceeaşi expresie. Se observă că, în orice moment, atunci cînd $\bar{z} > \frac{\mathcal{R}}{2}\,\bar{t}$ sau $z > v_m t$, dacă revenim la variabilele dimensionale, temperatura nu depinde decît de timp şi de rază. De asemenea, pentru $z < v_m t$, temperatura este funcţie numai de adîncime şi de rază, dependenţa de rază fiind aceeaşi în ambele situaţii.

Dacă se urmăreşte calcularea temperaturii lichidului la talpa sondei ($z = h$), care este de fapt scopul urmărit, se constată imediat că soluţia utilizabilă este (61) care ia forma

$$\overline{T}_2 = \frac{T - T_f}{T_0 - T_f} = 2 \sum_n \frac{\lambda_n J_1(\lambda_n)\, e^{-\frac{4\lambda_n^2}{\mathcal{R}\mathcal{P}t}\frac{h}{d}}}{\lambda_n^2 + \frac{\mathcal{H}u^2}{4}} \frac{J_0\left(2\lambda_n \frac{D}{d}\right)}{J_0^2(\lambda_n)}. \tag{62}$$

Într-adevăr, condiţia $h < v_m t$ se realizează într-un timp relativ scurt în raport cu momentul în care se începe injecţia, deoarece h nu are valori prea mari. Astfel, dacă $v_m = 1$ m/s şi $h = 1000$ m, timpul după care temperatura la talpa sondei este dată de (62) este de 1000 s.

În perioada iniţială, atunci cînd $t < \frac{h}{v_m}$, temperatura la talpa sondei se calculează cu ajutorul formulei (60) în care punem de asemenea $\bar{r} = \frac{2D}{d}$.

5. **Concluzii.** Faptul că după un interval de timp relativ scurt temperatura lichidului de injecţie la intrarea în strat este constantă apare oarecum surprinzător şi este o consecinţă a aproximaţiilor făcute în cursul rezolvării problemei. În realitate, temperatura la talpa sondei depinde de timp în tot cursul injecţiei lichidului dar această dependenţă este mult mai accentuată în perioada iniţială, devenind după aceea neglijabilă.

Primită la redacţie la 3 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaţionnomu iscisleniiu*, GITTL, Moskva, Leningrad, 1951, p. 112, 142.
2. Gröber/Erk, *Die Grundgesetze der Wärmerübertragung*, Dritte völlig neubearbeitete Auflage von Dr. -Ing. Ulrich Grigull, 2. verbesserter Neudruck, Springer Verlag, Berlin Göttingen, Heidelberg, 1961, p. 156–157.
3. Jean Hladik, *La transformation de Laplace à plusieurs variables*, Masson et C-ie, Paris, 1969, p. 177, 187.
4. T. Oroveanu, I. Spulber, *Unele probleme privitoare la injecţia lichidelor calde în zăcămintele de petrol*, St. cerc. mec. apl., **29**, *2* (1970).
5. H. J. Ramey Jr., *Wellbore Heat Transmission*, Transactions AIME, *225* (1962).
6. Ian N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company Inc., New York, Toronto, London, 1951, p. 82–89.

ALGORITMI ÎN CALCULUL SISTEMELOR „ÎN LANȚ" ȘI „RAMIFICATE" CU AJUTORUL GRAFELOR LINIARE DE FLUENȚĂ

de IOAN CRĂCIUN
Institutul politehnic Cluj

În ultimul timp, utilizarea grafelor liniare de fluență a fost extinsă cu succes de la calculul sistemelor electrice la cel al sistemelor mecanice. În lucrare, după ce se definesc două categorii particulare de sisteme, „în lanț" și „ramificate", frecvent întîlnite în practică și se prezintă calculul acestora cu ajutorul grafelor liniare, se stabilesc algoritmi ce reduc volumul de calcule necesare. Utilizarea algoritmilor este particularizată la calculul oscilațiilor de torsiune, al grinzilor continue pe mai multe reazeme și al circuitelor electrice. Lucrarea conține numeroase exemplificări de aplicare a algoritmilor stabiliți.

1. INTRODUCERE

Conceptul de *graf liniar de fluență* (liniar signal flow graph, graph de fluence de signal) introdus de Mason [14], [15] în 1953, dezvoltat ulterior de Seshu, Reed [19], [20], Robichaud, Boisvert, Robert [18], Abrahams, Coverly [1] etc. și folosit inițial la calculul circuitelor electrice, s-a dovedit a fi alături de cel de schemă REI și de imagine nodală [11], *unul din cele mai eficace, generale și utile concepte figurative* [11]. Această „algebră grafică" [18] a fost apoi aplicată și în alte domenii ce apelaseră pînă atunci exclusiv la metodele algebrei liniare. Cercetări recente [13], [12], [4]—[9] efectuate la noi în țară demonstrează multiplele și eficientele posibilități de utilizare a grafelor*) liniare de fluență în domeniul mecanicii aplicate.

Lucrarea de față este dedicată stabilirii unor algoritmi aplicabili în calculul cu ajutorul grafelor liniare de fluență al unor categorii de sisteme frecvent întîlnite în practică, numite în cele ce urmează sisteme „în lanț" și „ramificate". Ca exemple se prezintă calculul arborilor ce execută oscilații de torsiune și calculul grinzilor continue pe mai multe reazeme. Aplicarea algoritmilor este extinsă și la calculul circuitelor electrice.

Utilizarea algoritmilor stabiliți conduce la o importantă reducere a volumului de calcule.

*) Pluralul *grafe*, format prin analogie cu autografe, paragrafe, torsiografe, substantive avînd aceeași rădăcină, este indicat de Lexiconul Tehnic Român.

T. CERC. ME C. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1075–1110

2. STABILIREA ALGORITMILOR DE CALCUL

2.1. SISTEME „ÎN LANȚ" ȘI „RAMIFICATE"

În cele ce urmează se consideră cunoscute atît bazele teoriei grafelor liniare de fluență [1], [14], [15], [17]—[20] cît și cele ale teoriei generale a grafelor [2], [16].

În cadrul acestei ultime teorii, se numește *arbore* un graf conex și fără cicluri. Un graf liniar de fluență este, în general, un multigraf. Dacă graful ce se obține cînd pentru o pereche de vîrfuri ale unui graf de fluență unite prin mai multe laturi, se păstrează o singură latură, este un arbore, sistemul căruia îi corespunde graful de fluență considerat va fi numit în cele ce urmează „ramificat". Dacă, în plus, fiecare din vîrfurile aferente necunoscutelor este unit cu cel mult două alte vîrfuri corespunzătoare necunoscutelor, sistemul va fi numit „în lanț".

Un arbore fiind un graf planar, rezultă că și grafele de fluență corespunzătoare sistemelor „în lanț" și „ramificate" sînt grafe planare, putînd fi totdeauna reprezentate sub forma unor grafe planare topologice, ceea ce ușurează mult efectuarea calculelor.

2.2. ALGORITMUL PENTRU SISTEME „ÎN LANȚ"

Figura 1 reprezintă cazul general al grafului liniar de fluență corespunzător unui sistem „în lanț" cu n parametri necunoscuți $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Graful are $Z = n - 1$ bucle, numerotate în paranteze.

Aplicînd grafului din figura 1 transformarea indicată mai sus, se obține graful din figura 2, care este un arbore. Se mai constată că în general vîrful corespunzător necunoscutei x_k este unit cu numai două alte vîrfuri corespunzătoare necunoscutelor (x_{k-1} și x_{k+1}) precum și cu vîrful corespunzător termenului liber, cunoscut, b_k. Rezultă, conform definiției date, că sistemul aferent grafului din figura 1 este, într-adevăr, un sistem „în lanț".

Se notează:

$(t)_{i,k}$ — transmitanța drumului elementar (unic) de la vîrful b_i la vîrful x_k;

$G_{i,k}$ — subgraful neadiacent la drumul elementar de la vîrful b_i la vîrful x_k, subgraf ce cuprinde buclele (1), (2), (3),...,$(i-3)$, $(i-2)$, $(k+1)$, $(k+2)$,...,$(n-3)$, $(n-2)$, $(n-1)$ dacă $i < k$ și buclele (1), (2), (3),...,$(k-3)$, $(k-2)$, $(i+1)$, $(i+2)$,...,$(n-3)$, $(n-2)$, $(n-1)$ dacă $i > k$;

$D_{i,k}$ — determinantul subgrafului de mai sus;

G — graful sistemului;

D — determinantul grafului sistemului.

Conform regulei lui Mason, expresia necunoscutei x_k este

$$x_k = \frac{\sum_{i=1}^{n} b_i\,(t)_{i,k} \cdot D_{i,k}}{D}. \qquad (1)$$

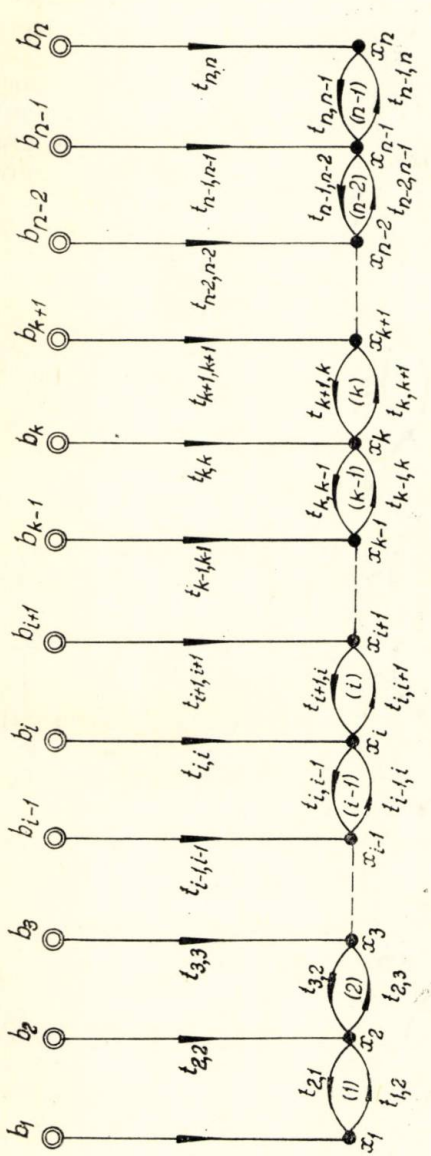

b_1 b_2 b_3 b_{i-1} b_i b_{i+1} b_{k-1} b_k b_{k+1} b_{n-2} b_{n-1} b_n
$t_{1,1}$ $t_{2,2}$ $t_{3,3}$ $t_{i-1,i-1}$ $t_{i,i}$ $t_{i+1,i+1}$ $t_{k-1,k-1}$ $t_{k,k}$ $t_{k+1,k+1}$ $t_{n-2,n-2}$ $t_{n-1,n-1}$ $t_{n,n}$
$t_{2,1}$ $t_{1,2}$ $t_{3,2}$ $t_{2,3}$ $t_{i,i-1}$ $t_{i-1,i}$ $t_{i+1,i}$ $t_{i,i+1}$ $t_{k,k-1}$ $t_{k-1,k}$ $t_{k+1,k}$ $t_{k,k+1}$ $t_{n-1,n-2}$ $t_{n-2,n-1}$ $t_{n,n-1}$ $t_{n-1,n}$
(1) (2) (i-1) (i) (k-1) (k) (n-2) (n-1)
x_1 x_2 x_3 x_{i-1} x_i x_{i+1} x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{n-2} x_{n-1} x_n

Fig. 1

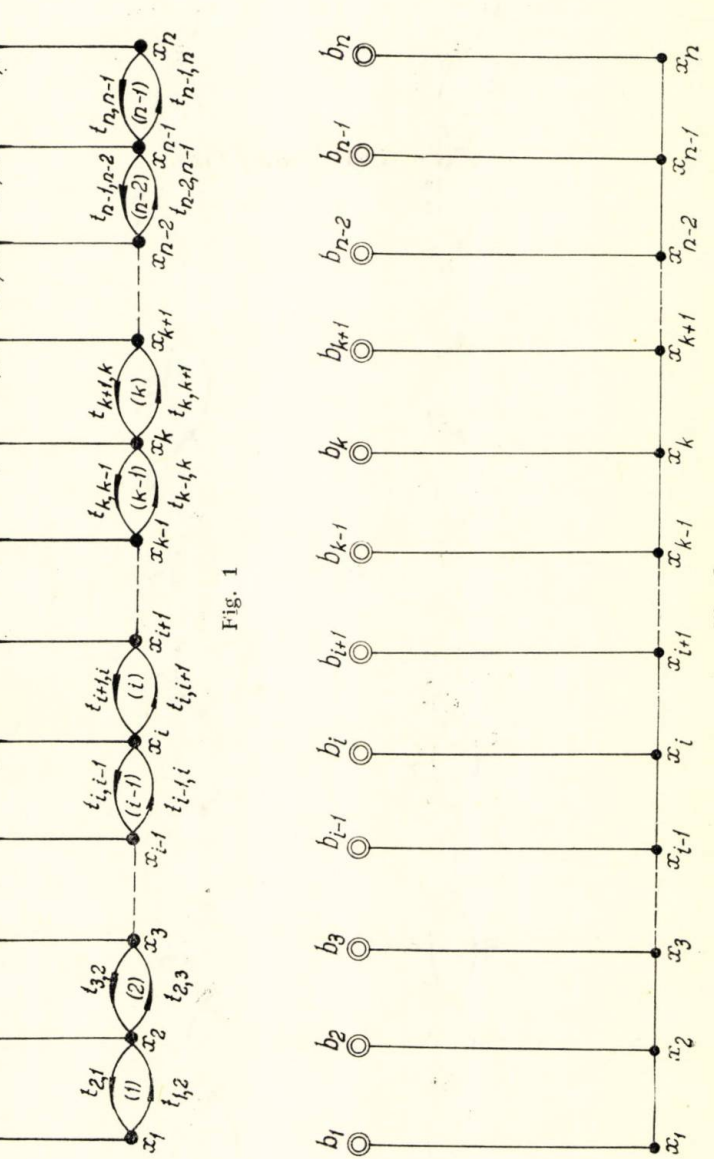
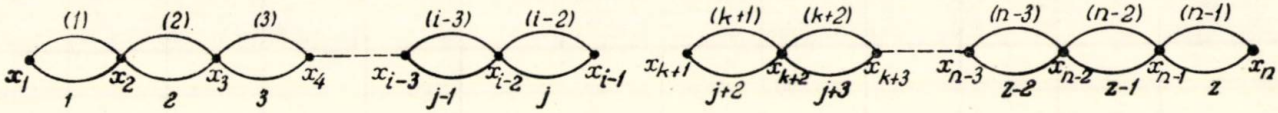
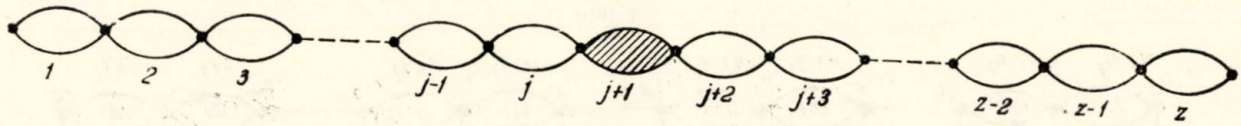

b_1 b_2 b_3 b_{i-1} b_i b_{i+1} b_{k-1} b_k b_{k+1} b_{n-2} b_{n-1} b_n
x_1 x_2 x_3 x_{i-1} x_i x_{i+1} x_{k-1} x_k x_{k+1} x_{n-2} x_{n-1} x_n

Fig. 2


(1)
(2)
(3)
(i-3)
(i-2)
(k+1)
(k+2)
(n-3)
(n-2)
(n-1)
x1
x2
x3
x4
xi-3
xi-2
xi-1
xk+1
xk+2
xk+3
xn-3
xn-2
xn-1
xn
1
2
3
j-1
j
j+2
j+3
z-2
z-1
z

a)


1
2
3
j-1
j
j+1
j+2
j+3
z-2
z-1
z

b)

Fig. 3

Deoarece arcele ce pornesc din vîrfurile $b_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ nu intră în alcătuirea unor bucle, determinantul $D_{i,k}$ este identic cu determinantul unui subgraf la care aceste vîrfuri şi arce nu au mai fost trasate (fig. 3*a*) şi care, în cele ce urmează, va fi numit subgraf redus şi va fi notat $G'_{i,k}$.

În figura 3*a* buclele subgrafului redus $G'_{i,k}$, în general în număr de $z - 1$, au fost renumerotate de la 1 la z, numărul de ordine $j+1$ fiind omis din numerotare. Bucla oarecare cu numărul de ordine h este în general adiacentă la buclele $h - 1$ şi $h + 1$. Fac excepţie buclele j şi $j + 2$ care sînt adiacente numai la bucla $j - 1$, respectiv $j + 3$.

Transmitanţa buclei h este notată, în cele ce urmează, $t_{b,h}$.

OBSERVAŢII

a) Pentru graful din figura 1, se pot demonstra cu uşurinţă relaţiile :

$$\begin{aligned} (t)_{i,k} &= t_{i,i}\cdot t_{i,i+1}\cdot t_{i+1,i+2}\cdot\ldots t_{k-2,k-1}\cdot t_{k-1,k} \qquad (i<k),\\ (t)_{i,k} &= t_{i,i}\cdot t_{i,i-1}\cdot t_{i-1,i-2}\cdot\ldots t_{k+2,k+1}\cdot t_{k+1,k} \qquad (i>k), \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} (t)_{i,k} &= \frac{t_{i,i}}{t_{i+1,i+1}}\cdot t_{i,i+1}\cdot (t)_{i+1,k} \qquad (i<k),\\ (t)_{i,k} &= \frac{t_{i,i}}{t_{i-1,i-1}}\cdot t_{i,i-1}\,(t)_{i-1,k} \qquad (i>k). \end{aligned} \tag{3}$$

b) Dacă $i \leqslant k$ $(i \neq 1)$ subgraful redus $G'_{i+1,k}$ se obţine prin adăugarea buclei $(i - 1)$ la subgraful redus $G'_{i,k}$. Dacă $i \geqslant k$ $(i \neq n)$ subgraful redus $G'_{i+1,k}$ se obţine prin eliminarea buclei $(i + 1)$ a subgrafului redus $G'_{i,k}$. Subgrafele reduse $G'_{1,k}$ şi $G'_{n,k}$ sînt, respectiv, identice cu subgrafele reduse $G'_{2,k}$ şi $G'_{n-1,k}$.

c) Numărul de bucle $z - 1$ al subgrafului redus $G'_{i,k}$ este dat de relaţiile :

$$\begin{aligned} z - 1 &= Z - (k - i + 2) \qquad (i<k,\ i\neq 1),\\ z - 1 &= Z - (i - k + 2) \qquad (i>k,\ i\neq n). \end{aligned} \tag{4}$$

d) Din motivele arătate mai sus, determinantul D al grafului sistemului este identic cu determinantul unui graf ce nu cuprinde vîrfurile $b_i\,(i = 1, 2, \ldots, n)$ şi arcele ce pornesc din ele, numit mai jos, graf redus, notat G'. Graful redus cuprinde toate buclele grafului sistemului.

Subgraful redus cu $z - 1$ bucle din figura 3*a*, cu separaţie între buclele j şi $j + 2$, poate fi considerat ca fiind un subgraf redus cu z

bucle (fig. 3*b*), bucla $j+1$ avînd transmitanța nulă ($t_{b,j+1}=0$). În general, un subgraf redus cu $z-S$ bucle și S separații poate fi considerat ca fiind un subgraf redus cu z bucle, dintre care S avînd transmitanțele nule. Această remarcă permite ca, în continuare, studiul să se facă numai pentru subgrafe reduse fără separație.

Se notează cu D_z determinantul unui subgraf redus cu z bucle (determinant identic cu cel al subgrafului de origine). Conform regulei lui Mason aplicată în cazul de față:

$$D_z=\sum_{v=1}^{u}(-1)^{v-1}\,T_v(z), \tag{5}$$

unde $T_1(z)=1$, iar termenul oarecare $T_v(z)$ este o sumă de produse de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente, suma extinzîndu-se pentru toate combinațiile de cîte $v-1$ bucle neadiacente, posibile.

Numărul total de termeni u, este dat de relațiile:

$$\begin{aligned} u&=\frac{z+3}{2} \qquad (z-\text{impar}),\\ u&=\frac{z+2}{2} \qquad (z-\text{par}). \end{aligned} \tag{6}$$

Relațiile (6) sînt valabile cu condiția efectuării calculului conform (5) „în litere" și introducerii ulterioare a valorilor numerice. Dacă una sau mai multe bucle au transmitanțele nule, este posibil, în funcție de poziția acestor bucle, să se obțină $T_u(z)=0$, $T_{u-1}(z)=0,\ldots$ În acest caz D_z are, efectiv, un număr de termeni mai mic decît u.

Se consideră subgrafele reduse cu $h-1$ și h bucle, cel de al doilea obținîndu-se din primul prin atașarea buclei h. Termenul $T_v(h)$ poate fi considerat ca fiind alcătuit din totalitatea produselor de cîte $v-1$ transmitanțe de bucle neadiacente ce intră în alcătuirea termenului $T_v(h-1)$ la care se adaugă produsele de cîte $v-1$ transmitanțe de bucle neadiacente ce se mai pot forma după atașarea buclei h, a căror sumă este egală, evident, cu $t_{b,h}\cdot T_{v-1}(h-2)$. Deci

$$T_v(h)=T_v(h-1)+t_{b,h}\cdot T_{v-1}(h-2). \tag{7}$$

Valorile $T_v(h)$ date de relația (7), pentru $1\leqslant v\leqslant u$ și $1\leqslant h\leqslant z$, pot fi calculate cu ajutorul unui algoritm tabelar a cărui schemă de bază este indicată în figura 4. Prin extindere se obține schema de aplicare a algoritmului reprezentată în tabela 1. Pe ultima coloană se obțin valorile

determinanților $D_h (1 \leqslant h \leqslant z)$ prin însumarea valorilor $T_v(h)$ din linia respectivă, conform relației (5).

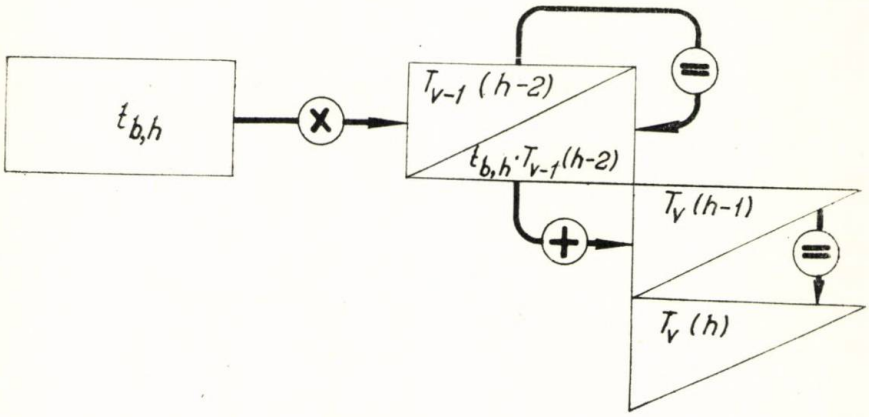


Fig. 4

Observații

e) Potrivit observației b), pentru $i \leqslant k$, cînd i ia succesiv valorile $1, 2, \ldots, k$ și pentru $i \geqslant k$ cînd i ia succesiv valorile $n, n-1, \ldots, k$, subgrafele reduse $G'_{i,k}$ se obțin, în general, prin atașarea succesivă a cîte unei noi bucle. Algoritmul descris mai sus, prin însăși relația (7) care stă la baza lui, prezintă avantajul de a concentra în două tabele valorile tuturor termenilor $T_v(h)$ ai determinanților $D_{i,k}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, unul din tabele corespunzînd determinanților $D_{1,k}$, $D_{2,k}, \ldots, D_{k-1,k}$ $D_{k,k}$, cel de al doilea determinanților $D_{n,k}$, $D_{n-1k}, \ldots, D_{k+1,k}$.

f) Dacă transmitanțele $t_{b,h}$ conțin un factor comun, adică dacă

$$t_{b,h} = \gamma \tau_{b,h} \qquad (1 \leqslant h \leqslant z), \tag{8}$$

atunci

$$\mathcal{T}_v(h) = \mathcal{T}_v(h-1) + \tau_{b,h} \cdot \mathcal{T}_{v-1}(h-2), \tag{9}$$

unde

$$\mathcal{T}_v(h) = \frac{T_v(h)}{\gamma^{v-1}}. \tag{10}$$

În acest caz, algoritmul prezentat mai sus poate fi, evident, aplicat pentru calculul valorilor $\mathcal{T}_v(h)$.

Tabela 1

	T_{v-1}	T_v	T_{v+1}
$t_{b,h-1}$	$T_{v-1}(h-3)$ / $t_{b,h-1}\cdot T_{v-1}(h-3)$	$T_v(h-3)$ / $t_{b,h-1}\cdot T_v(h-3)$	
$t_{b,h}$	$T_{v-1}(h-2)$ / $t_{b,h}\cdot T_{v-1}(h-2)$	$T_v(h-2)$ / $t_{b,h}\cdot T_v(h-2)$	$T_{v+1}(h-2)$ / $t_{b,h}\cdot T_{v+1}(h-2)$
$t_{b,h+1}$	$T_{v-1}(h-1)$ / $t_{b,h+1}\cdot T_{v-1}(h-1)$	$T_v(h-1)$ / $t_{b,h+1}\cdot T_v(h-1)$	$T_{v+1}(h-1)$ / $t_{b,h+1}\cdot T_{v+1}(h-1)$
$t_{b,h+2}$		$T_v(h)$ / $t_{b,h+2}\cdot T_v(h)$	$T_{v+1}(h)$ / $t_{b,h+2}\cdot T_{v+1}(h)$
$t_{b,h+3}$		$T_v(h+1)$ / $t_{b,h+3}\cdot T_v(h+1)$	$T_{v+1}(h+1)$ / $t_{b,h+3}\cdot T_{v+1}(h+1)$

T / h	$D_h=\sum_{v=1}^{n}(-1)^{v-1}T_v(h)$
$h-3$	D_{h-3}
$h-2$	D_{h-2}
$h-1$	D_{h-1}
h	D_h
$h+1$	D_{h+1}

Exemplu de calcul

Se consideră graful din figura 5*a* corespunzător unui sistem „în lanţ" şi se cere să se calculeze valoarea necunoscutei x_5, utilizînd algoritmul descris mai sus.

Aplicînd relaţia (1) se obţine:

$$x_5 = \frac{b_1 \cdot (t)_{1,5} \cdot D_{1,5} + b_2 \cdot (t)_{2,5} \cdot D_{2,5} + \ldots + b_7 \cdot (t)_{7,5} \cdot D_{7,5}}{D}.$$

Din figura 5*a* se citesc valorile: $b_1 = 4$; $b_2 = 2$; $b_3 = 1$; $b_4 = 3$; $b_5 = 4$; $b_6 = 1$; $b_7 = 1$ şi se calculează transmitanţele diverselor bucle: $t_{b,(1)} = 4$; $t_{b,(2)} = 1$; $t_{b,(3)} = 0{,}8$; $t_{b,(4)} = 2$; $t_{b,(5)} = 2$; $t_{b,(6)} = 3$.

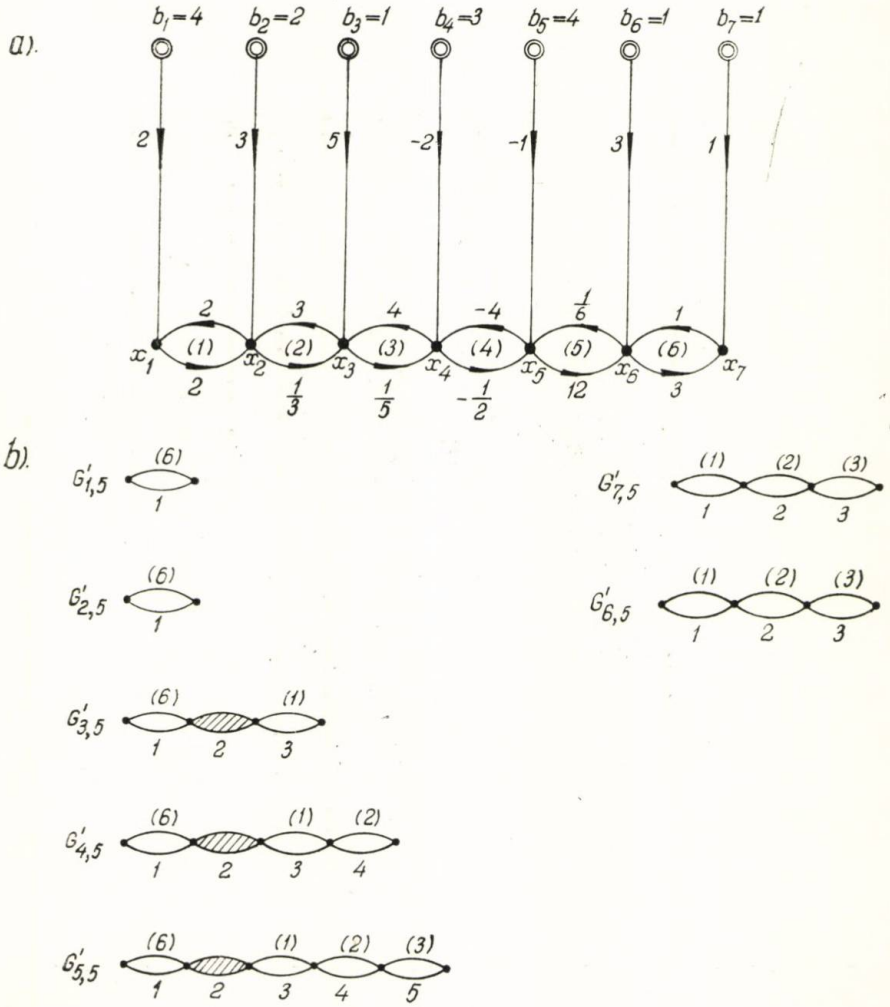


Fig. 5

Aplicînd relaţiile (2) şi urmărind drumurile elementare de la vîrfurile $b_1, b_2, \ldots, b_7$ la vîrful x_5 (fig. 5*a*) se obţine, din aproape în aproape : $(t)_{5,5} = -1$; $(t)_{4,5} = 1$; $(t)_{3,5} = -0{,}5$; $(t)_{2,5} = -0{,}1$; $(t)_{1,5} = -0{,}133$; $(t)_{6,5} = 0{,}5$; $(t)_{7,5} = 0{,}166$. Pentru calculul determinanţilor $D_{i,5}$ $(i = 1, \ldots, 7)$ se construiesc subgrafele reduse $G'_{i,5}$ grupate separat pentru $1 \leqslant i \leqslant 5$ şi $5 < i \leqslant 7$ (fig. 5*b*). În prima grupă se urmează succesiunea $G'_{1,5}$, $G'_{2,5}, \ldots, G'_{5,5}$ iar în a doua $G'_{7,5}$, $G'_{6,5}$. Se constată că primele două subgrafe reduse din fiecare grupă sînt identice, următoarele subgrafe din prima grupă obţinîndu-se succesiv prin ataşarea unei noi bucle (una din aceste bucle avînd transmitanţa nulă). După renumerotare (fig. 5*b*) se obţine pentru prima grupă : $t_{b,1} = t_{b,(6)} = 3$; $t_{b,2} = 0$; $t_{b,3} = t_{b,(1)} = 4$; $t_{b,4} = t_{b,(2)} = 1$; $t_{b,5} = t_{b,(3)} = 0{,}8$ iar pentru a doua grupă : $t_{b,1} = t_{b,(1)} = 4$; $t_{b,2} = t_{b,(2)} = 1$; $t_{b,3} = t_{b,(3)} = 0{,}8$.

În tabelele 2 şi 3 se prezintă aplicarea algoritmului pentru subgrafele reduse din cele două grupe. Din ultimele coloane ale tabelelor rezultă :

Tabela 2

	T_1	T_2	T_3	T_4	T/h	D_h
3	1 / 3	0 / 0	0 / 0	0 / 0		
0	1 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0		
4	1 / 4	3 / 12	0 / 0	0 / 0	1	−2
1	1 / 1	3 / 3	0 / 0	0 / 0	2	−2
0,8	1 / 0,8	7 / 5,6	12 / 9,6	0 / 0	3	6
	1 / 0	8 / 0	15 / 0	0 / 0	4	8
	1 / 0	8,8 / 0	20,6 / 0	9,6 / 0	5	3,20

Tabela 3

	T_1	T_2	T_3	T/h	D_h
4	1 / 4	0 / 0	0 / 0		
1	1 / 1	0 / 0	0 / 0		
0,8	1 / 0,8	4 / 3,2	0 / 0	1	−3
	1 / 0	5 / 0	0 / 0	2	−4
	1 / 0	5,8 / 0	3,2 / 0	3	−1,6

$D_{1,5} = D_{2,5} = -2$; $D_{3,5} = 6$; $D_{4,5} = 8$; $D_{5,5} = 3{,}20$; $D_{7,5} = D_{6,5} = -1{,}6$. În tabela 4 se prezintă aplicarea algoritmului pentru calculul determinantului D al sistemului, corespunzător unui graf redus ce cuprinde toate

Tabela 4

	T_1	T_2	T_3	T_4	T/h	D_h
4	1 / 4	0 / 0	0 / 0	0 / 0		
1	1 / 1	0 / 0	0 / 0	0 / 0		
0,8	1 / 0,8	4 / 3,2	0 / 0	0 / 0	1	
2	1 / 2	5 / 10	0 / 0	0 / 0	2	
2	1 / 2	5,8 / 11,6	3,2 / 6,4	0 / 0	3	
3	1 / 3	7,8 / 23,4	13,2 / 39,6	0 / 0	4	
	1 / 0	9,8 / 0	24,8 / 0	6,4 / 0	5	
	1 / 0	12,8 / 0	48,2 / 0	46 / 0	6	-9,6

cele 6 bucle ale grafului din figura 5*a*, fără modificarea numerotării. Din ultima căsuță a tabelei 4 se citește $D = -9{,}6$.

Introducînd valorile numerice calculate, se obține

$$x_5 = \frac{8{,}6}{-9{,}6} = -0{,}896.$$

2.3. ALGORITMUL PENTRU SISTEME „RAMIFICATE"

2.3.1. UN CAZ PARTICULAR

Graful liniar de fluență din figura 6 corespunde unui sistem „ramificat". Într-adevăr, păstrînd cîte o singură latură de legătură între două vîrfuri adiacente se obține graful din figura 7, care este un arbore.

Pentru graful din figura 6 relațiile (1) și (5) rămîn valabile. Considerînd, de exemplu, subgraful $G_{3,3}$, neadiacent la drumul elementar de la vîrful b_3 la vîrful x_3, se constată că acesta este alcătuit din vîrfurile $b_1, b_2, b_4, \ldots, b_{15}, x_1, x_2, x_4, \ldots, x_{15}$ și din buclele (*1*), (*4*), (*5*),...,(*14*). Deoarece arcele ce pornesc din vîrfurile $b_1, b_2, b_4, \ldots, b_{15}$ nu intră în alcătuirea unor bucle, determinantul $D_{3,3}$ al subgrafului $G_{3,3}$ este identic cu determinantul subgrafului redus $G'_{3,3}$ (fig. 8). Acest din urmă subgraf, care are 12 bucle, este echivalent cu subgraful G din figura 9*a*, care are 13 bucle, numerele lor de ordine fiind marcate cu indicele „prim" iar bucla *2'* avînd transmitanța nulă. Determinantul subgrafului G, care va fi calculat mai jos, este identic deci cu $D_{3,3}$.

Subgraful G poate fi considerat ca fiind alcătuit din „ramura principală" ce cuprinde buclele *1'*, *2'*, *3'*, *4'*, *5'*, *6'*, *7'* și din „ramificațiile" ce cuprind buclele *8'*, *9'*, *10'*, *11'* și *12'*, *13'*. Buclele *8'* și *12'* ce stau la baza ramificațiilor vor fi numite bucle „ de ramificare", vîrfurile din care pornesc ele fiind notate $R_{8'}$ și $R_{12'}$ și numite vîrfuri „de ramificare".

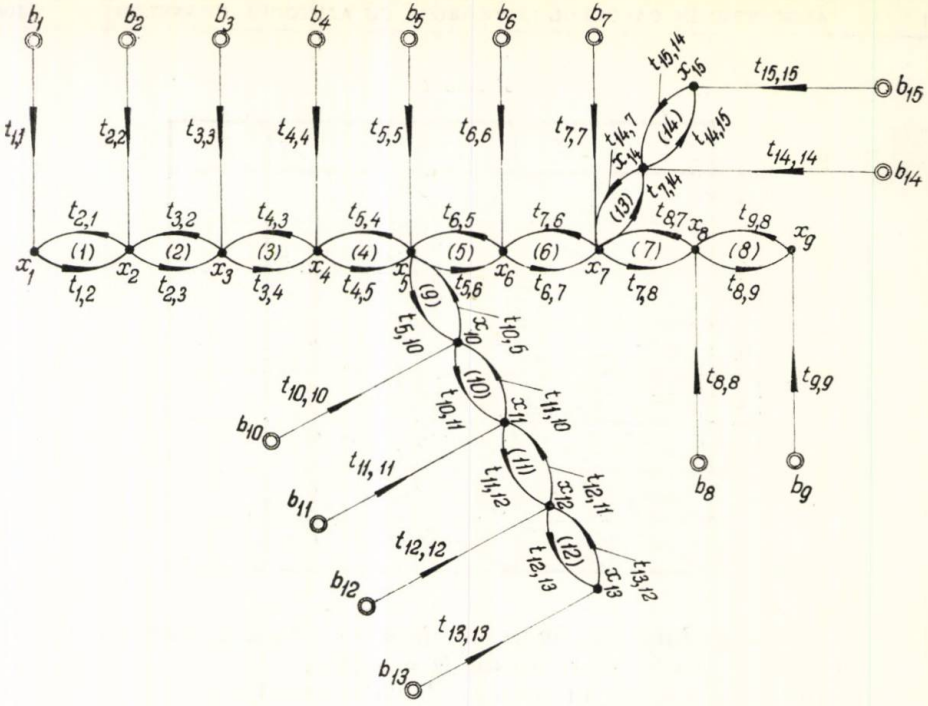

b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7
t1,1 t2,2 t3,3 t4,4 t5,5 t6,6 t7,7
t15,14 x15 t15,15 b15
t14,7 x14 (14) t14,15 t14,14 b14
(13) t7,14 t8,7 x8 t9,8 x9
t2,1 t3,2 t4,3 t5,4 t6,5 t7,6
(1) (2) (3) (4) (5) (6) (7) (8)
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7
t1,2 t2,3 t3,4 t4,5 t5,6 t6,7 t7,8 t8,9
(9) t5,10 x10 t10,5
t8,8 t9,9
t10,10 (10) t10,11 x11 t11,10
b10
t11,11 (11) t11,12 x12 t12,11
b11 b8 b9
t12,12 (12) t12,13 x13 t13,12
b12
t13,13
b13

Fig. 6

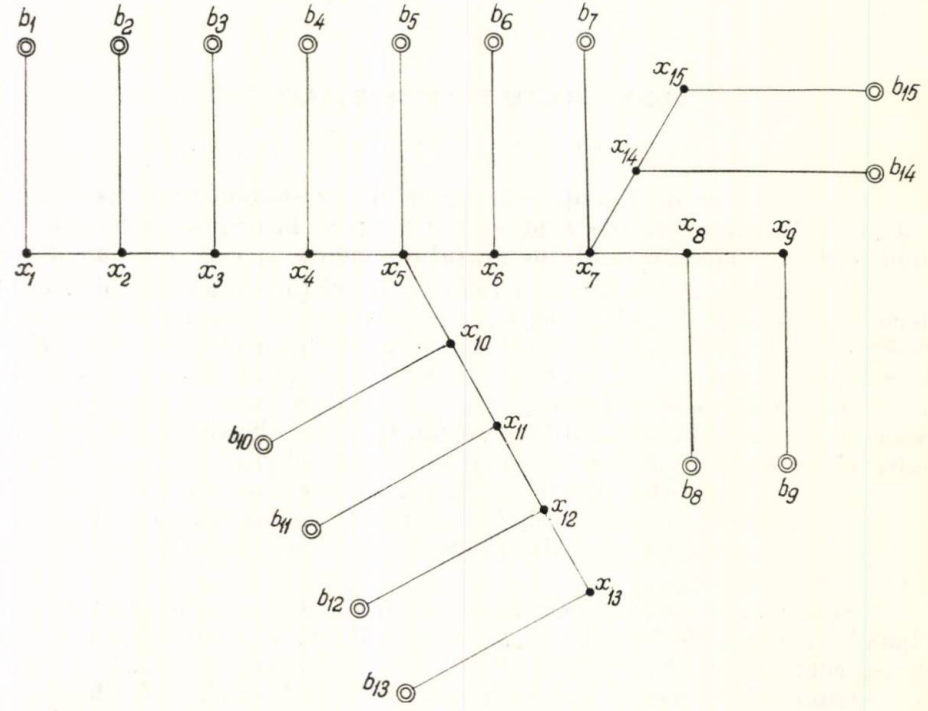

b1 b2 b3 b4 b5 b6 b7
x15 b15
x14 b14
x8 x9
x1 x2 x3 x4 x5 x6 x7
x10
b10 x11
b11 x12
b12 x13
b13
b8 b9

Fig. 7

Pentru efectuarea calculelor, se construiesc subgrafele G_0, $G_{8'}$, $G_{12'}$, $G_{8',12'}$ (fig. 9*b*).

Subgraful G_0 este alcătuit din totalitatea buclelor subgrafului G, cu excepția buclelor „de ramificare", *8'* și *12'*.

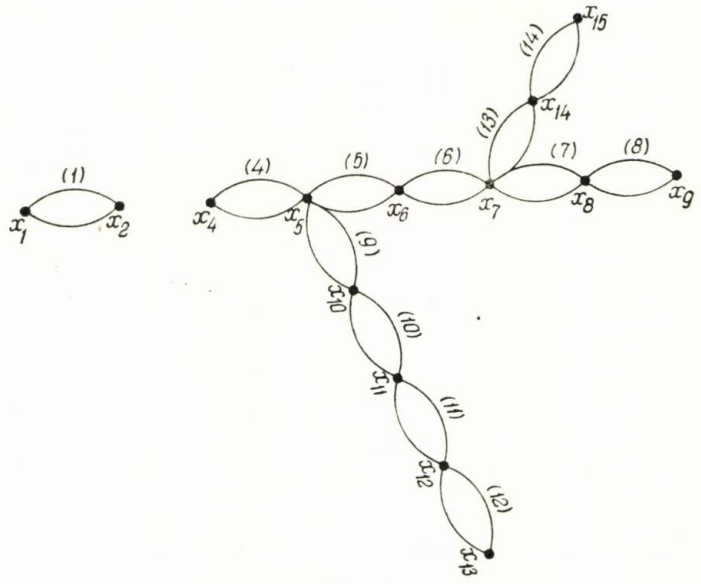


Fig. 8

Subgraful $G_{8'}$ este alcătuit din totalitatea buclelor subgrafului G, cu excepția buclelor „de ramificare" *8'* și *12'* și a buclelor *3'*, *4'*, *9'* adiacente la bucla *8'*.

Subgraful $G_{12'}$ este alcătuit din totalitatea buclelor subgrafului G, cu excepția buclelor „de ramificare" *8'* și *12'* și a buclelor *5'*, *6'*, *13'*, adiacente la bucla *12'*.

Subgraful $G_{8',12'}$ este alcătuit din totalitatea buclelor subgrafului G, cu excepția buclelor *8'*, *12'* și a buclelor adiacente lor, adică *3'*, *4'*, *9'*, *5'*, *6'*, *13'*.

În cadrul subgrafelor G_0, $G_{8'}$, $G_{12'}$, $G_{8'\,12'}$ se respectă condiția ca două bucle adiacente în subgraful G să rămînă adiacente iar două bucle neadiacente în G să rămînă neadiacente.

Introducînd bucle de transmitanță nulă între buclele neadiacente ale subgrafelor G_0, $G_{8'}$, $G_{12'}$, $G_{8'\,12'}$ și renumerotînd buclele prin numere de ordine fără indice (fig. 9*b*) se obțin patru subgrafe de tipul celor studiate în paragraful 2.2. Termenii v ai determinanților acestor subgrafe, $(T_v)_{G_0}$, $(T_v)_{G_{8'}}$, $(T_v)_{G_{12'}}$, $(T_v)_{G_{8',12'}}$, precum și determinanții înșiși, D_{G_0}, $D_{G_{8'}}$, $D_{G_{12'}}$, $D_{G_{8',12'}}$ pot fi calculați cu ajutorul algoritmului stabilit în paragraful 2.2.

Termenul $(T_v)_{G_0}$ este alcătuit dintr-o sumă de produse de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente ale subgrafului G, suma extinzîndu-se

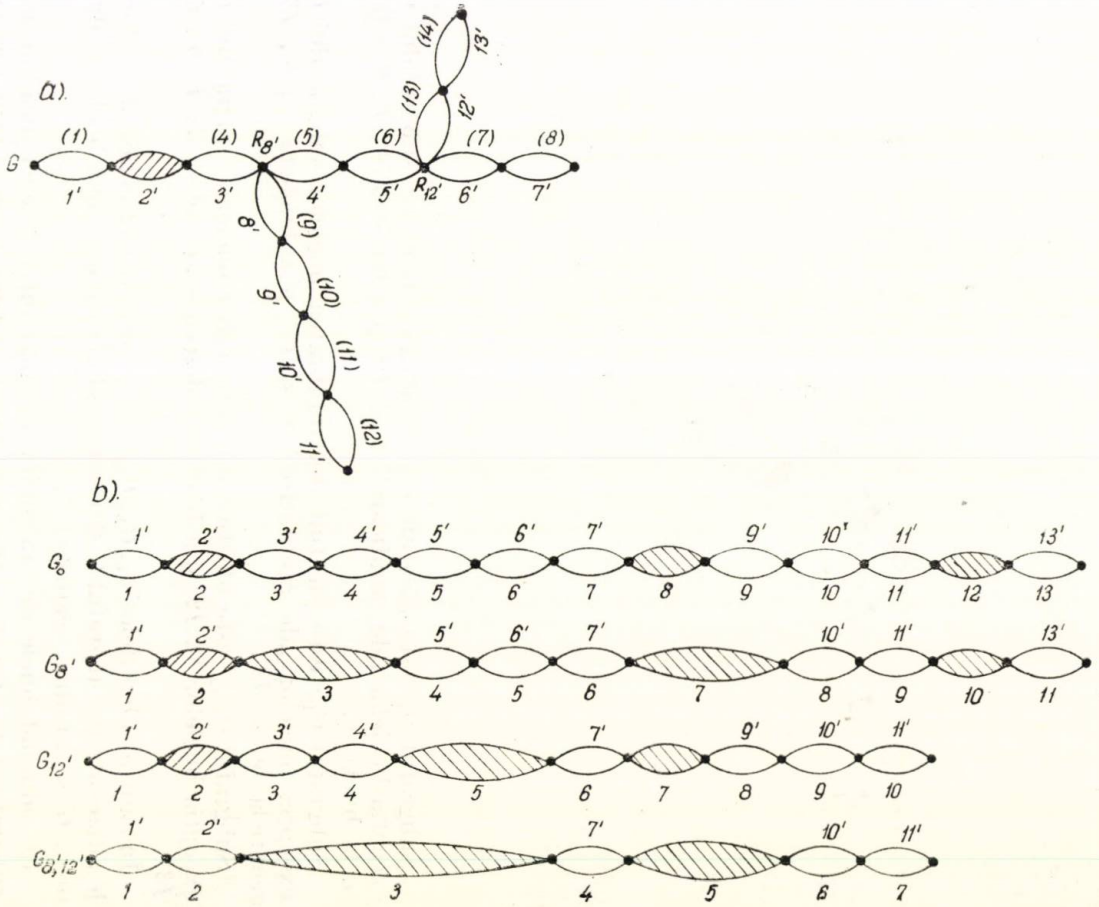

a).
G
(1)
(4)
$R_{8'}$
(5)
(6)
(7)
(8)
(14)
13'
(13)
12'
1'
2'
3'
4'
5'
$R_{12'}$
6'
7'
8'
(9)
9'
(10)
10'
(11)
11'
(12)
b).
G_o
$G_{8'}$
$G_{12'}$
$G_{8',12'}$

Fig. 9

pentru toate combinațiile posibile de cîte $v-1$ bucle neadiacente ale subgrafului G, cu excepția combinațiilor ce conțin buclele $8'$ sau $12'$.

Termenul $(T_{v-1})_{G_{8'}}$ este alcătuit dintr-o sumă de produse de transmitanțe a cîte $v-2$ bucle neadiacente ale subgrafului G, suma extinzîndu-se pentru toate combinațiile posibile de cîte $v-2$ bucle neadiacente ale subgrafului G, cu excepția combinațiilor ce conțin buclele $8'$, $12'$ și buclele adiacente buclei $8'$. Ca urmare, produsul $t_{b,8'}.(T_{v-1})_{G_{8'}}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente ale subgrafului G ce cuprind $t_{b,8'}$ dar nu cuprind $t_{b,12'}$.

La fel, produsul $t_{b,12'}.(T_{v-1})_{G_{12'}}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente ale subgrafului G ce cuprind $t_{b,12'}$ dar nu cuprind $t_{b,8'}$.

În fine, termenul $(T_{v-2})_{G8'.12'}$ este alcătuit dintr-o sumă de produse de transmitanțe a cîte $v-3$ bucle neadiacente ale subgrafului G, suma extinzîndu-se pentru toate combinațiile posibile de cîte $v-3$ bucle neadiacente, cu excepția combinațiilor ce conțin buclele $8'$, $12'$ și buclele adiacente acestora. Ca urmare, produsul $t_{b,8'} \cdot t_{b,12'}\,(T_{v-2})_{G_{8'},_{12'}}$ reprezintă suma tuturor produselor de transmitanțe a cîte $v-1$ bucle neadiacente ale subgrafului G ce cuprind atît pe $t_{b,8'}$ cît și pe $t_{b,12'}$.

Avînd în vedere cele de mai sus și notînd $(T_v)_G$ termenul v al determinantului subgrafului G, rezultă

$$(T_v)_G = (T_v)_{G_0} + t_{b,8'} \cdot (T_{v-1})_{G_{8'}} + t_{b,12'} \cdot (T_{v-1})_{G_{12'}} + t_{b,8'} \cdot t_{b,12'} \cdot (T_{v-2})_{G_{8'},_{12'}}.$$

Notînd D_G determinantul subgrafului G, relația de mai sus și relația (5) conduc la

$$D_{3,3} = D_G = D_{G_0} - (t_{b,8'} \cdot D_{G_{8'}} + t_{b,12'} \cdot D_{G_{12'}}) + t_{b,8'} \cdot t_{b,12'} \cdot D_{G_{8'},_{12'}}.$$

2.3.2. CAZUL GENERAL

În cazul general, se consideră un graf de fluență corespunzător unui sistem „ramificat" oarecare. Vîrfurile acestui graf adiacente la mai mult de două bucle vor fi numite vîrfuri „de ramificare". Pentru început se presupune că în fiecare vîrf „de ramificare" sînt adiacente numai trei bucle.

Relațiile (1) și (5) rămînînd valabile, pentru calcularea determinantului $D_{i,k}$ al subgrafului $G_{i,k}$, se construiește subgraful redus $G'_{i,k}$, corespunzător. În cadrul acestui subgraf redus, la fiecare vîrf „de ramificare", una dintre cele trei bucle, aleasă arbitrar, va fi numită buclă „de ramificare".

Se notează:

B — mulțimea buclelor subgrafului $G'_{i,k}$;

R — mulțimea buclelor „de ramificare" ale subgrafului $G'_{i,k}$;

w — numărul de elemente ale mulțimii R, identic cu numărul de vîrfuri „de ramificare" ale subgrafului $G'_{i,k}$;

$\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_i, \rho_j, \rho_k, \ldots, \rho_w, \ldots, \rho_w$ — numerele de ordine ale buclelor „de ramificare";

t_{b,ρ_i} — transmitanța buclei ρ_i;

$A\rho_i$ — mulțimea buclelor adiacente la bucla „de ramificare" cu numărul de ordine ρ_i;

$B-R-A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w$ — diferența dintre mulțimea B și mulțimea $R + A\rho_i + A\rho_j + A\rho_k + \ldots + A\rho_w$;

$G_{i,k}(B-R-A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$ — subgraful alcătuit din toate buclele subgrafului $G'_{i,k}$ în afara buclelor „de ramificare" și a buclelor adiacente la buclele „de ramificare" ρ_i, ρ_j, $\rho_k, \ldots, \rho_w$. În cadrul subgrafului $G_{i,k}$ $(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$ două bucle adiacente în subgraful $G'_{i,k}$ rămîn adiacente iar două bucle neadiacente în $G'_{i,k}$ rămîn neadiacente;

$D_{G_{i,k}}(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$ — determinantul subgrafului $G_{i,k}$ $(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$;

$(T_v)_{G_{i,k}}(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$ — termenul v al determinantului definit mai sus.

Termenul $(T_v)_{G'_{i,k}} = (T_v)_{G_{i,k}}$ este alcătuit, conform regulei lui Mason, dintr-o sumă de subtermeni, fiecare subtermen fiind constituit dintr-un produs de $v-1$ transmitanțe de bucle neadiacente ale subgrafului redus $G'_{i,k}$, suma de subtermeni ce alcătuiește termenul $(T_v)_{G'_{i,k}}$ extinzîndu-se pentru toate combinațiile posibile de cîte $v-1$ bucle neadiacente.

Avînd în vedere modul cum au fost construite subgrafele $G_{i,k}(B-R), G_{i,k}(B-R-A\rho_i), \ldots, G_{i,k}(B-R-A\rho_i-A\rho_j-A\rho_k-\ldots-A\rho_w), \ldots$, termenul $(T_v)_{G_{i,k}}(B-R)$ este alcătuit din suma tuturor subtermenilor termenului $(T_v)_{G'_{i,k}}$ cu excepția celor ce cuprind ca factor una sau mai multe din transmitanțele t_b, ρ_i. Produsul de $\varphi+1$ factori:

$$\underbrace{t_{b,\rho_i} \cdot t_{b,\rho_j} \cdot t_{b,\rho_k} \ldots t_{b,\rho_w}}_{\varphi \text{ factori}} (T_{v-\varphi})_{G_{i,k}}(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$$

reprezintă suma tuturor subtermenilor termenului $(T_v)_{G'_{i,k}}$ ce conțin ca factor produse de transmitanțe de φ bucle „de ramificare".

Ținînd seama de cele stabilite mai sus, se poate scrie relația:

$$(T_v)_{G'_{i,k}} = (T_v)_{G_{i,k}} = (T_v)_{G_{i,k}}(B-R) + \tag{11}$$

$$+ \sum_{\varphi=1}^{w} \sum_{\substack{i,j,k,\ldots,w=1 \\ i<j<k<\ldots<w}} \underbrace{t_{b,\rho_i} \cdot t_{b,\rho_j} \cdot t_{b,\rho_k} \cdot \ldots t_{b,\rho_w}}_{\varphi \text{ factori}} (T_{v-\varphi})_{G_{i,k}}(B - R - A\rho_i -$$

$$- A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w).$$

Avînd în vedere relaţiile (5) şi (11), rezultă

$$D_{G'_{i,k}} = D_{G_{i,k}} = D_{G_{i,k}}(B - R) + \tag{12}$$

$$+ (-1)^{\varphi} \sum_{\varphi=1} \sum_{\substack{i,\, j,\, k,\, \ldots\, w=1 \\ i<j<k<\ldots<w}} \underbrace{t_{b,\rho_i} \cdot t_{b,\rho_j} \cdot t_{b,\rho_k} \cdot \ldots \cdot t_{b,\rho_w}}_{\varphi \text{ factori}} D_{G_{i,k}}(B - R - A\rho_i -$$

$$- A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$$

Observaţii

g) Toate subgrafele de tipul $G_{i,k}$ $(B - R - A\rho_i - A\rho_j - \ldots)$ ai căror determinanţi intervin în relaţiile (11) şi (12) fac parte din categoria grafelor studiate în paragraful 2.2, determinanţii lor putînd fi calculaţi cu ajutorul algoritmului prezentat acolo. Astfel, relaţiile (11) şi (12) împreună cu metoda descrisă în paragraful 2.2 stau la baza unui algoritm pentru calculul determinanţilor de tipul $D_{i,k}$ în cazul sistemelor „ramificate".

h) În cazul în care în unul sau în mai multe din vîrfurile „de ramificare" ale subgrafului $G_{i,k}$ sînt adiacente mai mult de trei bucle, relaţiile (11) şi (12) rămîn valabile cu condiţia eliminării produselor de tipul $t_{b,\rho_i} \cdot t_{b,\rho_j} \cdot t_{b,\rho_k} \cdot \ldots \cdot t_{b,\rho_w}$ ce conţin transmitanţele a două sau mai multe bucle „de ramificare" adiacente. Aceasta, deoarece, conform regulei lui Mason, subtermenii termenului $(T_v)_{G_{i,k}}$ conţin numai produse de trasmitanţe de bucle neadiacente.

i) Cînd vîrfurile x_i şi x_{i+1} fac parte din aceeaşi ramificaţie a grafului considerat, subgraful $G_{i+1,k}$ se obţine în general prin ataşarea sau eliminarea unei bucle a subgrafului $G_{i,k}$, fapt care face ca şi subgrafele de tipul $G_{i,k}(B - R)$, ..., $G_{i,k}(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$, ..., $G_{i,k+1}(B - R)$, ..., $G_{i,k+1}(B - R - A\rho_i - A\rho_j - A\rho_k - \ldots - A\rho_w)$, să difere în general prin prezenţa sau absenţa unei bucle. În modul acesta, avantajul evidenţiat în cadrul observaţiei e) poate fi utilizat şi în cazul sistemelor „ramificate".

j) Observaţia f) rămîne valabilă şi în cazul sistemelor „ramificate". În acest caz, relaţia (11) devine:

$$(\mathcal{T}_v)_{G'_{i,k}} = (\mathcal{T}_v)_{G_{i,k}} = (\mathcal{T}_v)_{G_{i,k}(B-R)} +$$

$$+ \sum_{\varphi=1}^{w} \sum_{\substack{i,j,k,\ldots,\, w=1 \\ i<j<k<\ldots<w}} \underbrace{\tau_{b,\rho_i} \cdot \tau_{b,\rho_j} \cdot \tau_{b,\rho_k} \cdot \ldots \tau_{b,\rho_w}}_{\varphi \text{ factori}} (\mathcal{T}_{v-\varphi})_{G(B-R-A\rho_i-A\rho_j-A\rho_k-\ldots-A\rho_w)}.$$

Exemplu de calcul

Pentru sistemul „ramificat" avînd graful de fluență din figura 10, să se determine valoarea necunoscutei x_5.

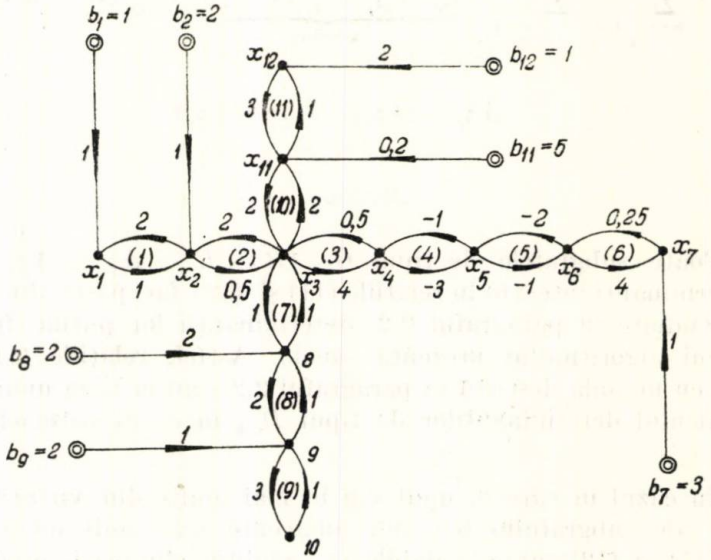


Fig. 10

Conform relației (1), avînd în vedere că $b_3 = b_4 = b_5 = b_6 = b_{10} = 0$, se obține

$$x_5 = \frac{1}{D}\,[b_1 \cdot (t)_{1,5} \cdot D_{1,5} + b_2 \cdot (t)_{2,5} \cdot D_{2,5} + b_7 \cdot (t)_{7,5} \cdot D_{7,5} +$$

$$+ b_8 \cdot (t)_{8,5} \cdot D_{8,5} + b_9 \cdot (t)_{9,5} \cdot D_{9,5} + b_{11} \cdot (t)_{11,5} \cdot D_{11,5} +$$

$$+ b_{12} \cdot (t)_{12,5} \cdot D_{12,5}].$$

Din figura 10 rezultă : $b_1 = 1$; $b_2 = 2$; $b_7 = 3$; $b_8 = 2$; $b_9 = 2$; $b_{11} = 5$; $b_{12} = 1$; $t_{b,(1)} = 2$; $t_{b,(2)} = 1$; $t_{b,(3)} = 2$; $t_{b,(4)} = 3$; $t_{b,(5)} = 2$; $t_{b,(6)} = 1$; $t_{b,(7)} = 1$; $t_{b,(8)} = 2$; $t_{b,(9)} = 3$; $t_{b,(10)} = 4$; $t_{b,(11)} = 3$. Din aceeași figură, urmărind traseele drumurilor elementare de la vîrfurile $b_1, b_2, \ldots, b_{12}$ la vîrful x_5, rezultă : $(t)_{1,5} = -12$; $(t)_{2,5} = -6$; $(t)_{7,5} = -0{,}5$; $(t)_{8,5} = -24$; $(t)_{9,5} = -12$; $(t)_{11,5} = -4{,}8$; $(t)_{12,5} = -144$.

În figura 11 sînt prezentate subgrafele reduse $G'_{1,5}$ identic cu $G'_{2,5}$, $G'_{7,5}$, $G'_{9,5}$, $G'_{11,5}$ identic cu $G'_{12,5}$ precum și graful redus al sistemului, G'. Cu excepția subgrafelor $G'_{7,5}$ și G', toate celelalte subgrafe sînt de tipul celor studiate în paragraful 2.2. Aplicînd algoritmul corespunzător sistemelor „în lanț" se obține, pentru valorile numerice ale transmitanțelor

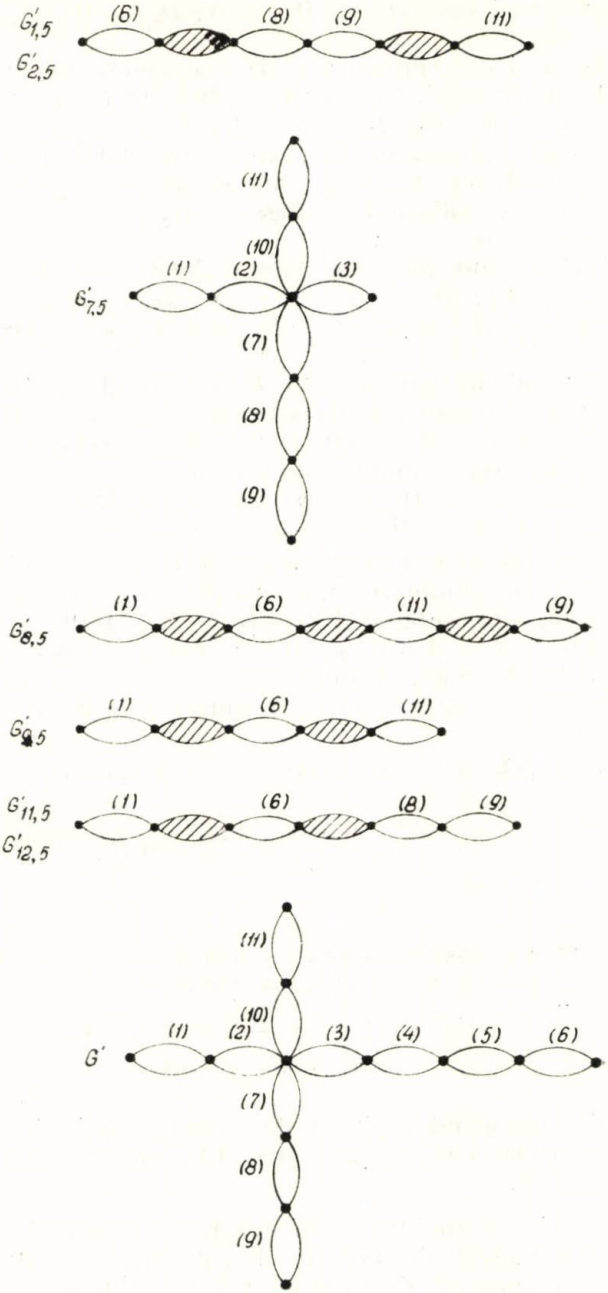

G'1,5
G'2,5
(6)
(8)
(9)
(11)
(11)
(10)
(1)
(2)
(3)
G'7,5
(7)
(8)
(9)
G'8,5
(1)
(6)
(11)
(9)
G'9,5
(1)
(6)
(11)
G'11,5
G'12,5
(1)
(6)
(8)
(9)
(11)
(10)
G'
(1)
(2)
(3)
(4)
(5)
(6)
(7)
(8)
(9)

Fig. 11

de bucle, stabilite mai sus : $D_{1,5} = D_{2,5} = 0$; $D_{8,5} = 0$; $D_{9,5} = 0$; $D_{11,5} = D_{12,5} = 0$.

Pentru calculul determinantului $D_{7,5}$ se aplică relaţia (12). Se aleg drept bucle „de ramificare", buclele (*3*) şi (*10*). În figura 12*a* se prezintă subgrafele $G_{7,5}(B-R)$, $G_{7,5}(B-R-A(3))$ şi $G_{7,5}(B-R-A(10))$ construite pe baza indicaţiilor din paragraful 2.3.2. Întrucît, conform observaţiei h), produsul $t_{b,(3)} \cdot t_{b,(10)}$ nu intervine în calcule, deoarece buclele (*3*) şi (*10*) sînt adiacente, subgraful $G_{7,5}(B-R-A(3)-A(10))$ nu a mai fost construit.

Aplicînd algoritmul descris în paragraful 2.2, se obţine :

$D_{G_{7,5}(B-R)} = -12$; $D_{G_{7,5}(B-R-A(3))} = -8$; $D_{G_{7,5}(B-R-A(10))} = 4$. Conform relaţiei (12) : $D_{7,5} = D_{G_{7,5}(B-R)} - [t_{b,(3)} \cdot D_{G_{7,5}(B-R-A(3))} + t_{b,(10)} \cdot D_{G_{7,5}(B-R-A(10))}] = -12 - [2(-8) + 4.4] = -12$.

Pentru calculul determinantului D, se aleg drept bucle „de ramificare" tot buclele (3) şi (10) şi se construiesc subgrafele $G(B-R)$, $G(B-R-A(3))$ şi $G(B-R-A(10))$ (fig. 12*b*). Aplicarea algoritmului pentru sisteme „în lanţ" conduce la valorile : $D_{G(B-R)} = 24$; $D_{G(B-R-A(3))} = 16$; $D_{G(B-R-A(10))} = -8$. Rezultă $D_G = D_{G(B-R)} - [t_{b,(3)} \cdot D_{G(B-R-A(3))} + t_{b,(10)} \cdot D_{G(B-R-A(10))}] = 24 - [2.16 + 4(-8)] = 24$.

Se constată (fig. 12*a* şi *b*) că subgraful $G_{7,5(B-R)}$ se obţine din subgraful $G(B-R)$ prin eliminarea buclelor (6), (5), (4) şi a unei bucle de transmitanţă nulă, iar subgraful $G_{7,5}(B-R-A(10))$ se obţine din subgraful $G_{7,5}(B-R-A(3))$ prin eliminarea buclei (*11*) şi a unei bucle de transmitanţă nulă. Aşadar, determinanţii acestor două perechi de subgrafe au putut fi calculaţi cu ajutorul a două tabele de tipul tabelei 1.

Revenind la relaţia ce dă valoarea x_5, se obţine

$$x_5 = \frac{3 \cdot (-0{,}5) \cdot (-12)}{24} = 0{,}75.$$

3. APLICAREA ALGORITMILOR LA CALCULUL SISTEMELOR MECANICE ŞI AL CIRCUITELOR ELECTRICE

3.1. CALCULUL OSCILAŢIILOR DE TORSIUNE

3.1.1. Sisteme oscilante „în lanţ"

Un sistem executînd oscilaţii de torsiune alcătuit din n volanţi montaţi pe un arbore comun [21], (fig. 13), este un sistem „în lanţ". Se notează [4], [8] :

ω — viteza unghiulară de rotaţie a arborelui ;
k — numărul de ordine al volanţilor sistemului oscilant ;
J_k — momentul de inerţie al volantului k ;
$C_{k-1,k}$ — constanta elastică a porţiunii de arbore cuprinsă între volanţii $k-1$, k ;
$a_{k,\nu}$, $b_{k,\nu}$ — coeficienţii termenilor în cosinus, respectiv sinus ai armonicii de ordinul ν a momentului perturbator ce acţionează asupra volantului k, $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

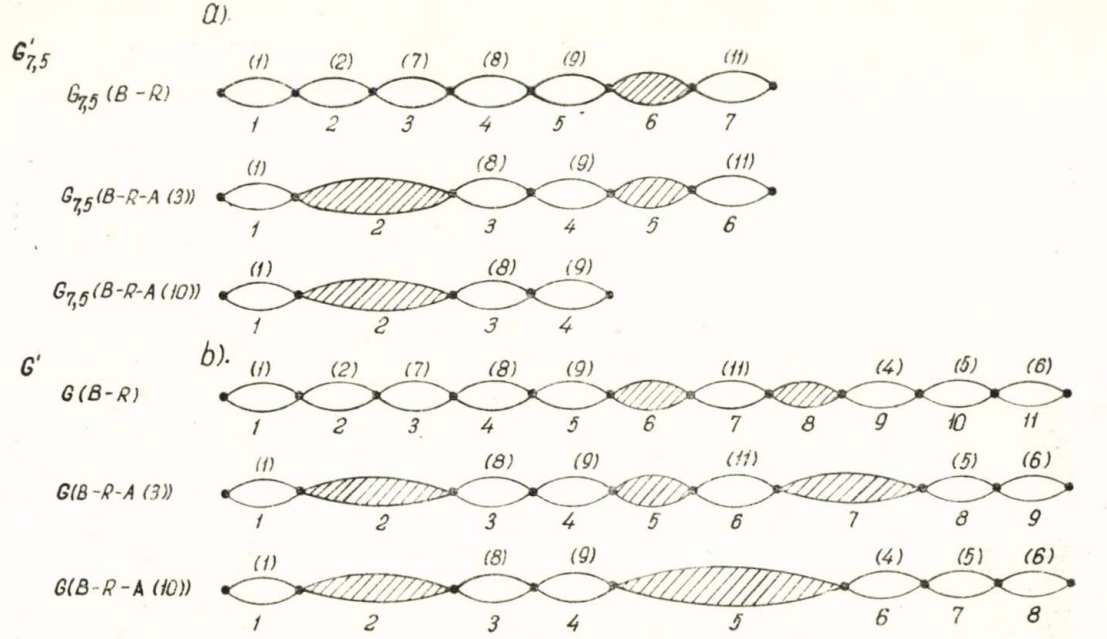

a).
G'7,5
G7,5 (B - R)
G7,5 (B-R-A (3))
G7,5 (B-R-A (10))
b).
G'
G (B-R)
G (B-R-A (3))
G (B-R-A (10))

Fig. 12

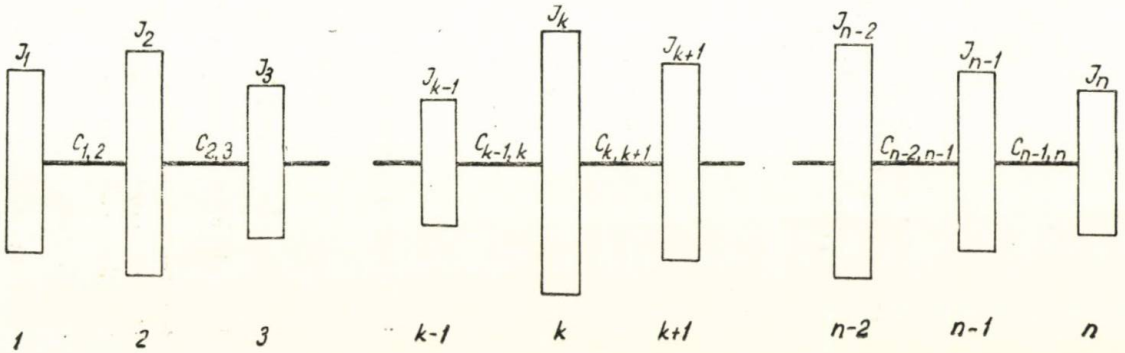

J1
J2
J3
Jk-1
Jk
Jk+1
Jn-2
Jn-1
Jn
C1,2
C2,3
Ck-1,k
Ck,k+1
Cn-2,n-1
Cn-1,n
1
2
3
k-1
k
k+1
n-2
n-1
n

Fig. 13

$A_{k,\nu}, B_{k,\nu}$ — coeficienţii termenilor în cosinus, respectiv sinus ai armonicii de ordinul ν a funcţiei unghiului de rotaţie faţă de poziţia de echilibru a volantului k;

$f_{k,\nu}$, $\Phi_{k,\nu}$ — notaţii cu semnificaţiile:
pentru $f_{k,\nu} = a_{k,\nu}$; $\Phi_{k,\nu} = A_{k,\nu}$;
pentru $f_{k,\nu} = b_{k,\nu}$; $\Phi_{k,\nu} = B_{k,\nu}$;
$\delta_{\Phi,k-1,k,\nu} = \Phi_{k-1,\nu} - \Phi_{k,\nu}$;

p_q — pulsaţia proprie de ordinul q a sistemului oscilant ($q = 1, 2, \ldots, n-1$);

$\Phi_{k,q}$ — amplitudinea oscilaţiilor libere ale volantului k pentru modul q de vibraţie ($\Phi_{1,q} = 1$);
$\delta_{\Phi,k-1,k,q} = \Phi_{k-1,q} - \Phi_{k,q}$.

Cu aceste notaţii, grafele liniare de fluenţă [4] corespunzătoare oscilaţiilor forţate şi oscilaţiilor libere ale sistemului sînt reprezentate, respectiv, în figurile 14 şi 15.

Calculul mărimilor care interesează, adică $\delta_{\Phi,k-1,k,\nu}$ şi $\delta_{\Phi,k-1,k,q}$ poate fi făcut cu uşurinţă particularizînd pentru cazul de faţă relaţia (1), sub forma:

$$\delta_{\Phi,k-1,k,\nu} = \frac{\sum_{i=1}^{n} f_{i,\nu} \cdot t_{i,k-1,k,\nu} \cdot D_{i,k-1,k,\nu}}{D_{n,\nu}},$$

$$\delta_{\Phi,k-1,k,q} = \frac{J_{k-1}, \Phi_{k-1,q} + \frac{C_{k-2,k-1}}{p_q^2} \delta_{\Phi,k-2,k-1,q}}{\frac{C_{k-1,k}}{p_q^2}} \tag{14}$$

şi aplicînd algoritmul prezentat în paragraful 2.2.

Observaţii

k) În cadrul grafului oscilaţiilor forţate (fig. 14), toate transmitanţele buclelor conţin factorul comun $\frac{1}{(\nu\omega)^2}$ care ia diverse valori pentru diverse armonici ale momentelor perturbatoare. Ca urmare, este avantajos ca, în conformitate cu observaţia f), algoritmul să se aplice pentru calculul valorilor $\mathcal{T}_v(h) = [(\nu\omega^2]^{v-1} T_v(h)$, care să fie înmulţite ulterior cu diversele valori $\frac{1}{[(\nu\omega)^2]^{v-1}}$ ce se calculează separat.

1) Notînd T_v — termenul v al determinantului grafului oscilaţiilor libere (fig. 15), ecuaţia pulsaţiilor proprii a sistemului oscilant, ce se obţine anulînd acest determinant, este de tipul:

$$\sum_{v=0}^{n-1} (-1)^v \alpha_v (p_q^2)^{n-v-1} = 0, \tag{15}$$

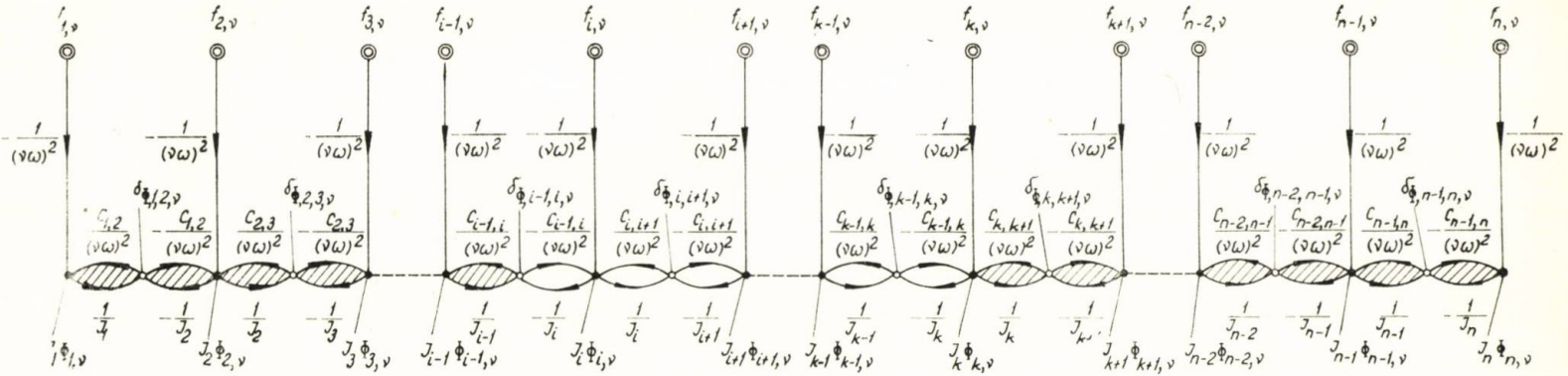


Fig. 14

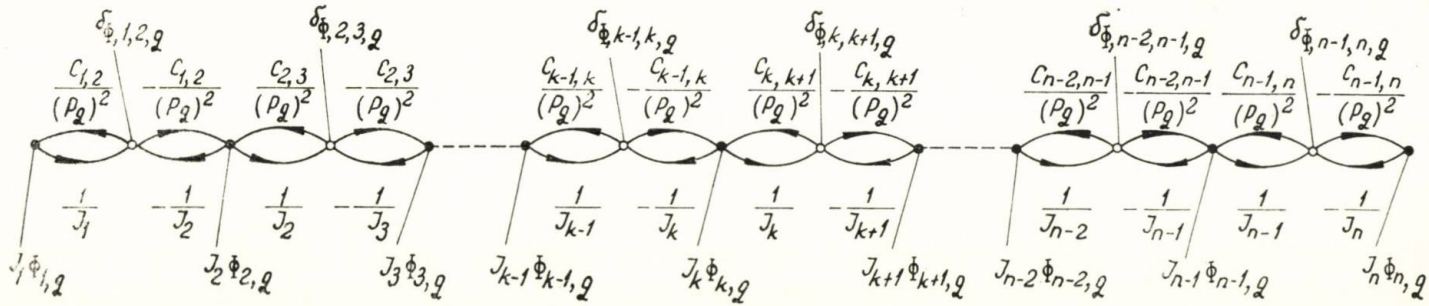


Fig. 15

unde

$$\begin{aligned} \alpha_v &= \mathcal{T}_{v+1}, \\ \mathcal{T}_v &= (p_q^2)^{v-1} T_v, \\ \mathcal{T}_1 &= T_1 = 1. \end{aligned} \tag{16}$$

În acest caz, relația (8) devine:

$$t_{b,h} = \frac{1}{p_q^2}\, \tau_{b,h}. \tag{17}$$

Pentru sisteme oscilante „în linie":

$$\begin{aligned} \tau_{b,h} &= \frac{C_{\frac{h+1}{2},\,\frac{h+1}{2}+1}}{J_{\frac{h+1}{2}}} \qquad (h \text{ — impar}), \\ \tau_{b,h} &= \frac{C_{\frac{h}{2},\,\frac{h}{2}+1}}{J_{\frac{h}{2}+1}} \qquad (h \text{ — par}). \end{aligned} \tag{18}$$

Aplicarea algoritmului pentru calculul valorilor $\mathcal{T}_v$ conduce, deci, la obținerea, pe ultima linie a tabelei, a coeficienților ecuației pulsațiilor proprii.

m) În lucrarea [10] F.R.E. Crossley și Ü. Germen stabilesc, prin metode algebrice, un algoritm pentru calculul coeficienților ecuației pulsațiilor proprii asemănător cu cazul particular descris în cadrul observației 1) al algoritmului prezentat în lucrarea de față.

3.1.2. Sisteme oscilante „ramificate"

În figura 16 se prezintă un sistem ce execută oscilații de torsiune [21] alcătuit din opt volanți montați pe trei arbori cuplați, de exemplu, prin intermediul unor angrenaje. Sistemul este „ramificat".

În figurile 17 și 18 se prezintă grafele liniare de fluență corespunzătoare oscilațiilor forțate, respectiv oscilațiilor libere ale sistemului, [5].

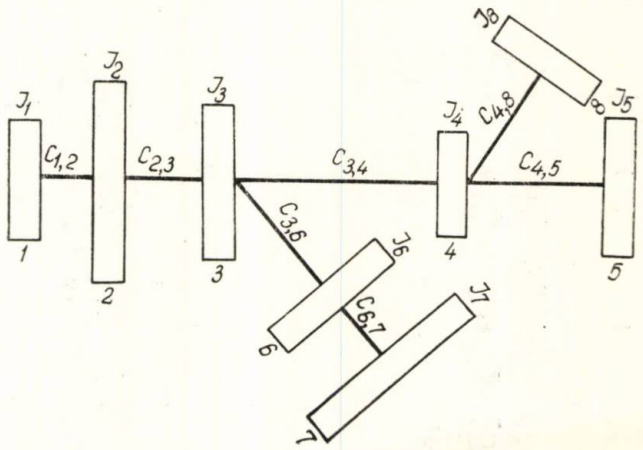


Fig. 16

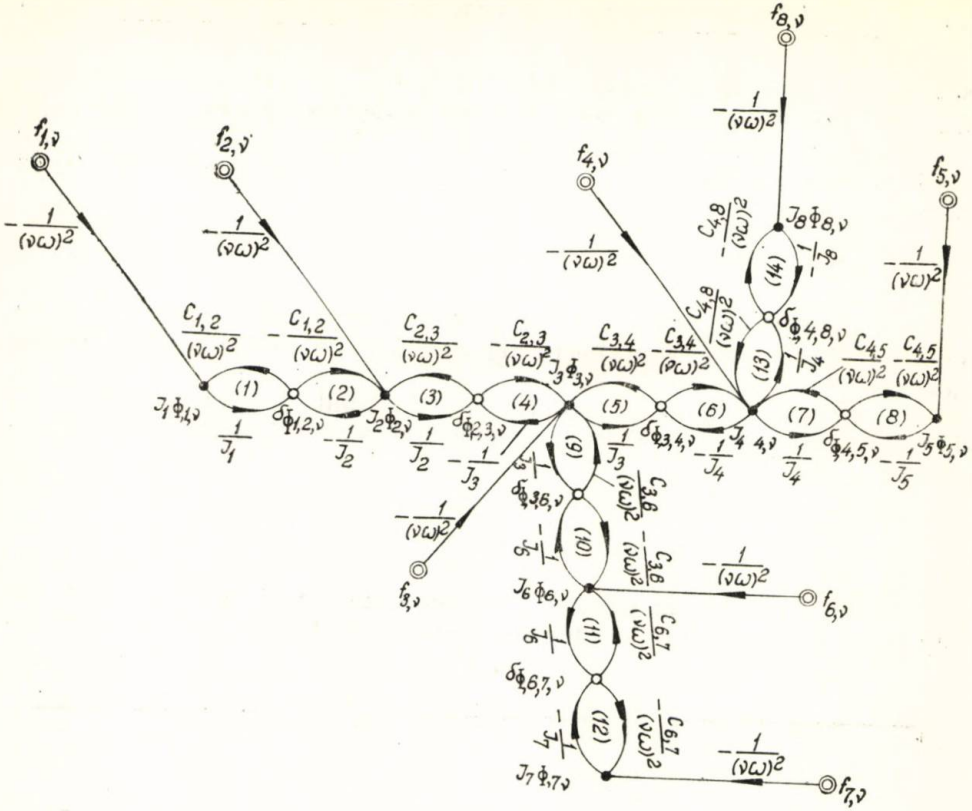


Fig. 17

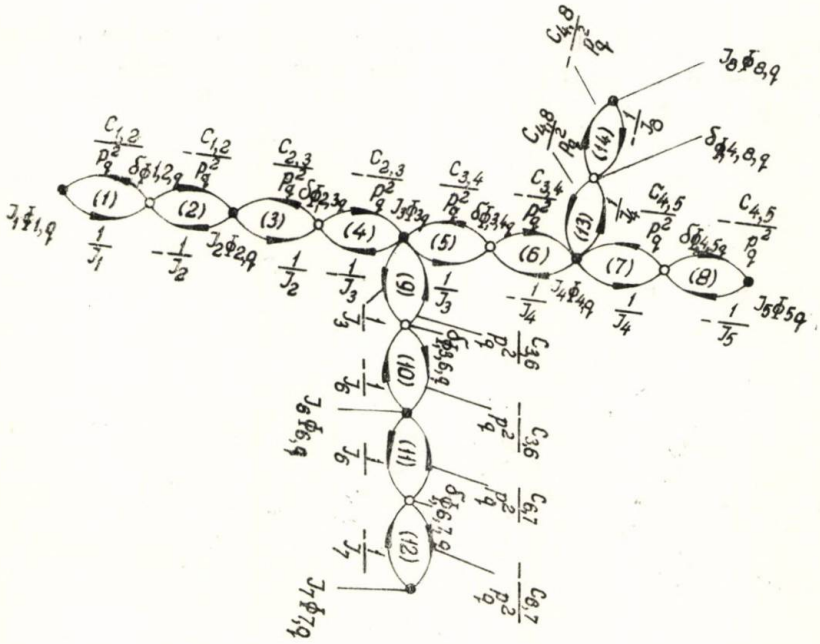


Fig. 18

S-au utilizat notaţiile din paragraful 3.1.1, $J_1, J_2, \ldots, C_{1,2}, C_{2,3}, \ldots$, fiind mărimile echivalente ale momentelor de torsiune şi ale constantelor elastice [21].

Calculul mărimilor $\delta_{\Phi,1,2,\nu}$, $\delta_{\Phi,2,3,\nu}, \ldots, \delta_{\Phi,1,2,q}$, $\delta_{\Phi,2,3,q}, \ldots$, poate fi făcut prin particularizarea relaţiei (1) şi aplicînd algoritmul descris în paragraful 2.3.

Observaţii

n) Pentru motivele expuse în cadrul observaţiei k) şi ţinînd seama de observaţia j), este avantajos ca algoritmul să fie aplicat pentru calculul valorilor $\mathcal{T}_v(h) = [(\nu\omega)^2]^{v-1} T_v(h)$.

o) Ecuaţia pulsaţiilor proprii este de tipul (15) cu notaţiile (16) şi (17). Coeficienţii ei se obţin prin aplicarea la graful oscilaţiilor libere a relaţiei (13).

3.2. CALCULUL GRINZILOR CONTINUE

O grindă continuă pe $n + 1$ reazeme încastrată la capete (fig. 19) este un sistem „în lanţ". Aplicînd ecuaţia lui Clapeyron cu utilizarea

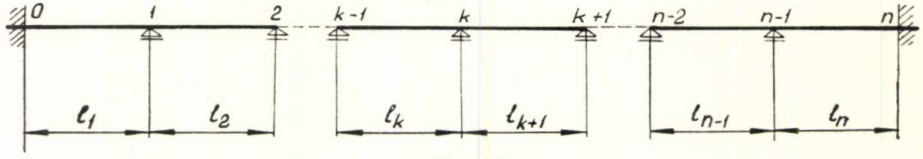


Fig. 19

notaţiilor clasice [3], se obţine graful de fluenţă al momentelor pe reazeme [12], reprezentat în figura 20. Grinzile liber rezemate la unul sau la ambele capete reprezintă cazuri particulare ale grinzii încastrate [12].

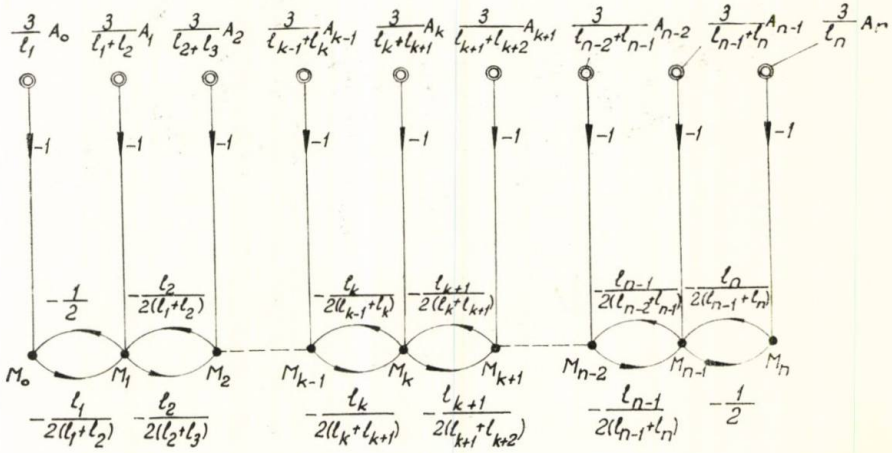


Fig. 20

Relația (1) adaptată cazului de față, cu folosirea algoritmului descris în paragraful 2.2, conduce cu ușurință la determinarea momentelor pe reazeme.

3.3. CALCULUL CIRCUITELOR ELECTRICE

Rețeaua electrică din figura 21 este un sistem „ramificat". Figura 22 reprezintă graful liniar de fluență al intensităților curenților circuitelor

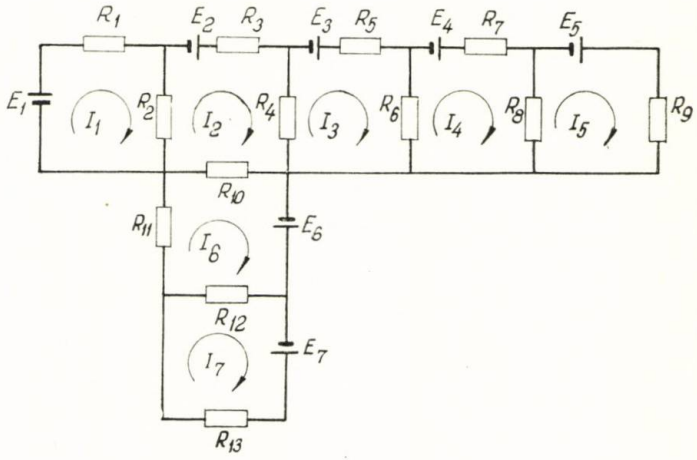


Fig. 21

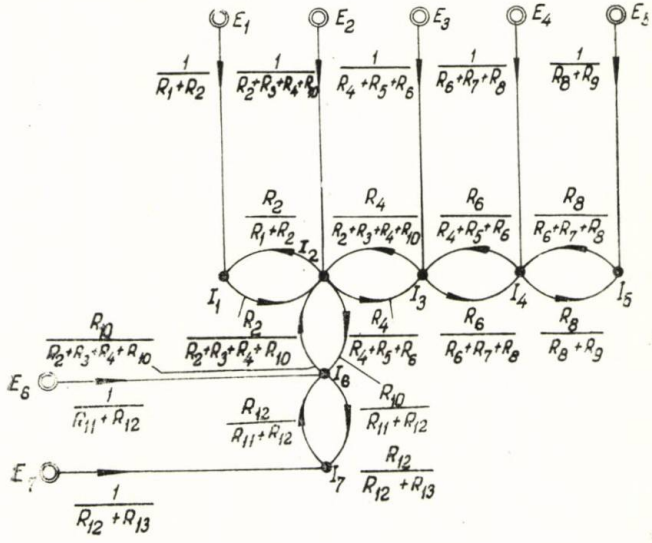


Fig. 22

independente ale rețelei [18]. Calculul intensităților din circuitele independente se face aplicînd relația (1) cu folosirea algoritmului pentru sisteme „ramificate".

Exemple de calcul

Tratarea amănunțită, cu exemple, în paragrafele 2.2 și 2.3 a utilizării algoritmilor în cazurile generale ale sistemelor „în lanț" și „ramificate" precum și analiza detaliată în lucrările [4]—[9], [12], [18]—[20] a alcătuirii și folosirii grafelor liniare de fluență pentru diverse sisteme mecanice și electrice justifică prezentarea a numai două exemple în cadrul paragrafului de față.

Exemplul 1

Se consideră sistemul ce execută oscilații de torsiune reprezentat în figura 16, grafele corespunzătoare fiind reprezentate în figurile 17 și 18. Momentele de inerție și constantele elastice au următoarele valori (echivalente): $J_1 = 3$; $J_2 = 1$; $J_3 = 2$; $J_4 = 3$; $J_5 = 4$; $J_6 = 1$; $J_7 = 3$; $J_8 = 3\ \text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot C_{1,2} = 3$; $C_{2,3} = 4$; $C_{3,4} = 6$; $C_{4,5} = 12$; $C_{3,6} = 2$; $C_{6,7} = 6$; $C_{4,8} = 9\ \text{N}\cdot\text{m}$. Se cere să se determine coeficienții ecuației pulsațiilor proprii.

Ținînd seama de relația (17) și de valorile numerice de mai sus, se obține:

$$\tau_{b,(1)} = \frac{C_{1.2}}{J_1} = 1; \qquad \tau_{b,(2)} = \frac{C_{1,2}}{J_2} = 3; \qquad \tau_{b,(3)} = \frac{C_{2.3}}{J_2} = 4;$$

$$\tau_{b,(4)} = \frac{C_{2.3}}{J_3} = 2; \qquad \tau_{b,(5)} = \frac{C_{3.4}}{J_3} = 3; \qquad \tau_{b,(6)} = \frac{C_{3.4}}{J_4} = 2;$$

$$\tau_{b,(7)} = \frac{C_{4.5}}{J_4} = 4; \qquad \tau_{b,(8)} = \frac{C_{4.5}}{J_5} = 3; \qquad \tau_{b,(9)} = \frac{C_{3.6}}{J_3} = 1;$$

$$\tau_{b,(10)} = \frac{C_{3.6}}{J_6} = 2; \qquad \tau_{b,(11)} = \frac{C_{6.7}}{J_6} = 6; \qquad \tau_{b,(12)} = \frac{C_{6.7}}{J_5} = 2;$$

$$\tau_{b,(13)} = \frac{C_{4.8}}{J_4} = 3; \qquad \tau_{b,(14)} = \frac{C_{4.8}}{J_8} = 3\ \text{s}^{-2}.$$

Considerînd ca bucle „de ramificare" buclele (9) și (13) și avînd în vedere relațiile (15) și (16), relația (13) aplicată în cazul de față devine:

$$\alpha_{v-1} = (\mathcal{T}_v)_G = (\mathcal{T}_v)_{G(B-R)} + \tau_{b,(9)} \cdot (\mathcal{T}_{v-1})_{G(B-R-A(9))} +$$

$$+ \tau_{b,(13)} \cdot (\mathcal{T}_{v-1})_{G(B-R-A(13))} + \tau_{b,(9)} \cdot \tau_{b,(13)} (\mathcal{T}_{v-2})_{G(B-R-A(9)-A(13))},$$

unde G este graful oscilațiilor libere (fig. 18) iar grafele $G(B-R)$, $G(D-R-A(9))$, $G(B-R-A(13))$, $G(B-R-A(9)-A(13))$ sînt reprezentate în figura 23.

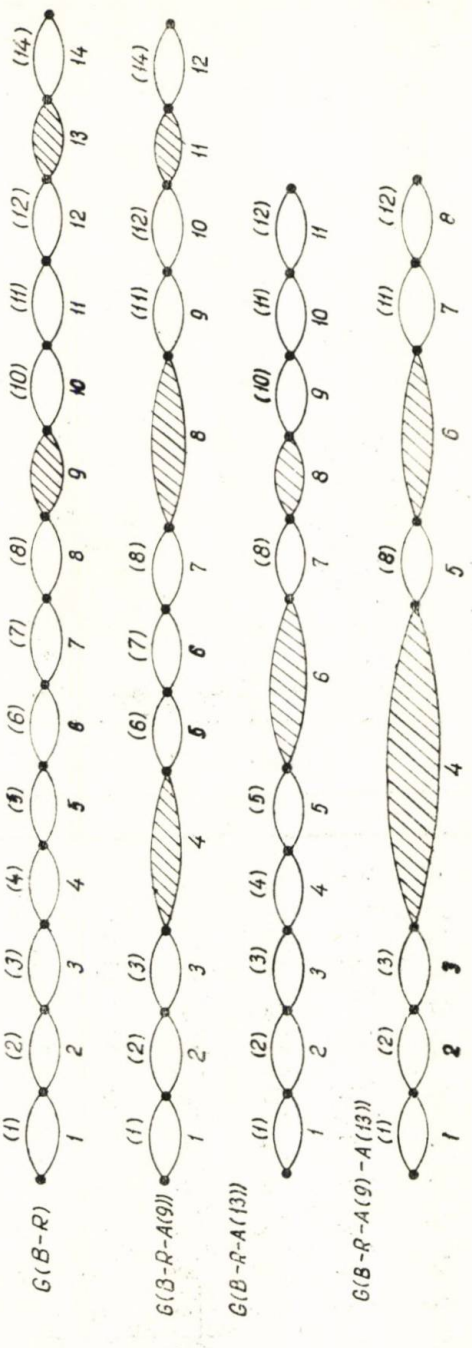


Fig. 23

Tabela 5

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$	$\mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_7$	$\mathcal{T}_8$
1	1 / 1	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
4	1 / 4	1 / 4	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	4 / 8	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	8 / 24	4 / 12	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	10 / 20	12 / 24	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
4	1 / 4	13 / 52	36 / 144	12 / 48	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	15 / 45	56 / 168	36 / 108	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	19 / 0	108 / 0	180 / 0	48 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	22 / 44	153 / 306	348 / 696	156 / 312	0 / 0	0 / 0	0 / 0
6	1 / 6	22 / 132	153 / 918	348 / 2088	156 / 936	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	24 / 48	197 / 394	654 / 1308	852 / 1704	312 / 624	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	30 / 0	329 / 0	1572 / 0	2940 / 0	1248 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	32 / 96	377 / 1131	1966 / 5898	4248 / 12744	2952 / 8856	624 / 1872	0 / 0
	1 / 0	32 / 0	377 / 0	1966 / 0	4248 / 0	2952 / 0	624 / 0	0 / 0
	1 / 0	35 / 0	473 / 0	3097 / 0	10146 / 0	15696 / 0	9480 / 0	1872 / 0

Tabela 6

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$	$\mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_7$
1	1 / 1	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
4	1 / 4	1 / 4	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	4 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	8 / 16	4 / 8	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
4	1 / 4	8 / 32	4 / 16	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	10 / 30	20 / 60	8 / 24	0 / 0	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	14 / 0	52 / 0	24 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
6	1 / 6	17 / 102	82 / 492	84 / 504	24 / 144	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	17 / 34	82 / 164	84 / 168	24 / 48	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	23 / 0	184 / 0	576 / 0	528 / 0	144 / 0	0 / 0
3	1 / 3	25 / 75	218 / 654	740 / 2220	696 / 2088	192 / 576	0 / 0
	1 / 0	25 / 0	218 / 0	740 / 0	696 / 0	192 / 0	0 / 0
	1 / 0	28 / 0	293 / 0	1394 / 0	2916 / 0	2280 / 0	576 / 0

Tabela 7

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$	$\mathcal{T}_6$	$\mathcal{T}_7$
1	1 / 1	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
4	1 / 4	1 / 4	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	4 / 8	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	8 / 24	4 / 12	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	10 / 0	12 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	13 / 39	36 / 108	12 / 36	0 / 0	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	13 / 0	36 / 0	12 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	16 / 32	76 / 150	120 / 240	36 / 72	0 / 0	0 / 0
6	1 / 6	16 / 96	75 / 450	120 / 720	36 / 216	0 / 0	0 / 0
2	1 / 2	18 / 36	107 / 214	270 / 540	276 / 552	72 / 144	0 / 0
	1 / 0	24 / 0	203 / 0	720 / 0	996 / 0	288 / 0	0 / 0
	1 / 0	26 / 0	239 / 0	934 / 0	1536 / 0	840 / 0	144 / 0

Tabela 8

	$\mathcal{T}_1$	$\mathcal{T}_2$	$\mathcal{T}_3$	$\mathcal{T}_4$	$\mathcal{T}_5$
1	1 / 1	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
4	1 / 4	1 / 4	0 / 0	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	4 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	8 / 24	4 / 12	0 / 0	0 / 0
0	1 / 0	8 / 0	4 / 0	0 / 0	0 / 0
6	1 / 6	11 / 66	28 / 168	12 / 72	0 / 0
2	1 / 2	11 / 22	28 / 56	12 / 24	0 / 0
	1 / 0	17 / 0	94 / 0	180 / 0	72 / 0
	1 / 0	19 / 0	116 / 0	236 / 0	96 / 0

Aplicarea la grafele din figura 23 a algoritmului pentru sisteme „în linie" este prezentată în tabelele 5, 6, 7, 8. Avînd în vedere valorile numerice obținute pe ultima linie a acestor tabele, rezultă :

$$\alpha_1 = \mathcal{T}_2 = 35 + 1\cdot 1 + 3\cdot 1 + 1\cdot 3\cdot 0 = 39,$$

$$\alpha_2 = \mathcal{T}_3 = 473 + 1\cdot 28 + 3\cdot 26 + 1\cdot 3\cdot 1 = 582,$$

$$\alpha_3 = \mathcal{T}_4 = 3097 + 1\cdot 293 + 3\cdot 239 + 1\cdot 3\cdot 19 = 4164,$$

$$\alpha_4 = \mathcal{T}_5 = 10\,146 + 1\cdot 1394 + 3\cdot 934 + 1\cdot 3\cdot 116 = 14\,690,$$

$$\alpha_5 = \mathcal{T}_6 = 15\,696 + 1\cdot 2916 + 3\cdot 1536 + 1\cdot 3\cdot 236 = 23\,928,$$

$$\alpha_6 = \mathcal{T}_7 = 9\,480 + 1\cdot 2280 + 3\cdot 840 + 1\cdot 3\cdot 96 = 14\,568,$$

$$\alpha_7 = \mathcal{T}_8 = 1\,872 + 1\cdot 576 + 3\cdot 144 + 1\cdot 3\cdot 0 = 2\,880.$$

Ecuația pulsațiilor proprii este, deci

$$(p_q^2)^7 - 39(p_q^2)^6 + 582(p_q^2)^5 - 4164\,(p_q^2)^4 + 14\,690\,(p_q^2)^3 -$$
$$- 23\,928(p_q^2)^2 + 14\,568(p_q^2) - 2\,880 = 0.$$

Exemplul 2

Să se calculeze momentele pe reazeme, în cazul grinzii continue reprezentate în figura 24, unde $P = 160\ N$, $l_1 = 2m$, $l_2 = 3$ m, $l_3 = 4{,}5$ m, $l_4 = 3$ m, $l_5 = 7$ m, $l_6 = 10{,}5$ m, $l_7 = 7$ m, $l_8 = 4{,}67$ m. Calculul reacțiunilor fictive conduce la valorile :

$$A_0 = 0; \qquad A_1 = \frac{Pl_2^2}{16} = 90\ \text{N}\cdot\text{m}^2; \qquad A_2 = \frac{Pl_2^2}{16} = 90\ \text{N}\cdot\text{m}^2;$$

$$A_3 = \frac{Pl_4^2}{24} = 60\ \text{N}\cdot\text{m}^2; \qquad A_4 = \frac{Pl_4^2}{24} = 60\ \text{N}\cdot\text{m}^2;$$

$$A_5 = \frac{Pl_6^2}{16} = 1\,102{,}50\ \text{N}\cdot\text{m}^2; \qquad A_6 = \frac{Pl_6^2}{16} + \frac{Pl_7^2}{16} = 1\,592{,}50\ \text{N}\cdot\text{m}^2;$$

$$A_7 = \frac{Pl_7^2}{16} = 490\ \text{N}\cdot\text{m}^2; \qquad A_8 = 0.$$

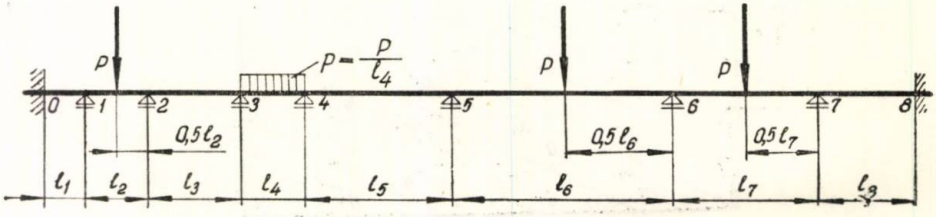


Fig. 24

Ţinînd seama de valorile numerice de mai sus şi de indicaţiile din paragraful 3.2, se construieşte graful sistemului, reprezentat în figura 25.

Transmitanţele diverselor bucle au valorile:

$t_{b,(1)} = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^{-2}$; $t_{b,(2)} = 20 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-2}$,

$t_{b,(3)} = 30 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-2}$; $t_{b,(4)} = 20 \cdot 15 \cdot 10^{-4} = 3 \cdot 10^{-2}$,

$t_{b,(5)} = 35 \cdot 20 \cdot 10^{-4} = 7 \cdot 10^{-2}$; $t_{b,(6)} = 30 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 9 \cdot 10^{-2}$;

$t_{b,(7)} = 20 \cdot 30 \cdot 10^{-4} = 6 \cdot 10^{-2}$; $t_{b,(8)} = 0{,}5 \cdot 20 \cdot 10^{-2} = 10 \cdot 10^{-2}$.

Tabelul 9 reprezintă aplicarea algoritmului pentru sisteme „în lanţ" la calculul determinantului grafului din figura 25. Se obţine, cu ajutorul valorilor de pe ultima linie:

$$D = 1 - 60 \cdot 10^{-2} + 1215 \cdot 10^{-4} - 9400 \cdot 10^{-6} + 22500 \cdot 10^{-8} = 0{,}512325.$$

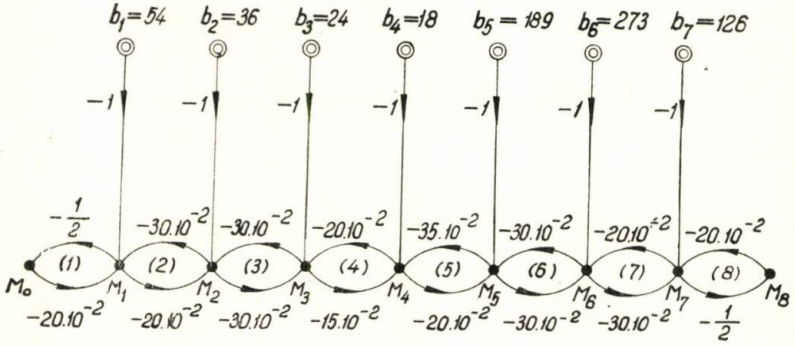


Fig. 25

Tabela 9

	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5
10	1 / 10	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
6	1 / 6	0 / 0	0 / 0	0 / 0	0 / 0
9	1 / 9	10 / 90	0 / 0	0 / 0	0 / 0
3	1 / 3	16 / 48	0 / 0	0 / 0	0 / 0
7	1 / 7	25 / 175	90 / 630	0 / 0	0 / 0
9	1 / 9	28 / 252	138 / 1242	0 / 0	0 / 0
6	1 / 6	35 / 210	313 / 1878	630 / 3780	0 / 0
10	1 / 10	44 / 440	565 / 5650	1872 / 18720	0 / 0
	1 / 0	50 / 0	775 / 0	3750 / 0	3780 / 0
	1 / 0	60 / 0	1215 / 0	9400 / 0	22500 / 0

Momentul de pe reazemul 3 este dat de relaţia:

$$M_3 = \frac{\sum_{i=0}^{8} b_i (t)_{i,3} \cdot D_{i,3}}{D}.$$

Pe baza grafului din figura 25, se obţine: $(t)_{1,3} = 6 \cdot 10^{-2}$; $(t)_{2,3} = 30 \cdot 10^{-2}$; $(t)_{3,3} = -1$; $(t)_{4,3} = 20 \cdot 10^{-2}$; $(t)_{5,3} = -7 \cdot 10^{-2}$; $(t)_{6,3} = 2{,}1 \cdot 10^{-2}$. Subgrafele reduse $G'_{1,3}$, $G'_{2,3}, \ldots, G'_{7,3}$ sînt reprezentate în figura 26. Determinanţii subgrafelor $G'_{1,3}$, $G'_{2,3}$, $G'_{3,3}$ se calculează cu ajutorul tabelei 10, liniile 4, 6, 7. Se obţine:

$$D_{1,3} = 1 - 32 \cdot 10^{-2} + 202 \cdot 10^{-4} = 0{,}7002,$$

$$D_{2,3} = 1 - 42 \cdot 10^{-2} + 522 \cdot 10^{-4} - 2020 \cdot 10^{-6} = 0{,}63018,$$

$$D_{3,3} = 1 - 48 \cdot 10^{-2} + 714 \cdot 10^{-4} - 3232 \cdot 10^{-6} = 0{,}588168.$$

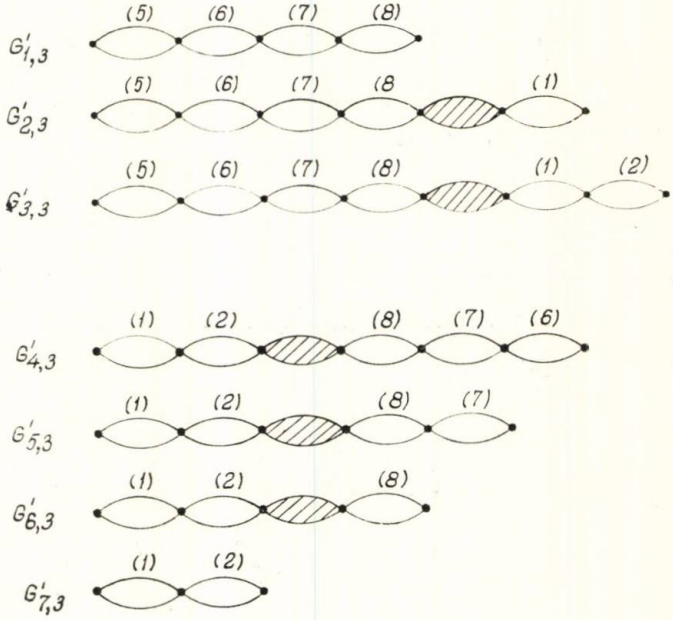


Fig. 26

Determinanţii subgrafelor $G'_{4,3}$, $G'_{5,3}$, $G'_{6,3}$, $G'_{7,3}$ se calculează cu ajutorul tabelei 11, liniile 6, 5, 4, 2. Se obţine:

$$D_{4,3} = 1 - 41 \cdot 10^{-2} + 490 \cdot 10^{-4} - 1440 \cdot 10^{-6} = 0{,}63756,$$

$$D_{5,3} = 1 - 32 \cdot 10^{-2} + 256 \cdot 10^{-4} = 0{,}7056,$$

$$D_{6,3} = 1 - 26 \cdot 10^{-2} + 160 \cdot 10^{-4} = 0{,}756,$$

$$D_{7,3} = 1 - 16 \cdot 10^{-2} = 0{,}84.$$

Tabela 10

	T_1	T_2	T_3	T_4	τ/h
7	1 / 7	0 / 0	0 / 0	0 / 0	
9	1 / 9	0 / 0	0 / 0	0 / 0	
6	1 / 6	7 / 42	0 / 0	0 / 0	1
10	1 / 10	16 / 160	0 / 0	0 / 0	2
0	1 / 0	22 / 0	42 / 0	0 / 0	3
10	1 / 10	32 / 320	202 / 2020	0 / 0	4
6	1 / 6	32 / 192	202 / 1212	0 / 0	5
	1 / 0	42 / 0	522 / 0	2020 / 0	6
	1 / 0	48 / 0	714 / 0	3232 / 0	7

Tabbela 11

	T_1	T_2	T_3	T_4	τ/h
10	1 / 10	0 / 0	0 / 0	0 / 0	
6	1 / 6	0 / 0	0 / 0	0 / 0	
0	1 / 0	10 / 0	0 / 0	0 / 0	1
10	1 / 10	16 / 160	0 / 0	0 / 0	2
6	1 / 6	16 / 96	0 / 0	0 / 0	3
9	1 / 9	26 / 234	160 / 1440	0 / 0	4
	1 / 0	32 / 0	256 / 0	0 / 0	5
	1 / 0	41 / 0	490 / 0	1440 / 0	6

Cu aceste valori se obține

$$M_3 = \frac{-1\,272{,}8988 \cdot 10^{-2}}{0{,}512325} = -24{,}845 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Analog, se obține

$$M_0 = 27{,}043 \text{ N·m}; \quad M_1 = -54{,}087 \text{ N·m}; \quad M_2 = -17{,}739 \text{ N·m};$$

$$M_4 = 30{,}682 \text{ N·m}; \quad M_5 = -128{,}458 \text{ N·m}; \quad M_6 = -221{,}210 \text{ N·m};$$

$$M_7 = -66{,}262 \text{ N·m.}; \quad M_8 = 33{,}131 \text{ N·m.}$$

Primită la redacție la 4 noiembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. J. R. Abrahams, G. P. Coverly, *Signal Flow Analysis*, Oxford, Pargamon Press, 1965.
2. C. Berge, *Teoria grafurilor și aplicațiile ei*, București, Editura tehnică, 1969.
3. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, București, Editura didactică și pedagogică, 1964.
4. I. Crăciun, *O metodă de calcul al oscilațiilor de torsiune ale arborilor mașinilor cu ajutorul grafelor liniare*, St. cerc. m. apl. **28**, *6*, 1381—1401 (1969).
5. — *Calculul oscilațiilor libere ale sistemelor torsionale complexe cu ajutorul grafelor liniare*, Buletinul Științific, al Institutului politehnic din Cluj, 11_2, 203—210 (1968).
6. I. Crăciun, Șt. Székely, *Contribuții la calculul oscilațiilor libere ale sistemelor torsionale simple cu mase și elasticități de valori apropiate, cu ajutorul grafelor liniare.* Comunicare prezentată la sesiunea științifică jubiliară a Institutului politehnic din Cluj, 10—12 oct. 1968. În curs de apariție în Buletinul Științific al Institutului politehnic din Cluj.
7. I. Crăciun, *Un algoritm pentru calculul coeficienților polinomului caracteristic în cazul sistemelor în linie ce execută vibrații liniare de torsiune.* Comunicare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, iunie 1969.
8. I. Crăciun, Șt. Székely, *Aspecte ale aplicării metodei grafelor liniare la calculul oscilațiilor de torsiune ale arborilor cotiți* . Comunicare prezentată la sesiunea de comunicări tehnico-științifice a Institutului de Cercetări Transporturi, București, 23—25 octombrie 1969. Multiplicare xerox.
9. I. Crăciun, *Determinarea valorilor unor expresii ce intervin în calculul oscilațiilor forțate de torsiune prin metoda grafelor liniare.* Comunicarea prezentată la cea de a XI-a sesiune științifică a Institutului politehnic din Cluj, 22—23 decembrie 1969. În curs de apariție în Buletinul Științific al Institutului politehnic din Cluj.
10. F. R. E. Crossley, U. Germen, *A Method of Numerical Evaluation of a Large Determinant*, Journal of Applied Mechanics, vol. 27, no. 2, 350—351 (June 1960).
11. P. Dimo, *Analiza nodală a sistemelor electroenergetice*, București, Editura Academiei 1968.
12. V. Drobotă, *Le calcul de la poutre continue à l'aide des graphes de fluence*, Rev. roum. sci. techn. sér. méc. appl., **14**, *6*, 1245—1272 (1969).
13. M. Ifrim, S. Larionescu, *Aplicarea teoriei grafurilor la calculul pulsației fundamentale de vibrație a structurilor elastice*, St. cerc. mec. apl. **22**, *4*, 1099—1109 (1966).
14. S. J. Mason, *Feedback Theory — Some Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. Inst. Radio Engrs, **41**, 9, 1144—1156 (1953).
15. — *Feedback Theory — Further Properties of Signal Flow Graphs*, Proc. Inst. Radio Engrs., **44**, 7, 920—926 (1956).
16. P. Mirescu, Al. Al. Roșu, *Teoria grafelor*, București, Editura militară, 1968.
17. Edm. Nicolau, Al. Popovici, *Introducere în cibernetica sistemelor discrete*, București, Editura tehnică, 1966.
18. L. P. A. Robichaud, M. Boisvert, J. Robert, *Graphes de fluence*, Paris, Eyrolles, Québec, Presses de l'Université Laval, 1961.
19. S. Seshu, N. Balabanian, *Linear Network Analysis*, New York, John Wiley & Sons, Inc., London, Champan & Hall, Ltd. 1959.
20. S. Seshu, M. B. Reed, *Linear Graphs and Electrical Networks*, Reading (U.S.A.), London, Addison-Wesley Publ. Company, Inc., 1961.
21. Gh. Silaș, *Vibrații mecanice*, București, Editura didactică și pedagogică, 1968.

ASUPRA UNUI PROGRAM DE CALCUL AL VIBRAȚIILOR PROPRII DE TORSIUNE ALE ARBORELUI CU MAI MULȚI VOLANȚI

de GH. NIȚESCU, V. OLARIU și M. TOFAN
Institutul politehnic Brașov

În lucrare se prezintă etapele unui program adecvat rezolvării ecuației caracteristice a vibrațiilor proprii de torsiune, precum și pentru calculul numeric al amplitudinilor relative corespunzătoare fiecărei pulsații.
Se anexează graficele ridicate de calculator, programul propriu-zis și organigrama acestuia.

În lucrările [1], [2] recurența Holzer-Tolle definită, în vectorul amplitudinilor relative ale vibrațiilor proprii de torsiune, pe modelul din figura 1 :

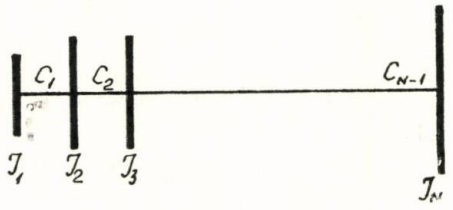


Fig. 1

$$\begin{Vmatrix} \lambda_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_N \end{Vmatrix} = \left(I - \omega^2 \begin{Vmatrix} \frac{J_1}{k_1} & 0 \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \frac{J_1}{k_2} & \frac{J_2}{k_2} \cdots\cdots\cdots\cdots 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{J_1}{k_{N-1}} \cdots\cdots\cdots\cdots & \frac{J_{N-1}}{k_{N-1}} \end{Vmatrix} \right) \begin{Vmatrix} \lambda_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \lambda_{N-1} \end{Vmatrix} \tag{1}$$

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1111–1135

cu condiția

$$\sum_{k=1}^{N} \lambda_k J_k = 0, \tag{2}$$

este transformată într-o recurență multiplicativă

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ \\ \lambda_1 \end{matrix} \right\| = \prod_{k=1}^{N} A_k \left\| \begin{matrix} 0 \\ \\ \lambda_N \end{matrix} \right\|.$$

Dacă modelul conține un subgrup de m volanți omogeni atunci $A_i = A_s = \text{idem}\ (i = N_{1+l}, \ldots, N_{1+m})$, iar recurența multiplicativă devine

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ \\ \lambda_1 \end{matrix} \right\| \prod_{k=1}^{N_1} A_k \cdot A_s^m \cdot \prod_{k=N_{1+m+1}}^{N} \left\| \begin{matrix} 0 \\ \\ \lambda_N \end{matrix} \right\|.$$

Este analizat în continuare cazul $m = N - 2$, care corespunde unui sistem cu $(N - 2)$ volanți identici încadrați între doi volanți diferiți.

Recurența multiplicativă se va scrie în acest caz:

$$\left\| \begin{matrix} 0 \\ \\ \lambda_1 \end{matrix} \right\| = A_1 \cdot A_s^{N-2} \cdot A_N \left\| \begin{matrix} 0 \\ \\ \lambda_N \end{matrix} \right\|, \tag{3}$$

unde

$$A_1 = \left\| \begin{matrix} 1 - \Omega^2 J_1 C_1, & -\Omega^2 J_1 \\ \\ C_1 \quad , & 1 \end{matrix} \right\|,$$

cu $C_1 = 1/2\ K_1$

$$A_s = \left\| \begin{matrix} 1 - \Omega^2 JC\ , & -\Omega^2 J \\ \\ C(2 - \Omega^2 JC), & 1 - \Omega^2 JC \end{matrix} \right\|,$$

cu $C = 1/2\ K_i = \text{const}\ (i = 2,\ N - 2)$,

$J = J_i = \text{const}$

și

$$A_N = \left\| \begin{matrix} 1\ , & -\Omega^2 J_N \\ \\ C_{N-1}, & 1 - \Omega^2 J_N C_{N-1} \end{matrix} \right\|,$$

Fiecare din matricele de mai sus au

$$\det (A) = 1, \tag{4}$$

astfel încît se pot construi algebric funcțiile trigonometrice ale unui unghi γ, prin care transformarea liniară ia forma

$$A = \left\| \begin{array}{cc} \cos \gamma, & -z \sin \gamma \\ \dfrac{1}{z} \sin \gamma, & \cos \gamma \end{array} \right\|, \tag{5}$$

permițînd reprezentarea concisă a pulsației proprii a arborelui în formă

$$\Omega = \sqrt{\frac{2 \sin^2(\gamma/2)}{JC}} = \sqrt{\frac{1 - \cos \gamma}{JC}}. \tag{6}$$

Rezultă că pulsația maximă a sistemului este

$$\Omega_{MAX} = \sqrt{\frac{2}{JC}}. \tag{7}$$

Metoda prezentă se reduce, în această formă, la rezolvarea unei ecuații algebrice în necunoscuta algebric introdusă $\cos \gamma$, de forma

$$\sum_{k=1}^{N-1} W_k \cos^k \gamma = 0, \tag{8}$$

cu a cărei soluții, se construiesc pulsațiile celor $N - 1$ moduri naturale de vibrație liberă prin relația (6).

În cele ce urmează, reprezentăm algoritmul de calcul al coeficienților ecuației (8), folosind enunțuri în limbajul FORTRAN, în care s-a formulat programul de calcul pe calculatorul IBM/360/40 G de la Centrul de calcul CEPECA, București.

Datele programului:

NR — numărul de seturi de date;
NVOL — numărul gradelor de libertate;
NVOL = $N - 1$;
AJD, AJ, AJN1 — momentele de inerție J_1, J, J_N;
ACD, AC, ACN1 — rigiditățile C_1, C, C_{N-1}.

I. În prima parte, s-au calculat valorile U_1, U_2, V_1, V_2 ce provin din scrierea ecuației algebrice, din forma trigonometrică echivalentă:

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{J_1 C_1}{JC} \frac{2J_1 J_N}{J^2} \frac{J_N C_{N-1}}{JC}, \\ U_2 &= \frac{J_1 J_N}{J^2}\left(\frac{(C_1 C_{N-1}}{C^2} + 1\right), \\ V_1 &= \frac{J_1}{J} + \frac{J_N}{J}, \\ V_2 &= \frac{J_1 J_N}{J^2}\left(\frac{C_1}{C} + \frac{C_{N-1}}{C}\right). \end{aligned} \tag{9}$$

Tot în acest pas s-au determinat valorile:

$$\begin{aligned} C_1 &= U_1 - (U_2 + 1), \\ C_2 &= V_1 - V_2, \\ D &= U_1 - 2U_2, \end{aligned} \tag{10}$$

folosite în segmentul de calcul al amplitudinilor relative.

II. Combinările $C_{N-2}^k = C_{\text{NVOL}-1}^k$ sînt calculate, folosind recurența

$$C_N^k = C_N^{k-1} \cdot (N - K + 1)/K \tag{11}$$

și complimentaritatea

$$C_N^{N-k} = C_N^k. \tag{12}$$

III. În secțiunea cuprinsă între enunțurile 0069—0131 se realizează calculul coeficienților polinomiali $W(K)$, $K = 1, N$, ordonați după puterile descrescătoare ale argumentului cos γ după organigrama din anexa 1.

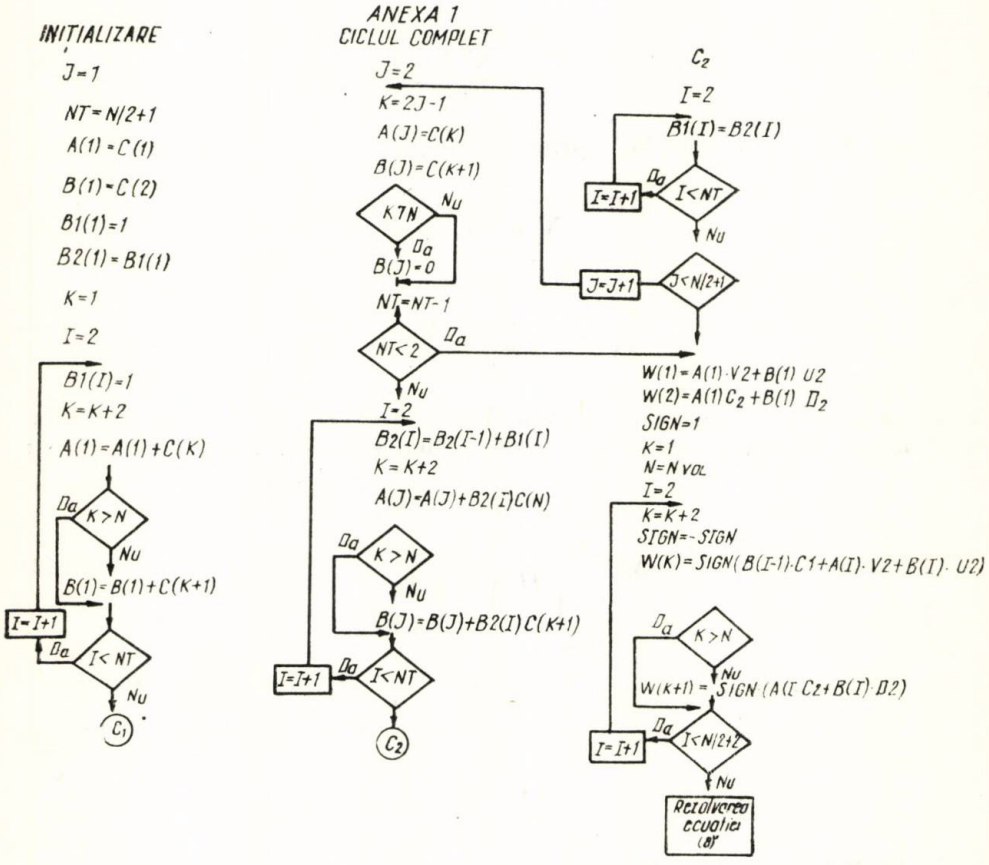
IV. La soluționarea ecuației algebrice (8) s-a folosit subrutina POLRT (XCOF, COF, ROOTR, ROOTI, IER) din [3], [4] unde în vectorul XCOF sînt transferați coeficienții polinomiali în ordonarea după puteri crescătoare (invers de cum au fost generați), iar în vectori de ieșire ROOTR, ROOTI sînt depuse componentele reale, respectiv imaginare a celor $N - 1 =$ NVOL rădăcini căutate.

În această subrutină, dîndu-se polinomul

$$f(z) = \sum_{n=0}^{N} W_n Z^n = U + \mathrm{i}V, \tag{13}$$

cu

$$Z = X + \mathrm{i}\,Y, \tag{14}$$



se determină termenii X_n și Y_n ai dezvoltării

$$Z^n = (X + \mathrm{i}\,Y)^n, \tag{15}$$

după cum urmează:

$$\begin{aligned} n &= 0, \\ X_0 &= 1, \\ Y_0 &= 0,0, \\ n &> 0, \\ X_n &= X \cdot X_{n-1} - Y \cdot Y_{n-1}, \qquad (16) \\ Y_n &= X \cdot Y_{n-1} + Y \cdot X_{n-1} \qquad (17) \end{aligned}$$

și deci

$$U = \sum_{n=0}^{N} W_n X_n = W_0 + \sum_{n=1}^{N} W_n X_n, \tag{18}$$

$$V = \sum_{n=0}^{N} W_n Y_n = \sum_{n=1}^{N} W_n Y_n. \tag{19}$$

Cu derivatele calculate prin recurență :

$$\frac{\partial U}{\partial X} = \sum_{n=1}^{N} n \cdot X_{n-1} \cdot W_n, \tag{20}$$

$$\frac{\partial U}{\partial Y} = -\sum_{n=1}^{N} n \cdot Y_{n-1} \cdot W_n, \tag{21}$$

se determină prin metoda Newton-Raphson creșterile Δx, Δy. Rezultatele, după aplicarea ecuațiilor Cauchy-Riemann, sînt :

$$\Delta X = \frac{V \dfrac{\partial U}{\partial Y} - U \dfrac{\partial U}{\partial X}}{\left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}, \tag{22}$$

$$\Delta Y = -\frac{U \dfrac{\partial U}{\partial Y} + V \dfrac{\partial U}{\partial X}}{\left(\dfrac{\partial U}{\partial X}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial U}{\partial Y}\right)^2}. \tag{23}$$

În noua iterație, ipotezele sînt :

$$X = X + \Delta X,$$
$$Y = Y + \Delta Y.$$

V. Cu rădăcinile rezultate, se determină vectorul pulsațiilor proprii TCR (I) :

$$\mathrm{TCR\,(I)} = \mathrm{DSQRT\,((1 - ROOTR(I))/A\,}J\mathrm{/AC}).$$

Calculul se încheie cu determinarea amplitudinilor relative conținute în matricea $AR(I, J)$:

$$AR(I, J) = (\lambda_{i,j}),\ (i = 1, N),\ (j = 1, N - 1);$$

i — indicele volantului;

j — indicele modului de vibrație:

$$AR(I,J) = \left\| \begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ \lambda_{2,1} & \lambda_{2,2} & \lambda_{2,N-1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \lambda_{N,1} & \lambda_{N,2} & \lambda_{N,N-1} \end{array} \right\|, \qquad (24)$$

a cărei generare este conținută în enunțurile 152—167 din anexa 2.

ANEXA 2/1

```
                                                    DATE 01/10/70
C     VIBRAȚIILE DE TORSIUNE ALE ARBORILOR COTIȚI
C                                   MIHAI C. TOFAN
C                                   CEPECA SEPTEMBRIE 1970
C     N—NR VOLANȚILOR
C     AJO, AJ, AJN1 — MOMENTE DE INERȚIE (K6K. S2. CM)
C     CO, CJ, CN1 — RIGIDITĂȚI                (1/KGF.CM)
    1 FORMAT (1615)
    2 FORMAT (4D20.6)
    3 FORMAT (20A1)
   50 FORMAT (1H1/ / 1HO, T30, 'VIBRAȚII TM', I3/1HO, T29, 16 ('—')/1HO)
   51 FORMAT (1HO, T10, 2('W(', I2,')...', D20.10, IOX) )
   52 FORMAT (1HO, T10, 'W(', I2, ')...', D20.10)
   53 FORMAT (1HO, T02, 'NUMĂRUL VOLANȚILOR', I5/1HO)
   54 FORMAT (1HO/ /T10, 'I — COMBINĂRI C' I3/1HO)
   55 FORMAT (1HO/ /T10, 'I1 — COEFICIENȚI DE EXPANDARE'/1HO)
   60 FORMAT (1HO, T10, 'VALORI U', 2D20.10/1HO, T10, 'VALORI V', 2D20.10)
   56 FORMAT (1HO/ /TI0, 'IV—SOLUȚIILE CARACTERISTICE ȘI PULSAȚIILE
             6 PROPRII ALE ARBORELUI'/1HO, T10, 66 ('—')/1HO)
   61 FORMAT (1HO, T10, 'C(', I2, ', ', I2, ')...', F10.0)
   62 FORMAT (1HO, I2, (T10, 10F10.0) )
   63 FORMAT (1HO, T10, 'VALORI C1, C2, D2', 3D20, 6)
   65 FORMAT (1HO, T10, 'A (', I2, ')..', D20.10, 10X, 'B (', I2, ')..', D20. 10)
   66 FORMAT (1HO, T10, 'A (', I2, ')..', D20.10)
   70 FORMAT (1HO/ /T10, 'I12 — COEFICIENȚII ECUAȚIEI CARACTERISTICE' A/
             1HO)
   71 FORMAT (1HO, 'COS (GAMA', I2, ') = ', F15, 8, '+', F15.8, '* J' /1HO, 1 T10,
             PULSAȚIE PROPRIE (', I2, ')...', D20.10)
   72 FORMAT (1HO, T10, 'CODUL EXECUȚIEI', I5)
   82 FORMAT (1HO/ / /T10, 'PULSAȚIE CRITICĂ (', I2, ')...=, F10.2, 5 X, 2 'GAMA
             /2', F10, 6,5X, 'RADIANI'/1HO)
   83 FORMAT (1HO, T10, 'AMPLITUDINI RELATIVE'/1HO)
```

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

```
   84 FORMAT (6F15.6)
   85 FORMAT (1HO, T30, 'PULSAȚIA (', I2, ')...', F15.5)
C
C  . . . . . .
C
      DIMENSION C(21), A(20), B(20), B1(10), B2(10), TCR(20), W(20)
      REAL* 8 C, A, B, B1, B2, TCR, TX
      DOUBLE PRECISION AJO, AJ, AJN1ACO, AC, ACN1, XO, YO, XN1, YN1, U1,
     1 U2, V1, D V2, C1, C2, D2, SIGN, RN, RI
      DIMENSION XCOF (21), COF(21), ROOTR(20), ROOTI(20)
      DIMENSION AR(22, 20), GAMA(20)
      REAL* 8 GAMA
      REAL* 8 B11, B12, B21, B22, BB, A22, COSG, SING, TA, X, GAMAJ, GAMAJ2,
     1 CC
      DIMENSION AG (400), SYMB(20), SY(4)
C
C  . . . . . .
C
      READ (1, 3) (SY(I), I = 1,3)
      READ (1, 3) (SYMB(I), I = 1,20)
      READ (1, 1) NR
      DO 500 INR = 1, NR
      READ (1, 1) NVOL
      WRITE (3, 50) INR
C
C I – VALORI U SI V
      READ (1, 2) AJO, AJ, AJN1, ACO, AC, ACN1
      XO = AJO/AJ
      YO = ACO/AC
      XN1 = AJN1/AJ
      YN1 = ACN1/AC
```

ANEXA 2/2

```
      U1 = XO*YO + XO + XN1*2.DO + XN1*YN1
      U2 = XO* XN1* (1. + YO* YN1)
      V1 = XO + XN1
      V2 = XO* XN1* (YO + YN1)
      C1 = U1 – (U2 + 1.DO)
      C2 = V1 – V2
      D2 = U1 – U2* 2.DO
      WRITE (3,53) NVOL
      N = NVOL–1
      WRITE (3,60) U1, U2, V1, V2
C
C II  – COMBINĂRI
      DO 105 I = 1,12
```

```
  105 C(I) = 0. DO
      C(1) = 1.DO
      RN = DFLOAT(N)
      C(2) = RN
      NS1 = N/2
      NS2 = NS1 + 1
      DO 110 I = 2, NS1
      RI = DFLOAT(I)
  110 C(I + 1) = C(I) * (RN - RI + 1.DO)/RI
      DO 111 I = 1, NS2
      K = N + 2 - I
  111 C(K) = C(I)
      WRITE (3,54) N
C
C  III - INITIALIZĂRI
      DO 115 I = 1,10
      A(I) = 0.0
  115 B(I) = 0.0
      J = 1
      NT = NS2
      A(1) = C(1)
      B(1) = C(2)
      B1(1) = 1.DO
      B2(1) = B1(1)
      K = 1
      DO 120 I = 2, NT
      B1(I) = 1.DO
      K = K + 2
      A(1) = A(1) + C(K)
      IF (K. GT. N) GO TO 120
      B(1) = B(1) + C(K + 1)
  120 CONTINUE
      NP1 = N + 1
      DO 121 I = 1, NP1
      IM1 = I - 1
  121 WRITE (3,61) IM1, N, C(I)
      WRITE (3,55)
      WRITE (3,62) NT, (B1(I), I = 1, NT)
      WRITE (3,65) J, A(J), J, B(J)
C
C  IV - CICLU COMPLET
      DO 130 J = 2, NS2
      K = J + J - 1
      A(J) = C(K)
      B(J) = C(K + 1)
      IF (K.GT.N) B(J) = C.DC
      NT = NT - 1
      IF (NT. LT. 2) GO TO 130
      DO 125 I = 2, NT
      B2 (I) = B2(I - 1) + B1(I)
      K = K + 2
```

ANEXA 2/3

```
      A(J) = A(J) + B2(I)* C(K)
      IF (K - N)              123, 123, 124
  123 B(J) = B(J) + B2(I)* C(K + 1)
      IND = 1
      GO TO 125
  124 IND = 2
  125 CONTINUE
      DO 126 I = 2, NT
  126 BI (I) = B2(I)
      WRITE (3,62) NT, (B1 (I), I = 1, NT)
      IF (IND.EQ.1) WRITE (3,65) J, A (J), J, B(J)
      IF (IND.EQ.2) WRITE (3,66) J, A(J)
  130 CONTINUE
C
C  V  - COEFICIENTIL EC. CARACTERISTICE
      WRITE (3,56)
      WRITE (3,63) C1, C2, D2
      W(1) = A(1)*V2 + B(1)* U2
      W(2) = A(1)*C2 + B(1)*D2
      SIGN = 1.DO
      K = 1
      N = NVOL
      NP1 = N + 1
      NS2 = NS2 + 1
      DO 150 I = 2, NS2
      K = K + 2
      SIGN = - SIGN
C
C     IMPAR
      W(K) = SIGN* (B(I - 1)* C1 + A(I)* V2 + B(I)* U2)
C
C     PAR
      IF (K.GT.N + 1) GO TO 150
      W(K + 1) = SIGN* (A(I)* C2 + B(I)* D2)
  150 CONTINUE
      DO 160 K = 1, NS2
      I = K + K - 1
      IP1 = I + 1
      IF (IP1.LE.N + 1) WRITE (3,51) I, W(I), IP1, W(I + 1)
      IF (IP1. GT.N + 1) WRITE (3,52) I, W(I)
  160 CONTINUE
      DO 170 I = 1, NP1
      K = N + 2 - I
  170 XCOP (I) = W(K)
      CALL POLRT (XCOF, COF, N, ROOTR, ROOTI, IER)
      WRITE (3,70)
      DO 180 I = 1, N
      TX = L. - ROOTR (I)
```

```
      TX = TX/AJ/AC
      IF(TX)          172, 172, 171
  171 TCR (I) = DSQRT (TX)
      GO TO 180
  172 TCR (I) = O.DO
  180 WRITE (3,71) I, ROOTR (I), ROOTI(I), I, TCR(I)
      WRITE (3,72) IER
C
C     AMPLITUDINI RELATIVE
      DO 220 I = 1, N
      GOSG = ROOTR (I)
      IF (DABS (COSG). GE. 1. DO) GO TO 220
      X = 1.DO - COSG
      TA = DSQRT ( (1.DO - COSG)/(1.DO + COSG) )
      BB = 1.DO - XO*YO*X
      GAMA (I) = DATAN (TA)
```

ANEXA 2/4

```
      DO 200 J = 1, N
      ACC = AC
      IF (J.EQ.1) ACC = ACO
      GAMAJ = GAMA (I)* DFLOAT (J - 1)
      GAMAJ2 = GAMAJ* 2.DO
      SING = DSIN (GAMAJ2)
      COSG = DCOS (GAMAJ2)
      B11 = BB*COSG - XO*X*SING/TA
      B21 = ACO*COSG + AC*SING/TA
      B12 = - (BB*TA*SING + XO*X*COSG)/AC
      B22 = - YO*TA*SING + COSG
  200 AR(I, J) = (B11-B12*ACC)/(B11*B22 - B12*B21)
      A22 = - B21*XN1*X/AC + B22*(1.DO - XN1*YN1)
      AR (I, J + 1) = 1.DO/A22
      WRITE (3,82) I, TCR(I), GAMA(I)
      WRITE (3,83)
      WRITE (3,84) (AR(I, J), J = 1, NP1)
  220 CONTINUE
C
C     REPREZENTĂRI GRAFICE
      NL = 50
      N = 3
      DO 260 IG = 1, N
      DO 250 J = 1, NP1
      AG(J) = FLOAT(J)
      K = N + J + 1
      AG(K) = 0.
      K = N + K + 1
      AG (K) = AR (IG, J)
  250 CONTINUE
      CALL GRAFIC (IG, AG, NP1, M, NL, O, SY)
```

```
      WRITE (3,85) IG, TCR (IG)
  260 CONTINUE
      DO. 320 I = 1, NP1
      AG(I) = FLOAT(I)
      J = N + I + 1
      AG(J) = o.
      L = NP1 + NP1 + I
      DO 310 J = 1, N
      AG(L) = AR(J, I)
  310 L = L + NP1
  320 CONTINUE
      NO = IG + 1
      M = N + 2
      NI = 60
      CALL GRAFIC (NO, AG, NP1, M, NL, O, SYMB)
  500 CONTINUE
      END
```

Programul se încheie cu reprezentarea grafică a amplitudinilor relative în dreptul fiecărui volant, construită pentru fiecare pulsație proprie în parte și, în final, simultan pentru toate modurile de vibrație naturală, în vederea unei comparări mai ușoare.

Relațiile care au stat la baza calculului în acest ultim segment, s-au obținut prin dezvoltarea produsului matricial $A_1\, A^{N-2}\, A_N$ după cum urmează :

$$AR(I, J) = \frac{\lambda_i}{\lambda_1} = \frac{b_{11}^{(i)} - b_{22}^{(i)} \cdot C_i}{b_{11}^{(i)}\, b_{22}^{(i)} - b_{12}^{(i)}\, b_{21}^{(i)}}, \tag{25}$$

$$C_i = \{C_1, C, C, \ldots, C\},$$

$$b_{11}^{(i)} = \left(1 - \frac{J_1 C_1}{JC}\, x\right) \cos(i-1)\,\gamma - \frac{J_1}{J}\, x \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sin(i-1)\,\gamma,$$

$$b_{21}^{(i)} = C_1 \cdot \cos(i-1)\,\gamma + C \cdot \operatorname{ctg} \frac{\gamma}{2} \sin(i-1)\,\gamma, \tag{26}$$

$$b_{12}^{(i)} = -\frac{1}{C}\left(1 - \frac{J_1 C_1}{JC}\, x\right) \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin(i-1)\,\gamma - \frac{J_1}{JC}\, x \cos(i-1)\,\gamma,$$

$$b_{22}^{(i)} = -\frac{C_1}{C} \operatorname{tg} \frac{\gamma}{2} \sin(i-1)\,\gamma + \cos(i-1)\,\gamma$$

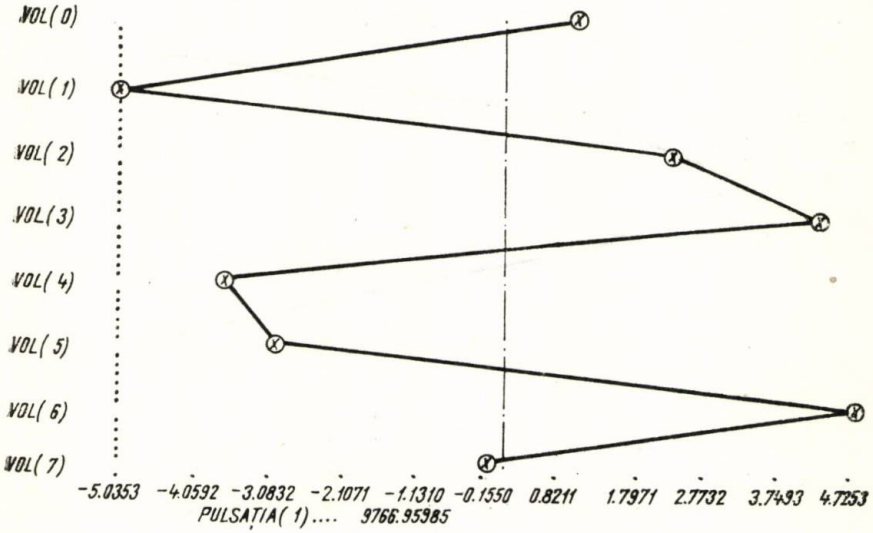
$$(i = 1, \ldots, N-1) \quad x = 1 - \cos\gamma\,;$$

$$a_{22} = -\, b_{21}^{(N-1)} \frac{JN}{JC}\, x + b_{22}^{(N-1)} \left(1 - \frac{J_N C_{N-1}}{JC}\right), \quad AR(I, N) = 1/a_{22}. \tag{27}$$

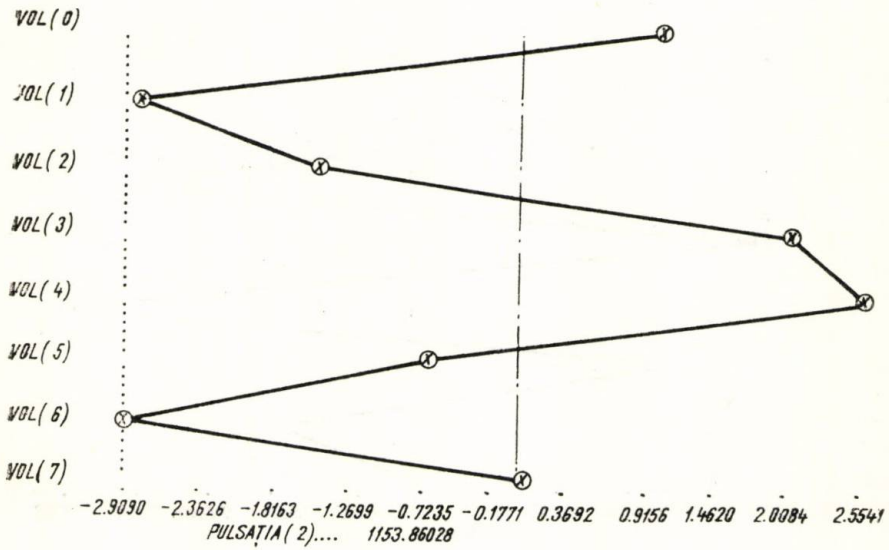
În anexa 3 sînt reprezentate modurile proprii de vibrație pentru un arbore cu opt volanți, asociat motorului omogen în șase cilindri MG-120 de licență GANZ, construit în țara noastră. Se prezintă de asemenea

Anexa 3/1

GRAFIC 1

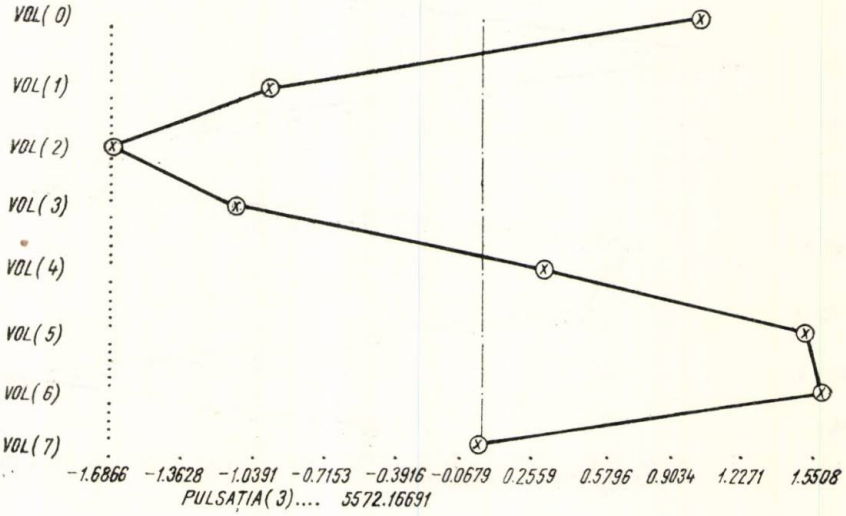


GRAFIC 2

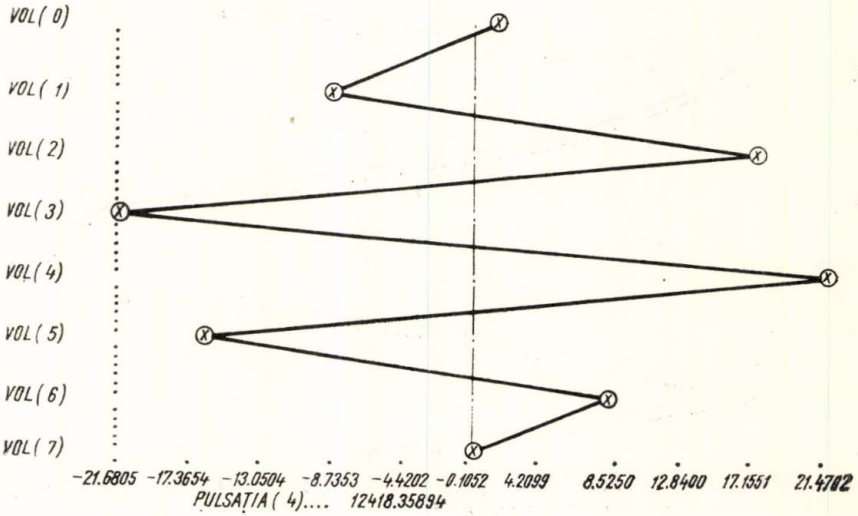


Anexa 3/2

GRAFIC 3

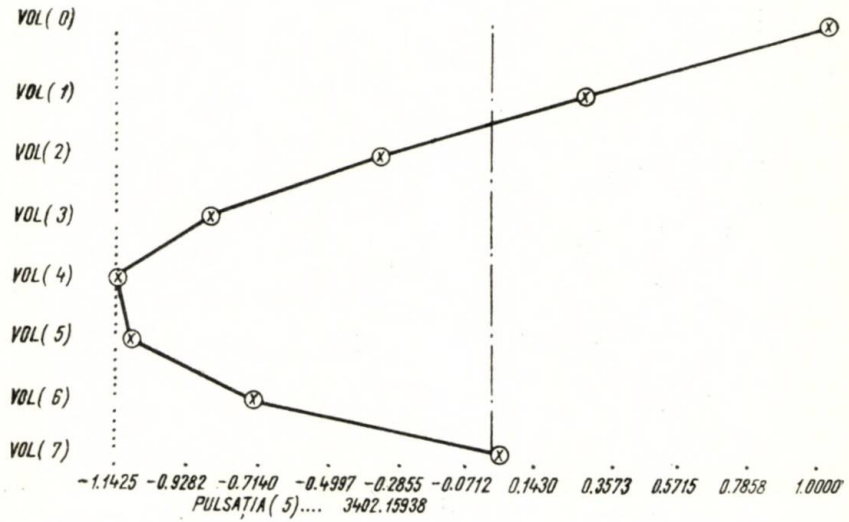


GRAFIC 4

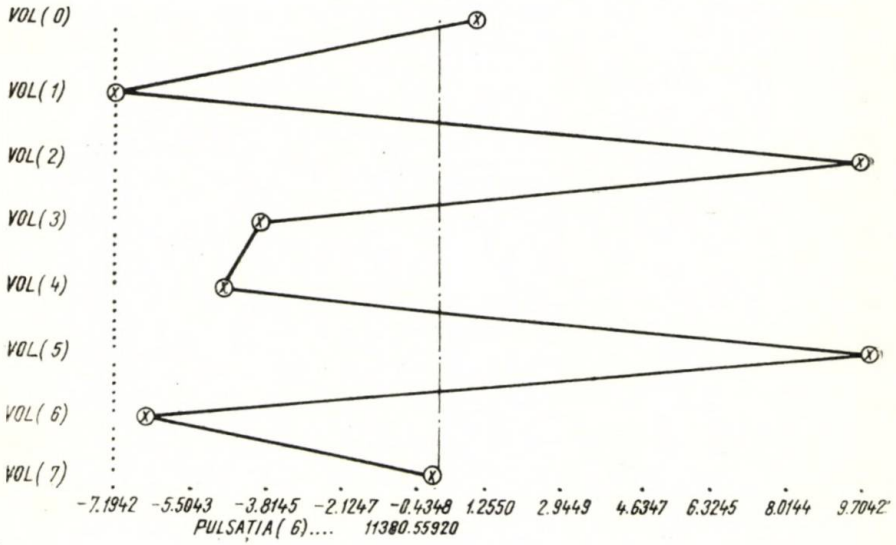


Anexa 3/3

GRAFIC 5

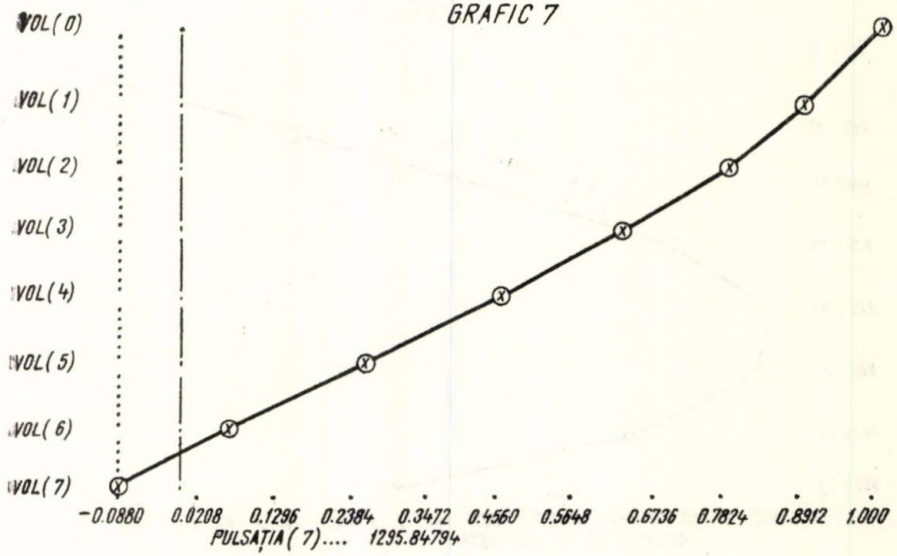


GRAFIC 6

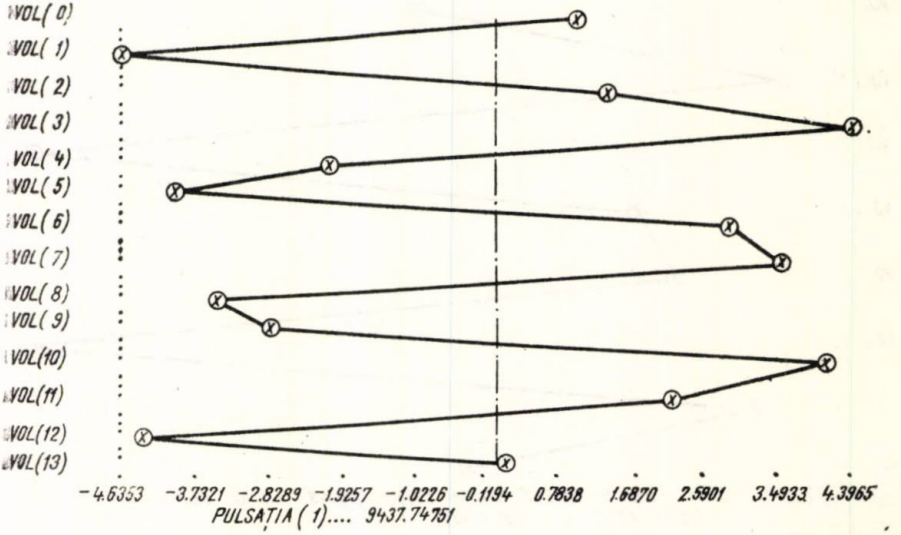


Anexa 3/4

GRAFIC 7

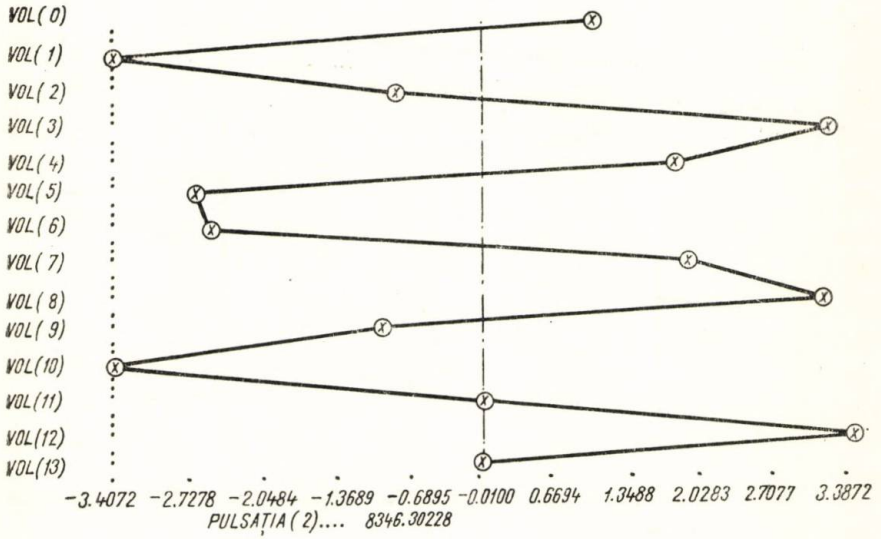


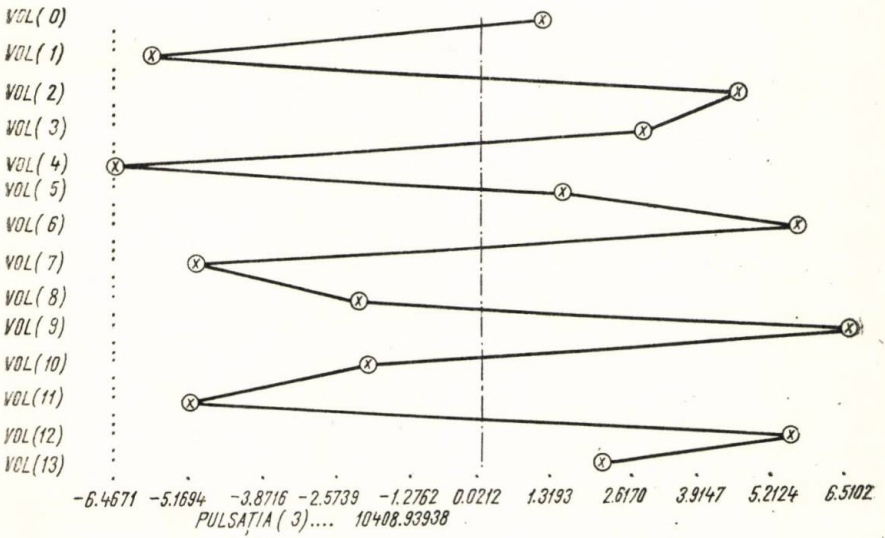
GRAFIC 1



Anexa 3/5

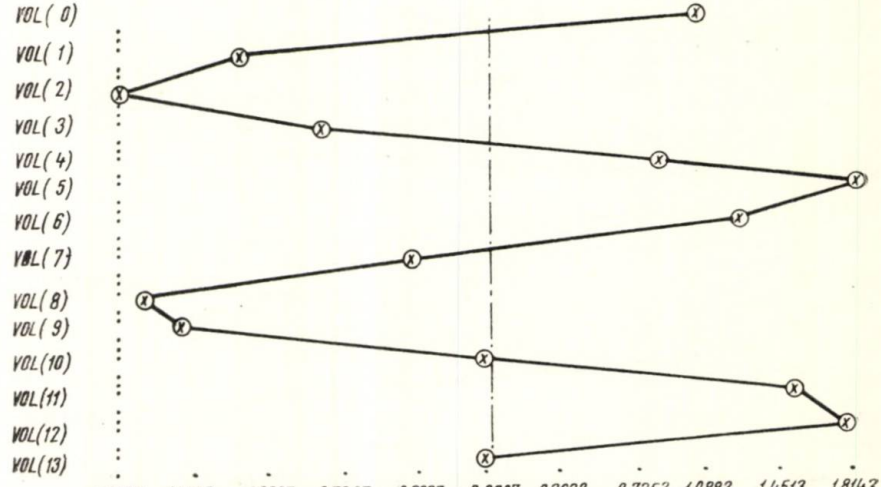
GRAFIC 2



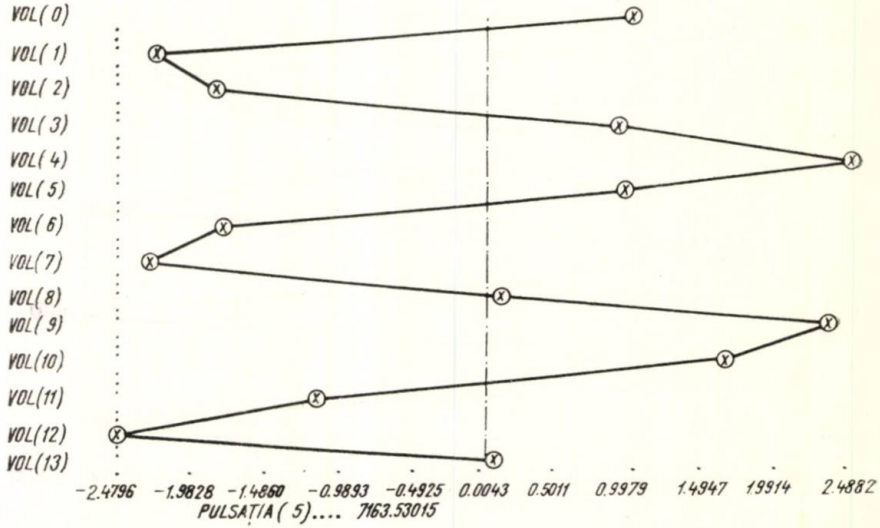


Anexa 3/6

GRAFIC 4

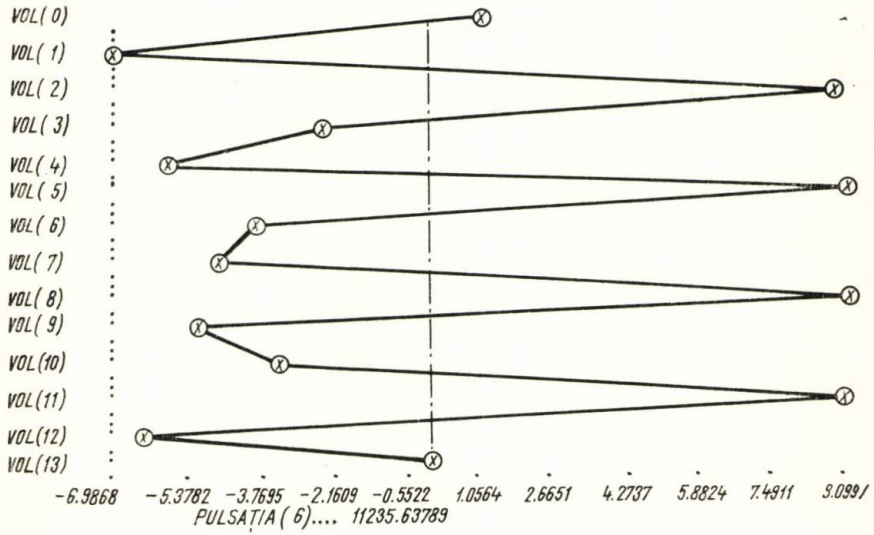


GRAFIC 5

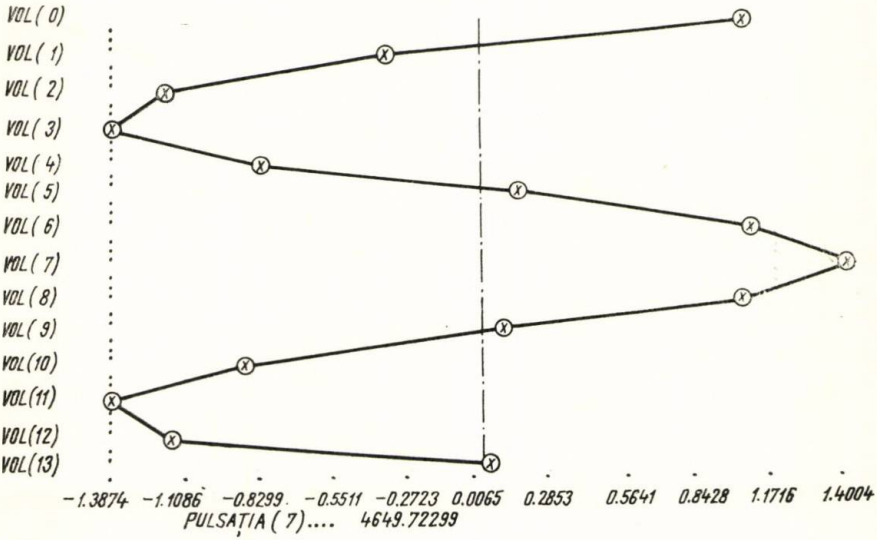


Anexa 3/7

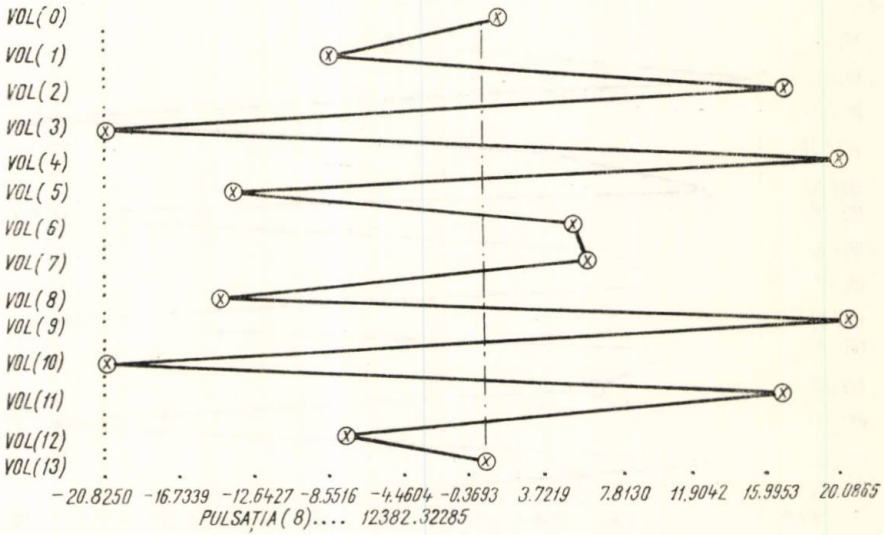
GRAFIC 6



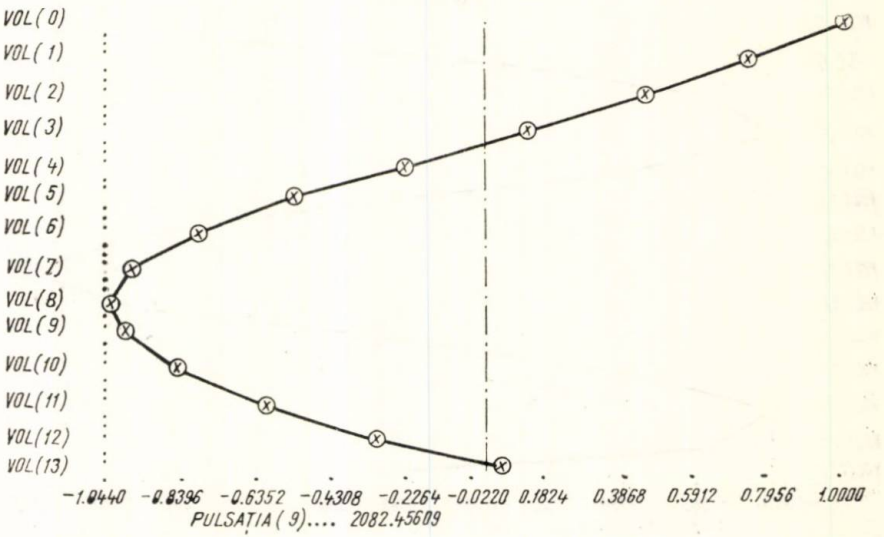
GRAFIC 7



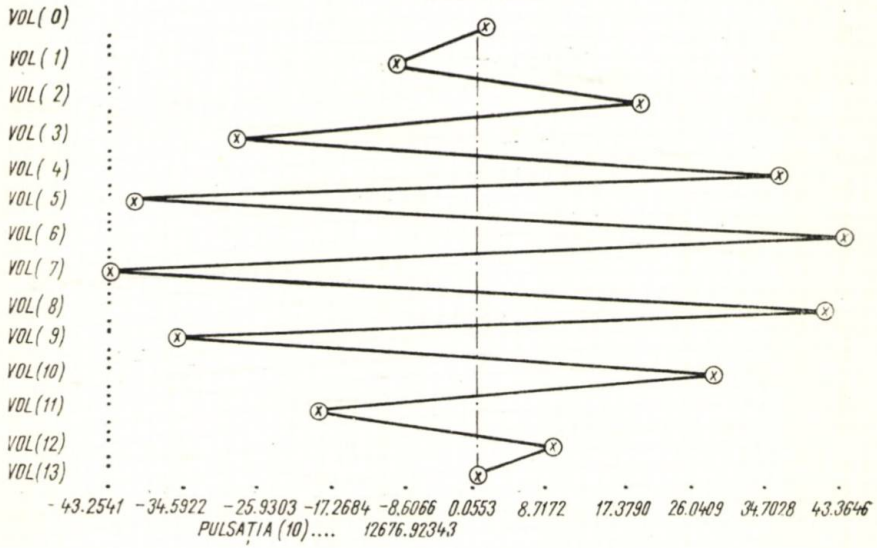
GRAFIC 8 Anexa 3/8



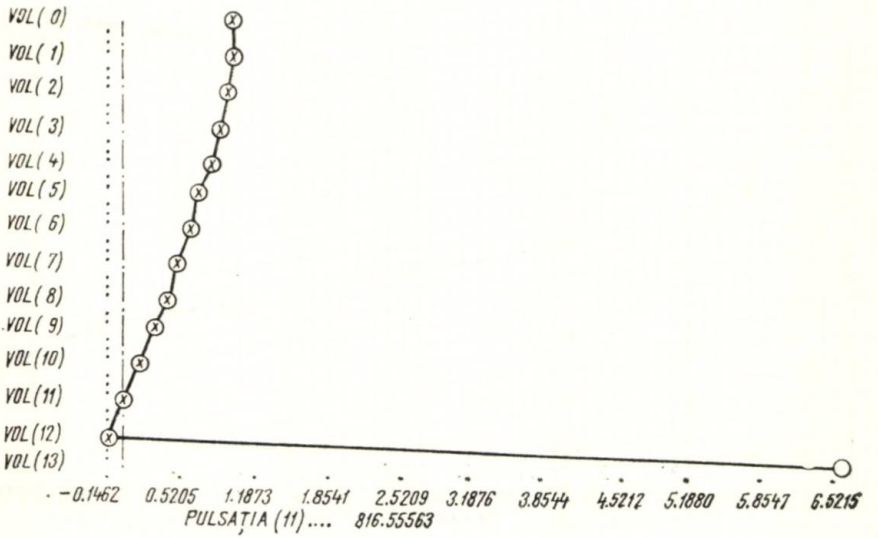
GRAFIC 9



GRAFIC 10 Anexa 3/9

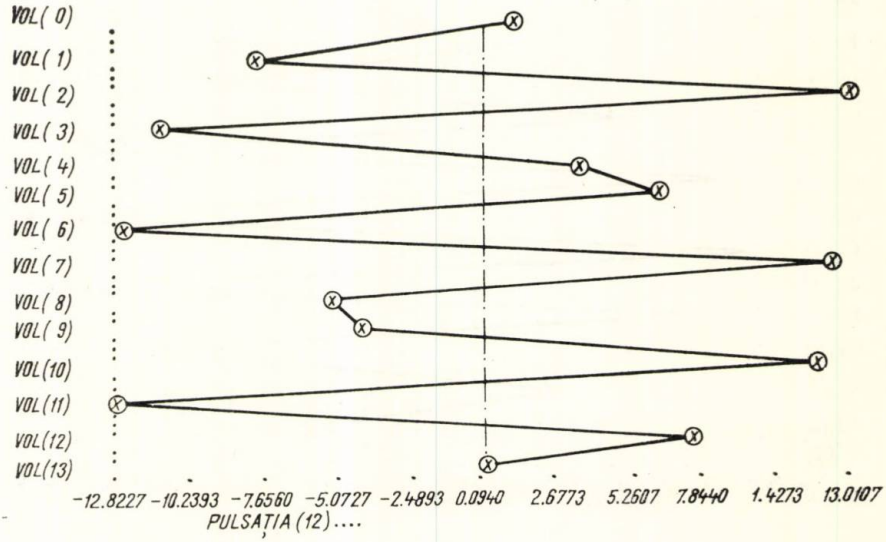


GRAFIC 11

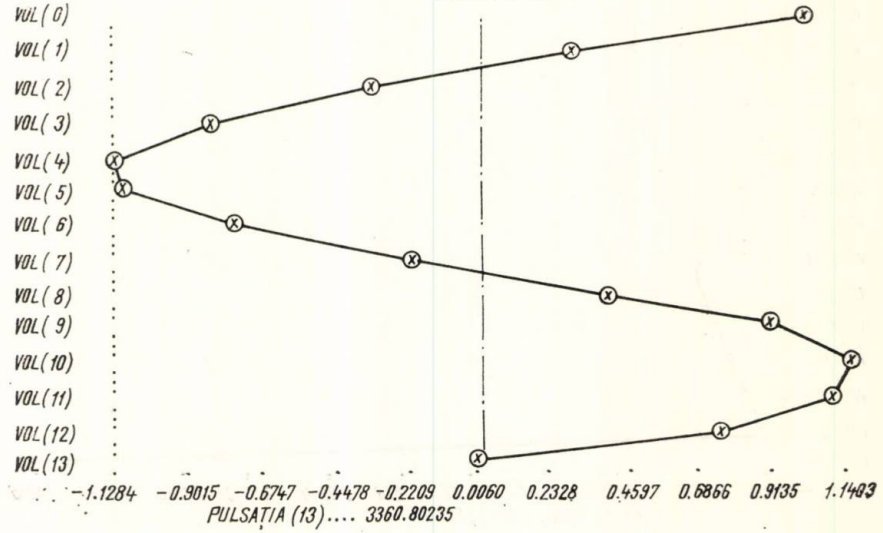


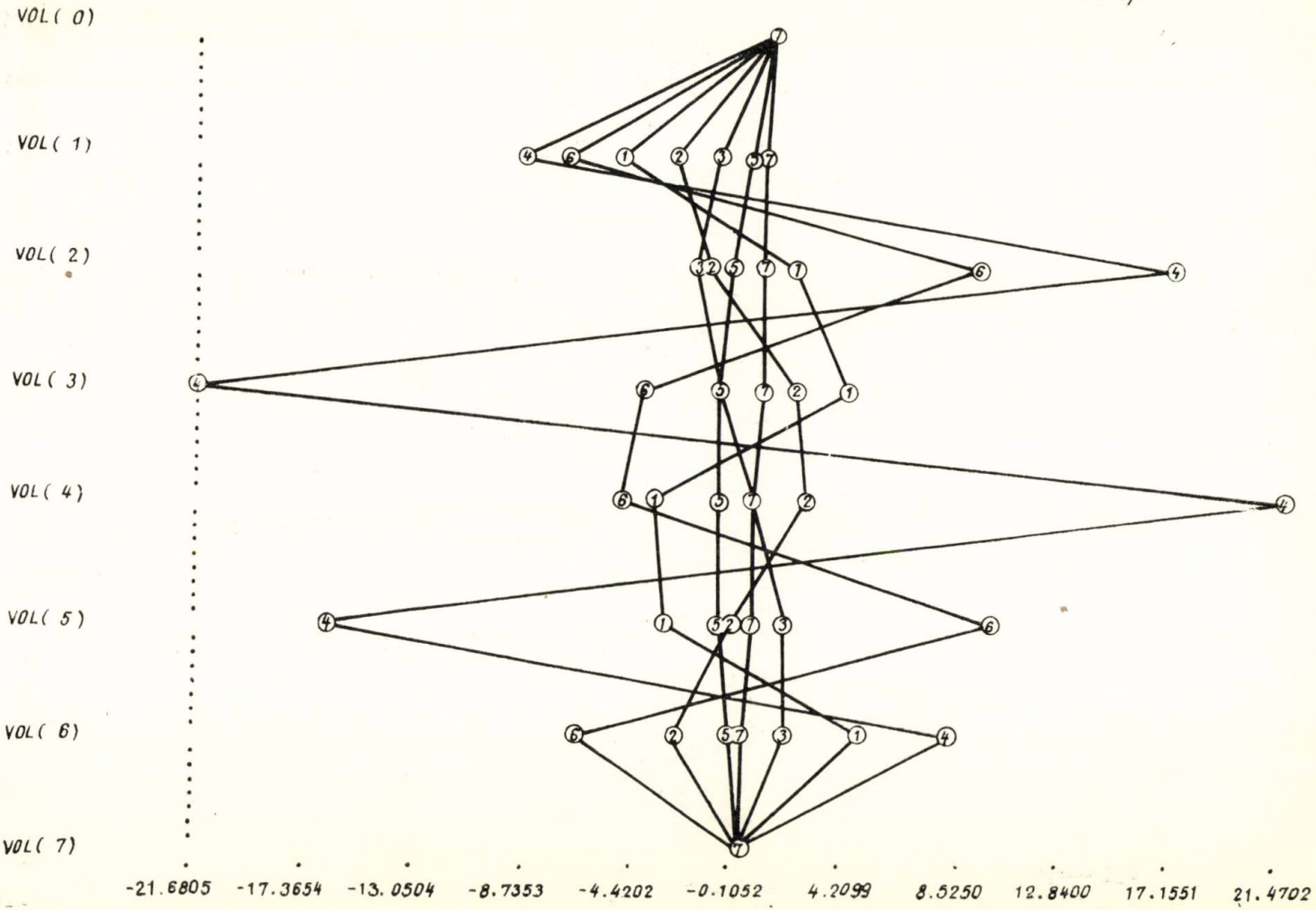
Anexa 3/10

GRAFIC 12



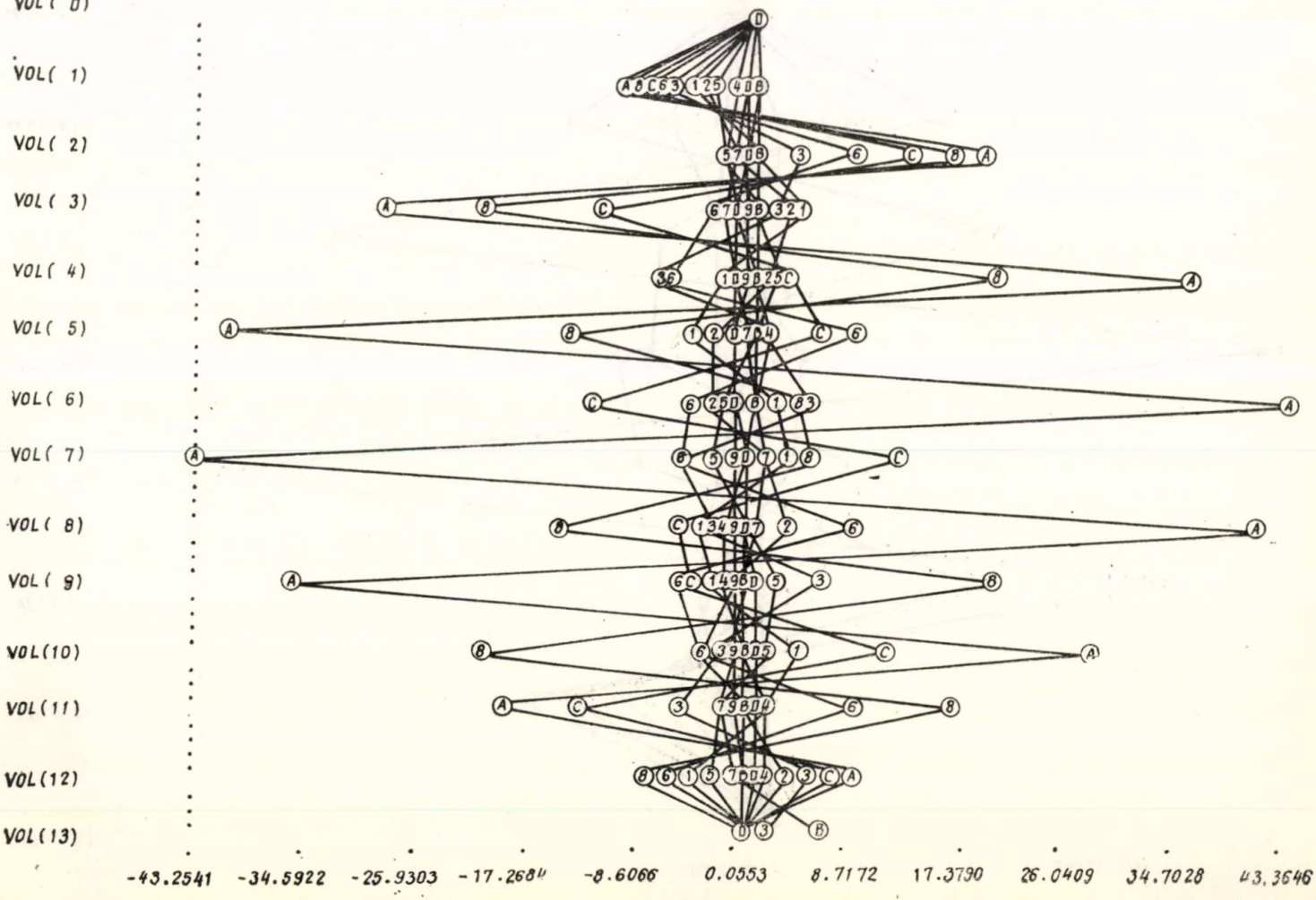
GRAFIC 13




VOL(0)
VOL(1)
VOL(2)
VOL(3)
VOL(4)
VOL(5)
VOL(6)
VOL(7)
-21.6805
-17.3654
-13.0504
-8.7353
-4.4202
-0.1052
4.2099
8.5250
12.8400
17.1551
21.4702

GRAFIC 14

Anexa 3/12



modurile proprii de vibrație pentru un arbore cu 14 volanți, pentru a servi la compararea timpului de calcul în raport cu alte programe.

În ceea ce privește timpul de calcul necesar pentru determinarea pulsațiilor proprii și amplitudinilor relative, acesta se situează între 10~18 secunde pentru un sistem cu 8, respectiv cu 14 volanți.

Programul complet, cu reprezentări grafice, condus pentru două sisteme (cu 8 și respectiv 14 volanți) a durat 3 minute și 50 secunde.

Primită la redacție la 8 ianuarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Niţescu, V. Olariu, *Asupra ecuației caracteristice a vribrațiilor de torsiune ale arborelui cotit*, A II-a Conferință de mecanică tehnică, C.N.I.T., București, 1970.
2. I. Kožešnik, *Dynamika Strojů*, Praha, Statni Nekladatel, Tehnike literatury, 1958.
3. System/360 SCIENTIFIC SUBROUTINE PACKAGE (360 A — CM—03×) Verison III, Programmer's Manual. 1969, IBM Corporation, Technical Publications Dept., New York.
4. Melvin Klerer, Granin A. Korn, 'DIGITAL COMPUTER USER'S HANDBOOK, McGRAWHILL Book Co., New York 1967. Chapter 2.3—Solution of nonlinear equations, Royce E. Beckett.

CONTRIBUȚII LA STABILIREA FORMEI CURBELOR (r_c), Γ_0 ȘI Γ_j CU AJUTORUL ECUAȚIEI VELDKAMP

de N. I. MANOLESCU și G. C. POPA

Institutul politehnic București

În lucrare se arată cum, folosind rezultatele obținute de Veldkamp [5], se pot determina în mod precis formele curbei polilor relativi de rotație.
În continuare se stabilesc o serie de teoreme pentru fiecare din cele două forme fundamentale ale curbei r_c.
În concluzie, în lucrare se extind aceste rezultate la formele curbei centrelor și curbei punctelor, stabilindu-se în acest fel trei teoreme care generalizează rezultatele obținute anterior de alți cercetători [7].

1. CURBA POLILOR RELATIVI DE ROTAȚIE r_c

Se consideră un fascicul de poziții $\overline{E_iF_i}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots, n)$ ale unui segment oarecare $\overline{EF}$ din planul mobil al bielei unui mecanism patrulater A_0ABB_0, având curbele directoare e și f (curbele-bielă ale punctelor E, respectiv F din planul mobil V).

Alegînd arbitrar o poziție inițială din fasciculul $\overline{E_iF_i}$ ($\overline{E_6F_6}$ în figura 1) și determinînd cu ajutorul mediatoarelor polii de rotație între această poziție de referință și o poziție oarecare $\overline{E_jF_j}$ din fasciculul $\overline{E_iF_i}$ rezultă o succesiune de poli relativi de rotație.

Această succesiune de poli determină o curbă, numită *curba polilor relativi de rotație* r_c cu importanță imediată în sinteza geometrică a mecanismului patrulater. [2], [3], [4], [6]. În figura 1 s-a trasat curba r_c (poziție de referință $\overline{E_6F_6}$) și s-au indicat mediatoarele duse pentru obținerea polului relativ P_6^{10} *) de pe curba r_6^n **).

*) se va citi: polul relativ de rotație al poziției $\overline{E_{10}F_{10}}$ raportată la $\overline{E_6F_6}$ considerată poziție de referință.

**) r_6^n este curba polilor relativi de rotație construită, considerînd poziția $\overline{E_6F_6}$ drept poziție de referință.

Veldkamp [5] a stabilit ecuația curbei r_c la mecanismul patrulater, raportată la un sistem de axe oblice cu originea în centrul instantaneu de rotație I_0 și orientat ca în figura 2 sub forma

$$r_k^n \equiv cxC_1 + ayC_2 = 0, \tag{1}$$

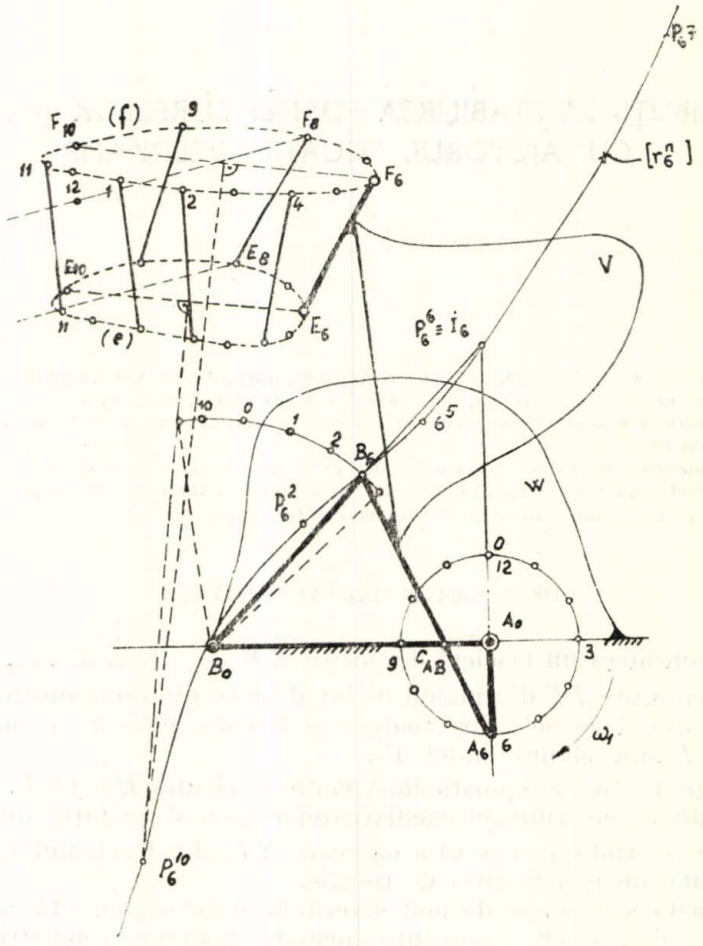


Fig. 1

unde

$$C_1 \equiv x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 - (x_1 + x_2)x - (x_1 + x_2)y\cos\alpha + x_1x_2,$$

$$C_2 \equiv x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 - (y_3 + y_4)x\cos\alpha - (y_3 + y_4)y + y_3y_4, \tag{2}$$

iar a, b, c, d, sînt laturile conturului patrulater.

Ecuațiile celor 4 tangente duse prin $I_0 \equiv P_K^K$ la curba r_c (fig. 2) sînt [5]:

$$t_1 = \frac{1}{2}(u_1 - \sqrt{u_1^2 - 4}),\ t_3 = \frac{1}{2}(u_2 - \sqrt{u_2^2 - 4}),$$

$$t_2 = \frac{1}{2}(u_1 + \sqrt{u_1^2 - 4}),\ t_4 = \frac{1}{2}(u_2 + \sqrt{u_2^2 - 4}), \tag{3}$$

unde

$$u_1^2 - 4 = \frac{(b-d+a+c)(b-d-a-c)(b-d-a+c)(b-d+a-c)}{a^2c^2}, \tag{4}$$

$$u_2^2 - 4 = \frac{(b+d+a+c)(b+d-a+c)(b+d+a-c)(b+d-a-c)}{a^2c^2}. \tag{5}$$

Curba polilor relativi de rotație fiind o cubică de gen 1 există două soluții posibile:

a) curba r_c este formată din o singură ramură avînd punctele cubice la infinit;

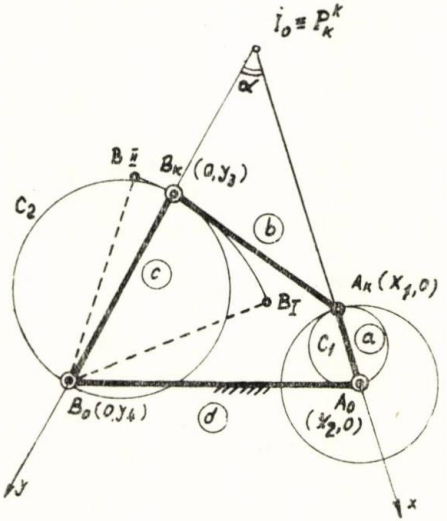


Fig. 2

b) curba r_c este formată din două ramuri separate; o ramură închisă (ovală) avînd punctele ciclice la infinit și o ramură deschisă.

2. FORMELE CURBEI POLILOR RELATIVI DE ROTAȚIE r_c

Se va analiza natura tangentelor la curba r_c folosind relațiile (3) (4) și (5) și teorema lui Grashof, care în esență, conține următoarele concluzii :

a) la un mecanism patrulater A_0ABB_0 (fig. 3) dacă a este latura cea mai mică și d latura cea mai mare a conturului, există două cazuri :

— dacă

$$a + d \leqslant \frac{p}{2} \text{ (unde } p = a + b + c + d), \tag{6}$$

patrulaterul se numește de tip *complex;*

— dacă

$$a + d > \frac{p}{2}, \tag{7}$$

patrulaterul se numește de tip *simplu.*

b) patrulaterul *complex* formează mecanisme dublu manivelă (prescurtat *D.M.*) cînd a este bază (fig. 3*b*), manivelă balansier (*M.B.*) cînd a este adiacentă bazei (fig. 3 *a*) sau dublu balansier (*D.B.*) cînd a este bielă (fig. 3 *c*). Articulațiile de rotație completă sînt adiacente laturii celei mai mici a.

c) patrulaterul *simplu* formează numai mecanisme dublu-balansier (*D. B.*) care nu au nici o articulație de rotație completă (fig. 3 *d*).

Folosind concluziile teoremei lui Grashof și relațiile stabilite de Veldkamp [5] se redă mai jos o demonstrație mai completă a formelor curbei r_c în funcție de tipul *simplu* sau *complex* al mecanismului care o generează.

2.1. CURBA r_c CU DOUĂ RAMURI

În acest caz, după cum se știe, dintr-un punct curent al curbei A se pot duce la aceasta patru tangente reale, dacă punctul A se află pe ramura deschisă și patru tangente imaginare, dacă punctul A se află pe ramura ovală a curbei r_c.

Din (3) rezultă deci că :

$$\text{varianta } 1 \begin{cases} u_1^2 - 4 > 0, \\ u_2^2 - 4 > 0 \end{cases} \tag{8}$$

dacă punctul A se afla pe ramura deschisă a curbei r_c și

$$\text{varianta } 2 \begin{cases} u_1^2 - 4 < 0, \\ u_2^2 - 4 < 0 \end{cases} \tag{9}$$

dacă punctul A se afla pe ramura ovală a curbei r_c.

Din (4) se observă că întotdeauna avem inegalităţile :

$$\begin{aligned} a + b + c - d &> 0, \\ b - a - c - d &< 0, \end{aligned} \tag{10}$$

iar din (5) :

$$\begin{aligned} a + b + c + d &> 0, \\ b + c + d - a &> 0, \\ a + b + d - c &> 0. \end{aligned} \tag{10'}$$

Ţinînd seama de (10) (10') (8) şi (9) sînt posibile următoarele cazuri :

2.1.1. VARIANTA 1: ($u_1^2 - 4 > 0$; $u_2^2 - 4 > 0$) din care se obţin:

Varianta 1.a

$$\left\{\begin{array}{l|l} b + c > a + d & a < b \\ d + c > a + b & a < c \\ b + d > a + c & a < d \end{array}\right.$$

Varianta 1.b

$$\left\{\begin{array}{l|l} b + c < a + d & c < a \\ d + c < a + b & c < b \\ a + c < b + d & c < d \end{array}\right.$$

Ambele sisteme sînt simetrice în b şi d.

Eliminînd cazurile de ordonare după lungime care conduc la aceeaşi inegalitate se obţin posibilităţile din tabelele următoare. *)

Tabela V.1a

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
M.B.	$a<b<c<d$	$a+d\leqslant b+c$
M.B.	$a<c<d<b$	$a+b\leqslant c+d$
M.B.	$a<b<d<c$	$a+c\leqslant b+d$

Toate mecanismele rezultate sînt de tip complex, deoarece respectă condiţia caracteristică (6), de tip *M.B. avînd a manivelă*, (datorită simetriei sistemului de inegalităţi b şi d pot fi fie element fix fie bielă, fără a particulariza prin aceasta problema)

Tabela V.1b

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
M.B.	$c<a<b<d$	$c+d\leqslant a+b$
M.B.	$c<a<d<b$	$c+b\leqslant a+d$
M.B.	$c<d<b<a$	$c+a\leqslant b+d$

Şi în acest caz mecanismele rezultate sînt toate de tip complex, deoarece respectă condiţia caracteristică (6). Mecanismele rezultate din tabela V.1*b*. sînt de asemeni de tip *M.B. avînd drept manivelă elementul c* (datorită simetriei sistemului de inegalităţi b şi d îşi pot schimba reciproc rolul în mecanism).

*) Prin ordonare după lungimile elementelor (b, c, d pentru varianta 1*a* de exemplu) se obţin un număr de $P_3 = 3! = 6$ cazuri. Ele sînt două cîte două identice ca semnificaţie conducînd la aceeaşi inegalitate. Spre exemplu în cazul variantei 1*a* inegalităţile

$$\left\{\begin{array}{l} a < b < c < d \quad \text{şi} \\ a < c < b < d \end{array}\right.$$

din linia 1-a a tabelei V.1*a* conduc la aceeaşi inegalitate

$$a + d \leqslant b + c.$$

Acelaşi lucru e valabil pentru toate tabelele următoare.

2.1.2. VARIANTA 2: ($u_1^2 - 4 < 0$; $u_2^2 - 4 < 0$) din care se obţin:

Varianta 2.a

$$\begin{cases} b + c > a + d \\ a + b > c + d \\ a + c > b + d \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} d < a \\ d < b \\ d < c \end{array}$$

Sistemul de mai sus e simetric în a şi c. Din acest sistem, rezultă următoarele posibilităţi de alcătuire a mecanismelor ce respectă inegalităţile impuse de această variantă :

Varianta 2.b

$$\begin{cases} b + c < a + d \\ b + a < c + d \\ b + d < a + c \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} b < a \\ b < c \\ b < d \end{array}$$

Sistemul este de asemenea simetric în a şi c. Posibilităţile de alcătuire a mecanismelor care să respecte sistemul de inegalităţi şi condiţiile caracteristice sînt redate în tabela de mai jos.

Tabela V.2a

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
D.M.	$d<a<c<b$	$a+c\geqslant d+b$
D.M.	$d<a<b<c$	$a+b\geqslant d+c$
D.M.	$d<b<c<a$	$b+c\geqslant a+d$

Toate mecanismele rezultate sînt de tip *complex*, deoarece respectă condiţia caracteristică (6). *Deoarece d este bază* (element fix), toate variantele rezultate sînt de tip *D.M.*, avînd ca manivele a şi c (lucru ce rezultă din simetria sistemelor).

Tabela V.2b

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
D.B.	$b<a<c<d$	$a+c\geqslant b+d$
D.B.	$b<a<d<c$	$a+d\geqslant b+c$
D.B.	$b<d<c<a$	$c+d\geqslant b+a$

Toate mecanismele rezultate din tabela de mai sus sînt de tip *complex*, şi anume *dublu balansier* (*D.B.*), deoarece sistemul de inegalităţi este simetric în a şi c (care sînt balansiere), iar *elementul cel mai scurt b este bielă.*

2.1.3. CONCLUZII

a) Curba polilor de rotaţie r_c cu două ramuri poate fi generată numai de mecanisme patrulatere de tip complex, care respectă condiţia caracteristică (6) (fig. 3 $a - c$);

b) Cele două vîrfuri exterioare ale patrulaterului complet format pe conturul ($a - b - c - d$) şi anume centrul instantaneu de rotaţie I_0 şi centrul coliniar C_{AB} se află pe ramuri diferite ale cubicei r_c (fig. 3 $a-c$).

c) O condiţie caracteristică de tip $a+c = b+d$ spre exemplu, face ca două din cele patru tangente duse din punctul A la cubică să se confunde.

2.2. CURBA r_c CU O SINGURĂ RAMURĂ

În acest caz din cele patru tangente duse din punctul curent A la cubică, două sînt reale, iar două sînt imaginar-conjugate.

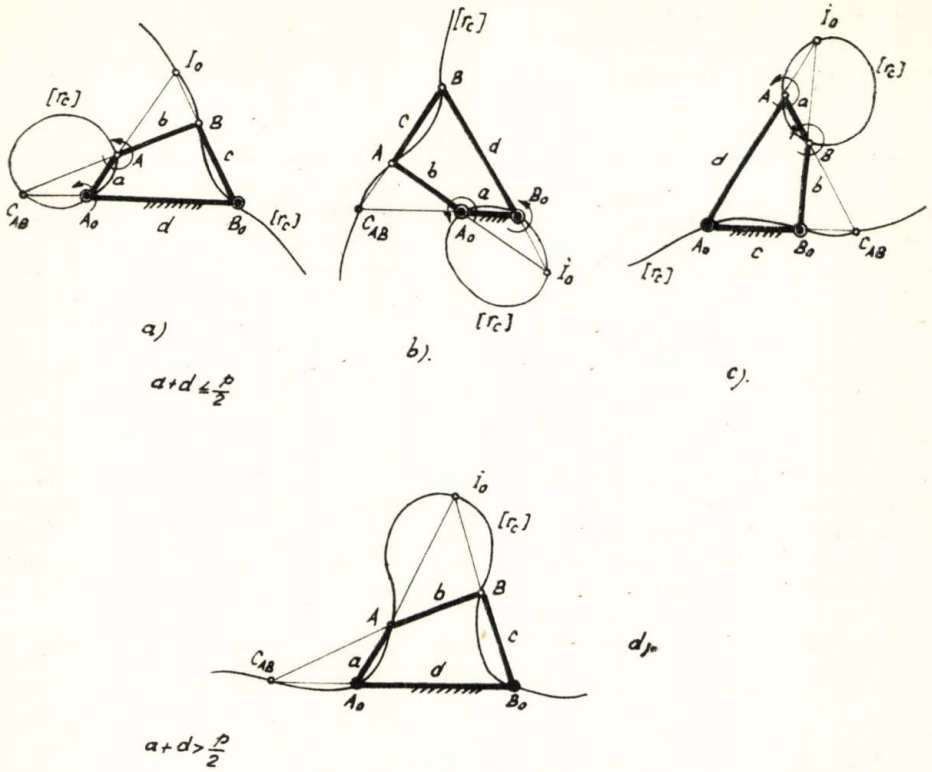


Fig. 3

Din (3) rezultă deci următoarele variante posibile :

$$\text{Varianta 3} \begin{cases} u_1^2 - 4 > 0, \\ u_2^2 - 4 < 0, \end{cases} \tag{11}$$

$$\text{Varianta 4} \begin{cases} u_1^2 - 4 < 0, \\ u_2^2 - 4 > 0. \end{cases} \tag{12}$$

Ţinînd seama de (4), (5), (10), (10′) şi (3) rezultă şi aici două cazuri posibile pentru fiecare variantă în parte.

2.2.1. VARIANTA 3 : $(u_1^2 - 4 > 0\,;\; u_2^2 - 4 < 0)$

Din această variantă se pot alcătui următoarele două cazuri :

Varianta 3a

$$\begin{cases} b + c > a + d \\ d + c > a + b \\ a + c > b + d \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} c > a \\ c > b \\ c > d \end{array}$$

Varianta 3b

$$\begin{cases} b + c < a + d \\ d + c < a + b \\ b + d < a + c \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} a > b \\ a > c \\ a > d \end{array}$$

Sistemul este simetric în b şi d.

Eliminînd cazurile care duc la aceeaşi inegalitate se obţine tabela următoare:

Tabela V.3a

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
D.B.	$c>a>b>d$	$c+d>a+b$
D.B.	$c>b>d>a$	$c+a>b+d$
D.B.	$c>d>a>b$	$c+b>d+a$

Toate mecanismele rezultate din tabelă sînt de tip *simplu* deoarece respectă condiţia caracteristică (7). *Latura c este bază*, iar b şi d avînd proprietăţi identice în contur sînt balansiere.

Sistemul este simetric în b şi d.

Procedînd prin analogie cu cazurile anterioare se obţine tabela următoare:

Tabela V.3b

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
D.B.	$a>b>c>d$	$a+d>b+c$
D.B.	$a>c>d>b$	$a+b>c+d$
D.B.	$a>d>b>c$	$a+c>b+d$

Mecanismele rezultate din tabelă sînt toate de tip *simplu*, deci de tip *D.B.*

Latura a este bază, iar sistemul fiind simetric în b şi d, aceste laturi sînt balansiere.

2.2.2. VARIANTA 4: ($u_1^2 - 4 < 0$; $u_2^2 - 4 > 0$) care duce la alte două variante:

Varianta 4a

$$\begin{cases} b+c>a+d \\ b+a>c+d \\ b+d>a+c \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} b>a \\ b>c \\ b>d \end{array}$$

Sistemul este simetric în a şi c. Procedînd ca mai sus se obţine:

Tabela V.4a

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
D.B.	$b>a>c>d$	$b+d>a+c$
D.B.	$b>a>d>c$	$b+c>a+d$
D.B.	$b>d>c>a$	$b+a>c+d$

Toate mecanismele rezultate prin permutări sînt de tip *simplu*, deci dublu-balansiere.

Latura b este baza, iar a şi c sînt balansiere datorită simetriei în sistemul de inegalităţi.

Varianta 4b

$$\begin{cases} a+d>b+c \\ c+d>a+b \\ b+d>a+c \end{cases} \Bigg\| \begin{array}{l} d>a \\ d>b \\ d>c \end{array}$$

Sistemul este simetric în a şi c. Analog cu variantele anterioare se obţine tabelul:

Tabela V.4b

Felul mecanismului	Inegalitatea	Condiţia caracteristică
D.B.	$d>a>b>c$	$d+c>a+b$
D.B.	$d>a>c>b$	$d+b>a+c$
D.B.	$d>b>c>a$	$d+a>b+c$

Toate mecanismele rezultate sînt de tip *simplu*, dublu-balansiere.

Latura d este baza, iar a şi c sînt balansiere.

CONCLUZIE

Curbele r_c cu o singură ramură pot fi generate numai de mecanisme de tip *simplu*, respectînd condiţia caracteristică (7) (fig. 3*d*). În acest caz punctele I_0 şi C_{AB} se află pe unica ramură a curbei r_c (fig. 3*d*). Ca urmare a celor expuse la § 2 se poate enunţa următoarea teoremă importantă :

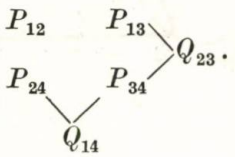
TEOREMA 1 : Cubica r_c are două ramuri dacă conturul patrulater care o generează este de tip *complex* şi o singură ramură dacă patrulaterul generator este de tip *simplu*.

3. FORMELE CURBEI CENTRELOR Γ_0 ŞI ALE CURBEI PUNCTELOR CERCUALE Γ_j

Considerînd cei şase poli de rotaţie cunoscuţi din sinteza patru — poziţională, cu ajutorul cărora se construieşte curba centrelor Γ_0 şi curba punctelor cercuale Γ_j şi anume :

$$P_{12}\ P_{13}\ P_{14},$$
$$P_{23}\ P_{24},$$
$$P_{34},$$

se alege unul din cele trei patrulatere complete de poli, de exemplu :



Alegînd un sistem de referinţă oblic $xQ_{23}y$ (fig. 4*a*) cu originea în unul din vîrfurile patrulaterului complet al polilor de rotaţie, prin analogie cu (1) şi (2) se poate scrie

$$\Gamma_0(x, y) \equiv C_1 xc + C_2 ya = 0, \tag{13}$$

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 - (A + B)x - (A + B)\,y\,\cos\alpha + AB, \\ C_2 &\equiv x^2 + 2xy\cos\alpha + y^2 - (C + D)\,x\cos\alpha - (C + D)\,y + CD. \end{aligned} \tag{14}$$

Prin analogie cu teorema 1 (demonstraţia este analogă celei de la § 2.) se pot enunţa următoarele teoreme referitoare la formele posibile ale curbei centrelor Γ_0 şi curbei punctelor cercuale Γ_j :

TEOREMA 2 : Curba centrelor Γ_0 (sau curba cercuală aferentă Γ_j dacă în patrulaterul polilor apar poli simetrici) are două ramuri, dacă patrulaterul polilor de rotaţie P_{ij} $(i \neq j)$ este de tip complex şi o singură ramură, dacă patrulaterul polilor de rotaţie este de tip simplu (fig. 4 *b*). La această concluzie a ajuns şi Kurt Luck în lucrarea [7].

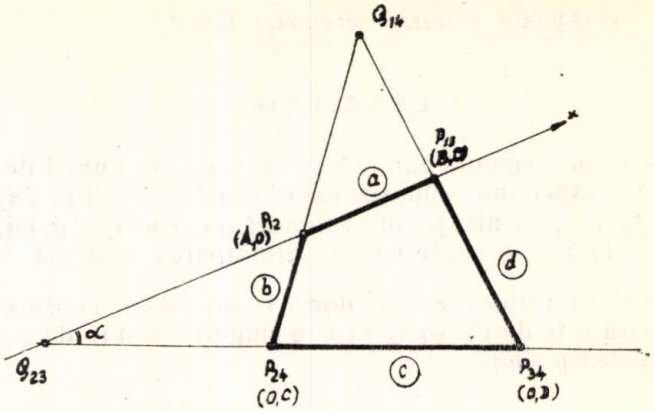
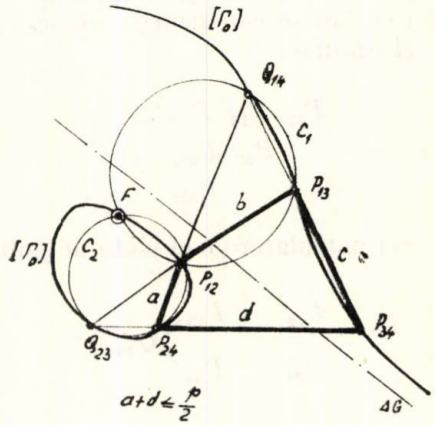


Fig. 4*a*



$P_{12}P_{24} = a$

$P_{12}P_{13} = b$

$P_{13}P_{34} = c$

$P_{24}P_{34} = d$

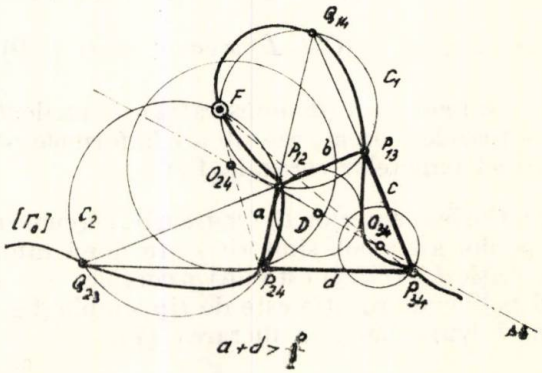


Fig. 4*b*

TEOREMA 3 : Toate cele trei patrulatere complete de poli $P_{ij}(i \neq j)$ sînt de acelaşi tip : *simplu* sau *complex*.

Teorema a 3-a este valabilă şi pentru patrulaterele de poli folosiţi pentru construirea curbei cercuale Γ_j, patrulatere care conţin şi poli simetrici din planul j al curbei Γ_j.

Ecuaţia (13) reprezintă o altă formă a ecuaţiei curbei centrelor Γ_0 sau cercuale Γ_j, sistemul de referinţă ales fiind mai uşor de ataşat patrulaterului de poli studiat decît cele folosite pînă acum în studiul analitic al acestor curbe.

Curbele r_c, Γ_0, Γ_j cu punct dublu, unicursale (de tip strofoidă) respectă condiţia caracteristică (6), deci pot fi generate numai de contururi patrulatere de tip *complex*.

Primită la redacţie la 17 mai 1970

BIBLIOGRAFIE

1. P. LOHSE, *Ein Beitrag zu den Polortkurven der Getriebetechnik*, Feinw — Technik *67*, 387—393 (1963).
2. — *Wege zur Konstruktion von Kurbelgetrieben mit Hilfe von Polortkurven*, Konstruktion *15*, 400—404 (1963).
3. — *Anwendung zu den Polortkurven der Getriebetechnik*, Industrie — Anzeiger *86*, 1405—1406, 1625—1630 (1964).
4. — *Zur Konstruktion von Gelenkgetriebe an Ladefahrzeugen*, Konstruktion *20*, 350—353 (1968).
5. G. R. VELDKAMP, *Rotation — curves*, Journal of Mechanisms **2**, *2*, 147—156 (1967).
6. N. I. MANOLESCU, GH. C. POPA, *Curba polilor relativi de rotaţie la mecanismul manivelă-piston*, St. cerc. mec. apl., *3*, 569—586 (1970).
7. KURT LUCK, *Zur rechnerischen Ermittlung der Abmessungen von ebenen Gelenkgetrieben"*, Wissenschaftliche Zeitschrift der Tehn. Hochschule Dresden — *10* (1961) — Heft 1.

OPTIMIZĂRI ÎN SINTEZA NUMERICĂ A MIŞCĂRII MECANISMELOR CU CAME

de CHR. PELECUDI şi I. SAVA
Institutul politehnic Bucureşti

În condiţiile vitezelor ridicate de funcţionare a mecanismelor respectarea cît mai riguroasă a parametrilor funcţionali, în limitele admisibile, capătă importanţă mărită.
Lucrarea de faţă se ocupă cu alegerea legii de mişcare optime a sistemului urmăritor la mecanismele cu came. Rezolvarea problemei se face atît pe calea indirectă prin introducerea legilor k (asimetrice) şi legilor q (polinomiale), caz în care legea optimă se alege prin analiza parametrilor cinematici întabelaţi, în raport cu destinaţia mecanismului, cît şi pe cale directă prin utilizarea programării liniare asigurîndu-se, prin condiţiile funcţionale, continuitatea la capetele intervalului de lucru şi limitarea valorilor maxime ale parametrilor cinematici pe interiorul intervalului împreună cu obţinerea unei cronosecţiuni maxime. Tabela simplex adaptată specificului camelor şi redată în lucrare, permite organizarea calculelor de determinare punctuală a profilului camelor pe calculatoarele electronice.

Pentru camele mecanismelor de distribuţie sinteza legilor de mişcare se face pe baza condiţiilor de realizare a unei curse de ridicare a tachetului cu respectarea continuităţii deplasării, vitezei, acceleraţiei şi supraacceleraţiilor împreună cu limitarea valorilor lor extreme şi pentru realizarea unei cronosecţiuni maxime. Rezolvarea se face utilizînd legi de mişcare asimetrice k sau legi polinomiale q, precum şi cu ajutorul programării liniare.

★

În procesul de sinteză al sistemelor mecanice se află mai multe etape printre care, în primul rînd, se semnalează sinteza numerică, sinteza structurală şi a tipurilor de mecanisme, sinteza mişcării sau a forţelor şi la urmă sinteza dimensională cinematică sau dinamică. Acestea trebuie îmbinate cu alegerea materialelor convenabile pentru construcţie, cu proiectarea elementelor ţinînd seama de rezistenţă cu analizarea şi reproiectarea mecanismului şi maşinei în raport cu indicii şi parametrii propuşi spre realizare.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1149–1165

Pentru ca acest proces complex de sinteză să fie satisfăcător trebuie analizate numeroase ipoteze ce se pot face şi care de altfel îngreunează la extrem realizarea construcţiei optime (K. Hain, L. Hanisberger). De aceea optimizarea procedeelor sau construcţiilor în domeniul mecanismelor şi maşinilor cu ajutorul metodelor moderne de calcul, ocupă un loc important în sinteza pe etape sau globală a acestora.

Lucrarea de faţă se ocupă cu alegerea diagramei optime de deplasare a sistemului urmăritor la came. În general aceasta ar putea avea orice formă, cu condiţia de a realiza o anumită mărime de deplasare a tachetului pentru o anumită mărime de rotaţie a camei. Totuşi limitarea valorilor maxime ale vitezei şi acceleraţiei pe intervalul de ridicare sau de coborîre precum şi încercările de a elimina posibilele şocuri datorate discontinuităţilor de acceleraţii la capetele intervalului de lucru, au făcut să se treacă, pentru mecanismele rapide, de la legile uzuale la legile camelor polidine.

Numeroase legi de mişcare au fost întabelate (Rothbart, Levitţki, Pelecudi) împreună cu caracteristicile lor cinematice şi dinamice, specificîndu-se vitezele, acceleraţiile, supraacceleraţiile etc., maxime, astfel că la proiectare se poate alege legea convenabilă scopului urmărit. Pentru un punct de vedere unitar de comparare, aceste legi sînt exprimate în variabile adimensionale x şi y legate de deplasarea uniformă φ a camei (sau de timpul t) şi de deplasarea variabilă s, a tachetului prin relaţiile $s = s_0 y$ şi $\varphi = \varphi_0 x$ (sau $t = t_0 x$). În aceste relaţii s_0 este deplasarea totală a tachetului pentru deplasarea activă φ_0 a camei. Pentru derivatele succesive avem $s^{(n)}(t) = k_n y^{(n)}(x)$, unde $k_n = s_0/t_0^n$.

Asigurarea continuităţii deplasării, vitezei, supraacceleraţiilor la capetele intervalului activ de ridicare R sau de coborîre C, cere să se îndeplinească condiţiile :

$$x = 0\,;\; y = y' = \ldots = y^{(p)} = 0 \text{ şi } x = 1\,;\; y = 1\,;\; y' = y'' = \ldots = y^{(p)} = 0, \tag{1}$$

deoarece acestea sînt precedate sau urmate de intervale de pauză P, fără mişcarea tachetului. Forma generală a acestor legi este :

$$y' = x^p (1 - x)^p \; Q(x), \tag{2}$$

$$y = \int_0^x \xi^p (1 - \xi)^p \; Q(\xi) \; \mathrm{d}\xi, \tag{3}$$

unde $Q(\xi)$ este o funcţie arbitrară cu condiţia :

$$\int_0^1 \xi^p (1 - \xi)^p \; Q(\xi) \; \mathrm{d}\xi = 1. \tag{4}$$

Pe de altă parte, pentru reducerea forțelor de inerție, a șocurilor etc., trebuie limitate valorile maxime ale vitezei, accelerației și supraaccelerației în intervalul 0 — 1, adică

$$x = 0\,;1 \qquad y' \leqslant v_{\max}\,, \qquad y''' \leqslant \alpha_{\max}\,, \tag{5}$$

$$y'' \leqslant a_{\max}\,, \qquad y^{\mathrm{IV}} < \beta_{\max}\,.$$

Derivatele funcției $y(x)$ se pot pune sub forma :

$$y^{(s)}(x) = x^{p-s+1}(1-x)^{p-s+1}\,Q_s(x), \tag{6}$$

unde funcțiile succesive $Q_s(x)$ sînt legate prin relația de recurență :

$$Q_{s+1}(x) = (p-s+1)\,(1-2x)\;Q_s(x) + x\,(1-x)\;Q_s'(x). \tag{7}$$

Dacă x_0 este abscisa în care $y^{(s+1)}(x_0) = 0$ și, respectiv $Q_{s+1}(x_0) = 0$ se anulează, rezultă

$$Q_s'(x_0) = -\frac{(p+1-S)\,(1-2x_0)}{x_0(1-x_0)}\,Q_s(x_0) \tag{8}$$

și valoarea maximă

$$\max\; y^{(s)}(x_0) = [x_0(1-x_0)]^{p-s+1}\,Q_s(x_0) \leqslant A_{s\,\max} \tag{9}$$

limitată în conformitate cu (5).

La viteze considerînd valoarea maximă în punctul $x_0 = x_1$, se determină

$$Q_2(x_1) = 0,\; Q_1(x_1) = \frac{v_{\max}}{[x_1(1-x_1)]\,p},\; Q_1'(x_1) = -\frac{(1-2x_1)\,p\cdot v_{\max}}{[x_1(1-x_1)]^{p+1}}. \tag{10}$$

Pentru accelerații, luînd valoarea maximă în punctul $x_0 = x_1$, avem

$$Q_3(x_2) = 0,\; Q_2(x_2) = \frac{a_{\max}}{[x_2(1-x_2)]^{p-1}},\; Q_2'(x_2) = -\frac{(1-2x_2)\,(p-1)\,a_{\max}}{[x_2(1-x_2)]^{p}}. \tag{11}$$

Pentru supraacceleraţii se găsesc în mod asemănător valorile :

$$Q_4(x_3) = 0,\ Q_3(x_3) = \frac{\alpha_{max}}{[x_3(1-x_3)]^{p-2}},\ Q_3'(x_3) = -\frac{(1-2x_3)(p-2)\,\alpha_{max}}{[x_3(1-x_3)]^{p-1}}. \tag{12}$$

şi

$$Q_5(x_4) = 0,\ Q_4(x_4) = \frac{\beta_{max}}{[x_4(1-x_4)]^{p-3}},\ Q_4'(x_4) = -\frac{(1-2x_4)(p-3)\,\beta_{max}}{[x_4'(1-x_4)]^{p-2}}. \tag{13}$$

Din relaţia (7) se determină

$$Q_s'(x) = \frac{Q_{s+1}(x) - (p-s+1)(1-2x)\,Q_s(x)}{x(1-x)}, \tag{14}$$

iar din derivata relaţiei (7), adică

$$Q_{s+1}'(x) = -2(p-s+1)\,Q_s(x) + (p-s+2)(1-2x)\,Q_s'(x) + \tag{15}$$
$$+ x(1-x)\,Q_s''(x),$$

avem $$Q_s''(x) = \frac{Q_{s+1}'(x) + 2(p-s+1)\,Q_s(x) - (p-s+2)(1-2x)\,Q_s'(x)}{x(1-x)}, \tag{16}$$

relaţii care împreună cu cele anterioare determină pe baza dezvoltării în serie Taylor comportarea funcţiilor $Q(x)$ în jurul punctelor

$$x_1 > x_2 > x_3 \ . \ . \ .$$

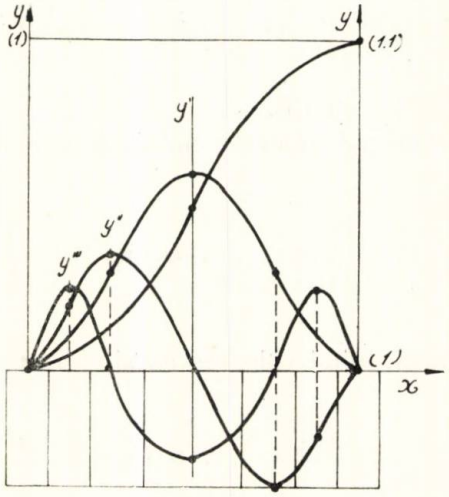


Fig. 1

În general se alege $Q(x) = K$ (constant) care determină legi cu forme simetrice față de mijlocul intervalului activ de lucru (fig. 1).

Din condiţiunea 4 avem

$$K(p) = \frac{1}{\sum_0^p \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda}{\lambda + p + 1}}, \tag{17}$$

respectiv, $K_1 = 6$; $K_2 = 30$; $K_3 = 140$: $K_4 = 630$ (unde C_p^λ este simbolul combinărilor). Rezultă

$$y = K \sum_0^p {}_\lambda \frac{(-1)^\lambda C_p^\lambda x^{\lambda+p+1}}{\lambda + p + 1}, \tag{18}$$

$$v = Kx^p(1 - x)^p, \tag{19}$$

$$a = pKx^{p-1}(1 - x)^{p-1}(1 - 2x), \tag{20}$$

$$\alpha = pKx^{p-2}(1 - x)^{p-2}[(p - 1)(1 - 2x)^2 - 2x(1 - x)], \tag{21}$$

$$\beta = p(p - 1)K[x(1 - x)]^{p-3}(1 - 2x)[(p - 2)(1 - 2x)^2 - 6x(1 - x)]. \tag{22}$$

Aceste legi sînt însă mai racordate la capetele intervalului (0,1) decît cele uzuale eliminînd şocurile respective. În schimb, conform diagramei (1), viteza maximă şi acceleraţiile maxime cresc o dată cu ordinul racordării p. Pe de altă parte toate aceste diagrame, fiind simetrice, au aceeaşi cronosecţiune $\sigma = 0{,}5$.

În mecanismele cu came ale motoarelor cu ardere internă trebuie ca această valoare să fie depăşită. Creşterea cronosecţiunii se realizează pe baza legilor asimetrice (fig. 2), astfel ca perioada de accelerare, să fie mai scurtă ca perioada de decelerare. Păstrînd de data aceasta aceleaşi racordări, creşterea cronosecţiunii atrage mărirea valorilor maxime ale parametrilor cinematici dar care trebuie limitate prin (5).

Una din metodele pentru construirea legilor cu cronosecţiune mărită este de a lua funcţiunea $Q(x)$ asimetrică, de exemplu de a forma $Q(x) = K(1 - mx)$ cu $0 < m < 1$ şi $K > 1$.

O altă metodă este de a presupune legea de ridicare formată din două funcţii y_1 pentru intervalul de accelerare $(u - u)$ şi y_2 pentru intervalul de decelerare $(u \div 1)$ unde $u < 0.5$ (fig. 2) legate prin relaţiile

$$y_2(1 - kx) + ky_1(x) = 1) \quad \text{cu} \quad k = (1 - u)/u, \tag{23}$$

$$y_2'(1 - kx) = y_1(x),$$

$$-ky_2''(1 - kx) = y_1''(x),$$

$$k^2y_2'''(1 - kx) = y_1'''(x).$$

Această metodă de asimetrizare a legilor camelor (Levițki) are avantajul că trebuie determinată numai funcțiunea y_1 pe intervalul de ridicare, condițiile la capătul de ieșire fiind automat satisfăcute dacă cele de la capătul de intrare sînt îndeplinite. În schimb însă, pentru continuitatea în punctul de joncțiune (u, u), trebuie să avem :

$$y_2(u) = y_1(u) = u, \qquad y_2'(u) = y_1'(u), \tag{24}$$

$$y_2''(u) = y_1''(u) = 0, \qquad y_2'''(u) = y_1'''(u) = 0 \text{ etc.},$$

astfel că dacă

$$f(x) = \int_0^x \xi^{p-1}(u-\xi)^{p-1}\xi \mathrm{d}, \tag{25}$$

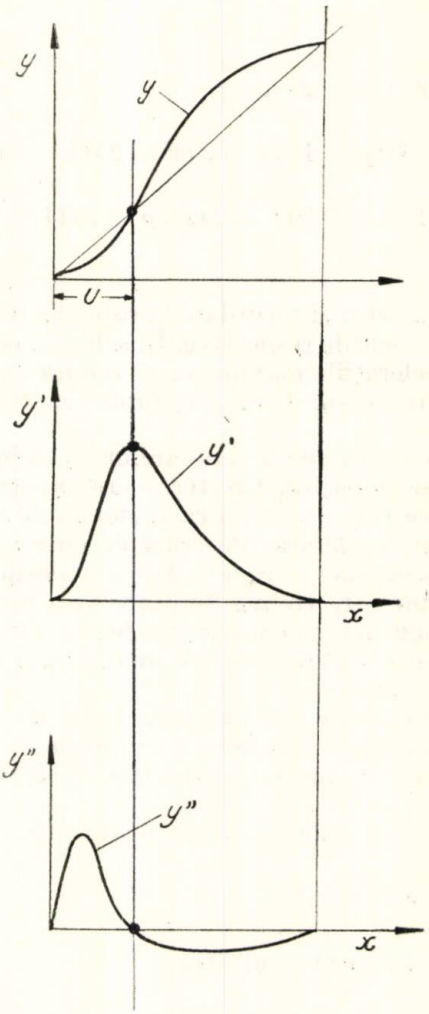


Fig. 2

avem

$$y(u) = u\frac{\int_0^x f(\eta)\,d\eta}{\int_0^u f(\eta)\,d\eta}, \quad y'(x) = u\frac{f(x)}{\int_0^u f(\eta)\,d\eta}, \tag{26}$$

$$y''(x) = u\frac{u\,[x(u-x)]^{p-1}}{\int_0^u f(\eta)\,d\eta}, \quad y'''(x) = u\frac{(p-1)[x(u-x)]^{p-2}(u-2x)}{\int_0^u f(\eta)\,d\eta},$$

$$y^{IV}(x) = \ldots$$

Deși această metodă de asimetrizare este simplă, ea impune în punctul de joncțiune condițiile (24) prea severe. Grafic (fig. 2) aceste legi asimetrice se obțin din cele simetrice prin transformarea proectivă $x = X/2u$ și $y = Y/2u$. Astfel de legi denumite legi k, precum și cele anterioare denumite legi q, sînt întabelate, permițîndu-se astfel alegerea legii de mișcare optime.

Din formularea generală a sintezei directe, optimizarea cuprinde determinarea numerică sau analitică a funcției y care maximizează cronosecțiunea

$$\sigma = \max. \int_0^1 y\,dx, \tag{27}$$

cu condițiile la capete 0 și 1 cuprinse în (1), iar pe intervalul 0—1, respectarea inegalităților (5).

Rezolvarea cu ajutorul legilor k. Valoarea cronosecțiunii rezultă din

$$\sigma = \int_0^u y_1(x)\,dx + \int_u^1 y_2(x)\,dx, \tag{28}$$

care în baza legăturilor (23) și a funcției y (26), pe porțiunea de accelerare devine :

$$\sigma = \int_0^u y(x)\,dx - k\int_u^0 y_2(1-kx)\,dx = \int_0^u y(x)\,dx + k\int_0^u [1-ky(x)]\,dx, \tag{29}$$

adică

$$\sigma = (1-u) - \frac{1-2u}{u^2}\int_0^u y(x)\,dx. \tag{30}$$

Se observă că pentru $u<0{,}5$ avem $\sigma<1-u$. Tabela 1 cuprinde, pentru diverse ordine de continuități p, legile analitice în perioada de accelerare și valorile maxime ale parametrilor cinematici. Toate legile astfel

Tabela 1

	Legea din sectorul de accelerare $(0, u_1)$		A_{max}	α_{max}	σ
$p = 2$	$\frac{\alpha x^3}{2u_1^3}(2u_1 - x)$	$u_1 + u_2 < 1$	$\frac{3\alpha}{2u_1}$	$\pm\frac{6\alpha}{u_1^2}; (0; u_1)$	$0{,}5 + \frac{(u_2 - u_1)[5 - 3(u_1 + u_2)]}{10[2 - (u_1 + u_2)]}$
		$u_1 + u_2 = 1$	$\frac{3}{u}$	$\pm\frac{12}{u^2}$	$0{,}5 + \frac{1 - 2u}{5}$
		$u_1 = u_2 = 0{,}5$	6	± 48	0,5
$p = 3$	$\frac{\alpha x^4}{2u_1^5}(5u_1^2 - 6u_1 x + 2x^2)$	$u_1 + u_2 < 1$	$\frac{15\alpha}{8u_1}$	$\left(0{,}5 \pm \frac{1}{2\sqrt{3}}\right)u_1$	$0{,}5 + \frac{(u_2 - u_1)[7 - 4(u_1 + u_2)]}{14[2 - (u_1 + u_2)]}$
		$u_1 + u_2 = 1$	$\frac{15}{4u}$		$0{,}5 + \frac{1 - 2u}{14/3}$
		$u_1 = u_2 = 0{,}5$	7,5		0,5
$p = 4$	$\frac{\alpha x^5}{2u_1^7}[14u_1^3 - 28u_1^2 x + 20u_1 x^2 - 5x^3]$	$u_1 + u_2 < 1$	$\frac{35\alpha}{16u_1}$	$\left(0{,}5 \pm \frac{1}{2\sqrt{5}}u_1\right)$	$0{,}5 + \frac{(u_2 - u_1)[9 - 5(u_1 + u_2)]}{18[2 - (u_1 + u_2)]}$
		$u_1 + u_2 = 1$	$\frac{35\alpha}{8u}$		$0{,}5 + \frac{1 - 2u}{9/2}$
		$u_1 = u_2 = 0{,}5$	8,75		0,5

construite au aceeaşi viteză maximă 2, iar ceilalţi parametrii, acceleraţia maximă şi cronosecţiunea, cresc o dată cu scăderea perioadei de accelerare. Pe baza limitărilor (5), cronosecţiunea este maximă în cazurile:

$$p = 1 \qquad u = 2/a_{\max} < 0{,}5, \tag{31}$$

$$p = 2 \qquad u = \min\left[\frac{3}{a_{\max}};\ \sqrt{\frac{12}{\alpha^2_{\max}}}\right] < 0{,}5, \tag{32}$$

$$p = 3 \qquad u = \min\left[\frac{15}{4\,a_{\max}};\ \sqrt{\frac{20}{\sqrt{3}\ \alpha^2_{\max}}};\ \cdots\right] < 0{,}5, \tag{33}$$

$$p = 4 \qquad u = \min\left[\frac{35}{8\,a_{\max}};\ \sqrt{\frac{168}{5\sqrt{5}\ \alpha^2_{\max}}};\ \cdots\right] < 0{,}5. \tag{34}$$

Spre exemplu, faţă de legea triunghiulară simetrică (Pelecudi), care are $\sigma = 0{,}5$, $v_{\max} = 2$, $a_{\max} = 8$, $\alpha_{\max} = 32$, legea k corespunzătoare aceluiaşi ordin de continuitate $p = 2$ şi cu aceeaşi parametrii cinematici maximi, conduce pentru $u = \min(3/8;\ 12/32)$ adică $u = 0{,}375$, la $\sigma = 0{,}55$, ceea ce reprezintă o creştere a cronosecţiunii de 10%.

Rezolvarea cu ajutorul legilor q. Dacă în (3) se ia $Q_1(x) = K(1 - mx)$, se determină forma generală

$$y = Kx^{p+1}\left[\sum_0^p \frac{(-1)^\lambda\, C_p^\lambda\, x^\lambda}{\lambda + p - 1} - m \sum_{\lambda=0}^{p} \frac{(-1)^\lambda\, C_p^\lambda\, x^{\lambda+1}}{\lambda + p + 2}\right], \tag{35}$$

astfel că din condiţia $y(1) = 1$, se determină

$$K(p) = 1/\left[\sum_0^p \frac{(-1)^\lambda\, C_p^\lambda}{\lambda + p + 1} - m \sum_0^p{}_\lambda \frac{(-1)^\lambda\, C_p^\lambda}{\lambda + p + 2}\right], \tag{36}$$

adică $K_1 = 12/(2 - m)$, $K_2 = 60/(2 - m)$, $K_3 = 280/(2 - m)$,

$$K_4 = 1260/(2 - m). \tag{37}$$

valoarea cronosecţiunii va fi

$$\sigma = K\left[\sum_0^p \frac{(-1)^\lambda\, C_p^\lambda [2 + (\lambda + p + 1)(1 - m)]}{(\lambda + p + 1)(\lambda + p + 2)(\lambda + p + 3)}\right], \tag{38}$$

atingînd maximul la $m = 1$, nedepăşind 0,6 ($p = 1$) şi scăzînd cu ordinul racordării p (tab. 2).

Tabela 2

	Legea y	Cronosecțiune	$m = 1$	V_{max} y'_{max}	A_{max} y''_{max}
$p = 1$	$\frac{2(3x^2 - 2x^3) - (4x^3 - 3x^4)m}{2 - m}$	$0{,}5 + \frac{1}{10(2-m)}$	$6x^2 - 8x^3 + 3x^4$ $\sigma = 0{,}6$	$\frac{16}{9} = 1{,}777$ $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333\right)$	12 (0) -4 $\left(\frac{2}{3} = 0{,}666\right)$ 0 (1)
$p = 2$	$\frac{2(10x^3 - 15x^4 + 6x^5) - (15x^4 - 24x^5 + 10x^6)m}{2 - m}$	$0{,}5 + \frac{1}{14(2-m)}$	$20x^3 - 45x^4 + 36x^5 - 10x^6$ $\sigma = 0{,}572$	$\frac{1296}{625} - 2{,}073$ $\left(\frac{2}{5} = 0{,}4\right)$	16,266 ; $-11{,}946$ (0,155 ; 0,645)
$p = 3$	$\frac{(2(35x^4 - 82x^5 + 70x^6 - 20x^7) - (56x^5 - 140x^6 + 120x^7 - 35x_8)m}{2 - m}$	$0{,}5 + \frac{1}{18(2-m)}$	$70x^4 - 224x^5 + 280x^6 - 160x^7 + 35x^8$ $\sigma = 0{,}555$	2,35 $\left(\frac{3}{7} = 0{,}428\right)$	9,403 ; $-7{,}935$ (0,227 ; 0,63)
$p = 4$	$\frac{2(126x^5 - 420x^6 + 540x^7 - 315x^8 + 70x^9) - (210x^6 - 720x^7 + 945x^8 - 560x^9 + 125x^{10})m}{2 - m}$	$0{,}5 + \frac{1}{22(2-m)}$	$252x^5 - 1050x^6 + 1800x^7 - 1575x^8 + 700x^9 - 126x^{10}$ $\sigma = 0{,}545$	2,601 $\left(\frac{4}{9} = 0{,}44\right)$	10,871 ; $-9{,}475$ (0,268 ; 0,62)

Se poate determina ($m = 1$):

$$p = 2 \qquad Q_2 = K[1 - x][2 - 5x], \tag{39}$$

$$p = 3 \qquad Q_2 = K[1 - x][3 - 7x], \tag{40}$$

$$Q_3 = 6k(1 - x)(1 - 6x + 7x^2),$$

$$p = 4 \qquad Q_2 = K[1 - x][4 - 9x],$$

$$Q_3 = 4k(1 - x)(3 - 16x + 18x^2),$$

$$Q_4 = 4K(1 - x)(6 - 63x + 168x^2 - 126x^3),$$

cu ajutorul cărora se obţin valorile maxime ale parametrilor cinematici.

Rezolvarea numerică cu ajutorul programării liniare. Împărţind intervalul 0 — 1 într-un număr de n subintervale şi considerînd pentru al n-lea interval, ordonata y_x, o aproximare suficient de bună a integralei σ şi a derivatelor deplasării y, se obţine, cu ajutorul diferenţelor finite, adică :

$$\sigma = \left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)\Delta \text{ cu } \Delta = 1/n, \tag{42}$$

$$2\Delta \cdot y'_x \simeq y_{x+1} - y_{x-1},$$

$$\Delta^2 y''_x \simeq y_{x+1} - 2y_2 + y_{x-1}, \tag{43}$$

$$2\Delta^3 y'''_x \simeq y_{x+2} - 2y_{x+1} + 2y_{x-1} - y_{x-2},$$

. . . . . .

Condiţiile (1) impuse la capetele intervalului 0 — 1, se transformă în următoarele :

pentru $y \to y_0 = 0, \qquad y_n = 1,$ (44)

$$y' \to y_1 = y_{-1}, \qquad y_{n+1} = y_{n-1},$$

$$y'' \to y_1 = y_{-1}, \qquad y_{n+1} = y_{n-1} = 1,$$

$$y''' \to y_2 = y_{-2} \qquad y_{n+2} = y_{n-2},$$

$$y^{IV} \to y_2 = y_{-2} = 0 \qquad y_{n+2} = y_{n-2} = 1.$$

Condiţiile (5) impuse în intervalul 0 — 1, devin :

$$\begin{aligned} &y_{x+1} - y_{x-1} \leqslant 2\Delta v, \\ &y_{x+1} - 2y_x + y_{x-1} < a\Delta^2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{45}$$

Cu aceste transformări problema corespunde optimizării funcţionalei σ cu restricţiile date de inegalităţile (45) şi în ipoteza valorilor nenegative $y_n \geqslant 0$. Forma la care s-a ajuns corespunde şi din punct de vedere practic, deoarece însăşi proiectarea şi construcţia camei se face pe baza determinărilor punctuale y_n, cu precizie ridicate.

Problema se rezolvă pe baza programării liniare cu ajutorul algoritmului simplex.

Se transformă mai întîi inegalităţile (45), în egalităţi, prin utilizarea unor variabile auxiliare :

$$\begin{aligned} &y_{x+1} - y_{x-1} + r_x = 2\Delta v, && r_x > 0, \\ &y_{x+1} - 2y_x + y_{x-1} + s_x = a\Delta^2, && S_x > 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \end{aligned} \tag{46}$$

Soluţiile posibile, sînt soluţiile care satisfac condiţiile funcţionale (46), care au mai multe necunoscute decît ecuaţii, fiind combatibile dar nedeterminate. Numărul ecuaţiilor este $p(n+1)$, iar numărul necunoscutelor este $(p+1)(n+1)$, astfel că există un grad de nedeterminare egal cu $(n+1)$. Acesta poate fi mai mare dacă rangul sistemului de ecuaţii : $r < p(n+1)$.

Soluţiile de bază ale unui sistem de ecuaţii liniare de rang r se găsesc printre soluţiile posibile dar sînt formate cu valorile pozitive a r necunoscute, în timp ce restul necunoscutelor sînt nule. Soluţiile de bază degenerate au mai puţin de r necunoscute pozitive. Pentru aflarea unei soluţii de bază, pornind de la faptul că termenii liberi ai ecuaţiilor sînt pozitivi, trebuie să se găsească printre matricele coeficienţilor o matrice de rang r, diagonală cu elemente pozitive. De altfel, în teoria generală a sistemelor liniare se interpretează că în fiecare coloană a matricei coeficienţilor sînt cuprinse r componente ale unui vector. În această interpretare matricea diagonală de rang r, amintită mai sus, cuprinde r vectori liniari independenţi, eventual unitari, care formează o bază de vectori.

Soluţia optimă este soluţia de bază care face funcţia σ maximă sau minimă. Practic se porneşte de la o soluţie de bază cunoscută şi se determină succesiv alte soluţii de bază printre care se găseşte aceea care optimizează funcţionala. Schimbarea soluţiilor de bază se face prin schimbarea sistemului de vectori ai bazei din sistemul r dimensional. Stabilirea vectorului care se scoate din baza veche şi a vectorului care se introduce în baza nouă se face după regulile algoritmului simplex, adică, de fapt, se urmăreşte să se menţină acelaşi număr r de vectori de bază şi, în acelaşi timp, valoarea funcţionalei σ să crească (sau să descrească). Aceste schimbări se fac succesiv prin metoda eliminării complete, a lui Gauss-Jordan, pînă se ajunge la maximul lui σ.

Aşa cum se prezintă ecuaţiile acestei probleme de optimizare, ele pot fi simetrizate faţă de mijlocul intervalului 0—1. În acest sens se alege numărul de subintervale par şi se fac transformările $y_x = 1 - z_x$ (fig. 2) pentru jumătatea a 2-a a intervalului 0—1. Cronosecţiunea maximă se obţine din :

$$\sigma = 0{,}5 + \text{Max}\ \sigma_y - \text{Min}\ \sigma_z, \tag{47}$$

$$\sigma_y = \text{Max}\ (y_0/2 + y_1 + \cdots + y_k/2), \tag{48}$$

$$\sigma_z = \text{Min}\ (z_k/2 + z_{k+1} + \cdots + z_{2k}/2),$$

cu restricţiile :

$$\begin{aligned} &y_{x+1} - y_{x-1} + r_x = 2\Delta v, \\ &\qquad\qquad \text{cu } x = 0, 1, 2, \ldots, k, \\ &y_{x+1} - 2y_x + y_{x-1} + s_x = a\Delta^2, \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned} &z_{x-1} - z_{x+1} + r_x = 2\Delta v, \\ &\qquad\qquad \text{cu } x = k;\ k+1;\ k+2;\ldots 2k. \\ &-z_{x-1} + 2z_x - z_{x+1} + s_x = a\Delta^2, \end{aligned} \tag{50}$$

Apar în plus restricţiile la centrul intervalului :

$$y_k + z_k = 1 \qquad \text{şi} \qquad y_{k+1} + z_{k+1} = 1. \tag{51}$$

S-a considerat ca exemplu numai continuitatea şi limitarea valorilor maxime, inclusiv pentru derivata secundă.

Ecuaţiile de condiţii (49), (50), (51), ale acestei probleme nu posedă direct un sistem de vectori de bază, din cauza condiţiilor (51).

Algoritmul simplex utilizează în acest scop nişte necunoscute fictive adăugate în ecuaţii, care, în final, trebuie să ia valori nule.

$$y_k + z_k + u = 1, \qquad y_{k+1} + z_{k+1} + v = 1. \tag{52}$$

Se creează în mod artificial o bază de vectori astfel că tabela simplex iniţială, adaptată la sistemele de ecuaţii de condiţii, prelucrate anterior se prezintă ca în figura 3. Soluţia de bază iniţială este formată cu componentele $r_x = 2\Delta v$, $s_x = a\Delta^2$ şi $u = 1$, $v = 1$, corespund cu $y_x = 0$ şi $z_x = 0$ ceea ce dau $\sigma = 0{,}5$.

Pentru ca vectorul P_β (Y sau Z) să fie introdus în bază trebuie să aibă unele componente $A_{i\beta} > 0$ pozitive. Pentru fixarea vectorului $P(R, S, U, V)$ care se scoate din bază se determină numărul pozitiv

$$\theta = \min\ (B_i/A_{i\beta}) = B\alpha/A\alpha_\beta. \tag{53}$$

Tabela simplex

			c	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0 0 0 0 0 0 0	0 0 0	c_α	c_α	1 1 1 $\frac{1}{2}$ 0 0 $\frac{1}{2}$ −1 −1 −1	c_k	c_β		c_β	c_k
P'_0	P_0	c	/	$R1$ $R2$ $R3$ $R4$ $R5$ $R6$ $R7$ $R8$ $R9$	$S1$ $S2$ $S3$ $S4$ $S5$ $S6$ $S7$ $S8$ $S9$	UVW	P_α	P'_α	$y2$ $y3$ $y4$ $y5$ $y6$ $Z4$ $Z5$ $Z6$ $Z7$ $Z8$	P_k	P_β	θ	P'_β	P'_k
$B'_\beta = \theta = \frac{B_\beta}{A_{\beta\alpha}}$; $B'_i = B_i - \theta A_{i\beta}$	$2\Delta V$	0	$R1$	1			0	$A'_{\beta\alpha} = \frac{1}{A_{\alpha\beta}}$ $A'_i = -A_{i\beta}/A_{\alpha\beta}$	1	$A1k$	$A1\beta$	$B_l/A_{l\beta}$	0	$A'_{\beta k} = \theta_k = \frac{A_{\alpha k}}{A_{\alpha\beta}}$; $A'_{ik} = A_{ik} - 0_k A_{i\beta}$
		0	$R2$	1					1	$A2k$	$A2\beta$			
		0	$R3$	1					−1 1	$A3k$	$A3\beta$			
		0	$R4$	1					−1 1	$A4k$	$A4\beta$			
	$1+2\Delta V$	0	$R5$	1					1 1					
		0	$R6$	1					1 −1				0	
		0	$R7$	1					1 −1					
	$2\Delta V$	0	$R8$	1					1 −1					
		0	$R9$	1					1					
	B_i	0	$S1$		1		0		1	A_{ik}				
		0	$S2$		1				−2 1					
		0	$S3$		1				1 −2 1					
		0	$S4$		1				1 −2 1		$A_{i\beta}$		0	
	$a\Delta^2$	0	$S5$		1				−1 1 −1 1					
		0	$S6$		1				−1 2 −1					
		0	$S7$		1				−1 2 −1					
		0	$S8$		1				−1 2					
		0	$S9$		1				−1					
	1	0	U			1	0		1 1				0	
		0	V			1			1 1					
		0	N			1			1 1					
P_α ←	B_α	c_α	P_α	0	0	0	1			$A_{\alpha k}$	$A_{\alpha\beta}$	θ_{min}	1	→ P_β
	$\Sigma c_\alpha B_\alpha$		σ	0	0	0	c_α		0	$\Sigma c_k A_{\alpha k}$				
	$\Delta = c - \sigma$			0	0	0	0		1 1 1 $\frac{1}{2}$ 0 0 $-\frac{1}{2}$ −1 −1 −1	Δ_{max}				

Deci se determină rapoartele componentelor B_i ale vectorului P_0 și componentele A_i pozitive ale vectorului care ar urma să intre în noua bază. Vectorul P_α care corespunde celui mai mic raport se elimină din baza α. Dacă toate componentele $A_{i\beta}$ sînt negative, nu se poate găsi un $\theta > 0$, care să elimine cel puțin un vector din bază. Pentru a continua procesul de obținerea de noi soluții de bază trebuie să se exprime componentele fiecărui vector față de vectorii bazei noi β care se calculează după formulele :

$$\overline{P}_0' \to B_i = B_i - \theta A_{i\beta}; \quad B_\beta' = \theta = \frac{B_\alpha}{A_{\alpha\beta}}, \tag{54}$$

$$\overline{P}_k' \to A_{ik}' = A_{ik} - \theta_k A_{i\beta}; \; A'_{\beta k} = \theta_k = \frac{A_{\alpha k}}{A_{\alpha\beta}}, \tag{55}$$

$$\overline{P}_\alpha' \to A_{i\alpha}' = A_{i\alpha} - \theta_\alpha A_{i\beta} = -A_{i\beta}/A_{\alpha\beta}, \tag{56}$$

$$A_{\beta\alpha}' = \theta_\alpha = \frac{A_{\alpha\alpha}}{A_{\alpha\beta}} = 1/A_{\alpha\beta},$$

$$P_\beta' \to A_{i\beta}' = A_{i\beta} - \theta_\beta A_{i\beta} = 0; \; A_{\beta\beta}' = \theta_\beta = A_{\alpha\beta}/A_{\alpha\beta} = 1. \tag{57}$$

Stabilirea vectorului P_β care se introduce în bază, se face căutînd diferența $c_k - \sigma_k$ maximă pozitivă (sau minimă negativă), unde c_k sînt coeficienții $+1$ sau -1 pentru vectorul P_k (y sau z) din funcția de maximizat σ, iar σ_k este valoarea funcției calculată cu componentele vectorului P_k. Deci

$$\Delta_\beta = \max (c_k - \sigma_k) = c_\beta - \sigma_\beta \geqslant 0. \tag{58}$$

Tabelele simplex, se repetă pînă cînd toate diferențele Δ_k sînt negative

Pentru a scăpa de condițiile de la capătul intervalului $0 - 1$, se pot utiliza legile numerice derivate din formele q (3). Cronosecțiunea se poate exprima atunci prin

$$\sigma = \int_0^1 y \, dx = 1 - \int_0^1 xy' \, dx, \tag{59}$$

dacă se integrează prin părți. Introducînd pe y' din (2) va trebui să se determine minimul funcției f

$$f = \min \int_0^1 x^{p+1}(1 - x)^p \, Q(x) \, dx, \tag{60}$$

cu condiţia $$\int_0^1 x^p (1-x)^p \, Q(x) \, dx = 1 \tag{61}$$

şi $$y' = x^p (1-x)^p \, Q(x) < v_{\max}, \tag{62}$$

$$y'' < a_{\max},$$

. . . . . .

Trecînd la diferenţe finite, trebuie să se determine elementele Q_x, pentru ca :

$$f = \min \sum_{x=1}^{n-1} \left(\frac{x}{n}\right)^{p+1} \left(1 - \frac{x}{n}\right)^p Q_x, \tag{63}$$

cu $$\sum_{x-1}^{n-1} \left[\frac{x}{n}\left(1 - \frac{x}{n}\right)\right]^p Q_x = 1, \tag{64}$$

$$\left[\frac{x}{n}\left(1-\frac{x}{n}\right)\right]^p Q_x < V_{\max}; \left[\frac{x+1}{n}\left(1-\frac{x+1}{n}\right)\right]^p Q_{x+1} - \left[\frac{x-1}{n}\left(1-\frac{x-1}{n}\right)\right]^p \tag{65}$$

$$Q_{x-1} < 2\Delta a_{\max},$$

. . . . . .

$$x = 1, 2, \ldots, n-1.$$

În această formă problema de optimizare a funcţiei prezintă dezavantajul unor coeficienţi ai necunoscutelor diferiţi de unitate ceea ce era avantajul formei anterioare. Totodată această formă nu livrează direct coordonatele y_x. O reducere considerabilă a calculului în ultimul caz se obţine utilizînd funcţii polinomiale $Q(x)$ cu număr redus de termeni :

$$Q(x) = \sum_m \lambda_m \, x^m, \tag{66}$$

şi deci

$$f = \min \sum_m \lambda_m \, A_m, \tag{67}$$

cu condiția $$\sum_m \lambda_m B_m = 1, \tag{68}$$

unde $$A_m = \int_0^1 x^{m+p+1}(1-x)^p \, dx, \tag{69}$$

$$B_m = \int_0^1 x^{m+p}(1-x)^p \, dx.$$

De asemenea mai avem condițiile:

$$y' = \sum_m \lambda_m x^{m+p}(1-x)^p \leqslant v_{max}, \tag{70}$$

$$y'' = \sum_m \lambda_m x^{m+p+1}(1-x)^{p-1}[(m+p) - (m+2p)x] \leqslant a_{max}, \quad x$$

. . . . . .

Sub această formă problema se rezolvă tot pe calea programării liniare, dar are caracteristica unui număr redus de necunoscute λ_m. Ultimele condiții (70) pot fi, de asemenea, transformate cu ajutorul valorilor numerice pentru diverse subintervale.

Primită la redacție la 24 Ianuarie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. Chr. Pelecudi, I. Sava, *Optimizarea legilor de funcționare ale mecanismelor de distribuție*, St. cerc. mec. apl., *3* (1968).
2. — *O nouă metodă de optimizare a legilor de mișcare ale mecanismelor cu came*, Conferința de motoare cu ardere internă, București, 1967.

CONTRIBUȚII LA STUDIUL CINEMATIC AL UNUI MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ SPAȚIAL

de CORNELIA FLOREA
Institutul politehnic Cluj, Catedra de geometrie descriptivă

În lucrare se prezintă studiul cinematic al unui mecanism bielă-manivelă spațial care servește la acționarea aparatului de tăiere pentru mașinile agricole. Studiul cinematic al mecanismului bielă-manivelă spațial se face grafic, folosind un model plan de reprezentare a spațiului obținut printr-o transformare Steiner. Plecînd de la o interpretare geometrică a transformării Steiner, a rezultat un model plan al spațiului astfel încît corespondența dintre obiectele spațiului și imaginea lor plană se obține prin construcții grafice simple.

Pentru rezolvarea unor probleme privind mecanismele spațiale sînt necesare reprezentările figurilor spațiale pe un plan.

Din cele mai cunoscute metode de reprezentare a spațiului pe un singur plan amintim : metoda geometriei cotate, metoda reprezentărilor lui Major [6], metoda vectorială a lui I.B. Sor [7] și metoda parametrilor a lui L.I. Laletin [6]. Fiecare din aceste metode de reprezentare este accesibilă unui grup sau a cîtorva grupuri de probleme, alegerea metodei de reprezentare depinzînd de caracterul problemei de rezolvat. Aceasta justifică apariția și dezvoltarea noilor metode ale geometriei descriptive de reprezentare a figurilor spațiale pe un singur plan.

Pentru studiul cinematic al mecanismului bielă-manivelă spațial ales, am utilizat un nou model plan de reprezentare a spațiului obținut printr-o transformare Steiner [2].

1. PRINCIPIILE METODEI

Reprezentarea plană a spațiului presupune găsirea unei astfel de transformări care să realizeze o corespondență biunivocă între punctele spațiului și imaginea lor plană. Aceste transformări, respectiv reprezentări, sînt multiple.

Lucrare prezentată la Conferința națională de mecanică aplicată, București, 23—27 iunie 1969

Interpretînd geometric o transformare concepută de Steiner a rezultat un nou model plan al spațiului.

Fie planele oarecare π și π', și două drepte D și D', necuprinse în nici unul din cele două plane. Se înțelege prin *transformare Steiner* a planului π în planul π', corespondența dintre punctele $A \in \pi$ și punctele $A' \in \pi'$, obținute ca intersecție a planului π' cu dreptele ce trec prin punctele $A \in \pi$ și se sprijină pe dreptele disjuncte D și D'. Această transformare se mai numește și proiecție strîmbă, care este un caz particular al transformării pătratice.

Folosind această transformare s-a găsit un model plan al spațiului, astfel încît corespondența dintre obiectele spațiului și imaginea lor plană să se obțină prin construcții simple. Fie π un plan fix și Ω, Ω_1 două drepte disjuncte pe care le numim axe; pentru simplificare se ia $\Omega \perp \pi$ și Ω_1 înclinată față de planul π cu 45°. În acest mod elementele epurei sînt: punctul ω, care este piciorul perpendicularei Ω pe planul π, și proiecția ortogonală (ω_1) a axului Ω_1, pe care se notează urma ω_1^* pe planul π. Punctul ω se numește *polul epurei*. Pe proiecția ortogonală (ω_1) se indică prin săgeată sensul cotelor pozitive (fig. 1).

1.1. IMAGINEA UNUI PUNCT

Fie M un punct oarecare din spațiu. Deoarece există o singură dreaptă pe care o numim *proiectantă axială*, care trece prin M și se sprijină pe Ω și Ω_1, se obține ca imagine pe planul π, punctul m^* care este intersecția proiectantei cu acest plan. Poziția punctului dat în raport cu planul π, este dată de proiecția sa ortogonală m. Punctele m și m^*, care sînt coliniare cu ω, se numesc *componentele imaginei*. Punctul $s = (\omega_1) \cap mm^*$, este proiecția ortogonală a punctului S în care proiectanta axială intersectează Ω_1 (fig. 2).

1.2. IMAGINEA UNEI DREPTE

Ținînd seama de faptul că nu se poate duce decît o singură dreaptă paralelă cu dreapta dată care să se sprijine pe cele două axe disjuncte, dreapta se va reprezenta în epură prin urma sa u și proiecția ortogonală pe planul π și prin urma u^*, a dreptei paralelă cu ea, care se sprijină pe cele două axe Ω și Ω_1.

Punctul u^* îl numim *urmă axială* a dreptei, dreapta $\Delta\ (u, u^*)$ imaginea axială și dreapta d^* *componenta axială* a dreptei date. Dreapta d este proiecția ortogonală a dreptei paralele cu dreapta dată (fig. 3).

Observații.

— Dacă dreapta D este perpendiculară pe planul π, imaginea sa axială (Δ) este dată de urma dreptei u și urma ei axială $u^* \equiv \omega$.

— Dacă dreapta D este paralelă cu planul π, ea nu are imagine axială, reprezentarea ei făcîndu-se prin proiecție ortogonală d a dreptei pe planul π, și imaginea unui punct $M \in D$.

— Un fascicul de drepte paralele au aceeași componentă axială, iar imaginile lor axiale formează un fascicul de drepte concurente, al cărui suport este urma u^*.

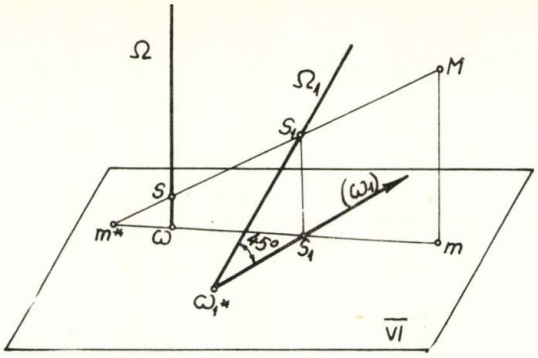


Fig. 1

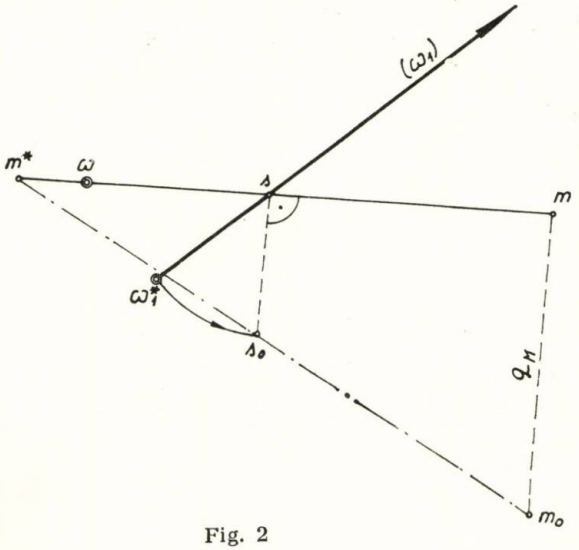


Fig. 2

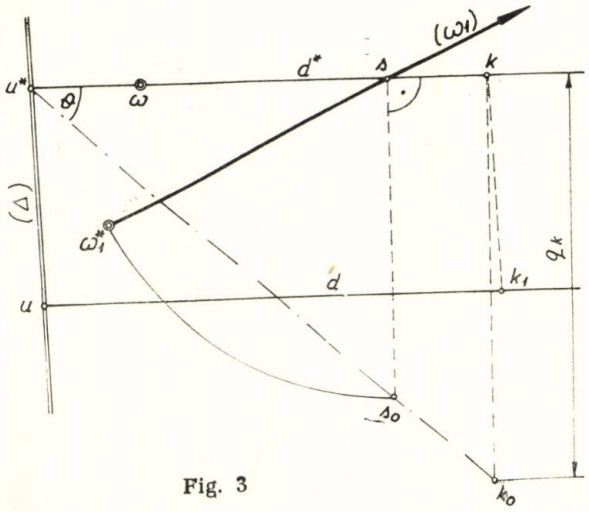


Fig. 3

— Dacă două drepte concurente D și D_1, formează un plan paralel cu Ω_1, urmele u și u^* ale componentelor axiale sînt coliniare cu ω_1^*.

1.3. IMAGINEA UNUI PLAN

Un plan $[P]$ este reprezentat prin dreapta sa de cea mai mare pantă, care este dată prin imaginea sa axială (uu^*) (fig. 4).

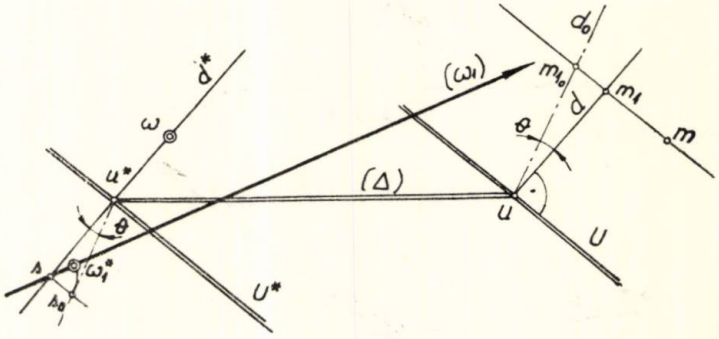


Fig. 4

2. APLICAȚII

2.1. ADEVĂRATA MĂRIME A UNGHIULUI DINTRE DOUĂ DREPTE

Fie dreptele D și D_1, două drepte concurente în M, date prin imaginile lor axiale (Δ) și (Δ_1) (fig. 5).

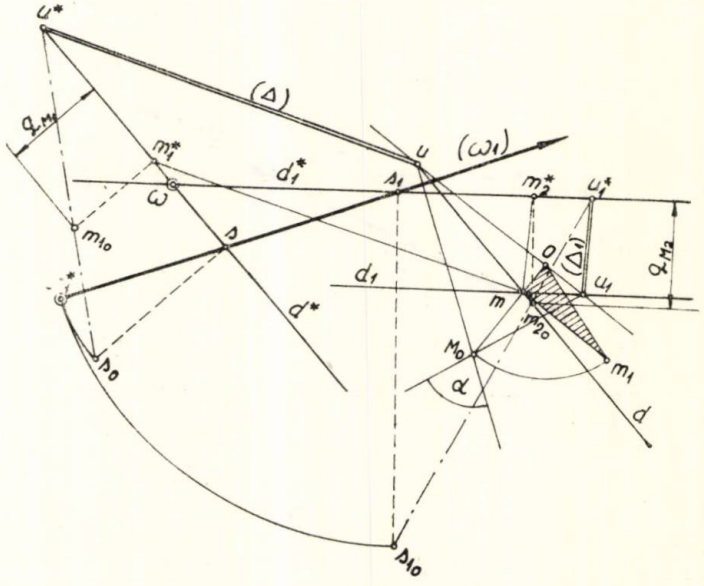


Fig.5

Pentru a determina adevărata mărime a unghiului α dintre cele două drepte, se rabate punctul m pe planul celor două drepte. Dreptele D și D_1, concurente în M au urmele u și u_1. Dreapta uu_1 determină urma planului definit de $D \cap D_1$. Cunoscînd imaginea axială d^* a dreptei D, se determină cota punctului $M \in D$ prin construirea rabaterii $u^* s_0$ (deoarece punctul s este punctul de intersecție dintre axul Ω_1 și dreapta D^*, paralelă cu dreapta D, cota sa este $\omega^* s$). Din m se construiește perpendiculara mo pe dreapta uu_1 și paralela mm_1 la dreapta uu_1. Transpunem segmentul $m_1^* m_{10}$ pe dreapta mm_1 și construim triunghiul de rabatere mom_1. Punctul M_0 este punctul m rabătut pe planul π. Dreptele uM_0 și $u_1 M_0$ determină adevărata mărime a unghiului α, căutat.

2.2. ADEVĂRATA MĂRIME A DISTANȚEI DE LA UN PUNCT LA O DREAPTĂ

Se dă dreapta D prin imaginea sa axială (Δ) și punctul M prin componentele sale m și m^* (fig. 6). Printr-o construcție analogă ca cea descrisă la determinarea adevăratei mărimi a unghiului dintre două drepte, se

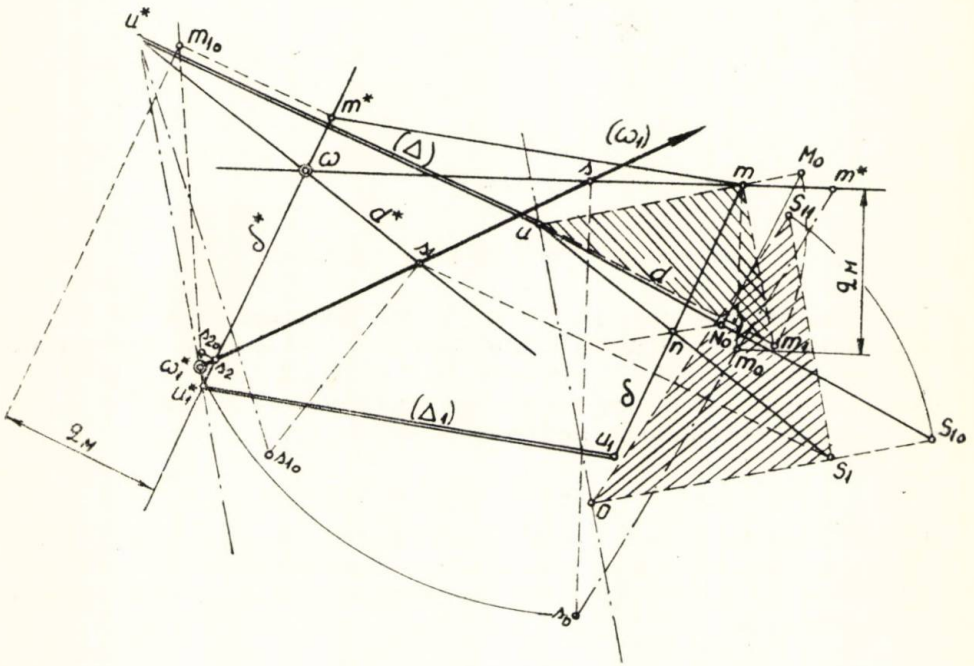


Fig. 6

rabate dreapta d și punctul m pe planul π (axa de rabatere uo) și se obține punctul M_0 și dreapta us_{10}. Perpendiculara $M_0 N_0$ reprezintă, distanța în adevărată mărime de la punctul M la dreapta D.

2.3. ADEVĂRATA MĂRIME A DISTANȚEI DE LA UN PUNCT LA UN PLAN

Se dă planul $[P]$ prin imaginea axială (Δ) a dreptei de cea mai mare pantă și punctul M prin componentele imaginei sale m și m^*. Pentru determinarea adevăratei mărimi a distanței de la punct la plan s-a utilizat un plan auxiliar $[Q]$ care conține punctul M și este perpendicular pe $[P]$ (fig. 7), care se rabate pe planul π. Dreapta M_0N_0 este distanța căutată.

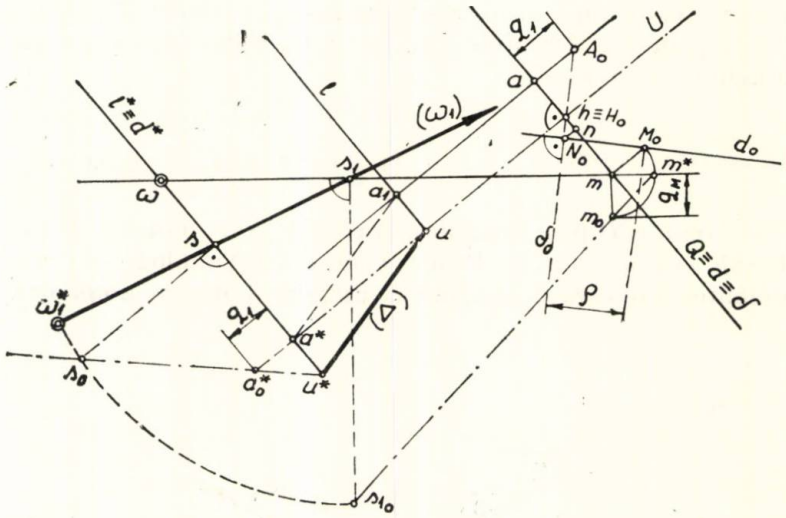


Fig. 7

2.4. PERPENDICULARA COMUNĂ A DOUĂ DREPTE

Se dau dreptele disjuncte D și D_1 prin imaginile lor axiale (Δ) și (Δ_1). Direcția perpendicularei comune a dreptelor D și D_1 se obține prin construirea urmei planului determinat de D și D_2 ($D_2 \parallel D_1$). Prin rabatere se găsește punctul de intersecție dintre perpendiculară și plan. Perpendiculara comună obținîndu-se printr-o translație (fig. 8).

2.5. REPREZENTAREA SUMEI A DOI VECTORI

Fiind dați doi vectori $\overline{V}$ și $\overline{V}_1$ prin imaginile lor axiale cu ajutorul regulei paralelogramului se obține proiecția ortogonală a sumei celor doi vectori $\overline{W}$ și prin rabatere pe planul π a vectorului sumă, se obține adevărata sa mărime W_0 (fig. 9).

3. STUDIUL CINEMATIC AL UNUI MECANISM BIELĂ-MANIVELĂ SPAȚIAL

Mecanismul bielă-manivelă spațial ales constituie mecanismul de acționare al aparatului de tăiere pentru mașini agricole [5].

În cazul cositoririi biela este prevăzută la extremitatea sa superioară cu două articulații A și B ale căror axe sînt perpendiculare una față de

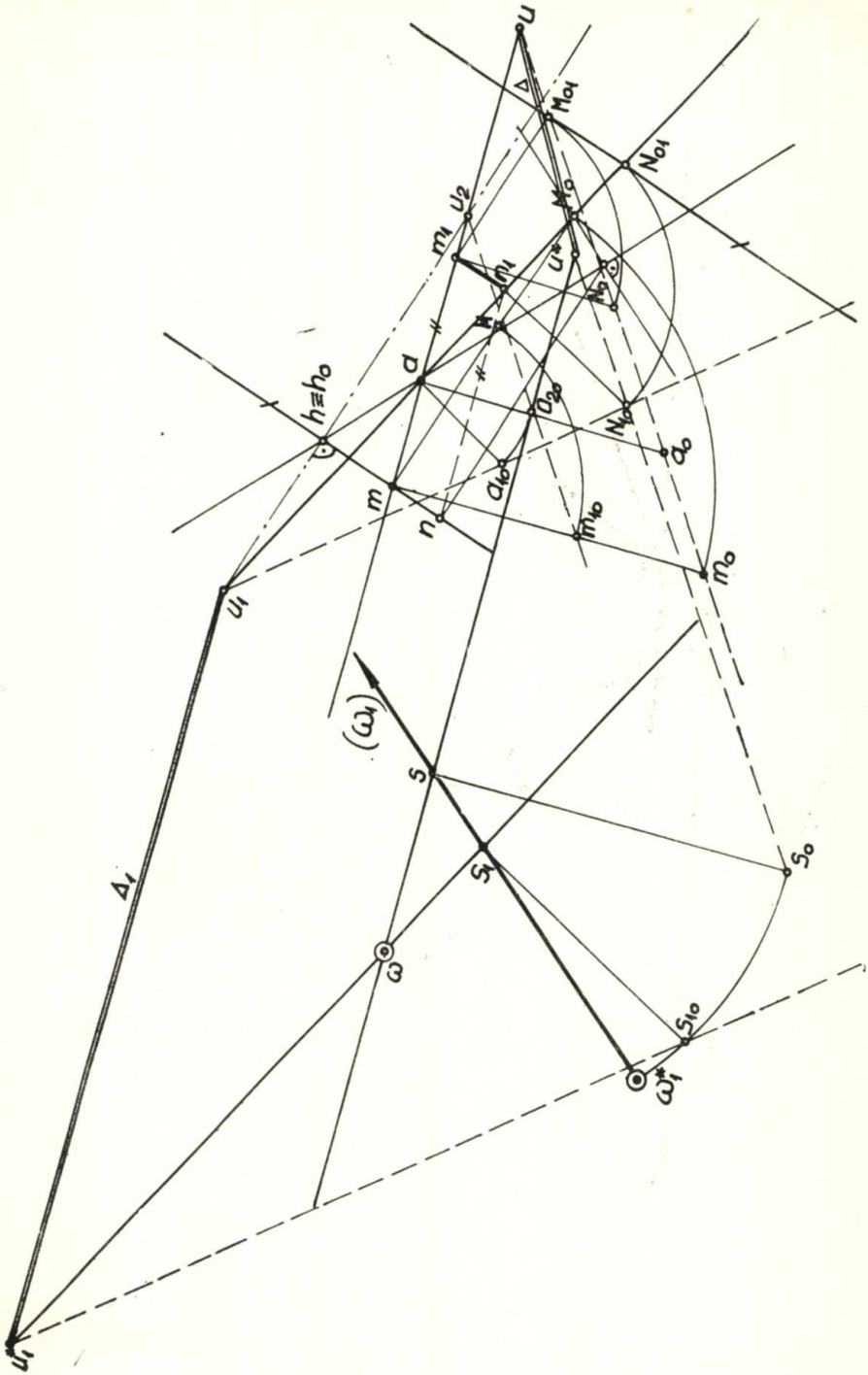

u
Δ
M_{01}
N_{01}
u_2
m_1
M_0
u^*
N_0
M_1
d
$h \equiv h_0$
a_{20}
N_{10}
a_0
a_{10}
m
n
m_{10}
m_0
u_1
(ω_1)
s
s_1
s_0
Δ_1
ω
s_{10}
ω_1^*
u_1^*

Fig. 8

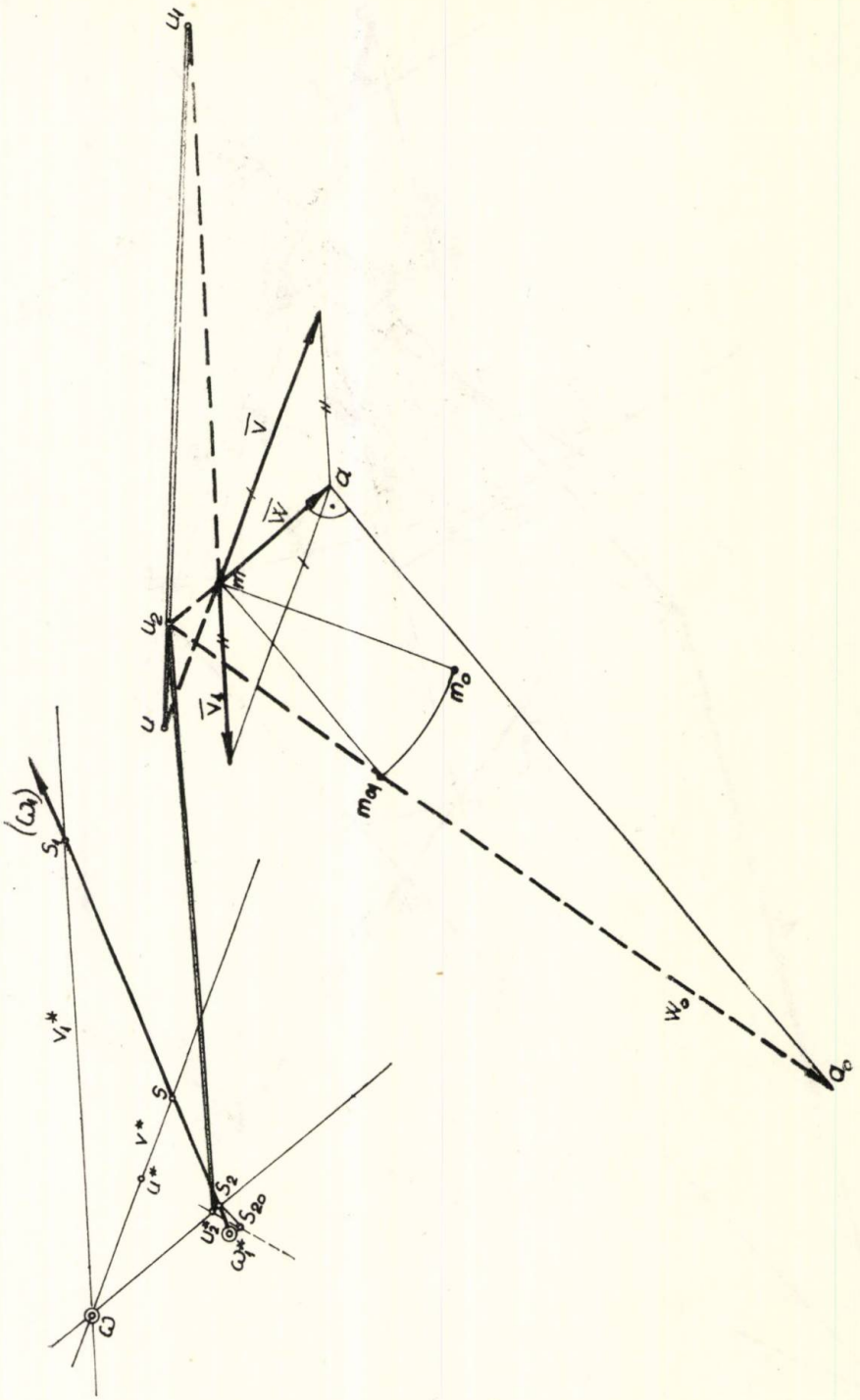


Fig. 9

alta, iar legătura cu capul cuțitului se face prin intermediul unei articulații sferice C. Axul de acționare al mecanismului bielă-manivelă, spre a evita înfășurarea acestuia cu plante este dispus dezaxat deasupra planului în care se găsește cuțitul (fig. 10).

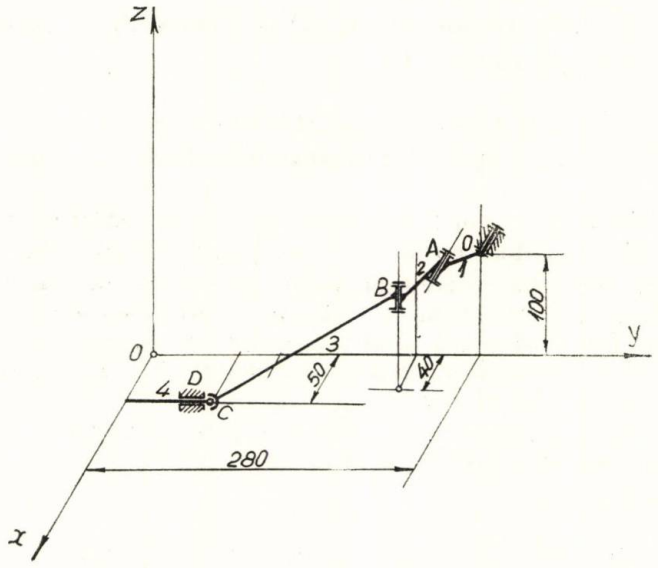


Fig. 10

Se cunoaște :
— turația manivelei $n = 600$ rot./min.
— cursa cuțitului $S = 76{,}2$ mm,
— lungimea manivelei $l_1 = 36$ mm,
— excentricitatea $h = 100$ mm.

Manivela *1* are o mișcare de rotație în jurul articulației O, în planul *zoy*, biela *2* legată de biela *3* printr-o cuplă rotoidă cu axa perpendiculară pe planul *xoy*, se mișcă paralel cu planul *zoy*. Biela 3 față de biela *2* se poate roti în jurul articulației B paralel cu planul *xoy*, cupla sferică C poate să se rotească relativ față de articulația A.

Vom determina familia mecanismului prin metoda tabelară [3]:

	ω_x	y	z	V_x	V_y	V_z
1	ω_x	—	—	—	—	—
2	ω_x	—	ω_z	—	V_y	V_z
3	ω_x	ω_y	ω_z	V_x	V_y	V_z
4	—	—	—	—	V_y	—

Neavînd nici o restricție de mișcare impusă tuturor elementelor familia mecanismului este zero. Deci mobilitatea mecanismului se va determina cu formula lui Somov Malîșev :

$M = 6n - 5C_5 - 4C_4 - 3C_3 - 2C_2 - C_1$,

n = 4 elemente mobile,

C_5 = 3 cuple rotoide (O, A, B) și 1 cuplă de translație (D),

C_3 = 1 cuplă sferică (C),

deci

$M = 6 \times 4 - 5 \times 4 - 3 \times 1 = 24 - 20 - 3 = 1.$

Gradul de mobilitate al mecanismului fiind 1, mecanismul este desmodrom.

Lungimile elementelor *2* și *3* s-au determinat astfel încît să se realizeze cursa cuțitului, deci cupla $D(C)$ să poată ocupa pozițiile extreme.

Dacă în proiecție orizontală biela BC formează unghi ascuțit cu proiecția traiectoriei punctului C, atunci în proiecție verticală punctele $O'A'B'C'$ vor fi pe o dreaptă cînd punctul C va ocupa pozițiile extreme (fig. 11) [1]. Deci în pozițiile extreme elementele *2* și *3* formează un plan proiectant față de planul *zoy*.

Coordonatele cuplelor sînt : $O(0{,}280, 100)$; $A\ (0{,}280 + r\cos\varphi, 100 + r\sin\varphi)$; $B\ (40, y, z)$; $C(50, y, 0)$.

Din condițiile

$$\overline{A_{max}B_{max}} = \overline{A_{min}B_{min}} \text{ și } \overline{B_{max}C_{max}} = \overline{B_{min}C_{min}},$$

$$\overline{O'A'_{min}} + \overline{A'_{min}B'_{min}} + \overline{B'_{min}C'_{min}} = \overline{O'C'_{min}} = 100^2 + (280 - 76{,}2)^2,$$

$$\overline{O'A'_{max}} + \overline{A'_{max}B'_{max}} + \overline{B'_{max}C'_{max}} = \overline{O'C'_{max}} = 100^2 + 280^2,$$

a rezultat $l_2 = 54$ mm și $l_3 = 228$ mm.

3.1. DETERMINAREA POZIȚIILOR MECANISMULUI

Mecanismul bielă-manivelă spațial are pozițiile tuturor cuplelor determinate pentru pozițiile extreme. Deoarece biela AB se mișcă în planul $[x = 0]$ pe un cerc iar în planul $[x = 40]$ descrie o curbă închisă, suprafața descrisă de această bielă este un cilindroid a cărui curbe directoare sînt : cercul descris de punctul A și curba descrisă de punctul B. Cilindroidul admite un plan director, în care, în orice poziție, generatoarea sa va fi paralelă. Planul director al acestui cilindroid se determină din pozițiile extreme a lui AB (cunoscînd două drepte, se determină planul paralel cu aceste două drepte) (fig. 13). Lungimea bielei AB este cunoscută, deci punctul B se va găsi față de A pe cercul de intersecție dintre sfera de rază $R = 54$ mm cu centrul în A și planul $[x = 40]$. Deci punctul B se va găsi pe generatoarea cilindroidului care se determină prin intersectarea planului paralel cu planul director dus prin A cu plan $[x = 40]$ și pe cercul amintit mai sus. În figura 12 s-au determinat 12 poziții ale mecanismului.

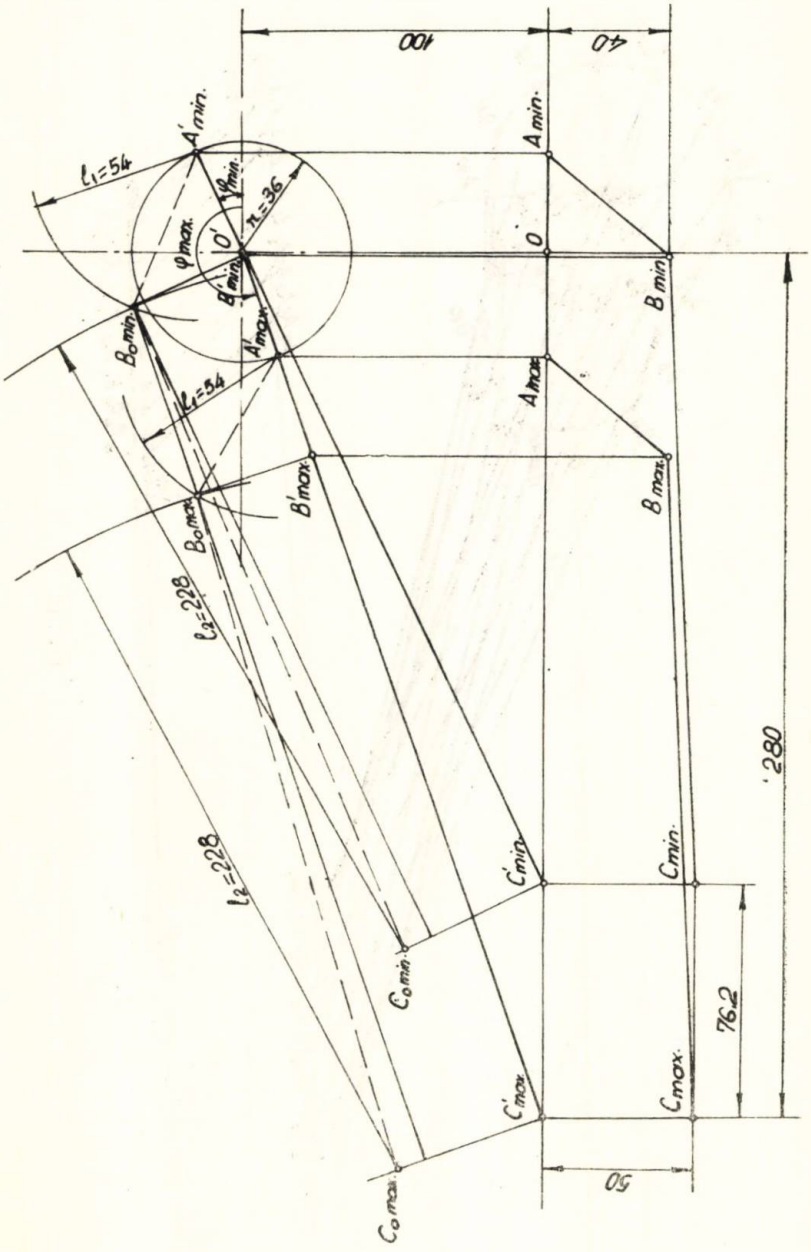

100
40
A'min.
Amin.
l1=54
φmin.
r=36
φmax.
O'
O
B'min.
Bmin.
Bomin.
A'max.
Amax.
l1=54
B'max.
Bmax.
Bomax.
l2=228
l2=228
280
C'min.
Cmin.
Comin.
76.2
C'max.
Cmax.
50
Comax.

Fig. 11

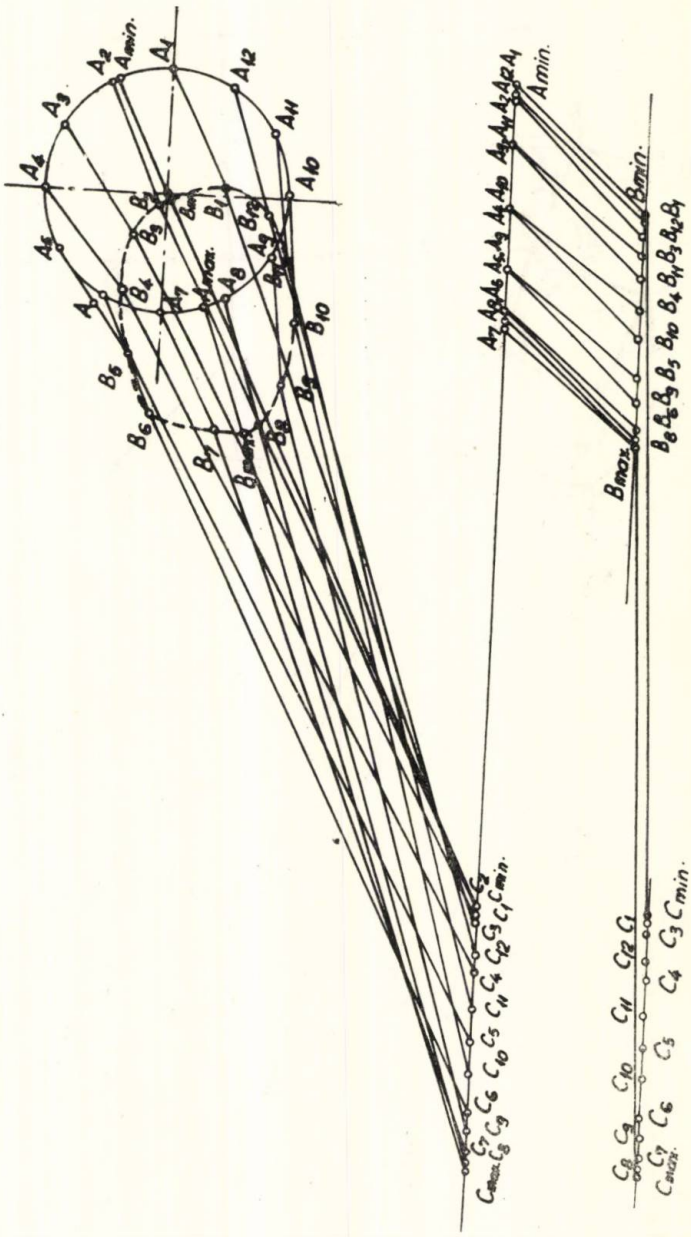

A1
A2
A3
A4
A5
A6
A7
A8
A9
A10
A11
A12
Amin.
Amax.
B1
B2
B3
B4
B5
B6
B7
B8
B9
B10
Bmin.
Bmax.
C1
C2
C3
C4
C5
C6
C7
C8
C9
C10
C11
C12
Cmin.
Cmax.

Fig. 12

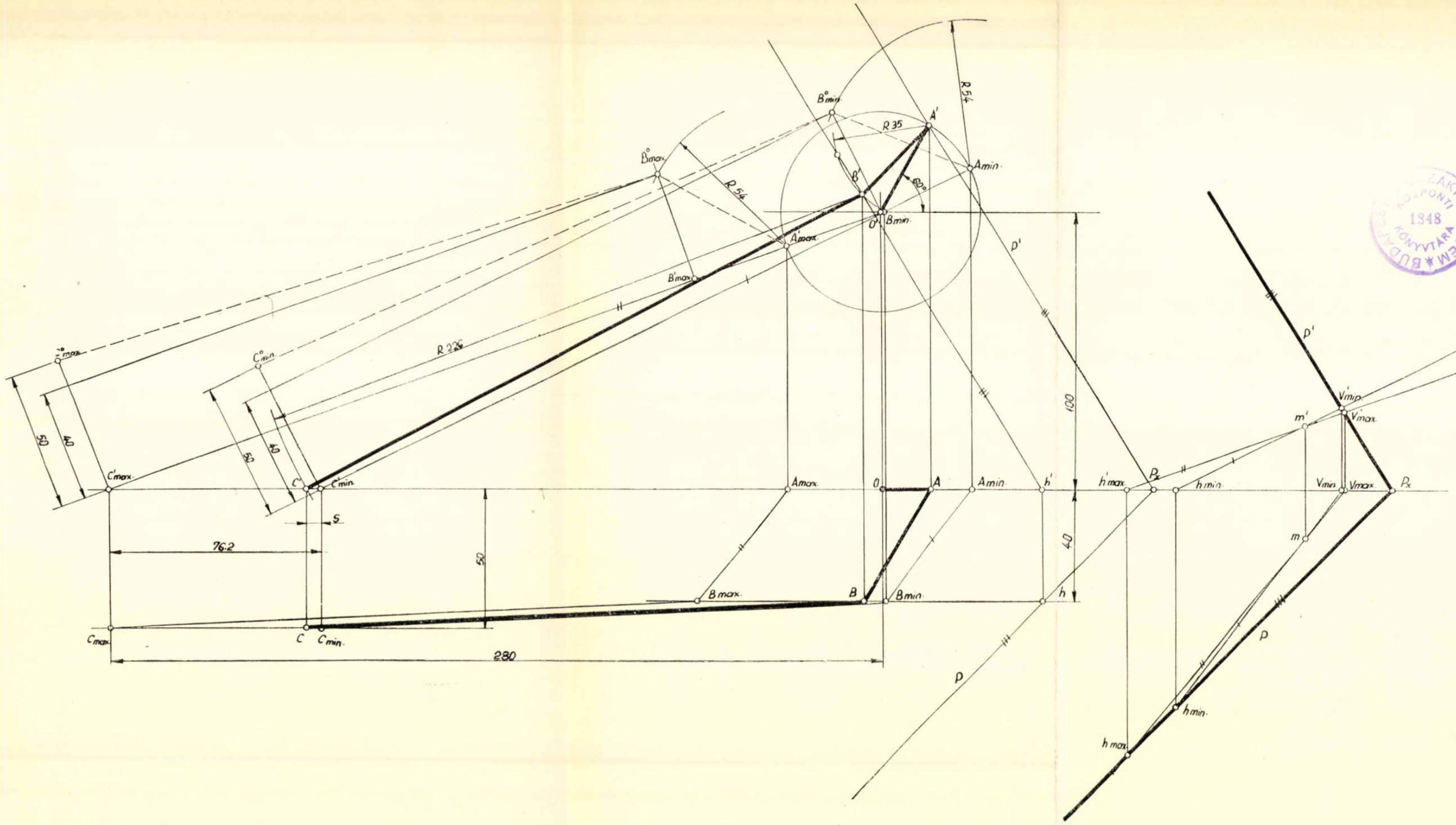


Fig. 13.

MŰSZAKI EGYETEM * BUDAPEST
KÖZPONTI KÖNYVTÁRA
1848

Poziția punctului C se determină cu ajutorul unui arc de cerc cu centrul în B intersectat cu dreapta ($x = 50$). Raza arcului de cerc este egală cu raza cercului de intersecție dintre sfera de rază l_3, cu centrul în C și planul $[x = 40]$.

3.2. DETERMINAREA VITEZELOR ȘI ACCELERAȚIILOR

Fiind cunoscută turația manivelei $n = 600$ rot/min, se poate determina viteza unghiulară a manivelei, care va fi

$$\omega = \frac{2n}{60} = \frac{2.600}{60} = 62{,}8 \text{ rad. } S^{-1}.$$

Cunoscînd viteza unghiulară se determină viteza și accelerația punctului A

$$v_A = \omega \cdot OA = 62{,}8 \cdot 0{,}036 = 2{,}26 \text{ m.}S^{-1},$$

unde

$$OA = r = 36 \text{ mm},$$

$$a_A = a_A^n = \omega^2 \cdot OA = 62{,}8^2 \cdot 0{,}036 = 141{,}97 \text{ m. } S^{-2}.$$

Scara aleasă pentru reprezentarea vitezelor grafic este $k_v = \frac{1}{10}\left[\frac{mS^{-1}}{mm}\right]$ și pentru reprezentarea accelerațiilor $k_a = \frac{1}{5}\left[\frac{m \cdot S^{-2}}{mm}\right]$.

Punctul B se va deplasa tot timpul în planul $[x = 40]$, deci și viteza punctului B va fi conținută în acest plan.

Pentru a determina viteza punctului B ne folosim de teorema proiecțiilor [6]:

$$\text{pr}_{AB} \overline{V}_A = \text{pr}_{AB} \overline{V}_B.$$

Pentru a determina $\text{pr}_{AB} \overline{V}_A$ considerăm planul determinat de $\overline{V}_A$ și $\overline{AB}$, plan a cărui urmă va trece prin $\overline{V}_A$ (deoarece viteza $\overline{V}_A$ este conținută în planul π) și rabatem biela AB pe planul π în jurul urmei planului $[\overline{AB}, \overline{V}_A]$ obținînd dreapta AB_0 (în adevărată mărime), se proiectează $\overline{V}_A$ pe AB_0, segmentul obținut AA_n se transpune în B_0B_n în același sens. Ridicăm o perpendiculară pe AB_0 din punctul B_n pînă va întîlni rabaterea dreptei de intersecție dintre planul $[\overline{AB}, \overline{V}_A]$ și planul $[x = 40]$ (această dreaptă este paralelă cu $\overline{V}_A$ deoarece planul este paralel cu planul $[x = 40]$), punctul de intersecție B_0 este punctul în care dreapta $B_n'B_0'$ înțeapă planul $[x = 40]$. Construind la scară în figurile 13a — 13l, a rezultat $\overline{V}_B = \overline{V}_A$ deci punctul B se deplasează în planul $[x = 40]$ cu o viteză egală și paralelă cu viteza punctului A.

Punctul C va avea direcția vitezei paralele cu ghidajul ($x = 50$). Pentru determinarea vitezei punctului C ne folosim tot de teorema proiecțiilor [6]:

$$\text{pr}_{BC} \overline{V}_B = \text{pr}_{BC} \overline{V}_C.$$

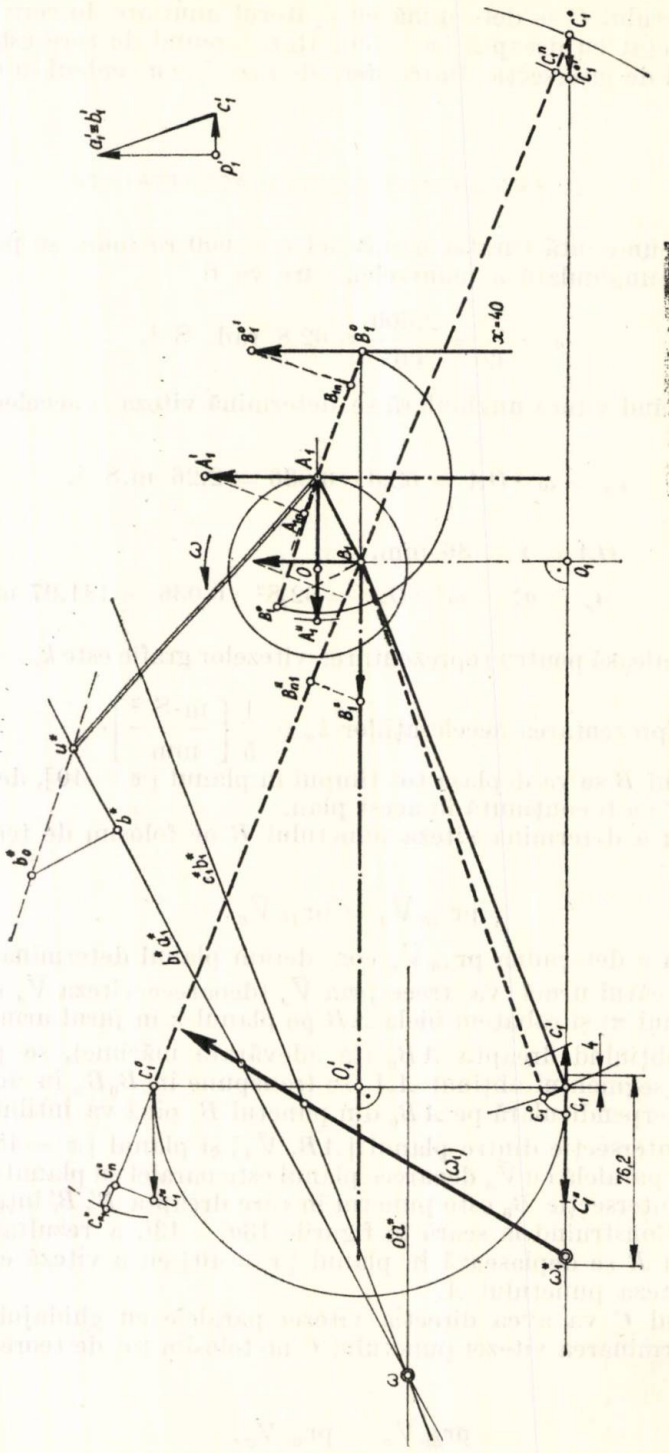
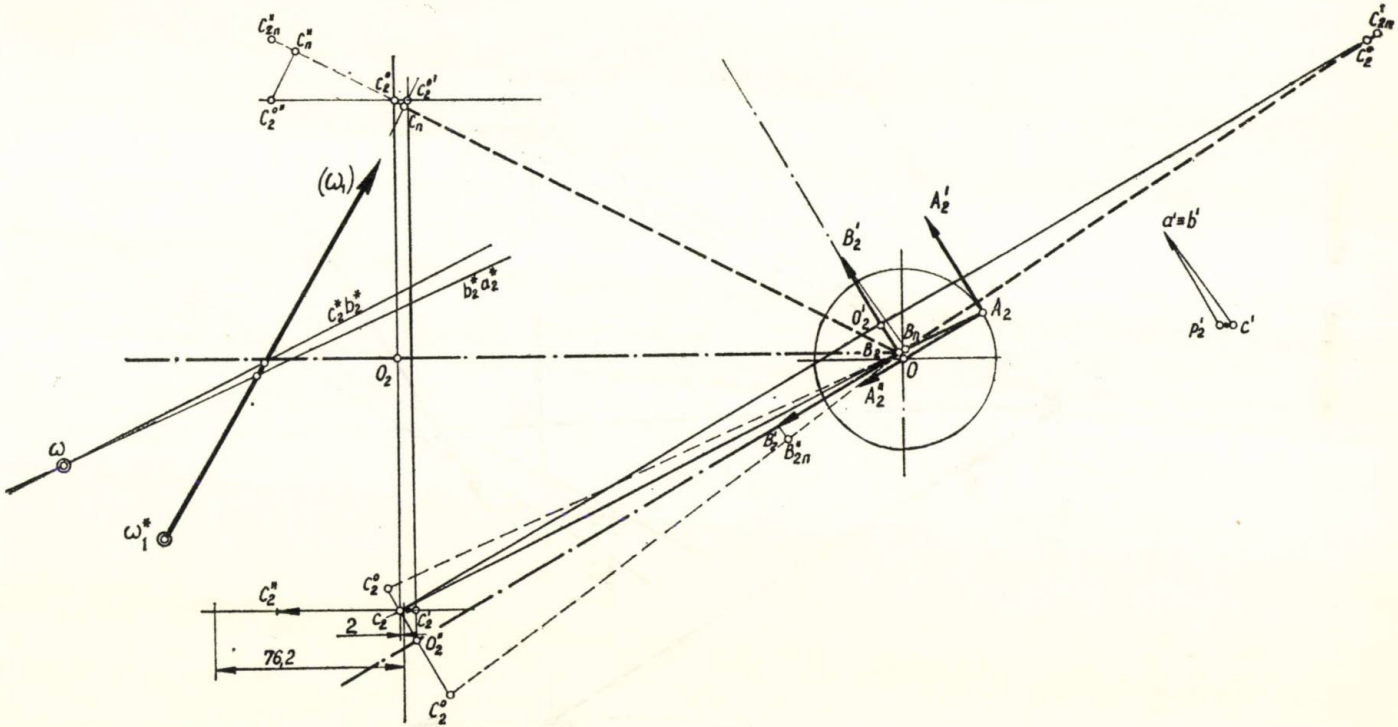
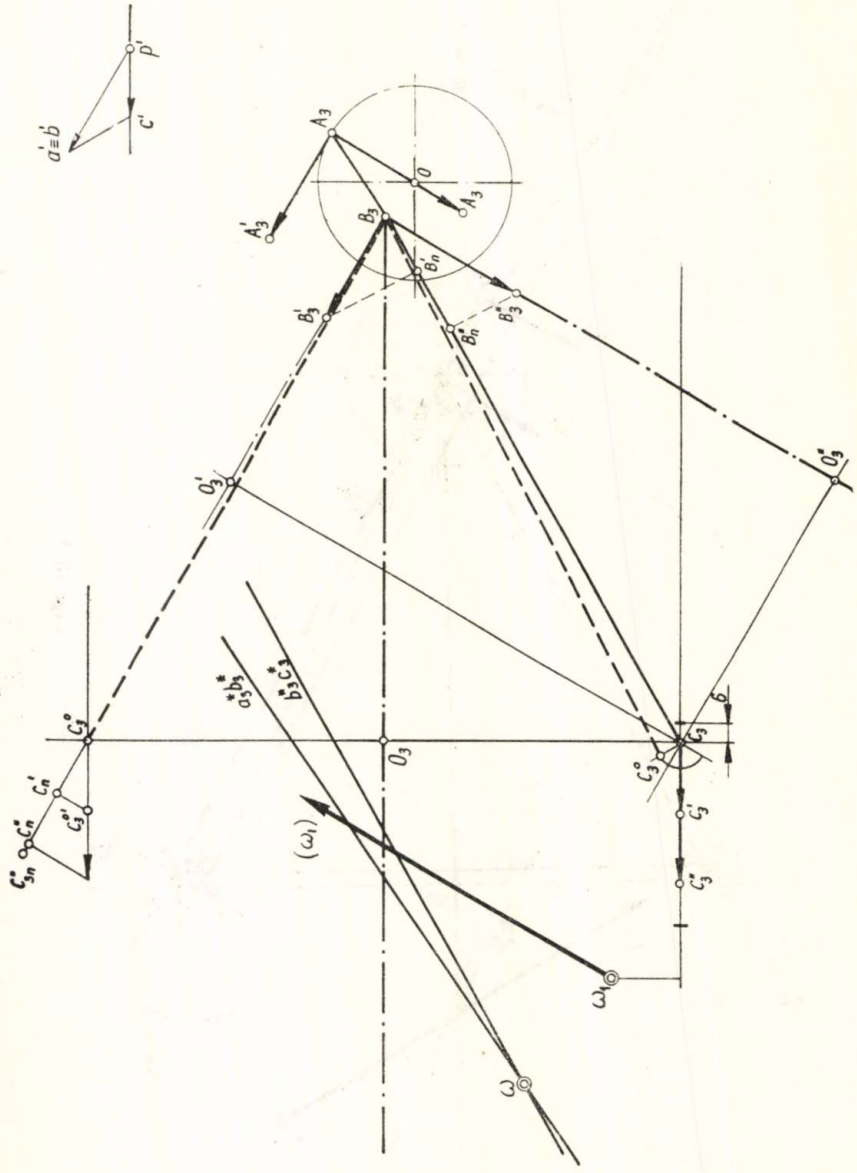


Fig. 13 a



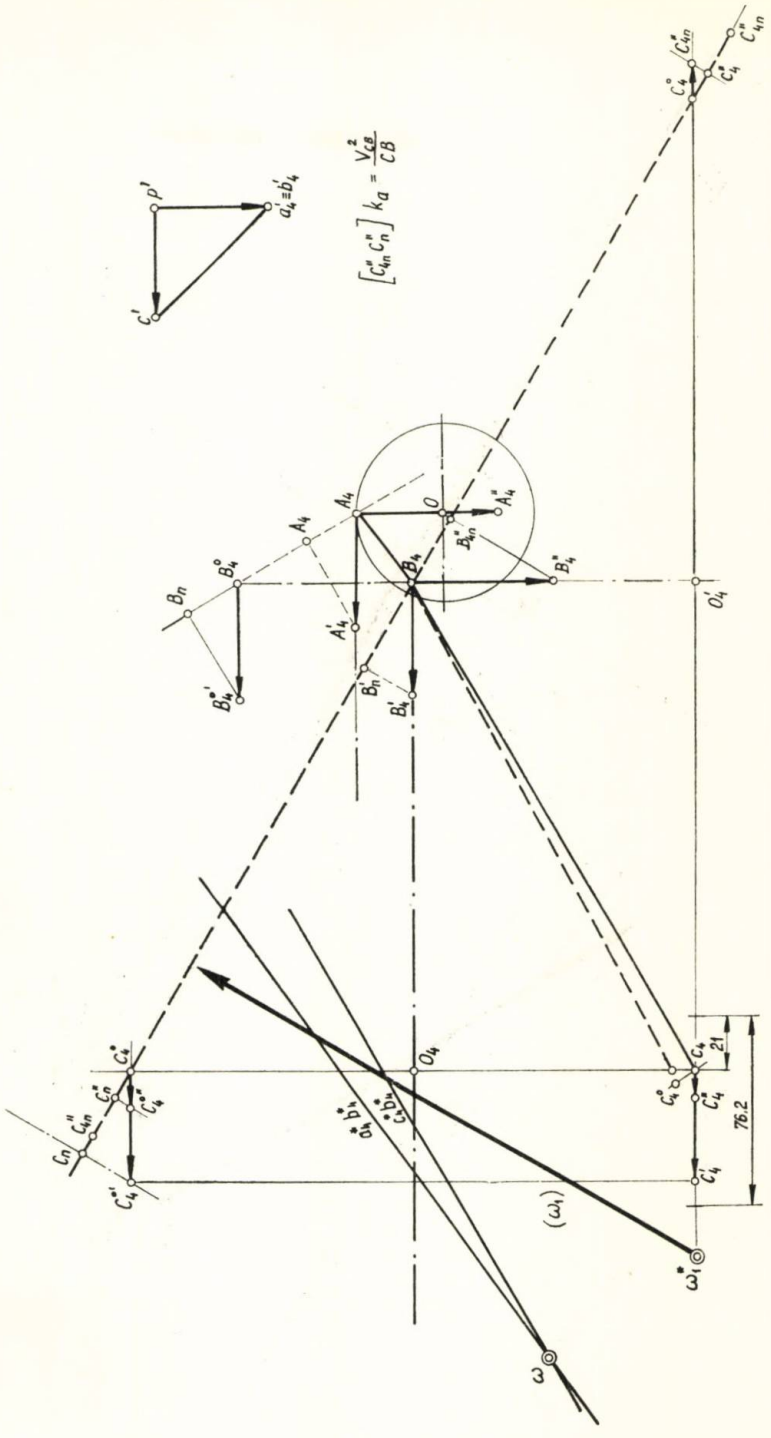
C_{2n}''
C_n''
$C_2^{o''}$
C_2^{o}
$C_2^{o'}$
C_n
(ω_1)
$C_2^* b_2^*$
$b_2^* a_2^*$
O_2
ω
ω_1^*
C_2^{o}
C_2''
C_2
C_2'
O_2''
2
76,2
C_2^{o}
B_2'
A_2'
O_2'
B_n
B_2
O
A_2''
B_2''
B_{2n}''
A_2
$a' \equiv b'$
p_2'
c'
C_{2n}'
C_2^{o}

Fig. 13 *b*



$a' \equiv b'$
c'
p'
A_3
O
A_3'
B_3
B_n'
B_3'
B_n''
B_3''
O_3'
O_3''
C_3^o
C_n'
$C_3^{o'}$
C_{3n}^o
C_n''
$a_3^* b_3^*$
$b_3^* c_3^*$
O_3
C_3
C_3^o
C_3'
C_3''
(ω_1)
ω_1
ω
δ

Fig. 13 c



$[C''_{4n} C''_n]\, k_a = \frac{V^2_{CB}}{CB}$
p'
$a'_4 \equiv b'_4$
c'
A_4
B_4
O
O_4
O'_4
B_n
B_4^0
$B_4^{0\prime}$
A'_4
B'_n
B'_4
B''_4
B''_{4n}
A''_4
C_4
C_4^0
C''_4
C''_{4n}
C'_4
C''_4
C''_{4n}
C_n
C''_{4n}
C''_4
C''_4
C'_4
C'_4
$a^*_4 b^*_4$
$c^*_4 b^*_4$
(ω_1)
ω^*_1
ω
21
76.2

Fig. 13 *d*

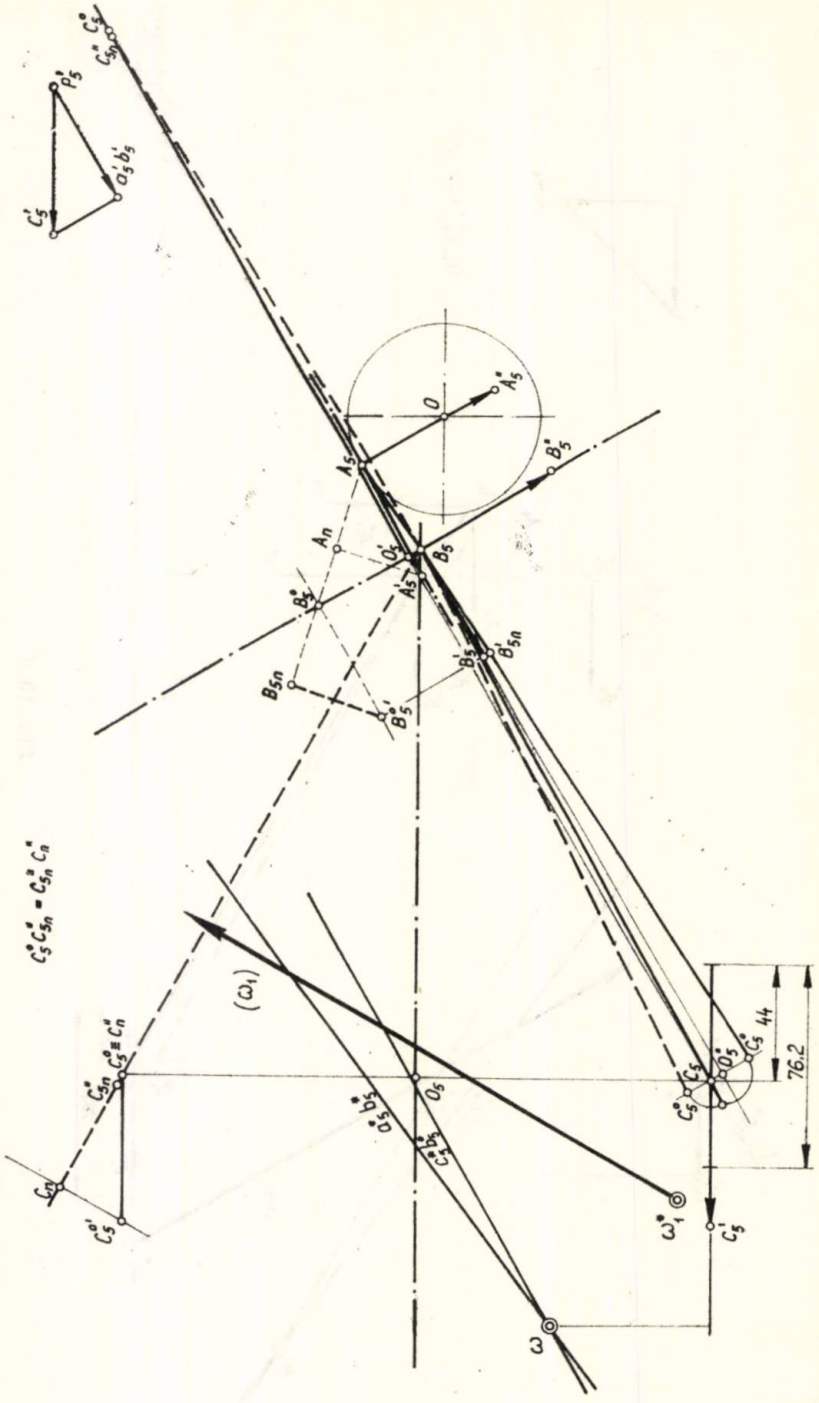

p'_5
c'_5
$o'_5 b'_5$
c''_{5n} c''_5
A_5
O
A'_5
B'_5
A_n
O'_5
B_5
A''_5
A'_5
B''_5
B_{5n}
O''_5
B'_{5n}
B'_5
$c'_5 c''_5 = c''_{5n} c'_n$
(ω_1)
c''_{5n} $c''_5 \equiv c''_n$
c_{5n}
c''_5
$o''_5 b''_5$
O_5
$c''_4 b''_5$
c''_5 c_5
O''_5
c'_5 44
76.2
ω''_1
c'_5
ω

Fig. 13 *f*

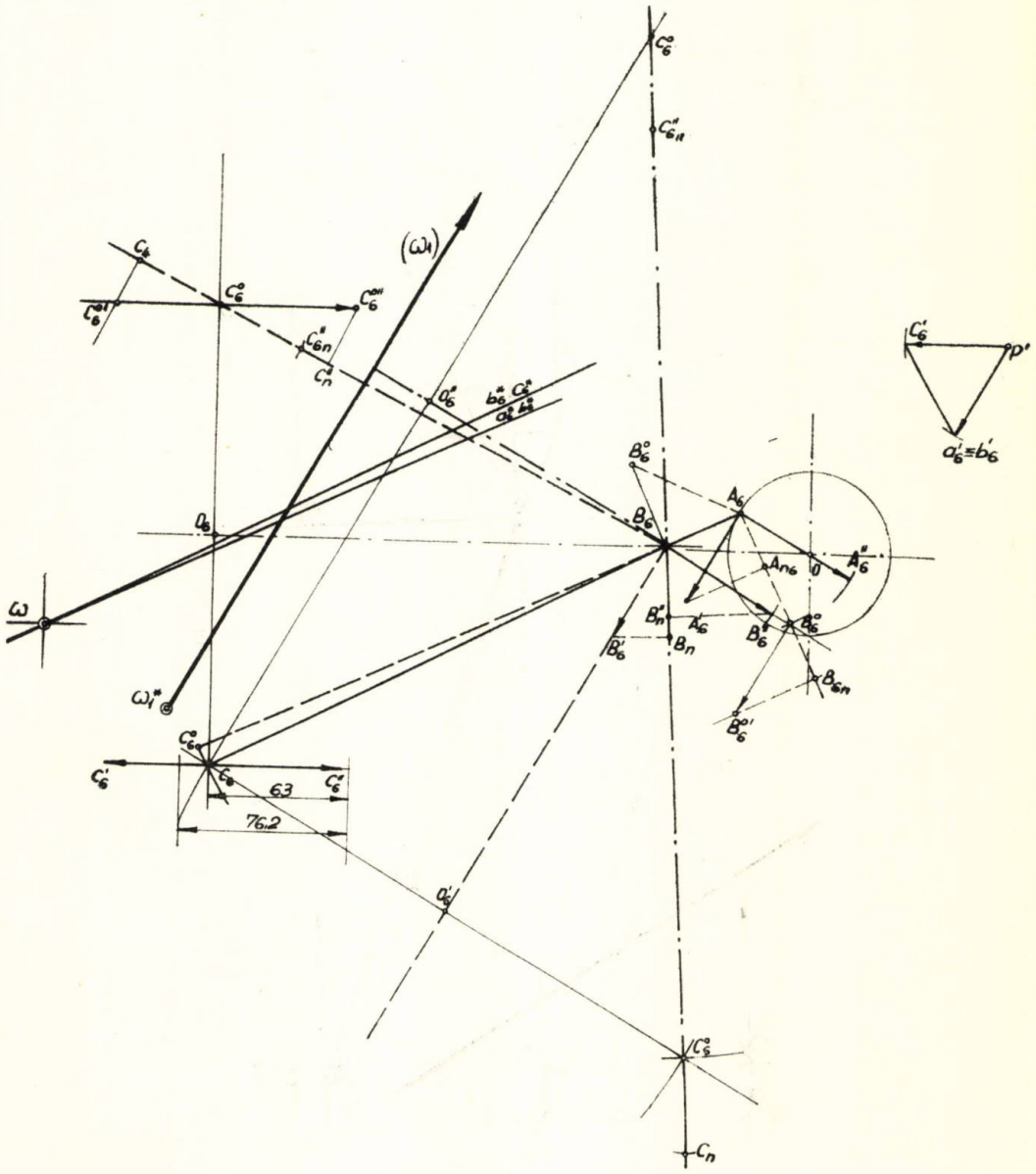
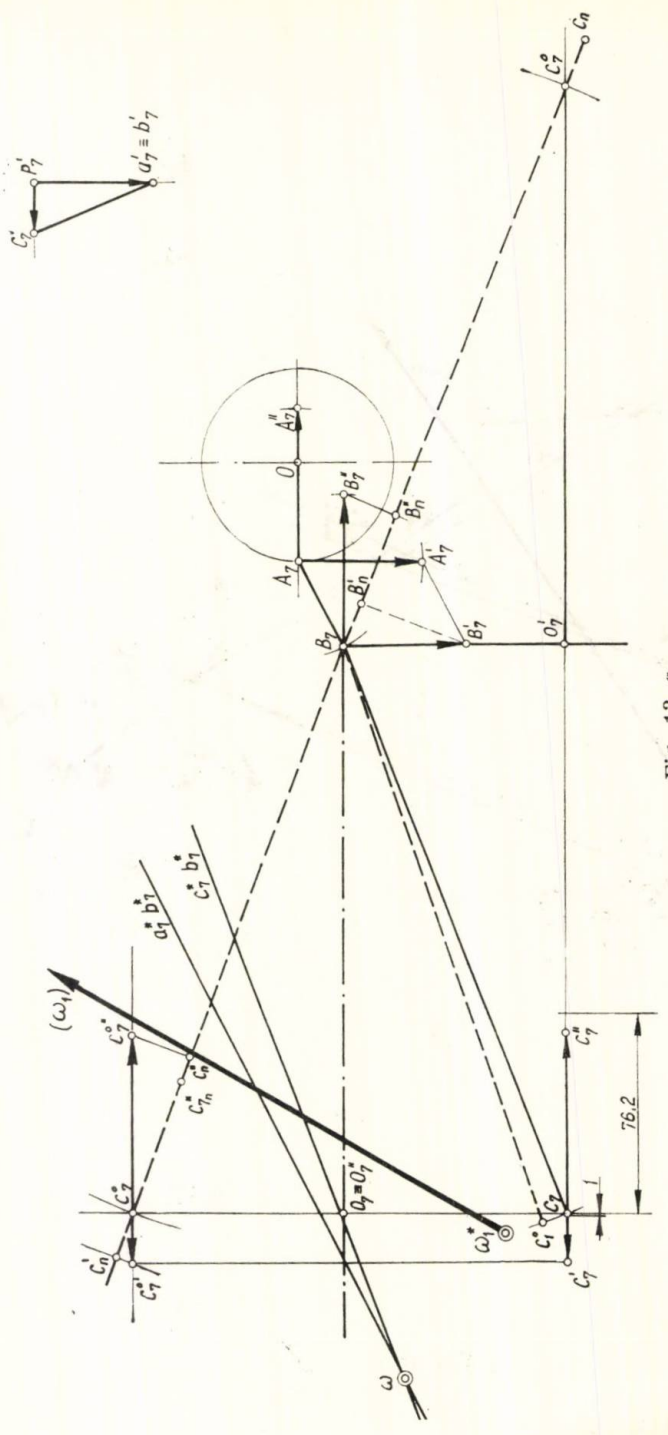
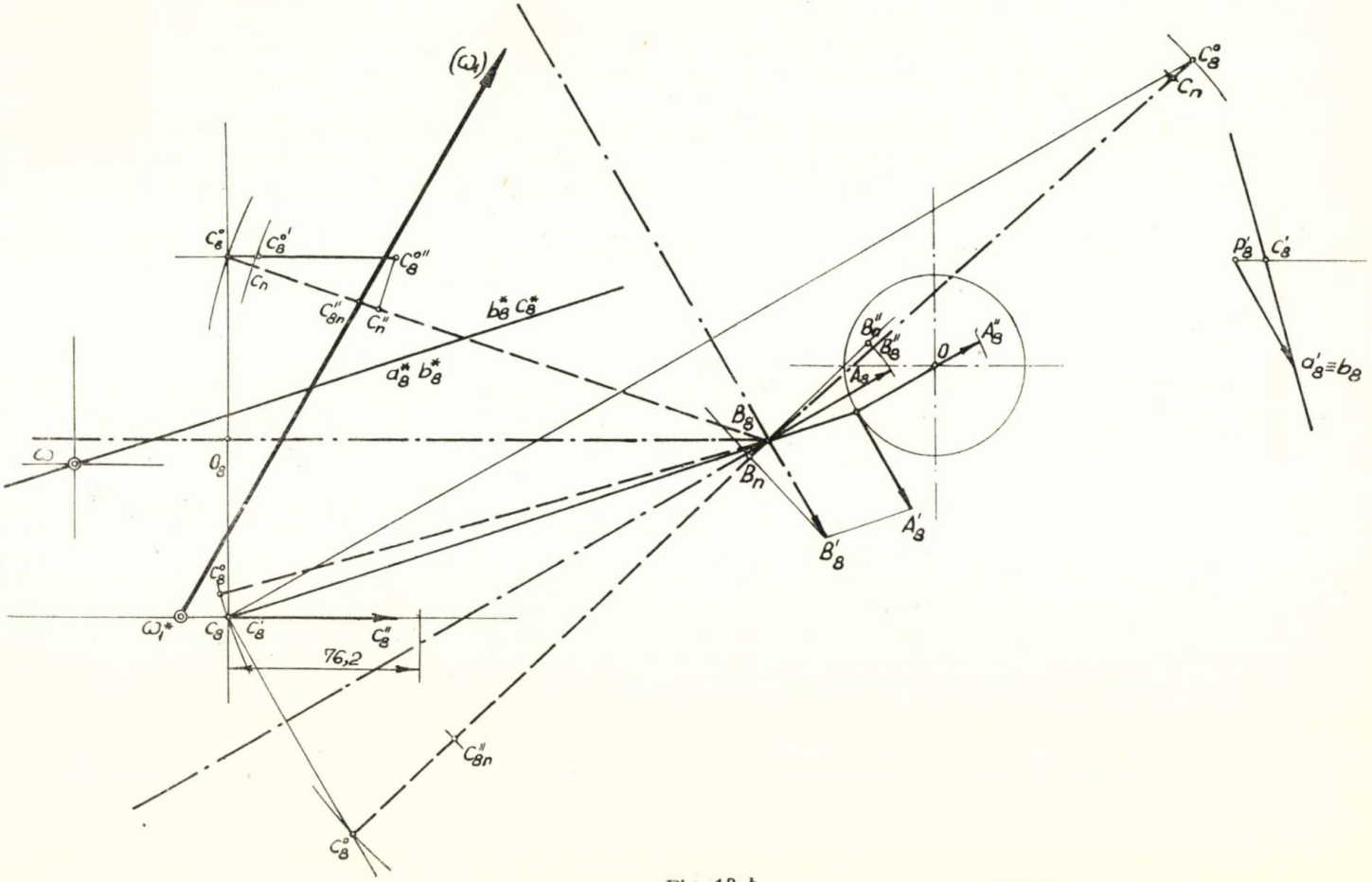


Fig. 13 *e*



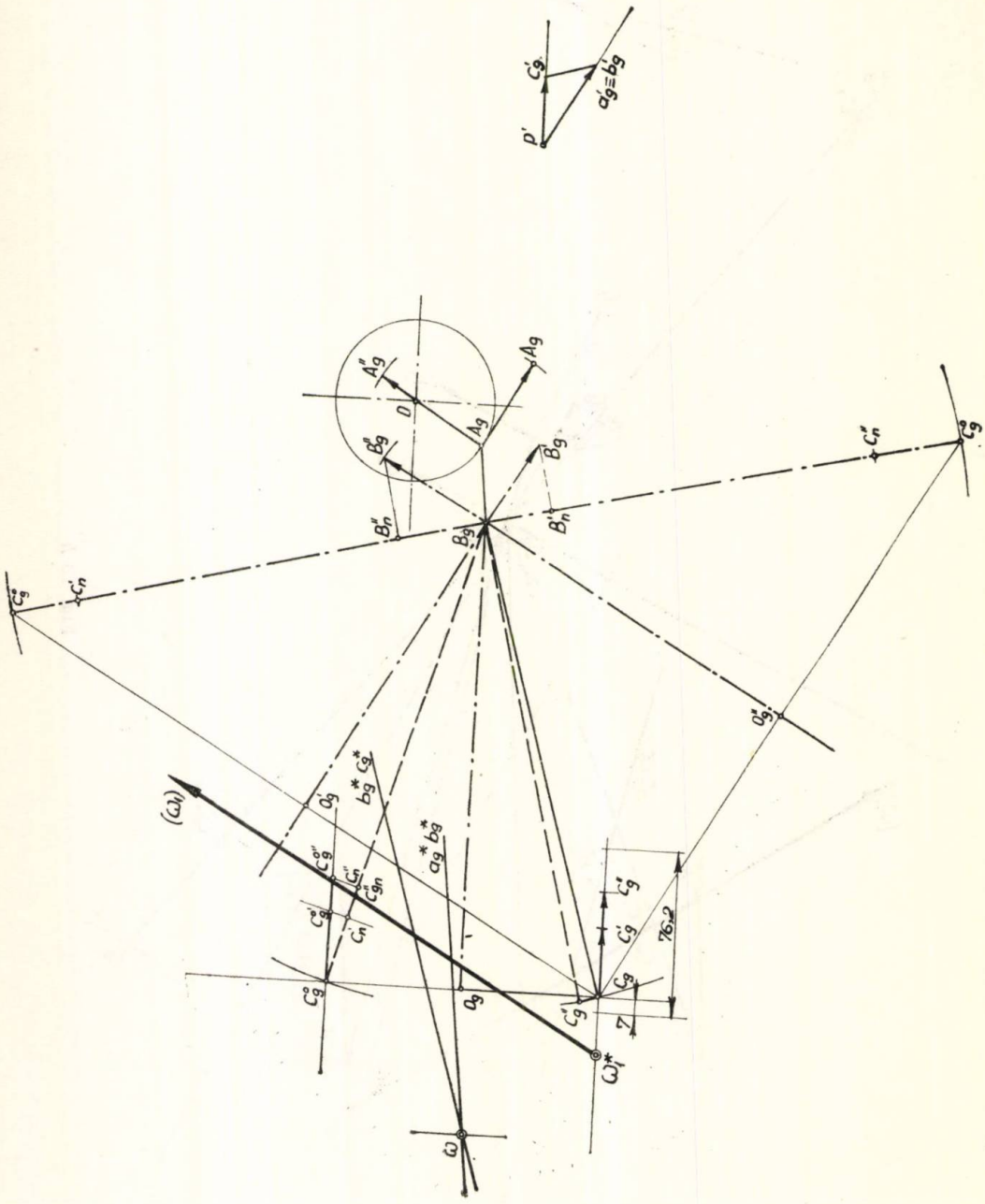
c_7'
p_7'
$a_7' \equiv b_7'$
c_n
c_7^o
A_7''
O
B_7''
B_n''
A_7
A_7'
B_n'
B_7
B_7'
O_7'
$a_7^* b_7^*$
$c_7^* b_7^*$
(ω_1)
c_7^{o*}
c_{7n}^*
c_n^*
c_7^o
c_n'
$c_7^{o'}$
$O_7 \equiv O_7^*$
ω_1^*
c_1^o
c_7
c_7''
c_7'
76,2
1
ω

Fig. 13 *g*



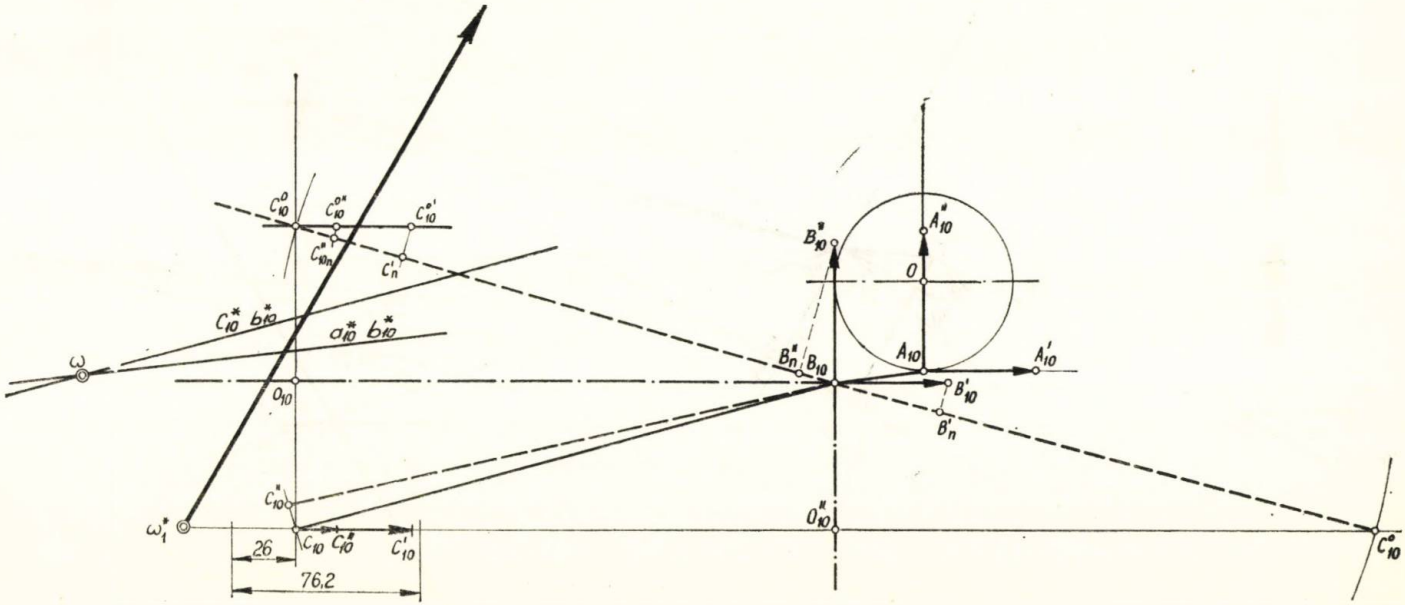
(ω_1)
C_8^0
$C_8^{0'}$
$C_8^{0''}$
C_n
C_{8n}''
C_n''
$b_8^* c_8^*$
$a_8^* b_8^*$
ω
O_8
C_8^0
ω_1^*
C_8
C_8'
C_8''
76,2
C_{8n}''
C_8^0
B_8
B_n
B_8'
A_8'
B_n''
B_8''
A_8
O
A_8''
C_8^0
C_n
P_8'
C_8'
$a_8' \equiv b_8$

Fig. 13 *h*



p'
c_g'
$a_g' \equiv b_g'$
A_g''
A_g
D
B_g''
B_g
B_n''
B_n'
c_n''
c_g^0
c_n'
a_g''
(ω_1)
$b_g^* c_g^*$
$a_g^* b_g^*$
$c_g^{0''}$
c_n''
c_{gn}''
$c_g^{0'}$
c_n'
c_g''
c_g'
c_g
76,2
7
ω_1^*
ω

Fig. 13 *i*



C_{10}^{o}
C_{10}^{o*}
$C_{10}^{o'}$
C_{10n}^{*}
C_n'
$C_{10}^{*}\ b_{10}^{*}$
$a_{10}^{*}\ b_{10}^{*}$
ω
O_{10}
C_{10}^{*}
ω_1^{*}
C_{10}
C_{10}^{*}
C_{10}'
26
76,2
B_{10}^{*}
A_{10}^{*}
O
A_{10}
A_{10}'
B_n^{*}
B_{10}
B_{10}'
B_n'
O_{10}^{*}
C_{10}^{o}

Fig. 13 *j*

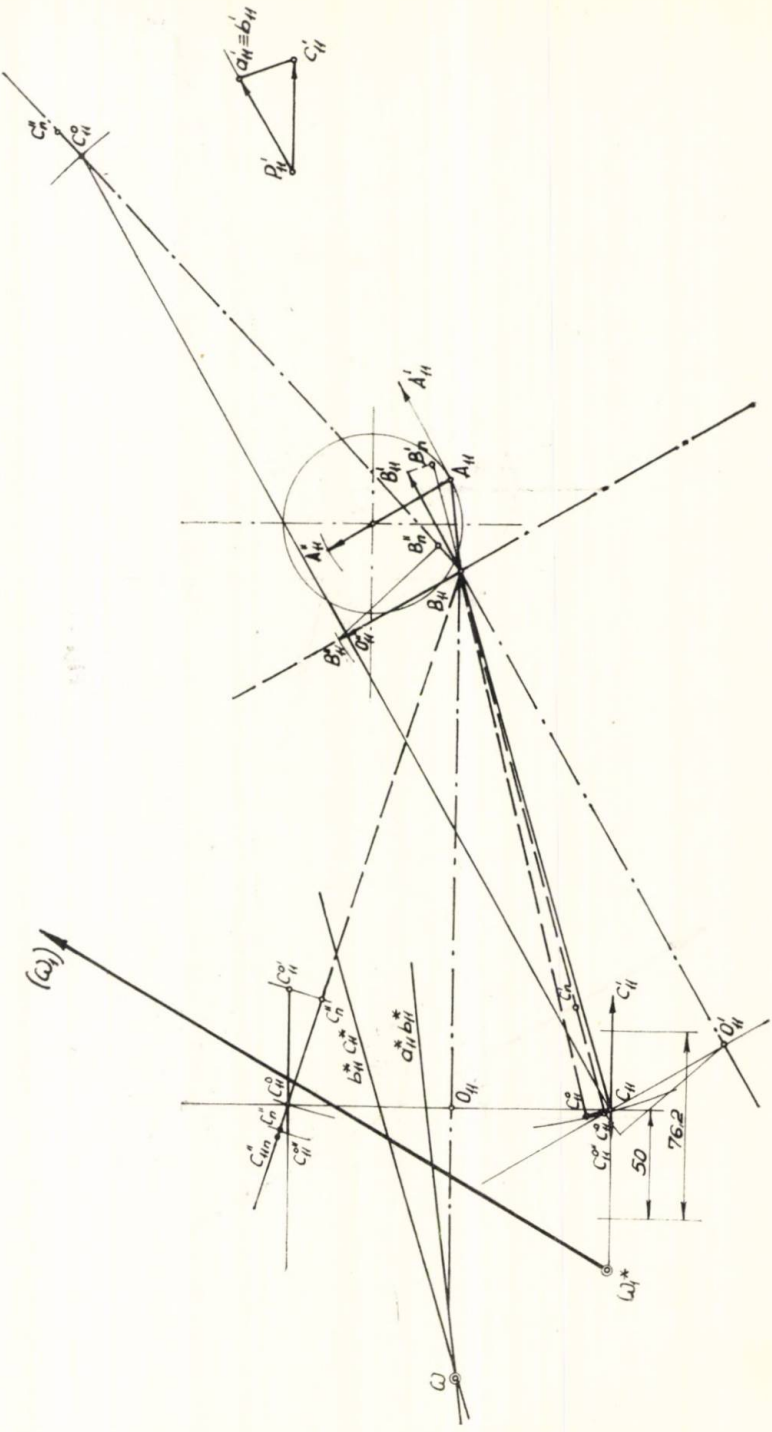
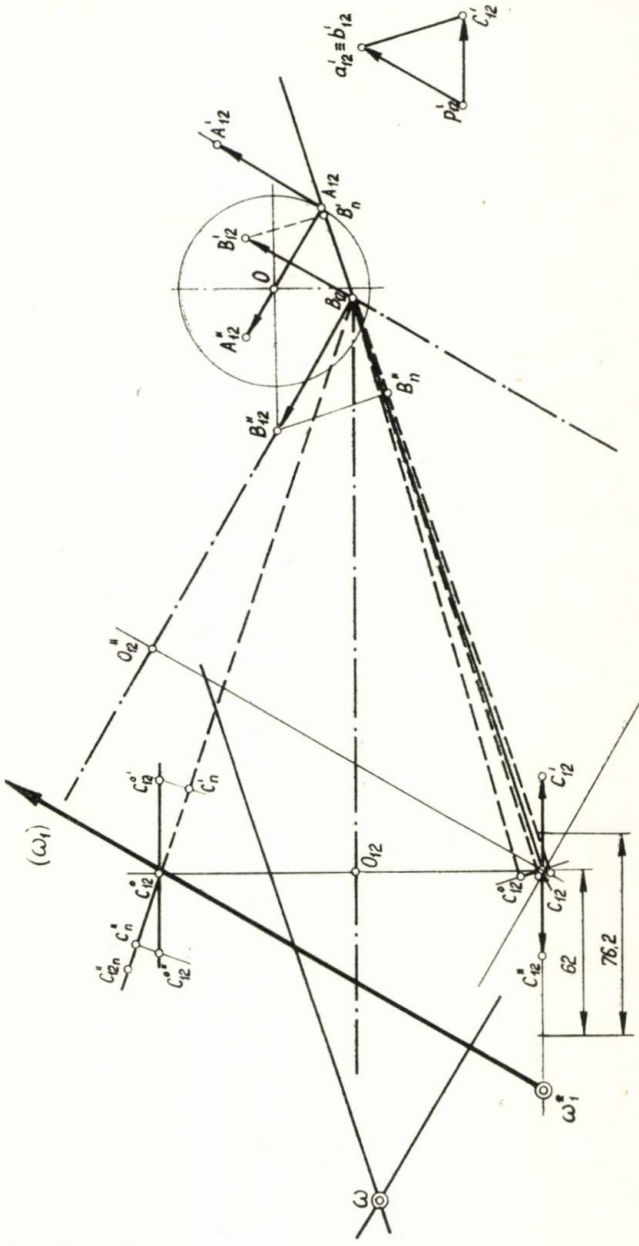


Fig. 13



$a'_{12} \equiv b'_{12}$
C'_{12}
p'_{12}
A'_{12}
A_{12}
B'_n
B'_{12}
O
B_{12}
A''_{12}
B''_n
B''_{12}
O''_{12}
O'_{12}
C'_{12}
C'_n
(ω_1)
O_{12}
C^0_{12}
C_{12}
C''_{12}
C''_n
C''_{12n}
$C^{0''}_{12}$
62
76,2
ω''_1
ω

Fig. 13 *l*

Planul determinat de $\overline{V}_B$ şi $\overline{BC}$ are urma pe planul π, confundată cu $\overline{V}_B$, deoarece $\overline{V}_B$ este conţinută în planul π ($x = 40$), vom face o rotaţie a lui $\overline{V}_B$ şi $\overline{BC}$ pe planul π în jurul lui $\overline{V}_B$ şi proiectăm $\overline{V}_B$ pe BC_0 obţinînd în adevărată mărime proiecţia lui $\overline{V}_B$ pe BC — segmentul BB_n. Viteza punctului C fiind paralelă cu ghidajul ($x = 50$) împreună cu biela BC, va determina un alt plan care are ca urmă pe planul π paralela la ghidaj dusă prin B. Rabatem biela BC în jurul acestui plan obţinînd BC_0, în C_0 vom transpune segmentul BB'_n respectînd sensul proiecţiei BB_n. Din punctul C_n astfel obţinut ridicăm o perpendiculară pe BC_0 pînă întîlneşte paralela la ghidaj în punctul C'_0. $C_0C'_0$ este viteza punctului C căutată.

Pentru determinarea vitezei relative $\overline{V}_{CB}$ construim ecuaţia vectorială $\overline{V}_C - \overline{V}_B = \overline{V}_{CB}$, rezultă $\overline{V}_{CB}$ în adevărată mărime deoarece $\overline{V}_C$ şi $\overline{V}_B$ reduse la un punct se găsesc în planul figurii. La determinarea acceleraţiilor se utilizează teorema proiecţiilor pentru acceleraţii :

$$\mathrm{pr}_{CB}\,\overline{a}_c = \mathrm{pr}_{CB}\,\overline{a}_B - \frac{V^2_{CD}}{CB}.$$

Vitezele relative se determină pentru fiecare poziţie din poligonul vitezelor şi se calculează termenul $\frac{V^2_{CB}}{CB}$. Pentru punctul B acceleraţia $\overline{a}_B$ este egală cu acceleraţia $\overline{a}_A$ deoarece viteza relativă $\overline{V}_{BA}$ este nulă.

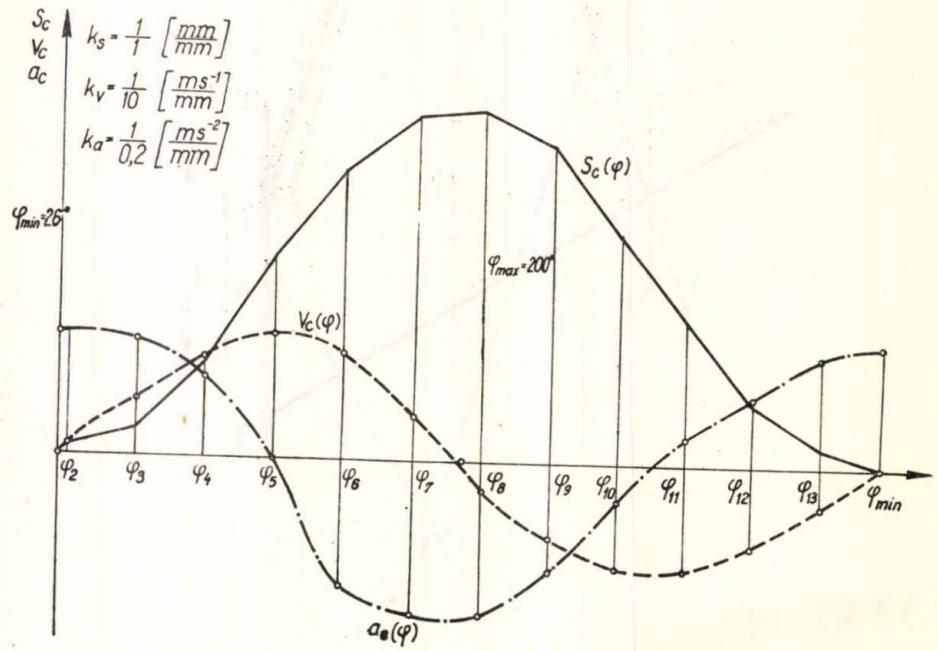


Fig. 14

Determinarea adevăratei mărimi și a sensului proiecției $\mathrm{pr}_{cB}\ \bar{a}_B$ se obține în mod similar cu determinarea vitezelor, planul utilizat fiind de data aceasta planul determinat de $[\bar{a}_B\ ;\ \overline{BC}]$.

După transpunerea segmentului BB_n'' în C_0C_n'' cu respectarea sensului proiecției se adună vectorial segmentul $C_n''C_c$ în sensul $C \to B$, și prin construirea perpendicularei C_0C_0' pe C_0B la intersecția acesteia cu paralela la ghidajul ($x = 50$) dusă prin C_0 se obține accelerația punctului C în adevărată mărime.

În figurile 13*a* — 13 *l* s-au construit pozițiile mecanismului la scara $k = \frac{1}{2}\left[\frac{\text{mm}}{\text{mm}}\right]$, vitezele și accelerațiile pentru 12 poziții ale manivelei OA, la scara indicată mai sus.

Datele obținute pentru S_c, V_c și a_c s-au centralizat în diagramele $S_c(\varphi)$; $V_c(\varphi)$ și $a_c(\varphi)$ (fig. 14).

Reprezentînd mecanismul spațial prin modelul plan obținut dintr-o transformare Steiner s-au putut determina prin construcții grafice simple vitezele și accelerațiile elementelor mecanismului.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. G. D. Ananov, *Kinematika prostranstvennîh şarnirnîh mehanizmov selskohoziaistvennîh maşin*, Moskva-Leningrad, Maşghiz, 220 p., 1963.
2. M. Botez, M. Bulubaşa și Cornelia Florea, *Un nou model plan al spațiului cu ajutorul transformării Steiner*, Buletinul științific al I.P.C. *11* (1969).
3. N. I. Manolescu ș.a., *Culegere de probleme din teoria mecanismelor și a mașinilor*, București, Edit. didactică, 1963.
4. * * * *Metodî nacertatelnoi geometrii i io prilojeniia Gosud. izd. tehniko-teoreticeskoi literaturî* Moskva 1955, p. 195—221.
5. V. Scripnik, *Mașini agricole*, București, Edit. agrosilvică, p. 328.
6. * * * *Structura și cinematica mecanismelor*, București, Editura tehnică, 1959.
7. * * * *Voprosî sovremennoi nacertatelnoi gheometrii*, OGIZ Gostehizdat p. 286—327, 1947.

CINEMATICA PATRULATERULUI ARTICULAT SPAȚIAL, REZOLVATĂ PRIN METODE PLANE

de AMEDEU ORĂNESCU
Institutul politehnic Galați

Se proiectează mecanismul patrulater spațial pe un plan oarecare, obținîndu-se un patrulater plan cu elemente deformabile. Se rezolvă apoi cinematica acestui mecanism.

1. În literatura românească și străină curentă, cinematica mecanismelor spațiale este abordată prin metode din ce în ce mai perfecționate ca aparatură matematică și ca putere de investigație științifică. (Astfel a fost folosit calculul virial și elicoidal — Ditemberg și Kisliţîn, metode matriceal-tensoriale — Mangeron, Maroșkin, Riftin ș.a., calculul simbolic — Hartemberg și Denavit metoda cvaternionilor — Blaschke).

Abordarea problemei sub aceste forme nu este însă întotdeauna la îndemîna inginerului proiectant, cel puțin deocamdată. Din această cauză, în lucrarea de față se revine la metodele clasice de lucru din algebra vectorială și analiza matematică, cu ajutorul cărora se rezolvă mecanismele spațiale proiectate pe un plan convenabil ales.

Bineînțeles vor trebui adoptate metodele de rezolvare a mecanismelor plane la această situație, prin introducerea unor culise pe elementele deformabile; acest lucru nu depășește însă cunoștințele pe care și le însușește în școală orice inginer mecanic la cursul de teoria mecanismelor.

S-a ales ca exemplu patrulaterul spațial, din cauza importanței pe care o are în practică, însă principiul metodei de rezolvare are caracter general.

Metoda a fost inspirată de lucrarea [1], în care se rezolvă problema configurațiilor mecanismului spațial patrulater, într-un caz particular, prin proiectarea pe un plan.

2. Se consideră patrulaterul spațial $OABC$, cu elementul conducător OA, biela AB și balansierul CB, a cărui mișcare de rotație se efectuează într-un plan (P). (Articulațiile cilindrice din O și C și articulațiile sferice

din A şi B — dintre care una cu deget — nu au mai fost arătate în figura 1 pentru claritatea desenului).

Fiind cunoscută cinematica manivelei OA prin viteza unghiulară şi acceleraţia unghiulară, respectiv ω_1 şi ε_1 se caută viteza şi acceleraţia punctului B, din care se poate deduce cinematica balansierului.

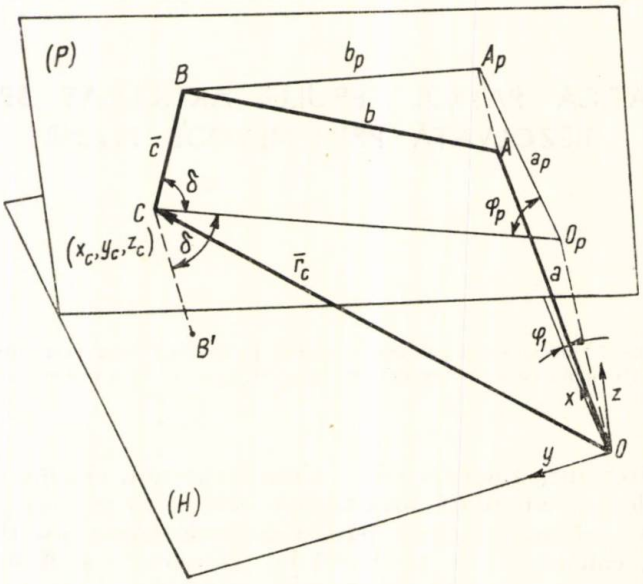


Fig. 1

Pentru aceasta se proiectează mecanismul pe planul (P), obţinîndu-se patrulaterul articulat plan O_pA_pBC, la care trebue observat că elementele O_pA_p şi A_pB au lungimi variabile, precum şi faptul că cinematica manivelei conducătoare O_pA_p, diferă de cinematica manivelei reale OA.

Se va vedea mai departe că funcţiile după care manivela şi biela patrulaterului plan se dilată, sînt studiate analitic prin intermediul parametrului δ. Se notează deocamdată $O_pA_p = F(\varphi_1) = a_p$ şi $BA_p = f(\varphi_1, \delta)$ unde φ_1 este unghiul la manivela patrulaterului spaţial, făcut cu axa OX ,iar δ unghiul dintre batiul patrulaterului plan, şi balansierul CB.

Ţinîndu-se cont că biela patrulterului spaţial este rigidă, se scrie distanţa dintre punctele A şi B şi rezultă condiţia $\psi(\varphi_1, \delta) = 0$. Bineînţeles se va găsi şi ecuaţia unghiului φ_p în funcţie de φ_1, deci se va putea calcula

$$\frac{d\varphi_p}{dt} = \omega_1 \frac{d\varphi_p}{d\varphi_1} \quad \text{şi} \quad \frac{d^2\varphi_p}{dt^2} = \dot{\omega}_1 \frac{d\varphi_p}{d\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{d^2\varphi_p}{d\varphi_1^2}.$$

Sistemul de axe considerat are originea în O şi planul xoz se alege planul în care se efectuează rotaţia manivelei reale OA ; bineînţeles oy este perpendiculară pe acest plan.

3. Se va arăta mai jos rezolvarea de principiu a patrulaterului plan, presupunînd cunoscute funcțiunile $F(\varphi_1) f(\varphi_1, \delta), \psi(\varphi_1 \delta) = 0$ și $\frac{d\varphi_p}{dt}$ și $\frac{d^2\varphi_p}{dt^2}$. Pentru aceasta, modificarea lungimii manivelei și a bielei, va putea fi exprimată structural, presupunînd fiecare din acestea ca fiind constituite din cîte două elemente legate prin culise, ca în figura 2.

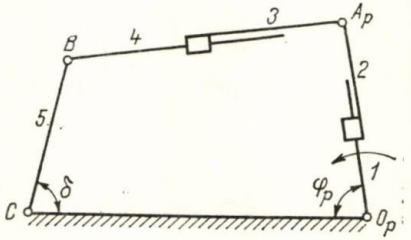


Fig. 2

3.1. DETERMINAREA VITEZELOR

Se scrie succesiv (cu notațiile utilizate curent la mecanismele cu culise) :

$$\overline{V}_B = \overline{V}_{B_3} + \overline{V}_{BB_3}\,; \quad \overline{V}_{B_3} = \overline{V}_{A_p} + \overline{V}_{B_3A_p}\; \overline{V}_{A_p} = \overline{V}_{A_1} + \overline{V}_{A_pA_1}.$$

Se fac înlocuirile, și rezultă :

$$\underline{\overline{V}_B} = \underline{\underline{\overline{V}_{A_1}}} + \underline{\underline{\overline{V}_{A_pA_1}}} + \underline{\underline{\overline{V}_{BB_3}}} + \underline{\overline{V}_{B_3A_p}}. \tag{1}$$

Sublinierea ecuației (1) a fost făcută după convențiile obișnuite și anume cu o linie au fost subliniați vectorii cunoscuți numai ca direcție, iar cu două linii vectorii cunoscuți complet.

Într-adevăr, $\overline{V}_B$ este perpendicular pe $\overline{CB}$, $V_{A_1} = a_p \frac{d\varphi_p}{d\varphi_1}\omega_1$, $V_{A_pA_1} = \omega_1 \frac{dF}{d\varphi_1}$, $V_{BB_3} = \frac{df}{dt} = \omega_1 \frac{df}{d\varphi_1} = \omega_1 \left(\frac{\partial f}{\partial \varphi_1} - \frac{\partial f}{\partial \delta} \frac{\frac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}}{\frac{\partial \psi}{\partial \delta}} \right)$, unde s-a notat : $a_p = O_pA_p$. Vectorul $\overline{B_3A_p}$ este perpendicular pe $\overline{BA_p}$. Urmează că ecuația (1) este rezolvabilă, deci se poate considera rezolvat $\overline{V}_B$.

3.2. DETERMINAREA ACCELERAȚIILOR

Accelerațiile se determină în aceeași ordine, și anume, se scrie :

$$\overline{a}_B^{\nu} + \overline{a}_B^{\tau} = \overline{a}_{B_3} + \overline{a}_{BB_3} + \overline{a}_{BB_3}^{C}\,; \quad \overline{a}_{B_3} = \overline{a}_{A_p} + \overline{a}_{B_3A_p}^{\nu} + \overline{a}_{B_3A_p}^{\tau},$$

$\bar{a}_{Ap} = \bar{a}^{\nu}_{A_1} + \bar{a}^{\tau}_{A_1} + \bar{a}_{ApA_1} + \bar{a}^{C}_{ApA_1}$ și făcînd înlocuirile rezultă

$$\underline{\underline{\bar{a}^{\nu}_{B}}} + \underline{\bar{a}^{\tau}_{B}} = \underline{\underline{\bar{a}^{\nu}_{A_1}}} + \underline{\bar{a}^{\tau}_{A_1}} + \underline{\underline{\bar{a}_{ApA_1}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{C}_{ApA_1}}} + \underline{\underline{\bar{a}_{BB_3}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{C}_{BB_3}}} + \underline{\underline{\bar{a}^{\nu}_{B_3Ap}}} + \underline{\bar{a}^{\tau}_{B_3Ap}}. \qquad (2)$$

În ecuația (2), $a^{\nu}_{B} = \dfrac{V_B^2}{(BC)}$, a^{τ}_{B} are direcția perpendiculară pe $\overline{CB}$,

$$a^{\nu}_{A_1} = a_p \omega_1^2 \left(\frac{\mathrm{d}\varphi_p}{\mathrm{d}\varphi_1}\right)^2, \quad a^{\tau}_{A_1} = a_p \frac{\mathrm{d}^2\varphi_p}{\mathrm{d}t^2} = a_p \left(\frac{\mathrm{d}^2\varphi_p}{\mathrm{d}\varphi_1^2}\,\omega_1^2 + \varepsilon_1 \frac{\mathrm{d}\varphi_p}{\mathrm{d}\varphi_1}\right),$$

$$a_{ApA_1} = \frac{\mathrm{d}V_{ApA_1}}{\mathrm{d}t} = \omega_1^2 \frac{\mathrm{d}^2F}{\mathrm{d}\varphi_1^2} + \varepsilon_1 \frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}\varphi_1}; \quad \bar{a}^{C}_{ApA_1} = 2\bar{\omega}_1' \times \bar{V}_{ApA_1}; \quad \omega_1' = \omega_1 \frac{\mathrm{d}\varphi_p}{\mathrm{d}\varphi_1},$$

$$\bar{a}^{C}_{BB_3} = 2\bar{\omega}_3 \times \bar{V}_{BB_3}; \omega_3 = \frac{V_{B_3Ap}}{(BA_p)}; \quad a_{BB_3} = \frac{\mathrm{d}V_{BB_3}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\omega_1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi_1}\right) =$$

$$= \varepsilon_1 \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi_1} + \omega_1^2 \frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}\varphi_1^2}.$$

S-a calculat mai sus $\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}\varphi_1} = \dfrac{\partial f}{\partial \varphi_1} - \dfrac{\partial f}{\partial \delta} \dfrac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial \delta}}$, de unde rezultă

$$\frac{\mathrm{d}^2f}{\partial\varphi_1^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1^2} - 2 \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}}{\dfrac{\partial \psi}{\partial \delta}} \frac{\partial^2 f}{\partial \varphi_1 \partial \delta} + \frac{\partial^2 f}{\partial \delta^2} \frac{\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \delta}\right)^2} + \frac{\partial f}{\partial \delta}\left[-\frac{1}{\dfrac{\partial \psi}{\partial \delta}} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1^2} + \right.$$

$$\left. + 2 \frac{\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}}{\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \delta}\right)^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varphi_1 \partial \delta} - \frac{\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \varphi_1}\right)^2}{\left(\dfrac{\partial \psi}{\partial \delta}\right)^3} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \delta^2}\right].$$

De asemenea se mai calculează $a^{\nu}_{B_3Ap} = \dfrac{V^2_{B_3Ap}}{(BA_p)}$ și se precizează că $\bar{a}^{\tau}_{B_3A_p}$ este perpendicular pe $\overline{BA_p}$

Urmează că ecuația (2) este rezolvabilă, deci se poate deduce $\bar{a}_B$.

4. DETERMINAREA FUNCȚIILOR DE POZIȚIE

4.1. CALCULUL LUNGIMII a_p A MANIVELEI PATRULATERULUI PLAN $[a_p = F(\varphi_1)]$

Considerînd axele așa cum a fost precizat mai sus și admițînd planul (P) dat prin ecuația (P) $Ax + By + Cz = D$, rezultă proiecția punctului O pe planul (P):

$$x_{Op} = \frac{AD}{K}, \quad y_{Op} = \frac{BD}{K}, \quad Z_{Op} = \frac{CD}{K}, \quad \text{unde s-a notat } K = A^2 + B^2 + C^2.$$

Dacă se notează lungimea reală OA a manivelei cu a și se calculează coordonatele punctului A în funcție de unghiul făcut de manivela OA cu OX, adică $x_A = a \cos \varphi_1$, $y_A = 0$, $z_A = a \sin \varphi_1$ rezultă coordonatele proiecțiilor punctului A pe planul P:

$$x_{Ap} = \frac{a \cos\varphi_1 (B^2 + C^2) - AC\, a \sin\varphi_1 + AD}{K};$$

$$y_{Ap} = -\frac{aAB \cos\varphi_1 + aBC \sin\varphi_1 - BD}{K},$$

$$z_{Ap} = \frac{-AC\, a \cos\varphi_1 + a(A^2 + B^2) + \sin\varphi_1 + DC}{K}.$$

Se calculează deci lungimea manivelei O_pA_p:

$$a_p = a \sqrt{\frac{(A^2 + B^2)\sin^2\varphi_1 + (B^2 + C^2)\cos^2\varphi_1 - AC \sin^2\varphi_1}{K}} =$$

$$= \frac{a}{\sqrt{K}} \sqrt{(A \sin\varphi_1 - C \cos\varphi_1)^2 + B^2} = F(\varphi_1). \tag{3}$$

4.2. CALCULUL UNGHIULUI φ_p DINTRE BATIUL $\overline{O_pC}$ AL PATRULATERULUI PLAN ȘI MANIVELA LA O_PA_P A ACELUIAȘI MECANISM

Se consideră punctul C definit de vectorul de poziție $\bar{r}_c$ cunoscut:

$\bar{r}_c = x_c\bar{i} + y_c\bar{j} + z_c\bar{k}$, unde x_c, y_c și z_c verifică planul P, și rezultă cosinușii directori ai dreptei O_pC:

$$\cos\alpha = \frac{AD - KX_c}{\sqrt{K(Kr_c^2 - D^2)}}, \quad \cos\beta = \frac{BD - Ky_c}{-\sqrt{K(Kr_c^2 - D^2)}},$$

$$\cos\gamma = \frac{DC - Kz_c}{-\sqrt{K(Kr_c^2 - D^2)}}. \tag{4}$$

Se calculează apoi cosinuşii directori ai manivelei O_PA_P :

$$\cos\alpha' = \frac{(B^2 + C^2)\cos\varphi_1 - AC\sin\varphi_1}{\sqrt{K[(A\sin\varphi_1 - C\cos\varphi_1)^2 + B^2]}},$$

$$\cos\beta' = -\frac{AB\cos\varphi_1 + BC\sin\varphi_1}{\sqrt{K[(A\sin\varphi_1 - C\cos\varphi_1)^2 + B^2]}}, \tag{5}$$

$$\cos\gamma' = \frac{(A^2 + B^2)\sin\varphi_1 - AC\cos\varphi_1}{\sqrt{K[(A\sin\varphi_1 - C\cos\varphi_1)^2 + B^2]}}.$$

Rezultă

$$\cos\varphi_p = -$$

$$-\frac{[-(B^2+C^2)X_c + ABy_c + ACz_c]\cos\varphi_1 + [ACX_c + BCy_c - (A^2+B^2)z_c]\sin\varphi_1}{\sqrt{(Kr_c^2 - D^2)\,K[(A\sin\varphi_1 - C\cos\varphi_1)^2 + B^2]}}. \tag{6}$$

4.3. CALCULUL COORDONATELOR PUNCTULUI B

Se notează cu δ unghiul făcut de balansierul $\overline{CB} = \bar{c}$ cu batiul $\overline{O_PC}$; acest unghi este un parametru care va fi introdus mai departe, într-o ecuaţie de condiţie (notată la 2 şi 3 cu $\psi(\varphi_1, \delta) = 0$). Aceasta deoarece unghiul δ nu este, bineînţeles, independent de φ_1 şi de dimensiunile elementelor patrulaterului spaţial.

Vectorul $\bar{c} = c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}$, va fi determinat punînd următoarele condiţii :

— se află în planul P,
— face unghiul δ cu batiul $\overline{O_PC}$,
— are modulul cunoscut, c.

Sînt deci de rezolvat ecuaţiile :

$$AC_x + Bc_y + Cc_z = 0,$$

$$(\cos\alpha\bar{i} + \cos\beta\bar{j} + \cos\gamma\bar{k})\,(c_x\bar{i} + c_y\bar{j} + c_z\bar{k}) = -c\cos\delta,$$

$$c_x^2 + c_y^2 + c_z^2 = c^2.$$

Făcîndu-se calculele, rezultă :

$$c_x = -c\left[\cos\delta\cos\alpha \pm \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{(A^2 - K\sin^2\alpha)\cos^2\delta + (B\cos\gamma - C\cos\beta)^2}\right],$$

$$c_y = -c\left[\cos\delta\cos\beta \pm \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{(B^2 - K\sin^2\beta)\cos^2\delta + (C\cos\alpha - A\cos\gamma)^2}\right], \tag{7}$$

$$c_z = -c\left[\cos\delta\cos\gamma \pm \frac{1}{\sqrt{K}}\sqrt{(C^2 - K\sin^2\gamma)\cos^2\delta + (A\cos\beta - B\cos\alpha)^2}\right].$$

Semnele duble în relațiile (7) se obțin din cauză că și punctul B' (fig. 1) simetric cu B față de O_PC, satisface condițiile de mai sus.

Se mai reamintește că în aceleași relații, cos α, cos β și cos γ sînt dați de (4) și că singura variabilă este δ.

Rezultă atunci coordonatele punctului B:

$$x_B = x_C + c_x, \quad y_B = y_C + c_y, \quad z_B = z_C + c_z \tag{8}$$

4.4. DETERMINAREA FUNCȚIEI $b_p = (BA_p) = f(\varphi_1, \delta)$

Lungimea bielei patrulaterului plan se deduce din

$$(BA_p) = \sqrt{(x_A - x_{A_p})^2 + (y_B - y_{A_p})^2 + (z_B - z_{A_p})^2}$$

sau

$$f(\varphi_1\delta) = \sqrt{\left[x_c + c_x(\delta) - \frac{A\cos\varphi_1(B^2+c^2) - AC\sin\varphi_1 + AD}{K}\right]^2 + \left[y_c + c_y(\delta) + \frac{aAB\cos\varphi_1 + aBC\sin\varphi_1 - BD}{K}\right]^2 + \left[z_c + c_z(\delta) - \frac{aAC\cos\varphi_1 + a(A^2+B^2)\sin\varphi_1 + DC}{K}\right]^2}. \tag{9}$$

4.5. DETERMINAREA FUNCȚIEI $\psi(\varphi_1, \delta) = 0$

Această funcțiune se va scrie punînd condiția ca distanța AB să fie egală cu lungimea b a bielei patrulaterului spațial, adică

$$\psi(\varphi_1,\delta) = (x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2 - d^2 = 0,$$

sau

$$\psi(\varphi_1,\delta) = [x_c + c_x(\delta) - a\cos\varphi_1]^2 + [y_c + c_y(\delta)]^2 + [z_s + c_z(\delta) - a\sin\varphi_1]^2 - d^2 = 0. \tag{10}$$

5. CONCLUZII

Se vede din cele de mai sus că relațiile (3)—(10) determină funcțiile căutate, privind deformația manivelei și a bielei precum și a unghiului φ_p, în funcție de variabilele φ_1 și δ, considerînd și legătura $\psi(\varphi_1, \delta) = 0$.

Deși unele din aceste relații au o aparență mai complicată, această complexitate este dată de constante, deoarece variabilele φ_1 și δ intră sub forme trigonometrice simple (ex. rel. 6). Urmează că se vor putea face

calculele numerice deosebit de simplu, dacă expresiile constante au fost calculate în prealabil.

Bineînțeles că prin particularizări convenabil alese rezultatele precedente vor putea fi modificate pentru cazul mecanismului bielă-manivelă spațial.

Primită la redacție la 18 aprilie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. V.I. CLIUGHIN, *Analogul în plan al mecanismului patrulater spațial cu cuple inferioare*, Analiza și sinteza mașinilor automate, Academia de științe a U.R.S.S. Editura „Nauca", Moscova 1965 (în limba rusă).

UNELE ASPECTE LEGATE DE STUDIUL STABILITĂȚII ARCELOR PRIN METODA MICILOR DEPLASĂRI

de DAN COȘA
Institutul de construcții București

În cele ce urmează ne propunem să găsim cu ajutorul metodei micilor deplasări (numită încă și metoda sarcinilor elastice) situațiile de instabilitate elastică plană ale unui arc cu nașterile articulate, de formă și secțiune oarecare, solicitat de forțe verticale, astfel încît să nu existe momente inițiale. Rezolvarea se va face în cadrul ipotezei unor deformații mici și datorate în exclusivitate încovoierii.

1. CONSIDERAȚII PRELIMINARE

În esență, metoda micilor deplasări se bazează pe două relații, și anume:

— prima relație stabilește legătura dintre deplasările ($\vec{\varepsilon}$) ale unei structuri elastice, consecință a stării de efort ($\vec{M}$):

$$\vec{\varepsilon} = \tilde{L}^{\varepsilon}_{M} B \vec{M}, \tag{1}$$

unde

$\vec{\varepsilon}$ este vectorul deplasărilor punctuale după direcții date,

$\vec{M}$ — vectorul momentelor încovoietoare din structură,

$\tilde{L}^{\varepsilon}_{M}$ — transpusa matricei de influență a momentelor încovoietoare pentru forțe unitate acționînd în punctele și pe direcția deplasărilor $\vec{\varepsilon}$ (prin simbolul $\sim$ am notat operația de transpoziție),

B — matricea flexibilităților. Forma sa depinde de tipul aproximării admise pentru M între punctele ce alcătuiesc $\vec{M}$ (diagramele ce alcătuiesc L^{ε}_{M} sînt admise aprioric ca fiind liniare);

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1203–1216

— a doua relație exprimă modificările stării de efort ca urmare a modificării în limite asimilabile cu infiniți mici de ordinul întîi, a formei structurii. Presupunînd că în poziția inițială nu există momente încovoietoare, cele care apar în urma trecerii structurii în poziție deplasată vor fi

$$\vec{M} = \beta A \vec{\varepsilon}. \tag{2}$$

Matricea A se determină de la caz la caz în funcție de forma structurii, încărcare și comportarea acesteia în poziție deplasată.

β reprezintă parametrul dimensional unic al încărcării.

Relația (2) presupune absența reazemelor elastice și faptul că toate forțele evoluează spre starea critică, crescînd proporțional; orice altă situație nu face obiectul rîndurilor de față.

Expresia (1) este specifică staticii liniare și la scrierea ei putem face uz de toate proprietățile cunoscute în acest domeniu. În această relație, $\vec{M}$ este cauza, iar $\vec{\varepsilon}$ efectul.

În relația (2), specifică problemelor de stabilitate a formei, rolurile cauză-efect se inversează. Problema găsirii matricei A constituie, după părerea noastră, cheia de boltă a metodei micilor deplasări. Este deci de la sine înțeles că posibilitatea determinării corecte a matricei A este primul element care se răsfrînge nu numai asupra corectitudinii rezultatelor obținute, dar chiar și în sfera încrederii cu care metoda este folosită ca instrument în cercetare.

Eliminînd $\vec{M}$ între (1) și (2), obținem

$$\beta \left(\tilde{L}^{\varepsilon}_{M} BA - \frac{1}{\beta} E \right) \varepsilon. \tag{3}$$

Căutînd soluțiile nebanale ale sistemului (3), obținem valorile critice ale parametrului β ca inverse ale rădăcinilor unei ecuații de tip caracteristic (4):

$$\beta \left(\tilde{L}^{\varepsilon}_{M} BA - \frac{1}{\beta} E \right) \vec{\varepsilon} = 0. \tag{4}$$

Întrucît problema stabilității arcului dublu articulat simetric fără momente inițiale a mai fost studiată prin această metodă, și chiar de către autorul ei, prof. A. F. Smirnov, este necesară o succintă analiză critică a rezolvării existente.

Căutînd valoarea minimă a încărcării critice care pentru un arc dublu articulat simetric corespunde unei forme antisimetrice de pierdere a stabilității, calculele se fac pe un semiarc articulat și simplu rezemat static determinat. Pentru caracterizarea poziției deplasată sînt alese deplasările $\vec{\varepsilon}$ după normala la curba de presiune (forma arcului) inițială.

Momentul încovoietor în punctul k al arcului aflat în poziție deplasată se calculează cu relația

$$M_k = N_k \varepsilon_k, \qquad (\alpha)$$

unde N_k reprezintă forța axială în acest punct al poziției inițiale, iar ε_k componenta deplasării după normala în k la această poziție.

Construirea matricei A cu ajutorul unor relații de tip α constituie, după părerea noastră, o slăbiciune esențială a rezolvării din [1] și nu vom insista decît asupra acestui aspect.

Relația (α) presupune că arcul încărcat cu sarcini și aflat în poziție deplasată are aceeași curbă de presiune ca și în poziția inițială. O astfel de afirmație ar fi justificată numai și numai dacă :

— la suporturi și valori fixe ale forțelor, poziția deplasată ar avea trei puncte fixe de moment nul, ceea ce este greu de admis, sau

— forțele în poziția deplasată se comportă de asemenea manieră, încît fac adevărată relația (α), comportare însă greu de precizat.

Faptul că în rezolvarea din [1] nu este specificată comportarea sarcinilor la trecerea în noua formă de echilibru face ca relația (α) să fie nu numai aproximativă, ci și arbitrară.

Alegerea arbitrară a legii momentelor scoate din atenția autorului două aspecte importante : primul legat de însăși esența problemelor de stabilitate (comportarea ulterioară a încărcărilor) și altul legat de metodica folosită în cazul arcelor (nu se precizează dacă alegerea unui număr finit de deplasări pentru caracterizarea deformatei necesită sau nu schematizarea arcului printr-o linie poligonală).

În afară de acestea, menționăm și faptul că întregul calcul este strict particular.

Aspectele criticabile ale soluțiilor date de prof. A. F. Smirnov în problema stabilității arcelor reprezintă o reminiscență a concepției clasice de rezolvare ; și noi, într-o lucrare anterioară [5], deși am sesizat unele dintre neajunsurile rezolvărilor existente, am rămas tributari aceleiași concepții.

2. SCHEMATIZĂRI PRIVIND GEOMETRIA ARCULUI, ÎNCĂRCĂRILE ȘI COMPORTAREA ACESTORA

Fie un arc dublu articulat (fig. 1) solicitat de forțe verticale, la care se realizează coincidența dintre formă și curba de presiune.

Valorile critice ale încărcării sînt sensibil influențate de comportarea ei la trecerea arcului într-o nouă poziție de echilibru.

O primă presupunere în acest sens o vom face admițînd că, însoțind arcul la trecerea în poziția deplasată, fiecare forță își păstrează punctul de aplicație pe arc.

Încărcarea de coincidență la arce cu tangenta continuă este distribuită; comportarea unei astfel de încărcări nu poate fi exprimată cu ajutorul deplasărilor unui număr finit de puncte. Apare deci ca necesară aproximarea încărcării prin forțe concentrate în punctele cu deplasări

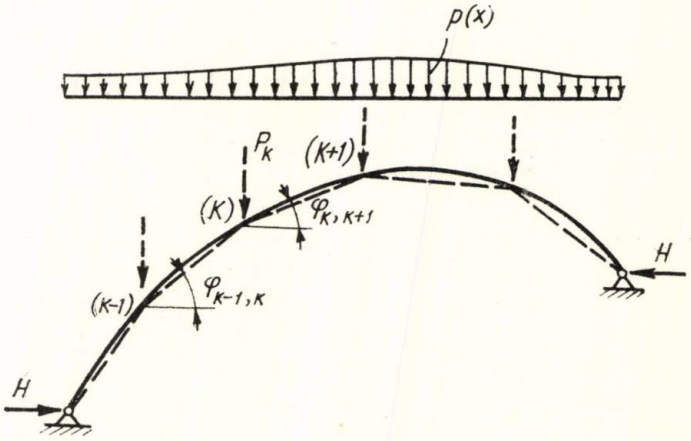


Fig. 1

presupuse cunoscute. Schematizarea încărcării și condiția ca arcul să rămînă în continuare curbă de coincidență atrag după sine schematizarea arcului printr-o linie poligonală.

Alegînd drept parametri ai deformatei cîte o componentă a deplasărilor după direcții date, este necesară aflarea componentelor și după alte direcții decît cele alese inițial. Schematizarea formei și analogia cu lanțul cinematic articulat permit și soluționarea acestui aspect.

Schematizarea corelată a arcului și a încărcării sînt în egală măsură consecința unor considerente de natură statică și geometrică. Vom începe cu aproximarea geometrică astfel încît arcul și schematizarea sa să coincidă în rezemări și în punctele caracteristice alese.

Avînd forma și alegînd drept parametru al sistemului de forțe împingerea orizontală din arc H, calculăm încărcările concentrate cu relația

$$P_k = H(\operatorname{tg} \varphi_{k-1,k} - \operatorname{tg} \varphi_{k,k+1}). \tag{5}$$

Legat de comportarea sarcinilor, vom admite că forțele în poziția deplasată își schimbă puțin atît mărimea, cît și direcția.

Alegînd drept parametru al deformatei deplasările verticale $\vec{v}$ în punctele caracteristice, definim schimbările de mărime și direcție prin modificarea cu $\Delta\vec{P}$ a componentelor verticale și apariția unor componente orizontale $\Delta\vec{Q}$:

$$\vec{P}' = \vec{P} + \Delta\vec{P}; \quad \Delta\vec{P} = HF_P\vec{v},$$

$$Q' = \Delta\vec{Q}; \qquad \Delta\vec{Q} = HF_Q\vec{v}, \tag{6}$$

unde F_P și F_Q sînt matrice ce se determină de la caz la caz în funcție de datele concrete ale fiecărei probleme. În legile (6) pot fi încadrate o mare varietate de probleme, unele dintre ele complexe.

3. ECUAȚIA DE STABILITATE

Să presupunem că starea de încovoiere a arcului aflat în poziție deplasată este $\vec{M}'$. Această stare poate fi exprimată încărcînd o formă de bază static determinată a sistemului deplasat cu forțele $\vec{P}'$ și $\vec{Q}'$ și cu necunoscuta de continuitate în această poziție, X'.

Vom afecta cu indicele prin mărimi referitoare la sistemul deplasat, iar cu indicele zero mărimile calculate pe forma de bază static determinată (în cazul autosolicitărilor $\vec{m}$ și $\vec{m}'$, acest indice este de prisos). În parantezele [ ] aflate lîngă o stare de efort vom trece solicitările cărora le corespunde. Vom considera egale și vom pune semnul (=) între mărimi care devin astfel prin neglijarea unor variații de ordinul cel puțin doi.

Starea de încovoiere a arcului în diverse situații o vom nota cu M afectat de indici:

$$\vec{M}[P] = \vec{M}_0[P] + \vec{m}X = 0,$$

$$\vec{M}'[P', Q'] = M_0'[P', Q'] + \vec{m}'X',$$

$$\vec{m}' = \vec{m} + \Delta\vec{m}\,;\; X' = X + \Delta X,$$

$$\vec{m}'X' = \vec{m}'X + \vec{m}\Delta X\,;\; \vec{M}_0'[\Delta P, \Delta Q] = \vec{M}_0[\Delta P, \Delta Q],$$

$$\vec{M}'[P', Q'] = \vec{M}_0'[P] + \vec{M}_0'[\Delta P, \Delta Q] + m'X + \vec{m}\Delta X =$$

$$= \vec{M}_0'[P] + \vec{m}'X + \vec{M}_0[AP, \Delta Q] + \vec{m}\Delta X,$$

$$\vec{M}'[P', Q'] = \vec{M}_0'[P, X] + \vec{M}_0[\Delta P, \Delta Q] + \vec{m}\Delta X. \qquad (7)$$

Se observă că toți cei trei termeni din membrul drept al relației (7), inclusiv $\vec{M}_0'[P, X]$, reprezintă variații de ordinul întîi.

Valoarea lui ΔX se obține punînd condiția pentru restabilirea continuității pe direcția legăturii suprimate:

$$\widetilde{m}BM'[P', Q'] = 0,$$

$$\Delta X = -(\widetilde{m}Bm)^{-1}\widetilde{m}B\{M_0'[P, X] + \vec{M}_0\,[\Delta P, \Delta Q]\}, \qquad (8)$$

unde $(\widetilde{m} \cdot B \cdot m)$ reprezintă deplasarea pe direcția necunoscutei X pentru $X = 1$,

$$\vec{M}'[P', Q'] = (E - \frac{1}{\delta} m\widetilde{m}B)\{\vec{M}'_0[P, X] + \vec{M}_0[\Delta P, \Delta Q]\}. \tag{9}$$

$\vec{M}'_0[P, X]$ poate fi calculat cu o relație de tipul

$$\vec{M}'_0[P, X] = HA_0\vec{v}, \tag{10}$$

unde A_0 este o matrice care va fi determinată ulterior :

$$\vec{M}_0[\Delta P, \Delta Q] = \mathcal{L}^v_{M_0}\Delta\vec{P} + \mathcal{L}^u_{M_0}\Delta\vec{Q} = H(\mathcal{L}^v_{M_0}F_v + \mathcal{L}^u_{M_0}F_u)\vec{v}, \tag{11}$$

unde $\mathcal{L}^v_{M_0}$ și $\mathcal{L}^u_{M_0}$ sînt matricele de influență ale momentelor încovoietoare pe sistemul de bază pentru forțe verticale și, respectiv, orizontale.

Ținînd seama de (1), (9)—(11), obținem ecuația de stabilitate sub forma

$$\left|\widetilde{\mathcal{L}}^v_{M_0}B\left(E - \frac{1}{\delta} m\widetilde{m}B\right)A_0 + \mathcal{L}^v_{M_0}F_v + \mathcal{L}^u_{M_0}F_u) - \frac{1}{H_{cr}}E\right| = 0. \tag{12}$$

Observații

1. Aplicată unui sistem static nedeterminat la același număr de puncte caracteristice alese, metoda micilor deplasări dă aproximații diferite la moduri diferite de alegere a formei de bază static determinată. Acest lucru apare ca normal dacă ținem seama că :

— utilizăm o diagramă de momente schematizată $\vec{M}$;

— ecuația de stabilitate a unei structuri de p ori static nedeterminată cu n puncte caracteristice presupune exprimarea explicită a n relații cauză-efect și cea implicită a p condiții de continuitate.

2. La stabilirea ecuației (12) am uzat de proprietatea cunoscută în statica liniară, și anume

$$\vec{\varepsilon} = \widetilde{L}^{\varepsilon}_{M}B\vec{M} = \widetilde{L}^{\varepsilon}_{M_0}B\vec{M} = \widetilde{L}^{\varepsilon}_{M}B\vec{M}_0. \tag{β}$$

Se poate arăta ușor că, oricare ar fi varianta utilizată a relației (β),

$$\vec{\varepsilon} = \widetilde{L}^{\varepsilon}_{M_0}\left(B - \frac{1}{\delta} Bm\widetilde{m}B\right)\vec{M}_0.$$

3. În cazul cînd arcul studiat este static determinat folosim tot ecuația (12) la care din factorul $\left(E - \frac{1}{\delta} m\widetilde{m}B\right)$ rămîne matricea unitate E.

4. CONSTRUIREA MATRICEI A_0

Egalitatea (10) constituie relația de definiție a matricei $A_0 \cdot M'_0[P,X]$ corespunde unei forme de bază static determinată a arcului în poziție deplasată și încărcată cu forțele exterioare și necunoscuta de continuitate

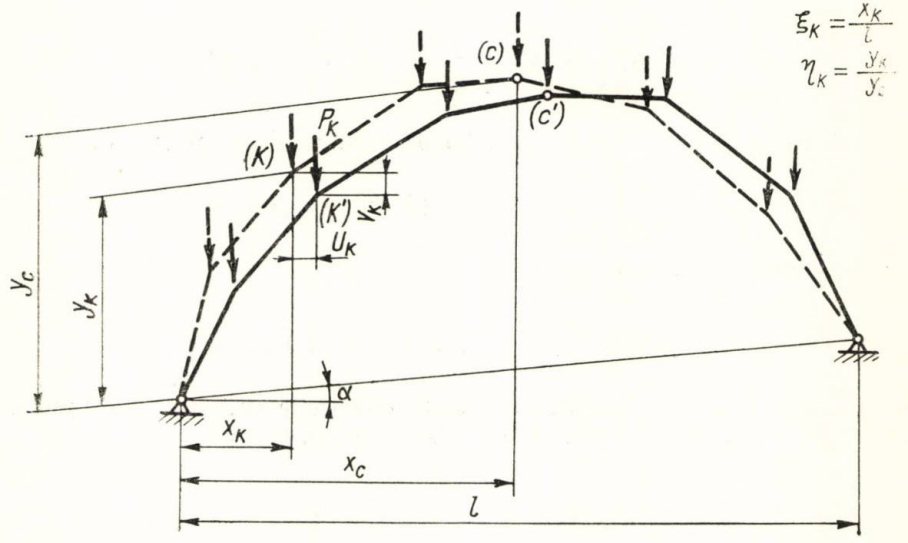


Fig. 2

din poziția inițială. Fiecărei modalități de alegere a formei de bază îi va corespunde, evident, propria sa matrice A_0. În acest paragraf ne vom mărgini să construim pe A_0 pentru o formă de bază triplu articulată nu numai pentru faptul că arcul triplu articulat aproximează cel mai bine comportarea celui dublu articulat, dar și pentru faptul că un astfel de arc constituie un sistem constructiv frecvent utilizat.

În figura 2 este reprezentat arcul triplu articulat în poziție deplasată. Vom admite ca pozitive deplasările v dirijate de sus în jos și deplasările u dirijate de la stînga spre dreapta.

Întrucît nu există momente inițiale, X este nul

$$\vec{M}'_0[P, X] = \vec{M}'_0[P] = \vec{M}'_0.$$

Încărcările fiind verticale, $\vec{M}'_0$ poate fi exprimat recurgînd la analogia cu grinda simplu rezemată.

Fie $k(k')$ și $c(c')$ un punct curent și, respectiv, punctul cu articulație ale arcului aflat în poziția inițială (deplasată). Vom nota cu M^0_k, $M^0_{k'}$ momentele în arc și cu $\mathcal{M}^0_k$, $\mathcal{M}^0_{k'}$ momentele în grinda simplu rezemată

asociată.

$$M_k^0 = \mathcal{M}_k^0 - Hy_k = 0\,;\quad M_{k'}^0 = \mathcal{M}_{k'}^0 - H'y_{k'},$$

$$M_c^0 = \mathcal{M}_c^0 - Hy_c = 0\,;\quad M_{c'}^0 = \mathcal{M}_{c'}^0 - H'y_{c'} = 0,$$

$$\mathcal{M}_{k'}^0 = \mathcal{M}_k^0 + \Delta\mathcal{M}_k^0\,;\qquad \mathcal{M}_{c'}^0 = \mathcal{M}_c^0 + \Delta\mathcal{M}_c^0,$$

$$M_{k'}^0 = \mathcal{M}_k^0 + \Delta\mathcal{M}_k^0 - \frac{y_k - v_k}{y_c - v_c}(\mathcal{M}_c^0 + \Delta\mathcal{M}_c^0).$$

Notînd $\eta_k = y_k/y_c$, după transformări elementare obținem :

$$M_{k'}^0 = H(v_k - \eta_k v_c) + (\Delta\mathcal{M}_k^0 - \eta_k\Delta\mathcal{M}_c^0) \tag{13}$$

sau sub formă matriceală

$$\vec{M}_0' = (E - \eta)(H\vec{v} + \Delta\vec{\mathcal{M}}_0), \tag{13'}$$

unde η este o matrice $(n.n)$ în care toate coloanele sînt nule cu excepția coloanei (c) alcătuită din ordonatele adimensionale η_k.

$$\eta = \begin{pmatrix} & & & (c) & & & \\ 0 & \dots & 0 & \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \eta_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \eta_n & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{14}$$

Variația momentelor în grinda simplu rezemată asociată, $\Delta\vec{\mathcal{M}}_0$, se datorează atît schimbării punctelor de aplicație ale forțelor pe grindă cît și schimbării secțiunii în care calculăm momentul încovoietor. Urmărind figura 3 putem scrie :

$$\mathcal{M}_k^0 = \sum_{i=1}^{k} P_i x_i - \frac{x_k}{l}\sum_{i=1}^{n} P_i x_i + x_k \sum_{i=k+1}^{n} P_i,$$

$$\mathcal{M}_{k'}^0 = \sum_{i=1}^{k} P_i(x_i+u_i) - \frac{x_k + u_k}{l}\sum_{i=1}^{n} P_i(x_i+u_i) + (x_k+u_k)\sum_{i=k+1}^{n} P_i, \tag{15}$$

$$\Delta\mathcal{M}_k^0 = \sum_{i=1}^{k} P_i u_i - \xi_k \sum_{i=1}^{n} P_i u_i + u_k \mathcal{T}_{kdr}^0.$$

Se știe că

$$\mathcal{T}_{kdr}^0 = H(\operatorname{tg}\varphi_{k,k+1} - \operatorname{tg}\alpha).$$

Pentru simplificarea scrierii vom folosi notațiile

$$\operatorname{tg}\varphi_{k-1,k} - \operatorname{tg}\varphi_{k,k+1} = D_k\,;\quad \operatorname{tg}\varphi_{k,k+1} - \operatorname{tg}\alpha = D_{0,n+1}^{k,k+1}. \tag{16}$$

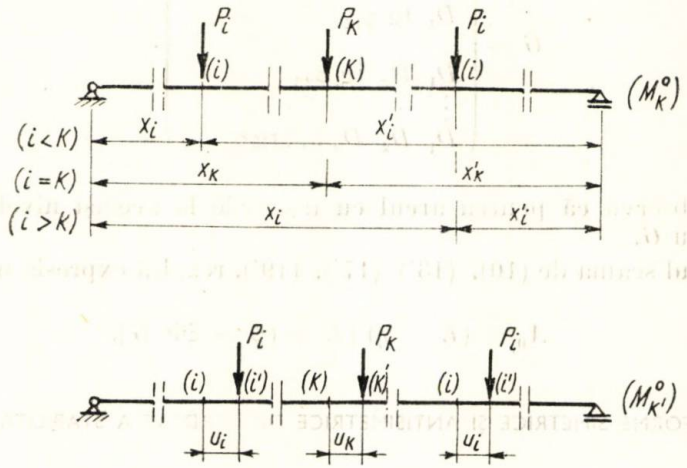


Fig. 3

Cu aceste notații și ținînd seama de (5) obținem

$$\Delta\mathcal{M}_k^0 = H\left(\sum_{i=1}^{k-1} D_i u_i + D_{0,n+1}^{k-1,k} u_k - \xi_k \sum_{i=1}^{n} D_i u_i\right) \tag{17}$$

sau sub formă matriceală

$$\Delta\vec{\mathcal{M}}_0 = H(\psi - \xi\Phi)\,\vec{u}. \tag{17'}$$

Matricea ξ este o matrice diagonală $(n.n)$ ale cărei elemente nenule sînt abscisele adimensionale ale punctelor arcului $\xi_k = x_k/l$; matricele ψ și Φ sînt și ele de format $(n.n)$ și au expresiile

$$\psi = \begin{pmatrix} D_{0,n+1}^{0,1} & & & & \\ D_1 & D_{0,n+1}^{1,2} & & & \\ D_1 & D_2 & D_{0,n+1}^{2,3} & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ D_1 & D_2 & D_3 & \dots & D_{0,n+1}^{n-1,n} \end{pmatrix},\quad \Phi = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \dots & D_n \\ D_1 & D_2 & \dots & D_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 & D_2 & \dots & D_n \end{pmatrix}. \tag{18}$$

Între deplasările $\vec{u}$ și $\vec{v}$, în baza analogiei cu lanțul cinematic, există o relație de forma

$$\vec{u} = G\vec{v}, \tag{19}$$

în care matricea G are expresia

$$G = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi_{01} & & & \\ D_1 & \operatorname{tg}\varphi_{12} & & \\ D_1 & D_2 & \operatorname{tg}\varphi_{23} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ D_1 & D_2 & D_3 & \ldots \operatorname{tg}\varphi_{n-1,n} \end{pmatrix}. \tag{20}$$

Se observă că pentru arcul cu nașterile la același nivel, ψ devine identică cu G.

Ținînd seama de (10), (13′), (17′), (19′), rezultă expresia matricei A_0.

$$A_0 = (E - \eta)\,[E + (\psi - \xi\Phi)\,G]. \tag{21}$$

5. FORME SIMETRICE ȘI ANTISIMETRICE DE PIERDERE A STABILITĂȚII

În categoria structurilor în arc, arcul simetric reprezintă cazul cel mai des întîlnit; o atenție specială acordată acestui caz particular ne apare pe deplin justificată.

Se poate arăta că atunci cînd în locul deplasărilor $\vec{v}$ utilizăm drept parametri ai deformatei grupări simetrice și antisimetrice de deplasări $\vec{v}^*$, datorită proprietăților de simetrie a structurii și specificului parametrilor deplasare aleși, formele simetrice și antisimetrice de pierdere a

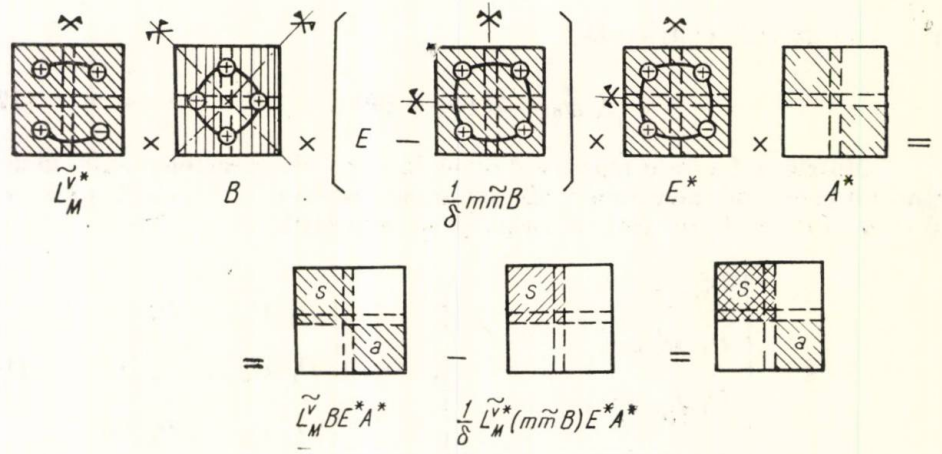


Fig. 4

stabilității se separă. Această separare este urmarea faptului că ecuația caracteristică corespunde unei matrice cvasidiagonale cu două submatrice, cîte una pentru fiecare tip de pierdere a stabilității. În figura 4 este

reprezentat schematic mersul unui astfel de calcul. Matricea E^* asigură transformarea $\vec{M}_0' = E^* \vec{M}_0'^*$ și este de forma

$$E^* = \begin{pmatrix} E & \mathcal{A} \\ 1 & \\ \mathcal{A} & -E \end{pmatrix}.$$

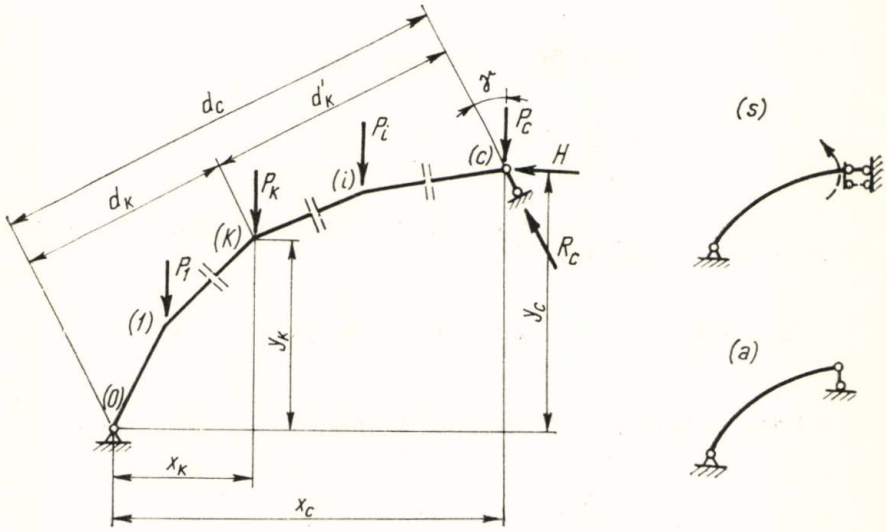


Fig. 5

Se observă că nedeterminarea arcului dublu articulat influențează numai formele simetrice de instabilitate.

Odată demonstrată separarea formelor proprii în simetrice și antisimetrice, fapt de altfel cunoscut, studiul îl vom continua pe semiarcul afectat de forțe și legături ce permit particularizarea rezultatelor pentru cele două tipuri de pierdere a stabilității.

În figura 5 este reprezentat semiarcul articulat în o și rezemat în c printr-un pendul de direcție γ, încărcat cu forțele $P_i = HD_i (D_c = \operatorname{tg} \varphi_{c-1,c})$ și cu o forță orizontală H în punctul c care este și el un punct caracteristic.

În poziția inițială avem relațiile

$$R_c = \frac{1}{dc}\left(\sum_{i=1}^{c} P_i x_i - H y_c\right) = 0,$$

$$M_k^0 = R_c d_k + H(y_c - y_k) - \sum_{i=k+1}^{c} P_i (x_i - x_k) = 0.$$

În poziția deplasată expresiile lui R'_c și $M^0_{k'}$ se modifică corespunzător noii situații

$$R'_c = \frac{1}{d_c + \Delta d_c}\left[\sum_{i=1}^{c} P_i(x_i + u_i) - H(y_c - v_c)\right] =$$

$$= \frac{1}{d_c}\left(\sum_{i=1}^{c} P_i u_i + H v_c\right),$$

$$M^0_{k'} = R'_c(d_k + \Delta d_k) + H\,[(y_c - v_c) - (y_k - v_k)] -$$

$$- \sum_{i=k+1}^{c} P_i\,[(x_i + u_i) - (x_k + u_k)].$$

Notînd cu $\zeta_k = d_k/d_c$, prin transformări elementare și renunțînd la variațiile de ordinul doi, obținem

$$M^0_{k'} = H\left(v_k - \zeta_k v_c + u_k \operatorname{tg}\varphi_{k-1,\,k} + \sum_{i=1}^{k-1} D_i u_i - \zeta_k \sum_{i=1}^{c} D_i u_i\right) \tag{22}$$

sau sub formă matriceală și utilizînd numai deplasările verticale

$$\vec{M}'_0 = H[E - \zeta_{\mathrm{I}} + (\psi^* - \zeta_{\mathrm{II}}\Phi^*)\,G^*]\,\vec{v}. \tag{22'}$$

Matricele ζ_{I}, ζ_{II}, ψ^* și Φ^* sînt de dimensiuni $(c\,.c)$ și au expresiile:

$$\psi^* = G^* = \begin{pmatrix} \operatorname{tg}\varphi_{01} & & & \\ D_1 & \operatorname{tg}\varphi_{12} & & \\ D_1 & D_2 & \operatorname{tg}\varphi_{23} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \\ D_1 & D_2 & D_3 & \ldots \operatorname{tg}\varphi_{c-1,c} \end{pmatrix}; \quad \zeta_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \zeta_1 \\ 0 & \ldots & 0 & \zeta_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \ldots & 0 & \zeta_c \end{pmatrix},$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} D_1 & D_2 & \ldots & D_c \\ D_1 & D_2 & \ldots & D_c \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ D_1 & D_2 & \ldots & D_c \end{pmatrix}; \quad \zeta_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} \zeta_1 & & & \\ & \zeta_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \zeta_c \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Observăm că matricele ψ^*, Φ^* și G^* nu depind de specificul (simetric sau antisimetric) formei de pierdere a stabilității; acest specific se manifestă în valorile coeficienților ce intră în alcătuirea matricelor ζ:

— pentru formele antisimetrice $(\gamma = 0)$, $\zeta_i = 2\xi_i$,
— pentru formele simetrice $(\gamma = 90°)$, $\zeta_i = \eta_i$.

În cazul cînd căutăm formele proprii simetrice ale arcului dublu articulat, între $\widetilde{L}_M^{v*}B^*$ și A_0^* se va intercala factorul $\left(E-\frac{1}{\delta^*}m^*\widetilde{m}^*B^*\right)$.

Vom ilustra procedeul pe o aplicație numerică.

Aplicație. Pentru arcul dublu articulat din figura 6 să se găsească valorile critice minime ale împingerii H corespunzătoare formelor sime-

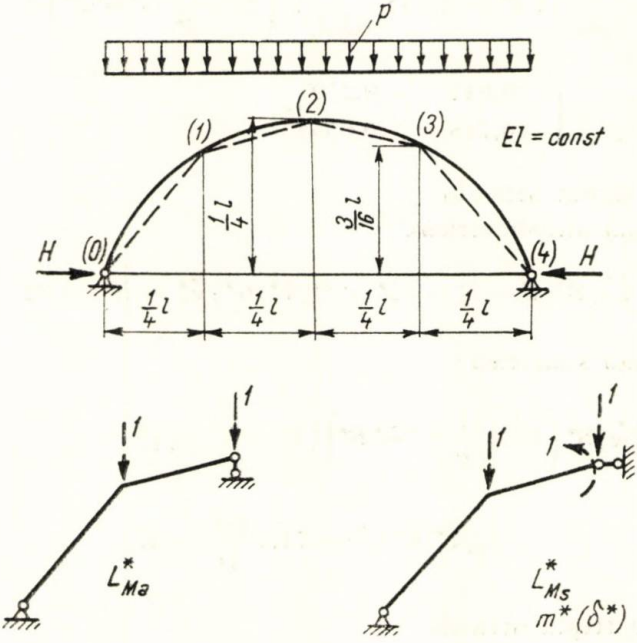


Fig. 6

trică și antisimetrică de pierdere a stabilității. Se mai cere să se arate modificările pe care le suferă aceste valori dacă în punctul de la cheie ar exista o articulație.

Întrucît scopul aplicației de față nu este de a obține rezultate de precizie ridicată, ne vom mulțumi să caracterizăm arcul prin numărul minim de puncte (trei) necesar prinderii în calcul a cîte unei singure forme pentru fiecare mod de pierdere a stabilității.

$$S_{01} = 0{,}312\ l;\ \operatorname{tg}\varphi_{01} = 0{,}75;$$

$$S_{12} = 0{,}258l;\ \operatorname{tg}\varphi_{12} = 0{,}25;\ B^* = \frac{l}{6EJ}\begin{pmatrix} 2(0{,}312+0{,}258) & 0{,}258 \\ 0{,}258 & 2\cdot 0{,}312 \end{pmatrix},$$

$$\psi^* = G^* = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0{,}50 & 0{,}25 \end{pmatrix};\qquad \Phi^* = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0{,}25 \\ 0{,}50 & 0{,}25 \end{pmatrix},$$

$$\zeta^*_{\mathrm{I}} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}75 \\ 0 & 1{,}00 \end{pmatrix};\qquad \zeta^*_{\mathrm{II}} = \begin{pmatrix} 0{,}75 & 0 \\ 0 & 1{,}00 \end{pmatrix},$$

$$\zeta_{\mathrm{I}}^{a} = \begin{pmatrix} 0 & 0{,}50 \\ 0 & 1{,}00 \end{pmatrix}; \qquad \zeta_{\mathrm{II}}^{a} = \begin{pmatrix} 0{,}50 & 0 \\ 0 & 1{,}00 \end{pmatrix},$$

$$\widetilde{L}_{M_s}^{v^*} = \frac{l}{32}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -7 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \widetilde{L}_{M_a}^{v^*} = \frac{l}{8}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$m^* = \begin{pmatrix} 0{,}75 \\ 1{,}00 \end{pmatrix}; \quad \delta^* = 1{,}548\,\frac{l}{6EJ}; \quad \left(E - \frac{1}{\delta^*} m^* \widetilde{m}^* B^*\right) =$$

$$= \begin{pmatrix} 0{,}641 & -0{,}259 \\ -0{,}718 & 0{,}655 \end{pmatrix}.$$

I. Arc dublu articulat

a. Formă antisimetrică :

$$\vec{v}_a^* = H\widetilde{L}_{M_a}^* B^* [E - \zeta_{\mathrm{I}}^a + (\psi^* - \zeta_{\mathrm{II}}^a \Phi^*) G^*] \vec{v}_a^* \Rightarrow H_{cr} = 32\,\frac{EJ}{l^2}.$$

b. Formă simetrică :

$$\vec{v}_s^* = H\widetilde{L}_{M_s}^* B^* \left(E - \frac{1}{\delta^*} m^* \widetilde{m}^* B^*\right) [E - \zeta_{\mathrm{I}}^s + (\psi^* -$$

$$- \zeta_{\mathrm{II}}^s \Phi^*) G^*] \vec{v}_s^* \Rightarrow 71{,}1\,\frac{EJ}{l^2} = H_{\mathrm{cr}}.$$

II. Arc triplu articulat

a. Formă antisimetrică :

Împingerea critică rezultă aceeași ca în cazul I. a $H_{\mathrm{cr}} = 32\,\dfrac{EJ}{l^2}$,

b. Formă simetrică

$$\vec{v}_s^* = H\widetilde{L}_{M_s}^* B^* [E - \zeta_{\mathrm{I}}^s + (\psi^* - \zeta_{\mathrm{II}}^s \Phi^*) G^*] \vec{v}_s^* \Rightarrow H_{\mathrm{cr}} = 19{,}9\,\frac{EJ}{l^2},$$

Primită la redacție la 28 februarie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. A. F. Smirnov, *Stabilitatea statică și dinamică a construcțiilor*, București, Edit. Căi-Ferate, 1951.
2. А. Ф. Смирнов, *Устойчивость и колебания сооружений*, Москва, 1958.
3. S. D. Ponomarev și colab., *Calculul de rezistență în construcția de mașini*. Vol. III, București, Edit. tehnică, 1964.
4. P. Mazilu, *Statica construcțiilor*. Vol. II, București, Edit. tehnică, 1959.
5. D. Coșa, *Stabilitatea arcului simplu rezemat cu tirant suspendat fără momente inițiale*, St. cerc. mec. apl. (în curs de apariție).

DEPLASĂRILE PUNCTELOR ŞI MĂRIMEA TASĂRILOR PENTRU UN TEREN DE FUNDAŢIE TRANSVERSAL ANIZOTROP ÎN CAZUL PROBLEMEI PLANE *)

de AL. EFTIMIE, GH. BOTEZ-POPESCU
Institutul politehnic Iaşi

Cunoscînd expresiile tensiunilor [1], în această lucrare se stabilesc formule pentru deplasările punctelor şi tasările unui semispaţiu elastic omogen transversal anizotrop încărcat pe planul limită cu o forţă verticală distribuită uniform în lungul unei axe şi se extind rezultatele la o fişie elastică acţionată de o forţă continuă liniar variabilă pe lăţimea fişiei.
Se particularizează formulele pentru punctele planului limită şi se observă că deplasările vertciale ale acestora sînt tocmai cele din ipoteza izotropiei multiplicate cu un factor c, care este funcţie de constantele elastice anizotrope, depinzînd mult de mărimea gradului de anizotropie n şi mai puţin de valorile coeficientului lui Poisson.
Cînd $n > 1$, $C < 1$ şi pentru $n < 1$, $c > 1$.
În consecinţă, tasările pentru $n > 1$ vor fi mai mici decît cele calculate în ipoteza izotropiei şi invers.

1. FORŢĂ VERTICALĂ UNIFORM REPARTIZATĂ ÎN LUNGUL UNEI AXE PE SUPRAFAŢA PLANULUI LIMITĂ

a) *Deplasări.* Ecuaţiile fizice corespunzătoare unei stări plane de deformaţie într-un mediu transversal anizotrop au forma [2]:

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E_H}(1 - \nu_1^2)\,\sigma_y - \frac{\nu_3}{E_v}(1 + \nu_1)\,\sigma_z,$$

$$\varepsilon_z = \frac{1}{E_v}(1 - \nu_2\,\nu_3)\,\sigma_z - \frac{\nu_2}{E_H}(1 + \nu_1)\,\sigma_y,$$

$$\gamma_{zy} = \frac{\tau_{zy}}{G_2},$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1948

*) Lucrare prezentată la Conferinţa naţională de mecanică aplicată, Bucureşti, 23–27 iunie 1969

în care E_H și E_v sînt modulii de elasticitate ai mediului în direcție orizontală și, respectiv, verticală și ν_1, ν_2, ν_3, cele trei valori ale coeficientului lui Poisson, iar G_2 una dintre cele trei valori ale modulului de lunecare.

Pentru cazul de încărcare considerat, expresiile tensiunilor σ_z, σ_y și τ_{zy} au fost stabilite în [1] verificîndu-se că acestea satisfac condiția de compatibilitate (de continuitate a deformațiilor), permițînd calculul deplasărilor verticale W și orizontale V ale punctelor din ecuațiile

$$\frac{\partial W}{\partial z} = \varepsilon_z, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \varepsilon_y.$$

Astfel, rezultă :

$$V = \int \varepsilon_y \, dy = \frac{1}{E_v} \cdot \frac{1 - \nu_1^2}{n} \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int \frac{zy^2 \cdot dy}{y^4 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) z^2 y^2 + \frac{z^4}{\alpha\beta}} -$$

$$- \frac{1}{E_v} \nu_3 (1 + \nu_1) \frac{p}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int \frac{z^3 \, dy}{y^4 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) z^2 y^2 + \frac{z^4}{\alpha\beta}} + f_1(z),$$

$$W = \int \varepsilon_z \, dz = \frac{1}{E_v} (1 - \nu_2 \nu_3) \frac{p}{\pi} \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int \frac{z^3 \cdot dz}{y^4 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) z^2 y^2 + \frac{z^4}{\alpha\beta}} -$$

$$- \frac{1}{E_v} \cdot \frac{\nu_2 (1 + \nu_1)}{n} \cdot \frac{p}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}{\alpha\beta} \int \frac{zy^2 \cdot dz}{y^4 + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right) z^2 y^2 + \frac{z^4}{\alpha\beta}} + f_2(y),$$

în care, $f_1(z)$ și $f_2(y)$ sînt constante de integrare care urmează să fie determinate, $n = \frac{E_H}{E_v} = \frac{\nu_2}{\nu_3}$ este gradul de anizotropie, iar α și β niște coeficienți de elasticitate a căror valoare aproximativă se poate obține din relațiile care vor fi date mai jos.

Efectuînd calculele, se obține

$$V = \frac{p}{\pi E_v (\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta})} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{n \sqrt{\alpha\beta}} \left(\sqrt{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha}}{z} y - \sqrt{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta}}{z} y \right) - \right.$$

$$\left. - \nu_3 (1 + \nu_1) \left(\sqrt{\beta} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\beta}}{z} y - \sqrt{\alpha} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{\alpha}}{z} y \right) \right] + f_1(z), \qquad (1)$$

$$W = \frac{p}{\pi E_v} \left\{ (1 - \nu_2 \nu_3) (\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}) \left[\frac{1}{4} \ln \left[\frac{z^2}{\alpha\beta} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) z^2 y^2 + y^4 \right] - \right. \right.$$

$$-\frac{1}{4}\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{y^2+\frac{z^2}{\alpha}}{y^2+\frac{z^2}{\beta}}\right)\Bigg]-\frac{1}{2}\frac{\nu_3(1+\nu_1)}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\ln\left(\frac{\alpha}{\beta}\cdot\frac{y^2+\frac{z^2}{\alpha}}{y^2+\frac{z^2}{\beta}}\right)\Bigg\}+$$

$$+f_2(y).$$

Pentru determinarea celor două constante de integrare se foloseşte condiţia

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}=\gamma_{zy}=\frac{\tau_{zy}}{G_2}.$$

În acest scop, efectuînd derivatele deplasărilor exprimate prin relaţiile (1) şi însumîndu-le, se obţine

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{p}{\pi}\cdot\frac{y(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{E_v\cdot\alpha\beta\left(\frac{z^2}{\alpha}+y^2\right)\left(\frac{z^2}{\beta}+y^2\right)}\Bigg\{\frac{(\nu_1^2-1)\,y^2}{n}+\frac{\nu_2(1+\nu_1)\,z^2}{n}+$$

$$+(1-\nu_2\nu_3)\,[\alpha\beta\,y^2+(\alpha+\beta)\,z^2]+\frac{\nu_2(1+\nu_1)}{n}z^2+$$

$$+\frac{df_1(z)}{dz}+\frac{df_2(y)}{dy}.$$

Pentru $n>1$, s-au introdus [2] substituţiile $\nu_3=\frac{\nu_2}{n}$, $E_H=nE_v=E$ şi aproximaţiile $\nu_1=\nu_2=\nu$, $G_2=\frac{E}{1+\frac{1}{n}+\frac{2\nu}{n}}$, iar pentru α şi β s-au obţinut, în aceste condiţii, relaţiile aproximative

$$\alpha+\beta=\frac{1+n-2\,\nu^2}{n-\nu^2},\quad \alpha\beta=\frac{1-\nu^2}{n-\nu^2}.$$

Condiţia pusă devine

$$\frac{\partial V}{\partial z}+\frac{\partial W}{\partial y}=\frac{\tau_{yz}}{G_2}+\frac{df_1(z)}{dz}+\frac{df_2(y)}{dy}.$$

Pentru $n<1$, s-au introdus [2] substituţiile $\nu_2=n\nu_3$, $E_H=nE_v=E$ şi aproximaţiile $\nu_1=\nu_3=\nu$, $G_2=\frac{E}{1+\frac{1}{n}+2\nu}$, iar pentru α şi β s-au

obținut, în aceste condiții, relațiile aproximative :

$$\alpha + \beta = \frac{1 + n - 2n\nu^2}{n(1 - n\nu^2)}, \qquad \alpha\beta = \frac{1 - \nu^2}{n(1 - n\nu^2)}.$$

Condiția pusă devine :

$$\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\tau_{yz}}{G_2} + \frac{\mathrm{d}f_1(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}f_2(y)}{\mathrm{d}y}.$$

Urmează deci

$$\frac{\mathrm{d}f_1(z)}{\mathrm{d}z} + \frac{\mathrm{d}f_2(y)}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{2}$$

Din motive de simetrie, pentru punctele de pe axa verticală ($y = 0$), avem $V = 0$, astfel că din prima relație (1) se obține $f_1(z) = 0$, iar din (2),

$$f_2(y) = \text{const.}$$

Deplasările verticale relative W se calculează în raport cu dreapta care unește punctele de coordonate $y = \pm a$, $z = 0$ pentru care $W = 0$.

Introducînd deci $y = \pm a$, $z = 0$ în expresia deplasării verticale dată de (1) și egalizînd cu zero se obține

$$f_2(y) = \left[\frac{n}{2}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}\ln\frac{\alpha}{\beta} + n\nu_3(1 + \nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}\ln\frac{\alpha}{\beta} - \right.$$

$$\left. - \frac{n}{2}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\ln a^4\right]\frac{p}{\pi n E}.$$

Deplasările relative ale punctelor semispațiului elastic omogen și transversal anizotrop, încărcat în lungul axei ox (fig. 1) pe suprafața de separație cu o sarcină uniform repartizată, sînt deci date de relațiile :

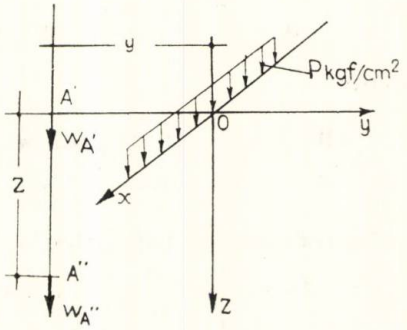


Fig. 1

$$V=\frac{p}{\pi E}\left[\frac{1-\nu_1^2}{n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\alpha\beta}\,(\sqrt{\alpha}-\sqrt{\beta})}\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}y-\sqrt{\alpha}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\beta}}{z}y\right)-\right.$$

$$\left.-\nu_3(1+\nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\left(\sqrt{\beta}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\beta}}{z}y-\sqrt{\alpha}\,\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}y\right)\right], \tag{3'}$$

$$W=\frac{p}{2\pi nE}\left\{\frac{n}{2}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[\ln\frac{1}{a^4}\left[\frac{z^2}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)z^2y^2+y^4\right]-\right.\right.$$

$$\left.\left.-\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\frac{y^2+\frac{z^2}{\alpha}}{y^2+\frac{z^2}{\beta}}\right]-n\nu_3(1+\nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\ln\frac{y^2+\frac{z^2}{\alpha}}{y^2+\frac{z^2}{\beta}}\right\}. \tag{3''}$$

Deplasarea verticală a unui punct definit de coordonatele $y=y_1$ și $z=0$ rezultă din (3'') și are expresia:

$$W=\frac{p}{\pi E}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\ln\left|\frac{y_1}{a}\right|. \tag{4}$$

Pentru $n=1$ și $\nu_1=\nu_2=\nu_3=\nu$, formula (4) devine:

$$W=\frac{2p}{\pi E}(1-\nu^2)\ln\left|\frac{y_1}{a}\right|, \tag{5}$$

adică tocmai formula cunoscută corespunzătoare ipotezei semispațiului elastic omogen și izotrop.

Se observă că pentru a se obține deplasarea relativă verticală W a unui punct de pe suprafața planului de separație a semispațiului elastic omogen în transversul anizotrop, este suficient să multiplicăm deplasarea dată de relația (5), corespunzătoare ipotezei izotropiei, cu factorul

$$C=\frac{(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})}{2(1-\nu^2)}. \tag{6}$$

Pentru $n=2{,}75$, cu substituția $\nu_3=\frac{\nu_2}{n}$ și aproximația $\nu_1=\nu_2=\nu=0{,}3$, se obține $\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta}=1{,}585$ și $C=0{,}735$.

Deci, pentru datele luate în considerație și practic posibile, rezultă că deplasarea relativă a unui punct de pe suprafața de separație a semi-

spațiului transversal anizotrop este cu 26,5% mai mică decît cea corespunzătoare ipotezei izotropiei.

Cu cît n crește în raport cu unitatea, cu atît factorul C scade față de unitate. Pentru $n < 1$, factorul C crește în raport cu unitatea.

Variația valorii coeficientului Poisson între limitele intervalului practic posibil are o influență neglijabilă asupra valorii factorului C.

b) *Tasări.* Deformația verticală (tasarea) unui strat între punctele A' și A'' (fig. 1) rezultă din diferența deplasărilor verticale ale celor două puncte:

$$T_{A'A''} = W_{A'} - W_{A''}. \tag{7}$$

Ținînd seama de (3'') și (4), se obține

$$T_{A'A''} = \frac{p}{2\pi nE}\left\{\frac{n}{2}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[\ln\frac{\frac{z^4}{\alpha\beta}+\left(\frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}\right)z^2y^2+y^4}{y^4} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}\ln\frac{y^2+\frac{z^2}{\alpha}}{y^2+\frac{z^2}{\beta}}\right] - n\nu_3(1+\nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}\ln\frac{y^2+\frac{z^2}{\alpha}}{y^2+\frac{z^2}{\beta}}\right\}, \tag{8}$$

Pentru $n = 2{,}75$, și $\nu_3 = \frac{\nu_2}{n}$, $\nu_1 = \nu_2 = \nu = 0{,}2$ se obține că tasarea unui strat de 2 m grosime la distanța $y = 1$ m de axa ox este

$$T_{A'A''} = 0{,}50\frac{p}{\pi E}.$$

În ipoteza izotropiei, aplicînd formula lui Michell

$$T_{A'A''} = \frac{p}{\pi E}\left[(1-\nu^2)\ln\frac{y^2+z^2}{y^2} - (1+\nu)\frac{z^2}{y^2+z^2}\right],$$

se obține

$$T_{A'A''} = 0{,}70\frac{p}{\pi E}.$$

Se constată că, pentru datele luate în considerație, diferența dintre tasările calculate în cele două ipoteze este de 28,5%.

Deci, pentru grade de anizotropie $n > 1$, tasarea calculată în ipoteza semispaţiului transversal anizotrop este mai mică decît cea calculată în ipoteza semispaţiului izotrop. Diferenţa depinde mult de valoarea gradului de anizotropie şi numai foarte puţin de valoarea coeficientului lui Poisson între limitele practic posibile.

2. SUPRAFAŢA ELASTICĂ ÎN FORMĂ DE FÎŞIE ÎNCĂRCATĂ CU O SARCINĂ LINIAR VARIABILĂ ÎN SENS TRANSVERSAL

Plecînd de la expresiile deplasărilor stabilite în cazul de încărcare considerat mai sus, şi aplicînd principiul suprapunerii efectelor, în cele ce urmează se vor stabili relaţii pentru calculul deplasărilor şi tasărilor în cazul cînd suprafaţa semispaţiului elastic omogen şi transversal anizotrop este acţionată de o sarcină continuă distribuită pe o fîşie elastică de lungime foarte mare în comparaţie cu lăţimea şi a cărei intensitate variază liniar în sens transversal fîşiei (fig. 2) de la intensitatea 0 la intensitatea p.

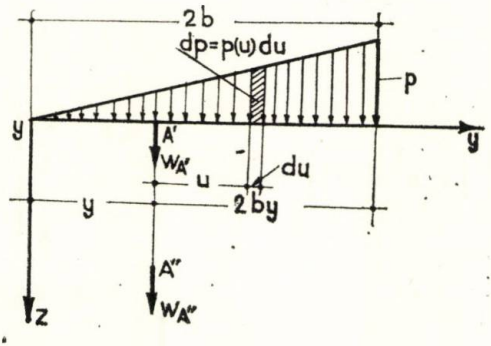


Fig. 2

Fie A' şi A'' punctele a căror deplasare verticală vrem să o determinăm. Poziţia sarcinii elementare $\mathrm{d}p = p(u)\,\mathrm{d}u$ se fixează prin variabila u.

În sistemul de coordonate cu originea în punctul A', ecuaţia dreptei oA este

$$p(u) = \frac{p}{2b}(u + y)$$

şi deci

$$\mathrm{d}p = \frac{p}{2b}(u + y)\,\mathrm{d}u.$$

Deplasarea verticală a punctului A', ţinînd seama de (4), rezultă din

$$W_{A'} = \frac{p}{2b\,\pi E}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\int_y^{2b-y}(u + y)\ln\left|\frac{u}{a}\right|\mathrm{d}u.$$

După efectuarea calculelor, se obține

$$W_{A'} = \frac{p}{2b\,\pi E}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\left(\frac{4b^2 - y^2}{2}\ln\left|\frac{2b - y}{a}\right| + \right.$$

$$\left. + \frac{y^2}{2}\ln\left|\frac{y}{a}\right| - by - b^2\right). \tag{9}$$

Deplasarea verticală a punctului A'', ținînd seama de (3''), rezultă din

$$W_{A''} = \int_{-y}^{2b-y} \frac{p}{2b} \cdot (u + y)\frac{1}{2\pi nE}\left\{\frac{n}{2}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\left[\ln\frac{1}{a^4}\left[\frac{z^2}{\alpha\beta} + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta}\right)z^2u^2 + u^4\right] - \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}\ln\frac{u^2 + \frac{z^2}{\alpha}}{u^2 + \frac{z^2}{\beta}}\right] - \right.$$

$$\left. - n\nu_3(1 + \nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}\ln\frac{u^2 + \frac{z^2}{\alpha}}{u^2 + \frac{z^2}{\beta}}\right\}du.$$

După efectuarea calculelor, se obține

$$W_{A''} = \frac{p}{2b}\cdot\frac{1}{2\pi nE}\left\{\frac{n}{2}(1 - \nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\left[I + I_1(\alpha) + I_1(\beta) + \right.\right.$$

$$\left. + I_2(\alpha) + I_2(\beta) - \frac{\beta + \alpha}{\beta - \alpha}[I_1(\alpha) - I_1(\beta) + I_2(\alpha) - I_2(\beta)]\right] -$$

$$\left. - n\nu_3(1 + \nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}[I_1(\alpha) - I_1(\beta) + I_2(\alpha) - I_2(\beta)]\right\}, \tag{10}$$

în care

$$I = -4\ln a\int_{-y}^{2b-y}(u+y)\,du = 2b^2\ln\frac{1}{a^4},$$

$$I_1(\alpha) = \int_{-y}^{2b-y} u\ln\left(u^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)du = \frac{1}{2}\left[(2b-y)^2+\frac{z^2}{\alpha}\right]\ln\left[(2b-y)^2+\frac{z^2}{\alpha}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(y^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)\ln\left(y^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)\right]-\frac{1}{2}(2b-y)^2+\frac{y^2}{\beta},$$

$$I_1(\beta) = \int_{-y}^{2b-y} u\ln\left(u^2+\frac{z^2}{\beta}\right)du = \frac{1}{2}\left[(2b-y)^2+\frac{z^2}{\beta}\right]\ln\left[(2b-y)^2+\frac{z^2}{\beta}\right] -$$

$$-\frac{1}{2}\left[\left(y^2+\frac{z^2}{\beta}\right)\ln\left(y^2+\frac{z^2}{\beta}\right)\right]-\frac{1}{2}(2b-y)^2+\frac{y^2}{2},$$

$$I_2(\alpha) = \int_{-y}^{2b-y} y\ln\left(u^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)du = y(2b-y)\ln\left[(2b-y)^2+\frac{z^2}{\alpha}\right]+$$

$$+y^2\ln\left(y^2+\frac{z^2}{\alpha}\right)+2\frac{yz}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}(2b-y)+\frac{yz}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\alpha}}{z}y -$$

$$-4by+4y^2,$$

$$I_2(\beta) = \int_{-y}^{2b-y} y\ln\left(u^2+\frac{z^2}{\beta}\right)du = y(2b-y)\ln\left[(2b-y)^2+\frac{z^2}{\beta}\right]+$$

$$+y^2\ln\left(y^2+\frac{z^2}{\beta}\right)+2\frac{yz}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\beta}}{z}(2b-y)+2\frac{yz}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\frac{\sqrt{\beta}}{z}y -$$

$$-4by+4y^2. \qquad (11)$$

Tasarea stratului între punctele A' și A'' este deci:

$$T_{A'A''} = W_{A'} - W_{A''} = \frac{p}{2b\pi E}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[\frac{4b^2-y^2}{2}\cdot\ln\left|\frac{2b-y}{a}\right|+\right.$$

$$\left.+\frac{y^2}{2}\cdot\ln\left|\frac{y}{a}\right|-by-b^2\right]-\frac{p}{4b\pi nE}\left\{\frac{n}{2}(1-\nu_2\nu_3)(\sqrt{\alpha}+\sqrt{\beta})\left[I_1(\alpha)+\right.\right.$$

$$+I_1(\beta)+I_2(\alpha)+I_2(\beta)-2b^2\ln a^4-\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha}[I_1(\alpha)-I_1(\beta)+$$

$$\left.+I_2(\alpha)-I_2(\beta)]\right]-n\nu_3(1+\nu_1)\frac{1}{\sqrt{\beta}-\sqrt{\alpha}}[I_1(\alpha)-I_1(\beta)+$$

$$\left.+I_2(\alpha)-I_2(\beta)\right]\right\}.$$

Făcînd notaţiile $\xi = \frac{y}{b}$, $\tau = \frac{z}{b}$, $Q = bp$ şi ţinînd seama de (11), urmează :

$$T_{A'A''} = \frac{2Q}{\pi n E}\left\{\frac{n}{4}(\nu_2\nu_3 - 1)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta})\left[\frac{\xi}{2}\ln\left|\frac{2-\xi}{\xi}\right| + \frac{1}{2}\ln\left[1 + \left(\frac{1}{\alpha} + \right.\right.\right.\right.$$

$$\left. + \frac{1}{\beta}\right)\cdot\frac{\tau^2}{(2-\xi)^2} + \frac{1}{\alpha\beta}\cdot\frac{\tau^2}{(\tau^2-\xi)^2}\Big] + \frac{1}{8}\left(\frac{\tau^2}{8} - \xi^2\right)\ln\frac{(2-\xi)^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}}{\xi^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(\frac{\tau^2}{\beta} - \xi^2\right)\cdot\ln\frac{(2-\xi)^2 + \frac{\tau^2}{\beta}}{\xi^2 + \frac{\tau^2}{\beta}} + \frac{1}{2}\xi\tau\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{2\tau\sqrt{\alpha}}{\tau^2 - \alpha\xi(2-\xi)} + \right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\frac{2\tau\sqrt{\beta}}{\tau^2 - \beta\xi(2-\xi)}\right]\right] + \left[\frac{n}{4}(1 - \nu_2\nu_3)\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} + \frac{n\nu_3(1+\nu_1)}{2}\times\right.$$

$$\left.\times\frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}}\right]\left[\frac{4-\xi^2}{8}\ln\frac{(2-\xi)^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}}{(2-\xi)^2 + \frac{\tau^2}{\beta}} + \frac{\xi^2}{8}\ln\frac{\xi^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}}{\xi^2 + \frac{\tau^2}{\beta}} + \right.$$

$$+ \frac{\tau^2}{8}\left[\frac{1}{\alpha}\ln\frac{(2-\xi)^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}}{\xi^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}} - \frac{1}{\beta}\ln\frac{(2-\xi)^2 + \frac{\tau^2}{\alpha}}{\xi^2 + \frac{\tau^2}{\beta}}\right] +$$

$$\left. + \frac{\xi\tau}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\alpha}\cdot\tau}{\tau^2 - \alpha\xi(2-\xi)} - \frac{1}{\sqrt{\beta}}\operatorname{arctg}\frac{2\sqrt{\beta}\cdot\tau}{\tau^2 - \beta\xi(2-\xi)}\right]\right]\Big\}.$$

Introducînd următorii parametri elastici şi funcţii :

$$C_1 = \frac{1}{8}(\nu_2\nu_3 - 1)(\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}),\quad C_2 = \frac{1}{8}(1 - \nu_2\nu_3)\frac{\beta+\alpha}{\beta-\alpha} +$$

$$+ \frac{\nu_2(1+\nu_1)}{4n}\cdot\frac{1}{\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha}},$$

$$f_{1\alpha}(2-\xi,\tau)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\tau^2}{\alpha}+4-\xi^2\right)\ln\left[\frac{\tau^2}{\alpha}+(2-\xi)^2\right],$$

$$f_{1\beta}(2-\xi,\tau)=\frac{1}{4\pi}\left(\frac{\tau^2}{\beta}+4-\xi^2\right)\ln\left[\frac{\tau^2}{\beta}+(2-\xi)^2\right],$$

$$f_{10}(\xi)=\frac{4-\xi^2}{\pi}\ln(2-\xi),$$

$$f_{2\alpha}(\xi,\tau)=\frac{1}{4\pi}\left(\xi^2-\frac{\tau^2}{\alpha}\right)\ln\left(\xi^2+\frac{\tau^2}{\alpha}\right),$$

$$f_{2\beta}(\xi,\tau)=\frac{1}{4\pi}\left(\xi^2-\frac{\tau^2}{\beta}\right)\ln\left(\xi^2+\frac{\tau^2}{\beta}\right),$$

$$f_{20}(\xi)=\frac{\xi^2}{\pi}\ln|\xi|,$$

$$f_{3\alpha}(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\alpha}}\cdot\frac{\xi\tau}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\tau\sqrt{\alpha}}{\tau^2-\alpha\xi(2-\xi)},$$

$$f_{3\beta}(\xi,\tau)=\frac{1}{\sqrt{\beta}}\cdot\frac{\xi\tau}{\pi}\operatorname{arctg}\frac{2\tau\sqrt{\beta}}{\tau^2-\beta\xi(2-\xi)},$$

expresia tasării devine

$$T_{A'A''}=\frac{2Q}{E}[(C_1+C_2)(f_{1\alpha}+f_{2\alpha}+f_{3\alpha}+(C_1-C_2)(f_{1\beta}+f_{2\beta}+$$

$$+f_{3\beta}-C_1(f_{10}-f_{20}). \tag{12}$$

Pentru parametrii elastici se pot întocmi tabele în funcție de gradul de anizotropie și de coeficientul lui Poisson.

Calculele numerice au permis să se tragă concluzia că, pentru valori supraunitare ale gradului de anizotropie, tasările calculate în ipoteza anizotropiei sînt mai mici decît în ipoteza izotropiei și invers pentru grade de anizotropie subunitare. Mărimea diferenței depinde de mărimea gradului de anizotropie. S-a constatat că pentru grade de anizotropie cuprinse între limitele $1 < n \leqslant 2{,}5$, practic posibile, diferențele ajung pînă la 30%.

Primită la redacție la 23 iunie 1969

BIBLIOGRAFIE

1. AL. EFTIMIE, *État de tensions d'un terrain de fondation à anisotropie transversale dans le cas du problème plan*, Bul. Inst. politehnic Iași, **XIV (XVIII)**, *3—4*, 603—612 (1968).
2. — *Contribuții la studiul stării de tensiuni, deplasărilor și tasărilor în terenurile de fundație*, Inst. politehnic Iași, (teză de doctorat) (1971).
3. K. FISCHER, *Beispiele zur Bedenmechanik*, Verlag Wilhelm Ernst Sohn, Berlin München, 1965.
4. I. H. MICHELL, *Elementary distribution of Plane Stress*, Math. Soc. proc., 1900.

SOLICITĂRILE LA OBOSEALĂ A ÎMBINĂRILOR FILETATE ALE RACORDURILOR SPECIALE ŞI METODOLOGIA DE CERCETARE A REZISTENŢEI ACESTORA

de D. RAŞEEV şi V. ULMANU
Institutul de petrol Ploieşti

În prima parte a lucrării se studiază critic solicitările la care sînt supuse racordurile speciale şi în special filetul special, în timpul operaţiilor de foraj.
Pe baza unor metode de statistică matematică se stabileşte solicitarea la oboseală echivalentă probabilă la care se poate considera că este supus racordul special în condiţiile obişnuite de foraj, baza determinării durabilităţii acestuia. Se dă o soluţie concretă pentru condiţiile forajului din R. S. România.
În a doua parte a lucrării se analizează critic metodologia de cercetare a rezistenţei la oboseală folosită în prezent pe plan mondial, propunîndu-se o metodă de cercetare ce satisface condiţiile precizate în prima parte a lucrării.
În final, se prezintă maşina de încercat la oboseală, proiectată şi realizată, pe care se pot efectua cercetări în conformitate cu metodologia propusă.

Îmbinarea filetată este elementul cel mai sensibil al racordurilor speciale din punct de vedere al rezistenţei, etanşeităţii şi durabilităţii.

Dacă prin sudarea racordului special la prăjina de foraj se elimină pericolul ruperii din filetul normal, filetul special este solicitat puternic în cursul forajului rotativ, atît static cît şi dinamic.

În prezenta lucrare se studiază unele probleme privind solicitările şi rezistenţa filetului special.

1. SOLICITĂRI STATICE

1.1. ÎNŞURUBAREA ÎMBINĂRII

Asamblarea racordurilor speciale între ele se realizează prin înşurubare forţată, în scopul creării unei pretensionări, necesare din următoarele considerente :

— asigurarea transmiterii momentului încovoietor printr-o secţiune transversală cît mai mare;

— asigurarea etanșeității garniturii de foraj;
— transmiterea momentului de torsiune de foraj.

Momentul de înșurubare a îmbinării, notat M_{ts}, se consumă în următoarele două efecte:

M_{t1} — momentul necesar pentru a dezvolta forța axială de prestrîngere, solicitînd cepul prin eforturi unitare axiale de întindere și prin eforturi tangențiale;

M_{t2} — momentul necesar pentru învingerea momentului forțelor de frecare de pe suprafața de rezemare frontală a cepului și mufei (umeri).

Acest moment nu solicită cepul la torsiune. Efortul unitar axial de tracțiune datorat forței de prestrîngere P_0 se determină cu relația

$$\sigma_{0t} = \frac{P_0}{F_{cep}} = \frac{\dfrac{M_{ts}}{\dfrac{d_m}{2}\operatorname{tg}(\alpha_m + \varphi') + \dfrac{1}{3}\mu \cdot d_r}}{F_{cep}}, \tag{1}$$

în care

P_0 reprezintă forța de pretensionare a cepului;
F_{cep} — suprafața transversală a cepului în golul primei spire angajate;
d_m — diametrul mediu al cepului;
α_m — unghiul elicei filetului;
φ' — unghi de frecare raportat;
μ — coeficient de frecare;
d_r — diametrul raportat al suprafeței umerilor.

Valoarea efortului unitar de răsucire în secțiunea transversală a cepului ca urmare a înșurubării forțate are expresia

$$\tau^{M_{ts}} = \frac{M_{t1}}{W_p} = \frac{d_m}{2} \cdot \frac{P_0 \operatorname{tg}(\alpha_m + \varphi')}{F_{cep}}, \tag{2}$$

$$F_{cep} = \frac{\pi \cdot d_{cep}^3}{16},$$

unde d_{cep} este diametrul cepului în golul primei spire angajate.

S-a ales ca secțiune de calcul prima spiră angajată, deoarece aici se produc majoritatea ruperilor la oboseală.

2. SOLICITĂRI DINAMICE

Racordurile speciale sînt solicitate dinamic în cursul operațiilor de manevră și foraj.

Deoarece ruperile cepurilor au caracter de ruperi de oboseală, ne vom ocupa de solicitările ce apar în cursul forajului rotativ.

2.1. SOLICITĂRI AXIALE

Solicitările axiale se datoresc greutății proprii a coloanei de prăjini de foraj și au caracter dinamic, datorită în special variației apăsării pe sapă în cursul proceselor de foraj.

Sarcina axială are expresia

$$P_{ax} = [q_1 \cdot (L - l_g) + q_2 \cdot l_g]\left(1 - \frac{\gamma_n}{\gamma_p}\right) - P_0, \qquad (3)$$

unde q_1 reprezintă greutatea pe metru liniar a prăjinilor de foraj cu racorduri speciale;

q_2 — greutatea pe metru liniar a prăjinilor grele cu reducții;

L — lungimea garniturii de foraj;

l_g — lungimea prăjinilor grele;

γ_n, γ_p — greutatea specifică a noroiului de foraj, respectiv a prăjinilor de foraj;

P — apăsarea pe sapă.

În condițiile unei structuri normale a garniturii de foraj, cînd lungimea prăjinilor grele este suficient de mare, secțiunea cu solicitarea axială nulă este deplasată în porțiunea de jos a garniturii, unde avem prăjinile grele. În consecință, grație solicitărilor dinamice racordurile speciale sînt supuse unor solicitări la întindere asimetrice.

2.2. SOLICITĂRI DE ÎNCOVOIERE

Încovoierea racordului special poate apare ca urmare a forajului deviat al sondelor, accidental sau sistematic, sau datorită pierderii stabilității garniturii de foraj în gaură largă.

Indiferent de cauză, datorită rotirii garniturii de foraj în jurul axei proprii, cepul racordului special este solicitat după un ciclu alternant simetric.

2.3. SOLICITĂRI DE TORSIUNE

În cursul forajului, garnitura de foraj transmite momentul de foraj. Dacă momentul rezistent este variabil, momentul de torsiune poate solicita dinamic racordul special.

3. CARACTERUL CICLURILOR DE SOLICITARE

Ciclurile de solicitare prin forță de tracțiune, moment încovoietor și moment de torsiune sînt determinate de poziția racordului special în garnitura de foraj, de regimul de lucru la sondă și de factori accidentali.

Eforturile unitare axiale datorate greutăţii proprii a garniturii de foraj, cît şi eforturile unitare tangenţiale datorate momentului de torsiune descresc cu cît racordul special se găseşte montat mai aproape de talpa sondei. Însă pentru un anumit racord special, lungimea garniturii de foraj de sub el rămîne aceeaşi şi, ca urmare, valoarea medie a efortului unitar axial, cît şi valoarea medie a efortului unitar tangenţial se pot admite constante.

3.1. CICLUL EFORTULUI TANGENŢIAL

Efortul unitar tangenţial provenit din solicitarea exterioară se suprapune peste efortul tangenţial provenit din înşurubare.

Eforturile tangenţiale provenite din solicitările exterioare pot varia ca urmare a variaţiei momentane a rezistenţei rocilor şi a frecărilor în gaura de sondă. Faţă de mărimea momentelor active transmise, variaţia acestor eforturi este relativ mică.

În continuare, ţinînd seama de cele de mai sus, se va admite efortul unitar tangenţial constant, egal cu suma efortului unitar provenit din înşurubare şi cel provenit din solicitarea exterioară*).

3.2. CICLUL EFORTULUI NORMAL

La stabilirea ciclului de solicitare prin efort normal trebuie avute în vedere următoarele solicitări:

a) eforturile normale provenite din solicitarea axială la tracţiune datorită greutăţii proprii a garniturii de foraj;

b) eforturile normale provenite din încovoierea racordului special;

c) modificarea ciclurilor solicitărilor anterioare datorită realizării asamblării cu forţă de prestrîngere.

Încovoierea racordului special ca urmare a devierii găurii de sondă are un caracter accidental şi, ca urmare, valoarea cît şi ordinea de succesiune a eforturilor unitare de încovoiere este variabilă şi întîmplătoare, reprezentînd un ciclu nestaţionar de solicitare prin trepte multiple, a căror valoare şi succesiune este întîmplătoare (fig. 1).

Ne propunem să stabilim amplitudinea unui ciclu simetric staţionar, echivalent solicitării nestaţionare. Pentru aceasta este necesar să se încadreze legea de variaţie a frecvenţelor momentelor încovoietoare sau a amplitudinilor σ_v ale ciclurilor într-o anumită lege de distribuţie statistică, notată $\varphi(\sigma_v)$.

Pentru a găsi curba de distribuţie a variabilei σ_v este necesar să se cunoască valorile momentelor încovoietoare aplicate racordurilor speciale datorită devierilor. În acest scop, se foloseşte metodologia propusă în

*) Justificarea afirmaţiei este prezentată în Anexa 1.

lucrarea [1]. Apoi se prelucrează statistic şirul de valori al momentelor încovoietoare pentru o sondă reală (folosind datele din lucrarea [1]) pe lungimea de 1100 m, prezentat în tabela 1. Reprezentînd aceste valori

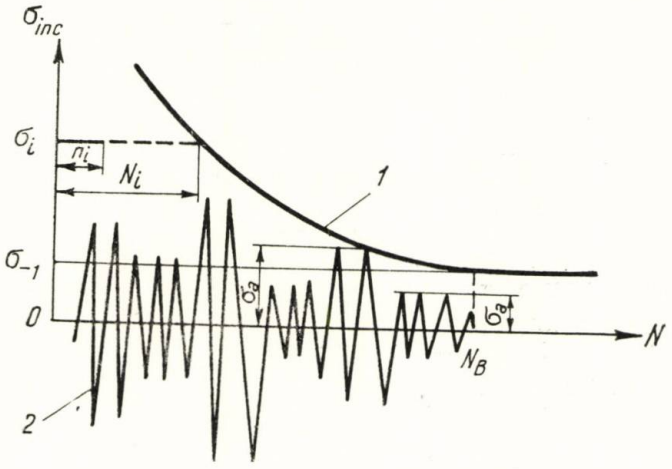


Fig. 1. — Variaţia eforturilor unitare încovoietoare.

Tabela 1

Ordonarea valorilor momentului încovoietor [Kgfm] pe intervale de valori

Nr. crt.	*Limitele intervalului*		Media intervalului x_i'	Frecvenţa absolută n_i	Frecvenţa relativă f_i %
	inferioară	superioară			
1	0	1000	500	14	22,1
2	1001	2000	1500	23	36,5
3	2001	3000	2500	12	19
4	3001	4000	3500	6	9,35
5	4001	5000	4500	2	3,18
6	5001	6000	5500	3	4,76
7	6001	7000	6500	2	3,18
8	7001	8000	7500	1	1,59

se obţine histograma din figura 2, unde se observă că cea mai mare frecvenţă o au valorile de 1750 Kgfm, în timp ce valorile mari ale momentelor încovoietoare (5000—8000 Kgfm) au frecvenţe sub 5%.

Cunoscînd că suma deteriorărilor produse de diferitele trepte de solicitare este o constantă, în majoritatea cazurilor egală cu unitatea [2], rezultă relaţia

$$\int_0^{N_t} \frac{\mathrm{d}n_i}{N_i} = 1, \tag{4}$$

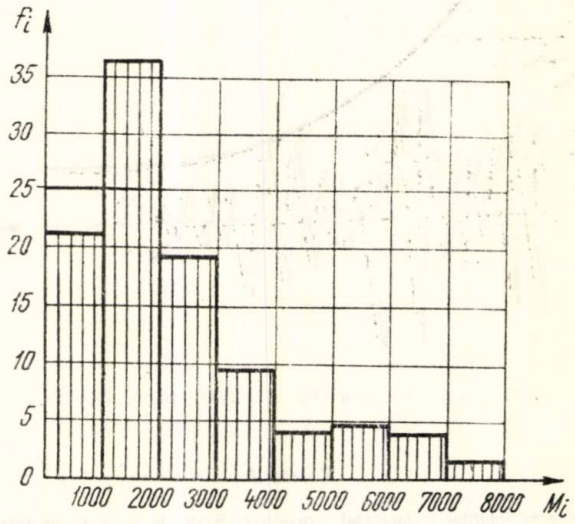


Fig. 2. — Histograma de distribuţie a momentelor încovoietoare.

unde N_t reprezintă numărul total de cicluri al solicitării nestaţionare;

n_i — numărul ciclurilor de solicitare cu efortul unitar variabil de amplitudine σ_i;

N_i — numărul de cicluri după care efortul unitar de amplitudine σ_i cauzează ruperea.

Curba lui Wöhler are aspectul unei hiperbole echilatere de ecuaţie

$$\sigma_i^m \cdot N_i = \sigma_{-1}^m \cdot N_B = \text{const}, \tag{5}$$

m — exponent;

N_B — numărul de cicluri de bază.

Dacă se cunoaşte legea de distribuţie a variabilei, probabilitatea ca variabila să ia valori între σ_A şi σ_B este

$$p = \int_{\sigma_A}^{\sigma_B} \varphi(\sigma_v) \cdot \mathrm{d}\sigma_v. \tag{6}$$

Înlocuind relația (6) în relația (4) și folosind ecuația (5) se obține

$$\sigma_{-1ech.} = \sqrt[m]{\frac{N_t}{N_B}\int_{\sigma_A}^{\sigma_B} \sigma_v^m \cdot \varphi(\sigma_v) \cdot \mathrm{d}\sigma_v}. \tag{7}$$

Relația (7) ne oferă expresia căutată a efortului unitar echivalent solicitării nestaționare.

3.3. STABILIREA TIPULUI DE CURBĂ DE DISTRIBUȚIE A SOLICITĂRII LA ÎNCOVOIERE

Deoarece variabilele sînt strict pozitive, legea reală de distribuție nu poate fi aproximată cu legea lui Gauss. În această situație, cea mai bună aproximare a distribuției reale de frecvențe se obține alegînd pentru funcția densitate de probabilitate legea de distribuție H_i — pătrat (χ^2) a lui Helmert-Pearson [3], [4]:

$$f(\chi) = \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot s^{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2s^2}}, \tag{8}$$

unde $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ este funcția Gama;

α — numărul gradelor de libertate;
s — abaterea medie pătratică;
x — variabilă aleatoare independentă.

Notînd

$$s^{\alpha} \cdot \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \Psi(\alpha), \tag{9}$$

legea de distribuție devine

$$f(\chi) = \frac{1}{2^{\frac{\alpha}{2}-1} \cdot \Psi(\alpha)} x^{\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2s^2}}. \tag{10}$$

Extrăgînd din tabele valorile funcției $\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ se obține

$$\Psi(1) = \Psi(3) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \qquad \Psi(2) = 1.$$

În funcție de mărimea parametrului α, distribuția (10) ia aspectul reprezentat în figura 3.

Valorile α și s se aleg pe baza valorilor curbei reale de distribuție a amplitudinii eforturilor unitare σ_{v_i}. Legea de distribuție a amplitudinii

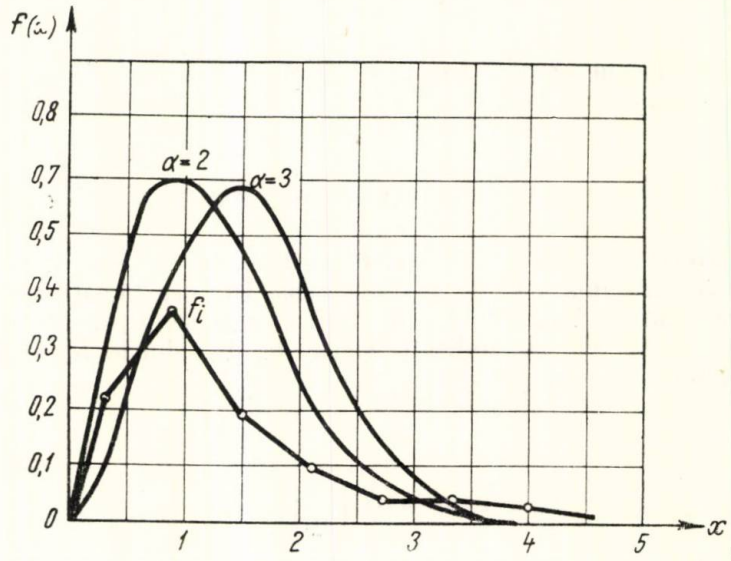


Fig. 3. — Probabilitatea reală și cea teoretică, pentru diferite valori ale parametrului α.

efortului unitar σ_{v_i} este

$$f(y) = \frac{\sigma_{v_i}^{\alpha-1}}{s^{\alpha} \cdot \Psi(\alpha)} e^{-\frac{\sigma_{v_i}^2}{2s^2}} . \tag{11}$$

Se face substituția

$$x = \frac{\sigma_{v_i}}{s} \tag{12}$$

în scopul de a lucra cu mărimi adimensionale.

În această situație, abaterea medie pătratică s' a noii variabile x este de s ori mai mică, respectiv

$$s' = \frac{s}{s} = 1.$$

Relația (11) devine

$$f\left(\frac{\sigma_{v_i}}{s}\right) = \frac{x^{\alpha-1}}{2^{\frac{\alpha-1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} e^{-\frac{x^2}{2}} = \frac{x^{\alpha-1}}{\Psi(\alpha)} e^{-\frac{x^2}{2}}. \tag{13}$$

Pentru a preciza legea de distribuție a variabilei x, este necesar să vedem care din valorile lui α conduce la distribuția cu alura cea mai apropiată de cea reală. În acest scop, se reprezintă curba (13) pentru $\alpha = 2$ și $\alpha = 3$ în figura 3, conform valorilor din tabela 2.

Tabela 2

Calculul curbelor de distribuție statistică pentru $\alpha = 2$ și $\alpha = 3$

x	n_i	f_i real	$e^{x^2/2}$	$\alpha = 2$; $\Psi(2) = 1$		$\alpha = 3$; $\Psi(3) = 1{,}25$	
				$x^{\alpha-1}$	$f(x)$	x^2	$f(x)$
0,303	14	0,221	1,048	0,303	0,29	0,0918	0,07
0,91	23	0,365	1,511	0,91	0,602	0,828	0,438
1,516	12	0,19	3,161	1,516	0,479	2,3	0,582
2,12	6	0,0953	9,5	2,12	0,223	4,5	0,379
2,73	2	0,0318	42,1	2,73	0,065	7,45	0,1415
3,34	3	0,0476	252	3,34	0,01325	11,18	0,0375
3,945	2	0,0318	2345	3,945	0,00168	15,6	0,00566
4,55	1	0,0159	30850	4,55	0,0001475	20,7	0,000536

Se constată că pentru $\alpha = 2$ distribuția teoretică are aceeași alură de variație ca cea reală, pentru care

$\bar{x} = 2200$ Kgfm și $s = 1650$ Kgfm,

$\bar{x}$ — media aritmetică a valorilor șirului.

Cunoscînd legea de distribuție a variabilei σ_v, se determină efortul unitar echivalent solicitării nestaționare, astfel că relația (7) devine

$$\sigma_{-1\,\text{ech.}} = \sqrt[m]{\frac{N_t}{N_B}\int_{\sigma-1}^{\infty} \sigma^m \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Psi(\alpha)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot d\sigma}. \tag{14}$$

Pentru a putea calcula $\sigma_{-1\,\text{ech}}$ folosind tabelele de funcții Pearson, se folosește metodologia din lucrarea [3]. Se calculează separat integrala, notînd $\dfrac{\sigma - 1}{s} = x_0$.

$$\int_{\sigma-1}^{\infty} \sigma^m \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\Psi(\alpha)} e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot d\sigma = \int_{x_0}^{\infty} x^{m+s-1} \cdot \frac{s^m}{\Psi(\alpha)} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx =$$

$$= \frac{s^m}{\Psi(\alpha)} \int_{x_0}^{\infty} x^{m+s-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx.$$

Se notează

$$I_\beta = \int_{x_0}^{\infty} x^{m+\alpha-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx, \qquad m + \alpha = \beta.$$

Rezultă

$$I_\beta = \int_{x_0}^{\infty} x^{\beta-1} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}} \cdot dx = \Psi(\beta) \cdot P(x_0^2, \beta), \tag{15}$$

în care s-a notat

$$\Psi(\beta) = 2^{\frac{\beta-2}{2}} \cdot \Gamma\left(\frac{\beta}{2}\right) \quad \text{și} \quad P(x_0^2, \beta) \text{ funcția lui Pearson.}$$

Înlocuind în relația (14) rezultă

$$\sigma_{-1\,ech} = \sqrt[m]{\frac{N_t}{N_B} \cdot \Psi(\beta) \cdot P(x_0^2, \beta) \cdot \frac{s^m}{\Psi(\alpha)}}. \tag{16}$$

În concluzie, efortul unitar încovoietor echivalent variază după un ciclu alternant simetric staționar, a cărui amplitudine se calculează cu relația (16).

Pentru determinarea ciclului de solicitare prin eforturi normale σ, se compun solicitările datorate tracțiunii axiale și încovoierii. Din însumarea lor rezultă un ciclu oscilant, care are valoarea medie σ_{ax} și amplitudinea $\sigma_{-1\,ech}$:

$$\sigma^* = \sigma_{ax} \pm \sigma_{-1\,ech}, \tag{17}$$

σ^* — efortul normal rezultant tracțiunii și încovoierii.

Valorile eforturilor limită ale ciclului oscilant rezultant sînt:

$$\sigma^*_{max} = \sigma_{ax} + \sigma_{-1\,ech}, \tag{18}$$

$$\sigma^*_{min} = \sigma_{ax} - \sigma_{-1\,ech}, \tag{19}$$

$$R^* = \frac{\sigma^*_{min}}{\sigma^*_{max}} = \frac{\sigma_{ax} - \sigma_{-1\,ech}}{\sigma_{ax} + \sigma_{-1\,ech}}, \tag{20}$$

R^* — coeficientul de asimetrie al ciclului.

Datorită realizării îmbinării filetate cu prestrîngere, solicitarea cepului racordului special va avea loc după un ciclu diferit de cel stabilit anterior pentru efortul σ^*.

În urma pretensionării, în cep se dezvoltă forța de prestrîngere P_0, care solicită permanent cepul de tracțiune cu efortul σ_{0t}.

Pentru a determina variația eforturilor în cep, ne folosim de diagrama forță-deformație (fig. 4), reprezentînd în abscisă efortul unitar, iar în ordonată deformația.

Variația în timp a eforturilor unitare normale care acționează asupra cepului este arătată în tabela 3 și reprezentată în figura 4.

Se remarcă faptul că la o variație oscilantă a efortului de exploatare cu caracteristica ciclului R^*, efortul rezultant care solicită cepul variază

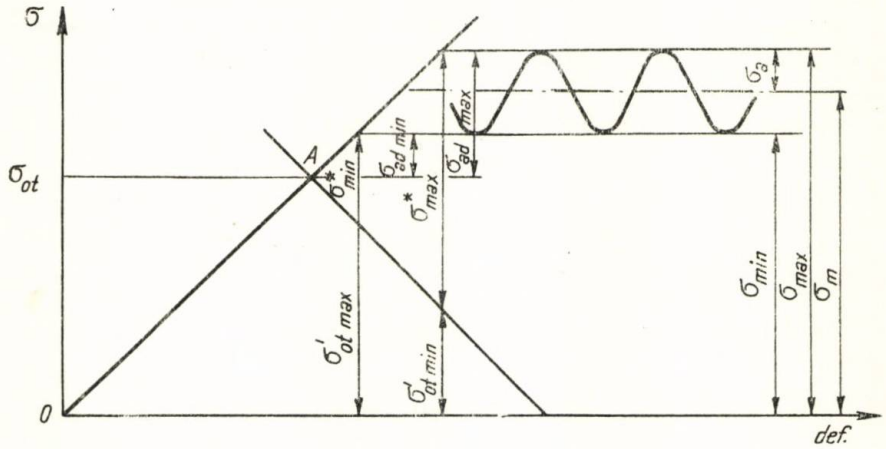


Fig. 4. — Diagrama forță deformație pentru solicitarea cu eforturi normale a cepului.

Tabela 3

Caracterul ciclului de variație a eforturilor normale

Efortul	Domeniul de variație	Caracterul ciclului	R
Efortul de exploatare	$\sigma^*_{min} \leqslant \sigma^* \leqslant \sigma^*_{max}$	oscilant	R^*
Efortul de strîngere	$\sigma'_{0t\,min} \leqslant \sigma'_{0t} \leqslant \sigma'_{0t\,max}$	oscilant	$\frac{\sigma'_{0min}}{\sigma'_{0max}}$
Efortul adițional	$\sigma_{ad\,min} \leqslant \sigma_{ad} \leqslant \sigma_{ad\,max}$	oscilant	$\frac{\sigma_{ad\,min}}{\sigma_{ad\,max}}$
Efortul rezultant	$\sigma_{min} \leqslant \sigma \leqslant \sigma_{max}$	oscilant	$R > R^*$

după un ciclu oscilant cu $R > R^*$, ceea ce este avantajos pentru rezistența la oboseală a elementelor asamblării.

Eforturile normale rezultante înșurubării, tracțiunii și încovoierii vor fi

$$\sigma_{max} = \sigma_{0t} + k_0 \cdot \sigma^*_{max}, \tag{21}$$

$$\sigma_{min} = \sigma_{0t} + k_0 \cdot \sigma^*_{min}, \tag{22}$$

unde $k_0 = \dfrac{C_c}{C_c + C_m}$ este coeficient de sarcină, indicînd ce proporție din sarcina activă solicită suplimentar cepul;

C_c — coeficientul de rigiditate al cepului;

C_m — coeficientul de rigiditate al mufei.

Cunoscînd σ_{max} și σ_{min} se pot determina efortul unitar mediu σ_m și amplitudinea efortului unitar, σ_v, ale ciclului de solicitare:

$$\sigma_m = \frac{\sigma_{max} + \sigma_{min}}{2} = \sigma_{0t} + \frac{k_0}{2}(\sigma^*_{max} + \sigma^*_{min}), \tag{23}$$

$$\sigma_v = \frac{\sigma_{max} - \sigma_{min}}{2} = \frac{k_0}{2}(\sigma^*_{max} - \sigma^*_{min}). \tag{24}$$

Deci ciclul efortului normal σ este oscilant.

4. CALCULUL COEFICIENTULUI DE SIGURANȚĂ

În secțiunea periculoasă de la baza cepului, efortul unitar normal σ variază după un ciclu oscilant, iar efortul unitar τ se acceptă, ținînd seama de cele expuse în 3.1 că este constant.

Dacă pentru solicitarea de încovoiere se folosește diagrama Haigh schematizată după o linie dreaptă (Soderberg) (fig. 5), formula de calcul

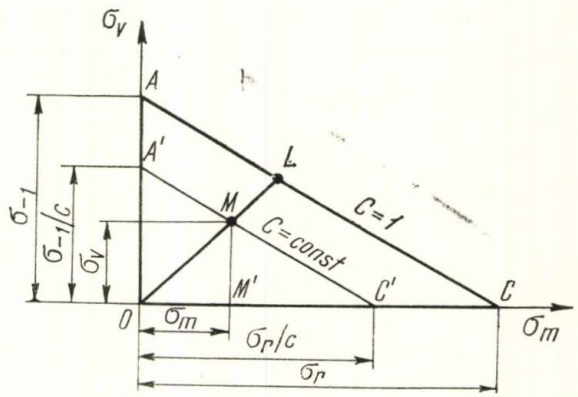


Fig. 5. — Diagrama Haigh a rezistențelor la oboseală, schematizată după metoda Soderberg.

a coeficientului de siguranță la oboseală pentru eforturi normale este [2]

$$C_\sigma = \frac{1}{\dfrac{\sigma_v}{\sigma_{-1}} + \dfrac{\sigma_m}{\sigma_c}}, \tag{25}$$

unde σ_{-1} este rezistența la oboseală la încovoiere (ciclul alternant simetric) a racordului special.

Pentru solicitarea de răsucire, coeficientul de siguranță este

$$C_\tau = \frac{\tau_e}{\tau}. \tag{26}$$

Coeficientul de siguranță al solicitării compuse este [2]

$$C = \frac{C_\sigma \cdot C_\tau}{\sqrt{C_\sigma^2 + C_\tau^2}}. \tag{27}$$

Rezultă că pentru determinarea coeficientului de siguranță al solicitării compuse este necesară determinarea rezistenței la oboseală la încovoiere (ciclul alternant simetric) a racordului special.

5. METODE DE CERCETARE A DURABILITĂȚII ÎMBINĂRII FILETATE A RACORDURILOR SPECIALE

În literatura de specialitate se prezintă diferite metodologii pentru determinarea rezistenței la oboseală a racordului special, folosind pentru încercări modele de racorduri speciale, epruvete de dimensiunea racordului special sau racorduri speciale reale.

Caracteristic este faptul că nu s-a încercat determinarea rezistenței îmbinării sub acțiunea tuturor solicitărilor ce apar în gaura de sondă, ci modelarea și reproducerea pe un stand numai a uneia sau a două solicitări, considerate reprezentative.

Standurile utilizate pentru încercarea racordurilor speciale pot fi încadrate în patru scheme principiale distincte (fig. 7).

Standul prezentat în figura 6 *a* [7] solicită prăjina și racordul special prin intermediul forței centrifuge generate de rotirea greutății *G*. Prezintă neajunsul că momentul încovoietor depinde de viteza de rotație a sarcinii. Avantajele sînt: montarea cu precizie a racordului special și posibilitatea măsurătorilor în timpul funcționării.

Standurile din figura 6 *b* [9] și 6 *c* [10], [11], [12] permit solicitarea la încovoiere alternant simetrică, primul ca grindă în consolă, iar al doilea ca grindă dublu rezemată, avînd posibilitatea încercării simultane a două îmbinări.

În figura 6 *d* [8], se prezintă un stand care permite încercarea racordurilor speciale la sarcini axiale statice de pînă la 200 tf simultan cu momente oscilante de torsiune de pînă la 1000 Kgm.

Pentru cercetarea rezistenței la oboseală a racordurilor speciale s-a propus realizarea unui stand de încercări de tip „grindă în consolă" (fig. 6 *b*), pentru următoarele motive:

— permite solicitarea după un ciclu alternant simetric;

— se poate ține seama de solicitarea axială prin modificarea strîngerii inițiale;

— se ține seama numai de eforturile tangențiale datorate înșurubării.

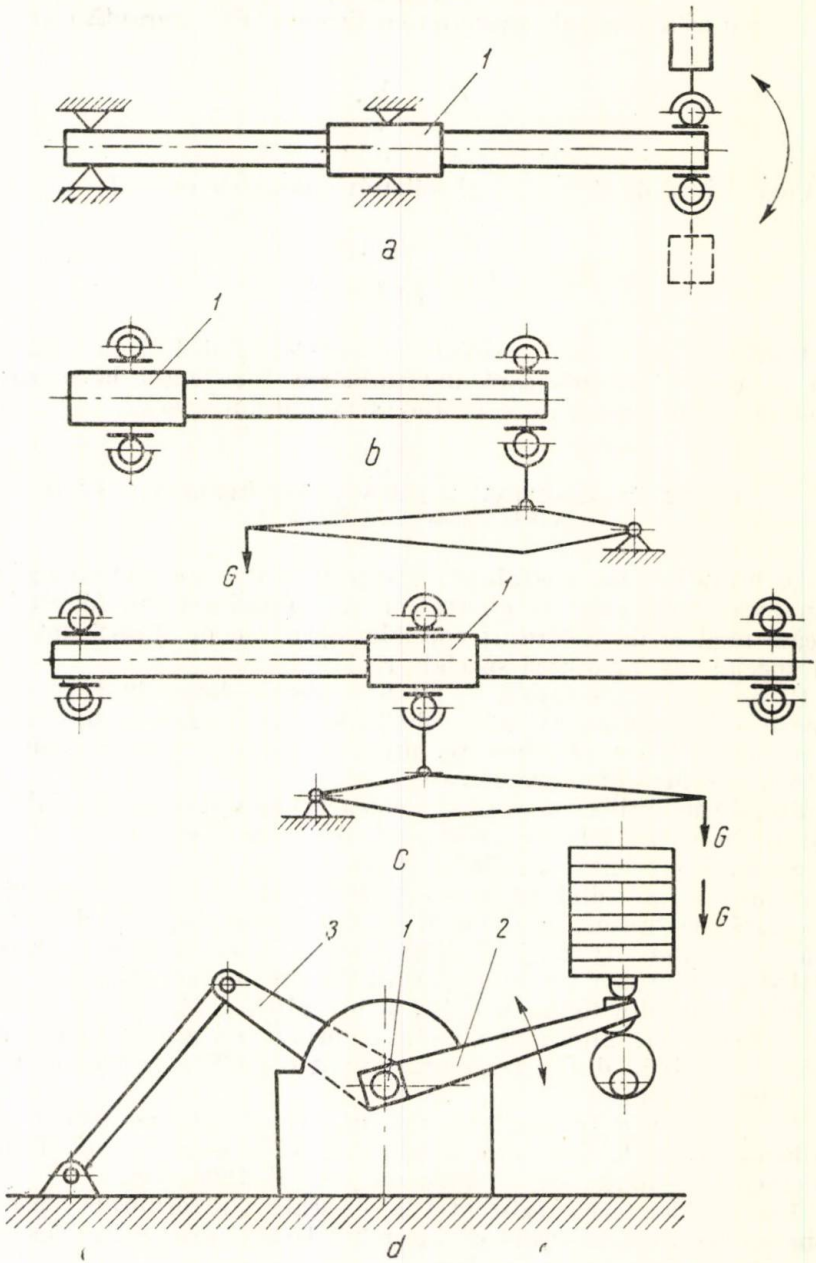


Fig. 6. — Schemele de solicitare a racordurilor speciale pe diferite tipuri de standuri de încercări la oboseală: *1* — racord special; *2* — pîrghie activă: *3* — pîrghie de fixare.

În consecinţă, permite determinarea parametrilor ce stau la baza calculelor la oboseală propuse mai sus.

Totodată, construcţia standului este relativ simplă şi uşor de realizat.

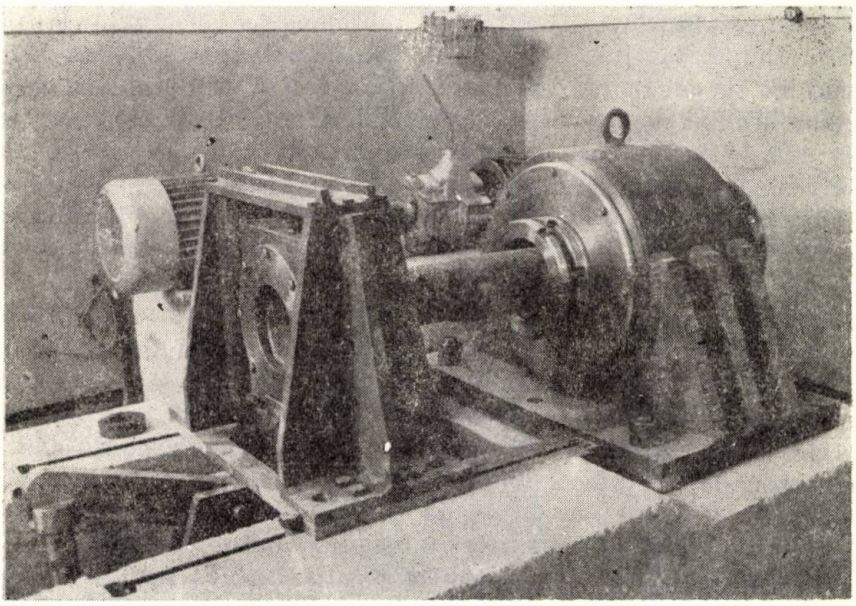


Fig. 7. — Fotografia standului.

Standul permite cercetări la oboseală comparative între diferite construcţii de racorduri speciale, cît şi studiul influenţei strîngerii prealabile asupra durabilităţii îmbinării. Sînt posibile şi cercetări statice privind încovoierea îmbinării filetate.

6. STAND DE ÎNCERCĂRI LA OBOSEALĂ A RACORDURILOR SPECIALE, REALIZAT ÎN CADRUL CATEDREI DE T.C.U.P. DIN I.P.P.

După cum s-a arătat, pentru schema de stand prezentată, în scopul încercării la oboseală a racordurilor speciale reale este necesar să se realizeze solicitarea de încovoiere rotativă sub sarcini reale, corespunzătoare solicitărilor din gaura de sondă.

Pe baza acestei scheme a fost proiectat şi realizat un stand (fig. 7) ce permite studierea racordurilor speciale de dimensiuni pînă la 4 1/2" inclusiv, sub un moment încovoietor de pînă la 6000 Kgfm. Încărcarea se realizează hidraulic, fapt care va permite adaptarea unui dispozitiv de programare pentru executarea încercărilor după program.

Etalonarea solicitărilor se face prin tensometrare.

Pentru a scurta durata încercărilor la oboseală, se propune aplicarea metodei Locati sau Prot.

Rezultatele încercărilor vor fi publicate în lucrarea următoare.

ANEXA I

Pentru precizarea ciclului de variaţie a efortului unitar tangenţial se folosesc rezultatele măsurătorilor tensiometrice efectuate la talpa sondei în timpul forajului [14], [15]. Din examinarea acestora, rezultă că oscilaţiile torsionale ale garniturii de foraj sînt de formă sinusoidală, avînd amplitudini mai mari la viteze mici de rotaţie (40 rot/min), comparativ cu cele de la viteze mai mari (200 rot/min).

Folosind metodologia expusă în [16], s-a determinat, pentru cazul unei adîncimi de 2500—3500 m, teren semitare, $M_{ts} = 1500$ kgfm şi greutatea coloanei de prăjini $P = 100$ tf, momentul de foraj maxim la partea superioară a garniturii, M_t, care conduce la valoarea $\tau^{M_t} = 2{,}2$ kgf/mm², iar cu relaţia (2) s-a determinat efortul tangenţial din înşurubare $\tau^{M_{ts}} = 2{,}0$ kgf/mm². Admiţînd pentru momentul de foraj un coeficient de dinamicitate acoperitor de 1,3 [14], [15], se obţine pentru ciclul efortului tangenţial un coeficient de asimetrie $R = 0{,}75$.

Dacă se ţine seama şi de faptul că, pentru solicitările de mai sus, efortul unitar de tracţiune în cep este de 57 kgf/mm², iar cel încovoietor 9,85 kgf/mm², se poate practic neglija efortul tangenţial, iar în cazul unui calcul mai exact de admis un efort tangenţial unitar constant.

Autorii îşi propun ca într-o cercetare ulterioară să se dezvolte baza de calcul şi pentru situaţia în care se admite că efortul tangenţial variază după un ciclu oscilant.

Primită la redacţie la 6 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. N. S. Pîrvulescu, I. Dincă, *Efectul nerectilinităţii găurii de sondă asupra utilajului de fund*, St. cerc. mec. apl., **17**, *5*, 1153—1172 (1964).
2. Gh. Buzdugan, *Calculul de rezistenţă la solicitări variabile*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
3. V. V. Bolotin, *Calculele de rezistenţă la regimurile întîmplătoare ale eforturilor unitare variabile, ale căror amplitudini respectă distribuţia Pearson*, Buletinul construcţiilor de maşini *1* (1961) p. 26—31 (extrase din Vestnik maşinostroenia).
4. G. Mihoc, D. Firescu, *Statistica matematică*, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1966.
5. S. V. Serensen, *Spravocinik maşinostroitelea*, Moscova, **3**, 1955, 479—480.
6. G. M. Sarkisov, F.K. Semaghin, *O rasciote na procinosti burilnih kolonn pri rotornom burenii s uciotom peremennih napriajenii*, Nefteanoe hoziaistvo 6—1968.
7. I. A. Peisahova şi colab., *Stend dlia ispîtania burilnih trub na ustalostnuiu procinosti*, Maşinî i nefteanoe oborudovanie I—1965.
8. V. Hauk şi colab., *Schwingende Längskraft und Drehmomentbeanspruchung von Bohrgestängen*, Erdöl und Kohle (18) Juli *7*, 514 (1965).
9. S. Karlik, *Studierea elementelor garniturii de foraj pe baza rezistenţei la oboseală*, Exploatarea şi prelucrarea petrolului. Caiet selectiv, *9* (1957).
10. J. F. Gormley, *Experimental Stress Analysis of Tool Joints*, Journal of P.T. may 1961, *9* (1956).

11. T. ALTMANN, *Umlaufsbiegeversuche an Modell-Gewindeverbindern für Schwerstangen*, Erdöl und Kohle, 13 Jahr, März, *3*, 154 (1960).
12. W. S. BACHMANN, *Fatigue Testing and Development of Drill Pipe to Tool Joint Connections*, *World Oil*, **132**, *1* (1957).
13. UGAROV şi COLAB., *Experimentalinoe issledovanie vliiania predvaritelinoi zatiajki na vinoslivosti zamkovth soedinenii*, Maşini i neft. oborudovanie, *11* (1967).
14. R. A. CUNNINGHAM, *Analysis of Downhole Measurements of Drill String Force and Motions*, Journal of Engineering for Industry. Trans. ASME. Series B. *2*, 14—28 (1968).
15. I. FINNIE, I. I. BAILEY, *An experimental Study of Drill-String Vibration*, Journal of Engineering for. Industry. Trans. ASME, Series B, **82**, *2*, 129—135.
16. N. PELIGRAD, V. ATANASIU, *Contribuţii la acţionarea meselor rotative din instalaţiile de foraj prin intermediul transmisiilor hidrostatice*, Metalurgia şi construcţia de maşini *7*, 619 (1962).

O RECRUDESCENȚĂ A RELAXĂRII DE EFORT LA ELEMENTE LONGITUDINALE DIN OȚEL SUPUSE LA COROZIUNE SUB TENSIUNE

de SIMION CONSTANTINESCU-CĂTUNEȘTI
Institutul de construcții București

Se descrie tehnica experimentării sub temperatură ridicată și în mediu de azotați, a sîrmelor SBP Ø 5 produse în țară, la acțiunea coroziunii sub tensiune. Din experimetare se deduce o sporire a relaxării de efort comparativ cu sîrme identice care nu suferă coroziune sub tensiune. Se arată că al doilea principiu al termodinamicii confirmă rezultatele experimentale. Se discută semnificația sporirii relaxării de efort pentru structurile din beton precomprimat.

1. În [1]—[3] s-au descris experimentările pe un număr însemnat de probe din sîrme SBP Ø 5 cu material produs în țară, care se folosește în construcțiile din beton precomprimat, sub acțiunea coroziunii din tensiune.

În studiul de față se continuă cu expunerea rezultatelor obținute din aceeași serie de sîrme. Obiectul cercetării este, însă, diferit de cel din trecut; o proprietate a comportării oțelului observată în experimentările anterioare, în legătură cu valoarea sporită a relaxării de efort, s-a confirmat prin încercările care se descriu în continuare.

2. Instalația pentru cercetarea coroziunii sub tensiune, ținînd seama de efectele din relaxare se vede în figura 1. Se folosesc 4 sîrme SBPØ5 montate fiecare în cîte un stativ. Stativul este înzestrat cu dispozitive cardanice (asigură că se produce întindere pură) și blocaje, arcuri pentru producere de forță, recipienți încălziți în care se păstrează reactivii.

Încălzirea se face pentru a grăbi ruperea din coroziune sub tensiune. Forța se măsoară prin etalonare pe fleximetre. Un control al alungirii se realizează prin 2 grupe de cîte 2 microcomparatoare care servesc, pe timpul experimentării, la readucerea sîrmii la alungirea de la introducerea efortului. Înălțimea totală a unui stativ inclusiv arcul superior este de 2,60 m.

Lungimea sîrmelor-epruvete între blocaje este de 117 cm. Lungimea recipientului cu încălzire este de circa 20 cm. Toate epruvetele despre care se referă aici, provin dintr-un singur colac. Temperatura de 90°C se

menţine numai la interiorul recipienţilor (ea se controlează periodic); exterior recipientului, temperatura sîrmei scade repede, astfel că la distanţă de circa 15—20 cm sîrma poate fi atinsă cu mîna. De aici, trebuie avut

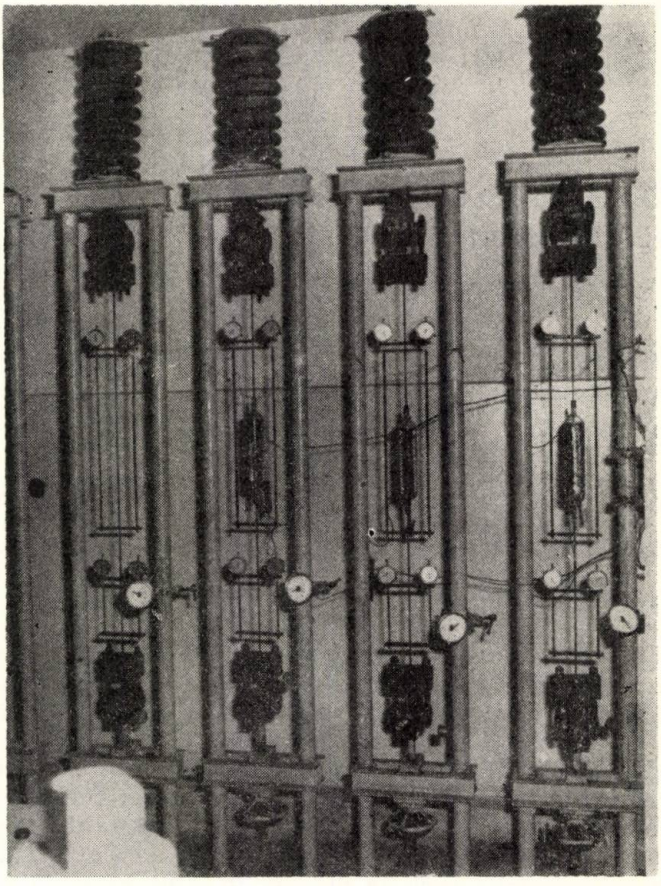


Fig. 1. — Bateria de stative; primele două cu reactivi de azotaţi, al treilea cu ulei, al patrulea la temperatura camerei.

în vedere că toate rezultatele cantitative ce se culeg din încercări urmează să fie considerate sub semnificaţia lor calitativă.

Sîrmele SBP încercate provin de la Cîmpia-Turzii, fabricaţie nouă. Rezistenţa de rupere la întindere de scurtă durată în presă este de circa 19.600 kg/cm², modulul de elasticitate : $E = 2{,}1—2{,}2 \times 10$ kg/cm².

Un dispozitiv de control al temperaturii, pe bază de termostat, asigură o temperatură identică la 3 din cele 4 sîrme pe tot timpul încercării. Introducerea efortului în sîrme se face după ce s-a ajuns la temperatura de regim, de regulă 90°C. În acest fel se evită o corecţie de temperatură. Încălzirea se face prin rezistenţa înfăşurată în jurul recipienţilor.

Efortul în sîrme se introduce prin comprimarea arcurilor din creştetul stativelor. Printr-o manivelă, de la baza stativelor, se produce tracţiune

la crucea cardanică de jos și prin aceasta în sîrmă, care transmite la arc o compresiune. Compresiunea se măsoară pe fleximetru. Concomitent se înregistrează alungirea sîrmei prin microcomparatoare.

Departajarea efectelor de relaxare datorate temperaturii de acelea datorate coroziunii se face astfel: două sîrme la două stative trec prin recipienții care conțin reactivi (azotat de calciu și azotat de amoniu în apă) încălziți la 90°C. O sîrmă la al treilea stativ trece printr-un recipient care conține ulei încălzit la 90°C; se elimină astfel coroziunea. O sîrmă prinsă în al patrulea stativ, rămîne la temperatura camerei. Toate sîrmele se întind cam la același efort și fiind fixate la extremități produc cu scurgerea timpului, relaxarea de efort. Primele două sîrme dau relaxarea din sporul de temperatură și din acțiunea corozivă, a treia sîrmă dă relaxare numai din sporul de temperatură, a patra sîrmă dă relaxarea fără intervenții suplimentare. Prin diferențe între valorile înregistrate se realizează departajarea.

Încercarea se conduce pînă la ruperea primelor două sîrme; o continuare a menținerii stativelor trei și patru în funcțiune ar avea scop, doar, pentru a urmări relaxarea fără coroziune, ceea ce ar implica un timp lung. De aceea toate încercările se consideră ajunse la final cu ruperea sîrmelor sub coroziune.

Procedeul de a stabili pierderea de tensiune este cel cunoscut. Imediat după introducerea eforturilor la perioade mai scurte, apoi la perioade care cresc, se citesc microcomparatoarele, care, în virtutea procesului de curgere lentă a oțelului, arată o valoare crescută a alungirii inițiale. Revenirea la deformația de la încărcare implică o acționare de sens invers a manivelei; fleximetrul înregistrează o descărcare a arcului, deci o scădere în efort.

Încercarea s-a condus într-un spațiu climatizat la 20°C, totuși unele defecțiuni în menținerea temperaturii mediului, au făcut ca în sezonul foarte friguros să coboare temperatura pînă la 15°C. Dacă pentru primele trei sîrme, sub încălzire, efectele sînt mai puțin însemnate, pentru cea de a patra sîrmă ele au semnificații.

3. Datele culese dintr-un număr de serii de sîrme încercate arată, așa cum s-a evidențiat și în încercările anterioare, o mare împrăștiere a valorilor la care se produce ruperea sîrmelor. Pentru ilustrare se scriu în ordinea mărimii forței la care s-au rupt un număr de sîrme și durata care au stat sub efort pînă la rupere. Forțele sînt stabilite pe fleximetru, urmare a etalonării arcurilor.

Se menționează că pentru a elimina subiectivitatea aprecierii eforturilor de zero din sîrme, s-a adoptat un zero convențional stabilit întotdeauna, la toate seriile de încercări, pe aceeași gradație la fleximetru, de la care înainte se contează forța.

Forța	2593;	2559;	2434;	2302;	2262;	2215;	1968;	1912;	1792;	1702;	1698	kg
Durata	5	19	35	17	20	25	19	21	15	32	27	zile
					37				11			„

În tot lungul desfășurării relaxării, ea este mai accentuată la stativele cu reactivi decît la cel cu ulei. Cîteva valori comparative arată că:

Seria	2	3	4	5	6	7	
Coroziv	560 ; 550	317	430	202 ; 107	202 ; 222	289	kg
Ulei	490	269	277	62	110	159	kg

Comparația pentru aceleași serii, între sîrmele încălzite în ulei și sîrmele neîncălzite arată că relaxarea are valorile următoare :

Seria	2	3	4	5	6	7	
Ulei	490	269	277	62	110	159	kg
Neîncălzită	440	248	224	53	14	60	kg

Reprezentarea pe o diagramă comună a relaxării din temperatură și coroziune arată, la un număr mai mare de probe, ca în figura 2.

Curba (*1*) corespunde relaxării sîrmelor care nu au suferit nici o acțiune spre a modifica regimul de relaxare.

Curba (*2*) corespunde relaxării sîrmelor menținute în ulei.

Curba (*3*) corespunde relaxării sîrmelor menținute în reactivi, adică supuse coroziunii sub tensiune. Durata t_1, pe care se produce schimbarea concavității curbei, este foarte diferită de la o serie încercată la alta. În puține cazuri ea lipsește cu desăvîrșire.

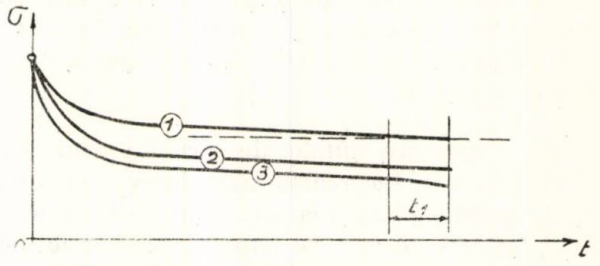


Fig. 2. — Relaxarea de efort (*1*), influența temperaturii (*2*) și a coroziunii sub tensiune (*3*).

Între mărimea împrăștierii duratelor pînă la rupere și sporul de relaxare datorat coroziunii sub tensiune nu se stabilește nici o legătură.

Toate probele încercate arată că relaxarea s-a continuat pînă la rupere ; cea mai lungă durată pînă la rupere a fost de 37 zile. Teoretic, la condiții obișnuite de menținere a sîrmelor în mediu obișnuit, relaxarea durează foarte mult ; practic, însă, relaxarea se consideră terminată atunci cînd curba $\sigma - t$ este aproape de orizontală. În cazul sîrmelor supuse la coroziune sub tensiune se constată că panta este vizibilă.

a) Media valorilor de relaxare în mediu coroziv este 320 kg.
b) „ „ „ „ „ „ de ulei este 228 „
c) „ „ „ „ „ „ fără tratament este 176 „

Diferența valorilor $r_a - r_b = 92$ și $r_b - r_c = 52$, adică influența coroziunii este de $92/52 = 1{,}80$; sporul de relaxare pe care-l aduce coroziunea pentru sîrme încălzite la 90°C este de 80%. Dacă, însă, se elimină valorile date de seria 6, fiindcă sîrma păstrată în mediu ambiant fără coroziune și fără încălzire a dat o relaxare mult mai mică decît analoga ei la celelalte serii, diferențele de mai sus devin:
$r_a - r_b = 350 - 251 = 99$ și $r_b - r_c = 251 - 209 = 42$.

Raportul $99/42 = 2{,}40$; sporul de relaxare pe care-l aduce coroziunea pentru sîrme încălzite la 90° este de 140 %, adică efectul relaxării din coroziune sub tensiune, comparat cu efectul relaxării din temperatură este substanțial mai însemnat pentru coroziune.

În valori absolute, adică stabilind creșterea relaxării efortului din coroziune sub tensiune, față de relaxarea aceleeași sîrme fără tratament, se găsește că sporul de relaxare se deduce din

$$320/176 = 1{,}62,$$

adică relaxarea a crescut cu 62%.

Dacă, însă, se elimina seria 6, se găsește

$$350/209 = 1{,}67,$$

adică relaxarea a crescut cu 67%.

Eliminarea seriei 6 se justifică prin faptul că temperatura mediului ambiant a scăzut pe timpul încercării, proba a avut tendința să se scurteze, adică alungirea pe care o capătă prin faptul că P original scădea prin relaxare, se compensa cu scurtarea din scăderea de temperatură. Microcomparatoarele înregistrau mai puțin decît era normal.

Dacă la seria 6, proba în discuție s-ar fi comportat ca la celelalte serii, introducînd în medie o valoare aproximativ de aceeași mărime cu cele anterioare, se regăsește sporul de mai sus, 140%.

Aprecierea sporului de relaxare de efort, fără sporul dat de temperatură, poate fi obținută considerînd valoarea medie a încărcărilor corespunzătoare seriilor considerate în calculul de mai sus.

Media valorilor de încărcare (pe durata medie de 21 zile) este de 2090 kg.

Considerînd rapoartele:

$$\frac{320}{2090} = 15{,}3\ \%\,;\ \frac{228}{2090} = 10{,}9\ \%\,;\ \frac{176}{2090} = 8{,}4\ \%,$$

și admițînd (fără spor pentru temperatură) că sporul din coroziune sub tensiune este ($15{,}3 - 10{,}9\% = 4{,}4\%$), se vede că acest spor este de ordinul a 50% din relaxarea la temperatura obișnuită (8,4%).

Valoarea cu care sporește relaxarea de tensiune înaintea ruperii probelor, nu este nici uniformă, nici permanentă, au fost cazuri (puține) cînd nu s-a înregistrat o creștere. Faptul poate să se datoreze împrejurării că sporirea se produce pe o durată scurtă, în care timp nu s-au făcut observații.

4. Natura ruperii sîrmelor este mult deosebită de ruperea de scurtă durată. La ruperea din coroziune sub tensiune se constată o deteriorare amplă a secțiunii care cedează, este o rupere fragilă.

În realitate, ruperea nu se produce pe o secțiune ci apare o dezagregare care ajunge să se concretizeze, la cele mai frecvente probe, într-o deteriorare după plane paralele cu generatoarea. Unul din malurile secțiunii rupte are aşchii care ajung, cîteodată, la 8—9 mm lungime (fig. 3). Desfășurarea secțiunii care cedează întrece dublul secțiunii geometrice pe care o are sîrma SBP. O analiză metalografică și fotografiile obținute au arătat microfisuri care avansează longitudinal barei în corpul sîrmei (fig. 4; 5 și 6).

Structura oțelului încercat (atac cu nital 1%) este alcătuită din grăunți de perlită și ferită alungiți longitudinal barei ca urmare a deformării plastice la rece. După proporția constituenților, oțelul conține circa 0,35—0,40 C.

5. Teoretic, rezultatele culese în experimentare se justifică prin aplicarea celui de al doilea principiu al termodinamicii, principiul entropiei.

După cel de al doilea principiu se stabilește ireversibilitatea unui proces mecanic prin creșterea entropiei sistemului în cauză. Entropia S este o funcție de starea instantanee a sistemului și cum

$$\frac{dS}{dt} = \frac{1}{T}\,\frac{dE_k}{dt},$$

în care T este temperatura,

E_k — energia calorică în unități mecanice, se stabilește din primul principiu al termodinamicei:

$$\frac{dE_p}{dt} = \frac{dE_k}{dt} + \frac{dE_i}{dt},$$

unde E_p este energia potențială,

E_i — lucrul forțelor interioare (tensiune),

rezultă

$$\frac{dE_p}{dt} = T\frac{dS}{dt} + \frac{dE_i}{dt}. \qquad (1)$$

Entropia este, contrar altor proprietăți ale materiei, o noțiune abstractă, fiindcă ea nu este bazată pe date experimentale. Ea este o funcție de stare a sistemului și variația ei depinde numai de începutul și sfîrșitul fenomenului, nu însă și de stările de pe parcurs.

Fig. 3. — Ruperea fragilă, fără stricțiune.

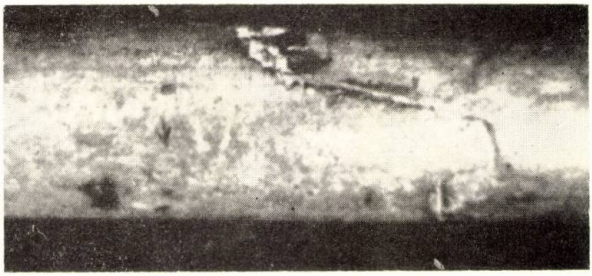


Fig. 4. — Sîrmă ruptă, aspectul suprafeței și a ruperii; scara 5/1.

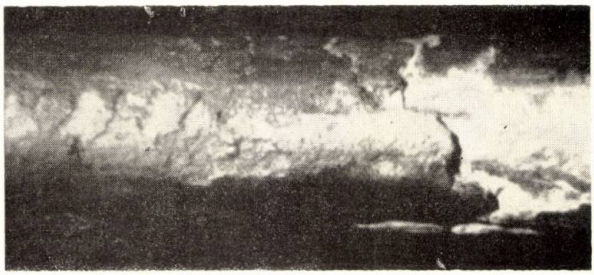


Fig. 5. — Sîrmă ruptă, a aspectul suprafeței și a ruperii; scara 5/1.

Fig. 6. — Analiză metalografică, fisuri longitudinale; scara 70/1.

Din (1) se poate arăta că curgerea lentă și relaxarea se descriu cu această relație. Pentru $\sigma = \text{const}$ urmează $E_i = \text{const}$ și $dE_i/dt = 0$, de unde

$$\frac{dE_p}{dt} = T\frac{dE}{dt}, \tag{2}$$

adică deformația (reprezentată de energia potențială E_p) crește, întrucît la $T = \text{const}$, S crește cu timpul.

Pentru $\varepsilon = \text{const}$, urmează $E_p = \text{const}$ și $dE_p/dt = 0$, de unde

$$\frac{-dE_i}{dt} = T\frac{dS}{dt}. \tag{3}$$

Ori, $-dE_i/dt$ provine din $(E_2 - E_1)\,dt$, în care $E_1 > E_2$, adică cu trecerea timpului E descrește. Cum $T = \text{const}$ și dS/dt crește fiindcă S crește, se vede că valoric, E_i, respectiv σ, descrește pe măsură ce entropia crește.

În cazul experimentat, dacă se consideră pentru început că alungirea barei este constantă, $E_p = \text{const}$, rezultă $dE_p/dt = 0$ și relația (1) devine (3).

Sporind T, ca în cazul experimentării descrise, sporește E_i adică tensiunea, ceea ce este cunoscut la relaxare; cu creșterea temperaturii, crește relaxarea.

În realitate $dE_p/dt \neq 0$, fiindcă alungirea descrește în timp, dE_p/dt este negativ.*)

Introdusă în relația (1) urmează:

$$-\frac{d\Delta E_p}{dt} = T\frac{dS}{dt} + \frac{dE_i}{dt}$$

sau

$$-\frac{dE_i}{dt} = T\frac{dS}{dt} + \frac{d\Delta E_p}{dt} \tag{4}$$

adică $-dE_i/dt$ își sporește valoarea, comparativ cu (3), din cauză că E_p, energia potențială, se disipează prin ruperile ce avansează cu timpul, datorite coroziunii; relaxarea crește.

---

* Faptul care confirmă acest proces poate fi descris astfel: Pe epruvete se citește la timpul t_n, cu n crescător, atît deformația din curgere lentă pe microcomparator cît și efortul pe fleximetru. Între două citiri consecutive, fișa de citiri arată că pe microcomparator se citește o alungire iar pe fleximetru o descreștere de efort. Fiindcă deformația de la punerea sub deformare a epruvetei trebuie menținută constantă, operatorul manevrează în sens invers manivela de la baza stativului pînă revine la citirea pe microcomparator, înregistrată la punerea sub deformare. Pe fleximetru rezultă valoarea efortului. Menținerea constantă a valorii deformației implică, deci la fiecare ajustare, o scădere în deformație; numai că deformația ce se reajustează în cazul coroziunii sub tensiune este mai mare, în valoarea absolută decît atunci cînd nu acționează coroziunea (faptul este ilustrat de cifrele culese prin experimentare.) Apare deci un ΔE_p care are, însă, semn negativ.

Din cele de mai sus rezultă că datorită coroziunii sub tensiune se produce o recrudescență a relaxării efortului, pe toată durata încercării, cu o accentuare în preajma ruperii (fig. 2).

Proprietatea are suport teoretic, relația (4), precum și confirmarea practică în încercările descrise. Descrierea bilanțului de energie din relația (4) poate fi stabilită și prin reprezentarea în coordonate triunghiulare propusă de Weissenberg [4]. Pornind de la relația

$$\frac{dE_c}{dt} + \frac{dE_p}{dt} + \frac{dE_d}{dt} = \frac{dA}{dt},$$

în care

dE_c este variația energiei cinetice,
dE_d — „ „ disipate,
dA — variația lucrului (puterea care acționează sistemul),

se vede că variația stării de deplasare a unui corp deformabil este dată de distribuția variațiilor în timp ale celor trei forme de energie: cinetică, potențială și disipată (termică). Starea corpului se reprezintă deci,

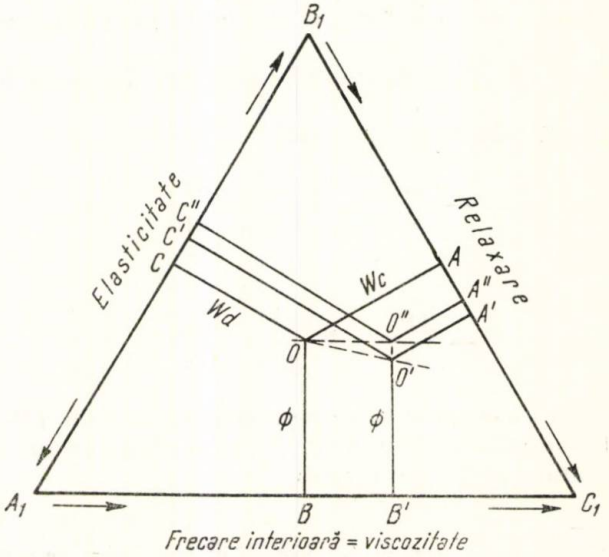


Fig. 7. — Reprezentare Weissenberg a bilanțului energiilor.

la orice timp t într-un sistem de coordonate triunghiulare (fig. 7). Punctul A_1 ($A = E_c$) definește condițiile în care energia cheltuită trece imediat în energie cinetică. Piciorul perpendicularei, A, definește condițiile în care energia cheltuită nu produce nici-o energie cinetică. Punctele B_1 și

C_1 (precum și B și C) definesc valori analoge pentru energiile potențiale și disipate. Dreapta $A_1\ B_1$ reprezintă schimbul reversibil dintre energia potențială și cinetică (fără pierderi), $B_1\ C_1$ relaxarea energiei potențiale, $A_1\ C_1$ transformarea în căldură a energiei cinetice. Procesele $B_1\ C_1$ și $A_1\ C_1$ sînt ireversibile. Starea generală a corpului se reprezintă prin poziția unui punct în interiorul triunghiului. Modificările în starea corpului se reprezintă prin modificările coordonatelor acestui punct.

Punctul 0 reprezintă starea inițială a corpului la temperatura de 90°C; se vede că, dacă se consideră că prin efectul coroziunii se produc deteriorări sub formă de microfisuri, frecarea interioară descrește, punctul B se deplasează spre dreapta pînă în B'. Admițînd, pentru început, că E_p rămîne constant, bilanțul energiilor este reprezentat prin punctul $0''$, relaxarea crește. Dacă, însă, așa cum s-a arătat prin relații, $\mathrm{d}E_p/\mathrm{d}t$ este negativ, adică E_p descrește, punctul 0 trece în $0'$ și relaxarea crește suplimentar. Cu sau fără creșterea energiei potențiale E_p, creșterea relaxării de efort este implicată.

6. Aplicarea acestei completări a unei proprietăți fundamentale a materiei, relaxarea de efort, se întîlnește în domeniul construcțiilor, la betonul precomprimat, unde calculul cu pierderea de tensiune din relaxarea efortului este obligatorie prin standardele de calcul. Valorile standardizate se dovedesc, însă, insuficiente dacă este cazul coroziunii sub tensiune.

Recomandări asupra ameliorării valorilor din standard urmează să se facă numai după realizarea unui nou program de încercări în care elementele cantitative să fie urmărite în mod deosebit.

Pentru exploatarea în timp a unei construcții din beton precomprimat, sporuri neașteptate de săgeți pot să fie o indicație că armătura se află în prezența unui fenomen de coroziune sub tensiune, deoarece reducerea efortului de pretensionare peste cel prevăzut în calcul, duce la reducerea rigidității prevăzută pentru durata exploatării.

Precauțiunea prevăzută de literatura de specialitate de a întinde armăturile pentru un timp anumit la o valoare sporită față de cea de exploatare, înainte de a li se introduce forța de pretensionare, trebuie examinată în lumina efectelor pe care o are coroziunea sub tensiune asupra armăturilor.

În cazul grinzilor precomprimate supuse la oboseală, este clar că valoarea tensiunii la care se produce fisurarea betonului se află sub valoarea tensiunii de oboseală. Prin urmare, coroziunea sub tensiune este de temut înainte de tensiunea care conduce la ruperea prin oboseală

Identificarea cantitativă a valorilor cu care sporește relaxarea de efort în prezența coroziunii sub tensiune urmează să se facă pe cale experimentală ceea ce implică un program de cercetări în viitor.

Primită la redacție la 18 februarie 1971.

BIBLIOGRAFIE

1. S. Constantinescu-Cătunești, I. Ivanov, *Coroziunea sub tensiune a oțelului superior folosit în armături pentru betonul precomprimat*, Buletinul științific al Institututului de construcții București, 19 (1967).
2. — *Cîteva cercetări experimentale de coroziune sub tensiune la armături SBP I*, Buletinul științific al Institutului de construcții București *2* (1968).
3. — *Cîteva concluzii asupra rezultatelor experimentării la coroziune sub tensiune pe sîrme SBP I*, Buletinul științific al Institutului de construcții București 1 (1969).
4. R. Eisenschütz, B. Rabinovitsch, K. Weissenberg, *Mitteilungen der deutscher Material-prüfungsanstalt*, **9** *91.*(1929).

CONTRIBUȚII LA CERCETAREA MECANISMULUI APARIȚIEI ERORILOR LA RECTIFICAREA ȘI FREZAREA DE ÎNALTĂ PRECIZIE A PIESELOR CU SUPRAFEȚE DE REVOLUȚIE

de PETRE DODOC
Institutul politehnic București

În lucrare se arată mai întîi că la lucrările de foarte înaltă precizie (dimensională, de formă de poziție și rugozitate) de exemplu : rectificarea suprafețelor de rostogolire ale rulmenților, rectificarea elementelor pulverizatoarelor de la pompele de injecție, ghidajelor aparatelor de măsurat de înaltă precizie, filetele șuruburilor micrometrice, calibrele cilindrice, conice și filet etc., erorile de prelucrare sînt determinate în mod hotărîtor de comportarea dinamică a sistemului „sculă-piesă-dispozitiv de prindere (al piesei și al sculei) — mașină-unealtă. Pe baza acestei comportări autorul a elaborat o serie de metode cu ajutorul cărora se construiește conturul piesei în secțiune normală și se explică mecanismul real al apariției erorilor de prelucrare.

Rectificarea pieselor cilindrice reprezintă un procedeu tehnologic de prelucrare fără de care în prezent industria constructoare de mașini, S.D.V.-uri și aparate de măsurat nu ar putea exista. Atît procesului de rectificare cît și mașinilor și dispozitivelor de rectificat i-au fost dedicate numeroase lucrări de cercetare, ale căror rezultate au permis perfecționarea continuă a acestora în sensul ridicării preciziei și productivității.

Cu toate acestea, la prelucrările de foarte înaltă precizie dimensională, de formă și de poziție, spre exemplu, la rectificarea suprafețelor de rostogolire ale rulmenților, a pulverizatoarelor de la pompele de injecție, a ghidajelor aparatelor de măsurat de înaltă precizie, a filetelor șuruburilor micrometrice, a calibrelor cilindrice, conice și filet etc., există mari dificultăți deoarece în acest domeniu precizia de prelucrare este influențată puternic de vibrațiile care apar în sistemul „piesă-dispozitiv de prindere a piesei — sculă — mașină unealtă".

Cercetări privind această influență sînt puține la număr și ele tratează doar unele aspecte, trăgînd totuși concluzii valoroase mai ales pe baza unor date experimentale.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 5, 1971, P. 1257–1267

În prezent nu se cunoaşte nici o teorie sau metodă care să explice mecanismul transmiterii vibraţiilor la suprafaţa piesei şi să permită determinarea erorilor provocate de acestea.

Cercetările efectuate de autor asupra comportării dinamice ale unor arbori în rotaţie [1], [2], [3] au arătat că datorită forţei centrifuge provocată de dezechilibrarea sistemelor în rotaţie, axa de rotaţie a arborelui în mişcare nu mai rămîne fixă. Privită într-un plan perpendicular pe aceasta, axa de rotaţie descrie o traiectorie circulară (fig. 1*a*), adică o vibraţie circulară întreţinută, de amplitudine A_n şi de frecvenţă $f_n = n/60$ Hz, dacă sistemul este izotrop din punct de vedere dinamic. În cazul anizotropiei, traiectoria menţionată poate fi o elipsă, un oval sau poate avea o formă oarecare. În timp ce vectorul amplitudine A_n se roteşte

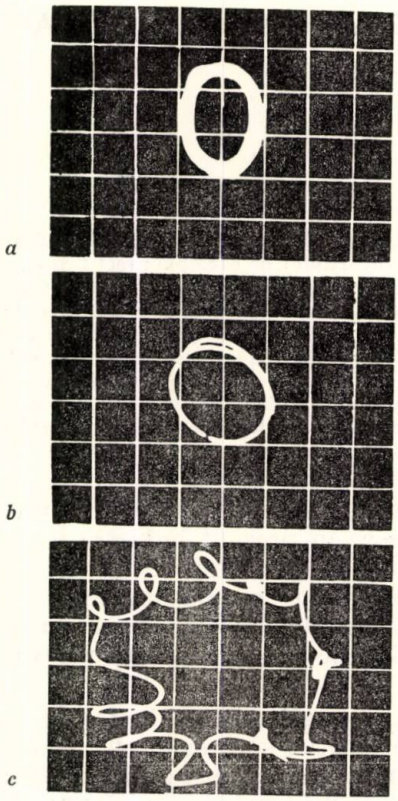


Fig. 1

cu frecvenţa f_n, arborele, respectiv axa de rotaţie a acestuia, vibrează în frecvenţă proprie translatoric, circular sau eliptic cu amplitudinea A_p şi cu frecvenţa f_p în jurul vectorului A_n (fig. 1*b*). În general, există mai multe vibraţii proprii, dar una, numită principală, are amplitudinea mult mai mare decît amplitudinile celorlalte.

Din compunerea acestei vibraţii proprii principale cu vibraţia circulară produsă de forţa centrifugă ia naştere o trochoidă de vibraţii,

trochoidă care este chiar traiectoria axei de rotație a arborelui provocată de vibrații, (fig. 1*c*).

Natura acestei trochoide depinde de forma și de parametrii vibrației proprii. Dacă aceasta este circulară, traiectoriile de vibrații pot fi epitrochoide cu ecuațiile parametrice (fig. 2) :

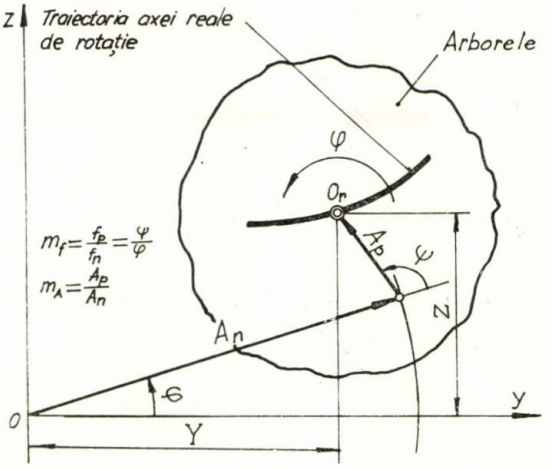


Fig. 2

$$\begin{aligned} Y &= A_n\,[\cos\varphi - m_A \cos\,(m_f\varphi - \varepsilon)], \\ Z &= A_n\,[\sin\,\varphi - m_A \sin\,(m_f\varphi - \varepsilon)], \end{aligned} \tag{1}$$

sau hipotrochoide cu ecuațiile parametrice :

$$\begin{aligned} Y &= A_n\,[\cos\,\varphi + m_A \cos\,(m_f\varphi - \varepsilon)], \\ Z &= A_n\,[\sin\,\varphi - m_A \sin\,(m_f\varphi - \varepsilon)]. \end{aligned} \tag{2}$$

Dacă vibrația proprie este translatorică, poziția momentană a axei de rotație a arborelui, respectiv traiectoria acesteia, poate fi determinată cu următoarele ecuații (fig. 3) :

$$\begin{aligned} Y &= A_n\,[\cos\,\varphi + m_A \cos\,(m_f\varphi - \varepsilon)\cos\,\eta], \\ Z &= A_n\,[\sin\,\varphi + m_A \cos\,(m_f\varphi - \varepsilon)\sin\,\eta]. \end{aligned} \tag{3}$$

În ecuațiile (1), (2) și (3) s-a notat cu

$$m_A = \frac{A_p}{A_n} \qquad \text{— raportul amplitudinilor,} \tag{4}$$

$$m_f = \frac{f_p}{f_n} = \lambda \cdot \frac{A_n}{A_p} \text{ — raportul frecvențelor,} \tag{5}$$

ε — diferența de fază dintre cele două vibrații,
η — unghiul dintre direcția vibrației translatorie și abscisa oy,
λ — factor de proporționalitate.

Apar trochoide scurtate pentru $\lambda < 1$, normale pentru $\lambda = 1$ și alungite pentru $\lambda > 1$. Forma trochoidei depinde de m_A și m_f. Dacă m_f este număr întreg, traiectoria constă din $n_E = m_f - 1$ bucle, ramuri

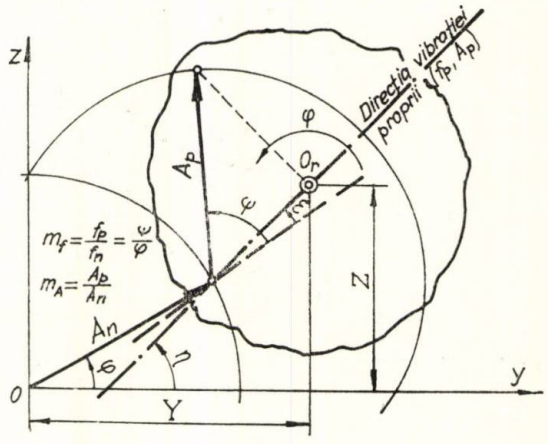


Fig. 3

sau maxime pentru epitrochoide, respectiv $n_H = m_f + 1$ pentru hipotrochoide și traiectorii circular-translatorice.

Pentru rapoarte raționale traiectoriile se închid, la rapoarte iraționale nu.

Se mai poate scrie:

$$m_f = m_{fi} + m_{fz}, \tag{6}$$

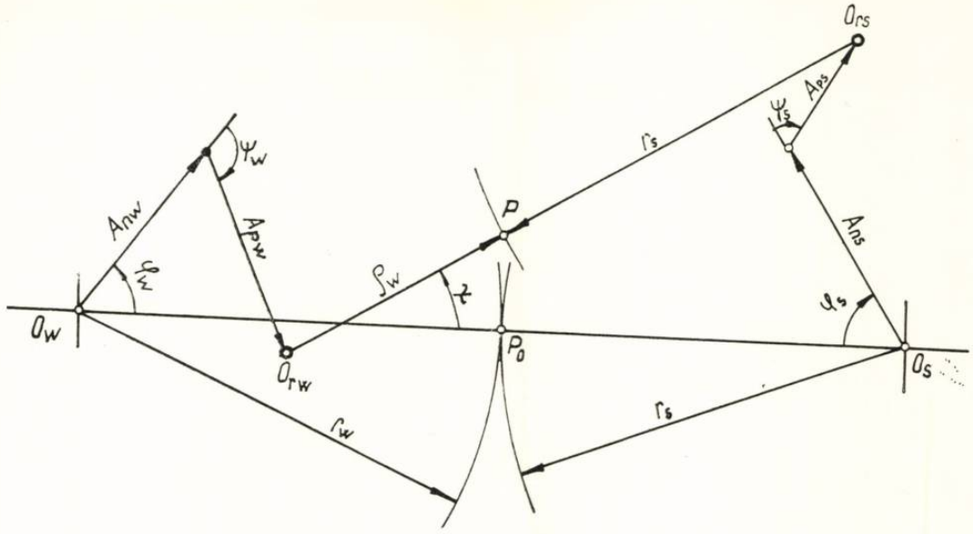
unde $m_{fi} = 1, 2, 3, \ldots,$

și $m_{fz} = \pm (0{,}0 \ \ldots \ 0{,}5).$

Cele de mai sus reprezintă o dovadă că axele de rotație a piesei (O_w) și a sculei (O_s) (fig. 4), nu rămîn fixe în timpul prelucrării, adică distanța dintre cele două axe $\overline{O_{rw}O_{rs}}$ este variabilă ca mărime și direcție.

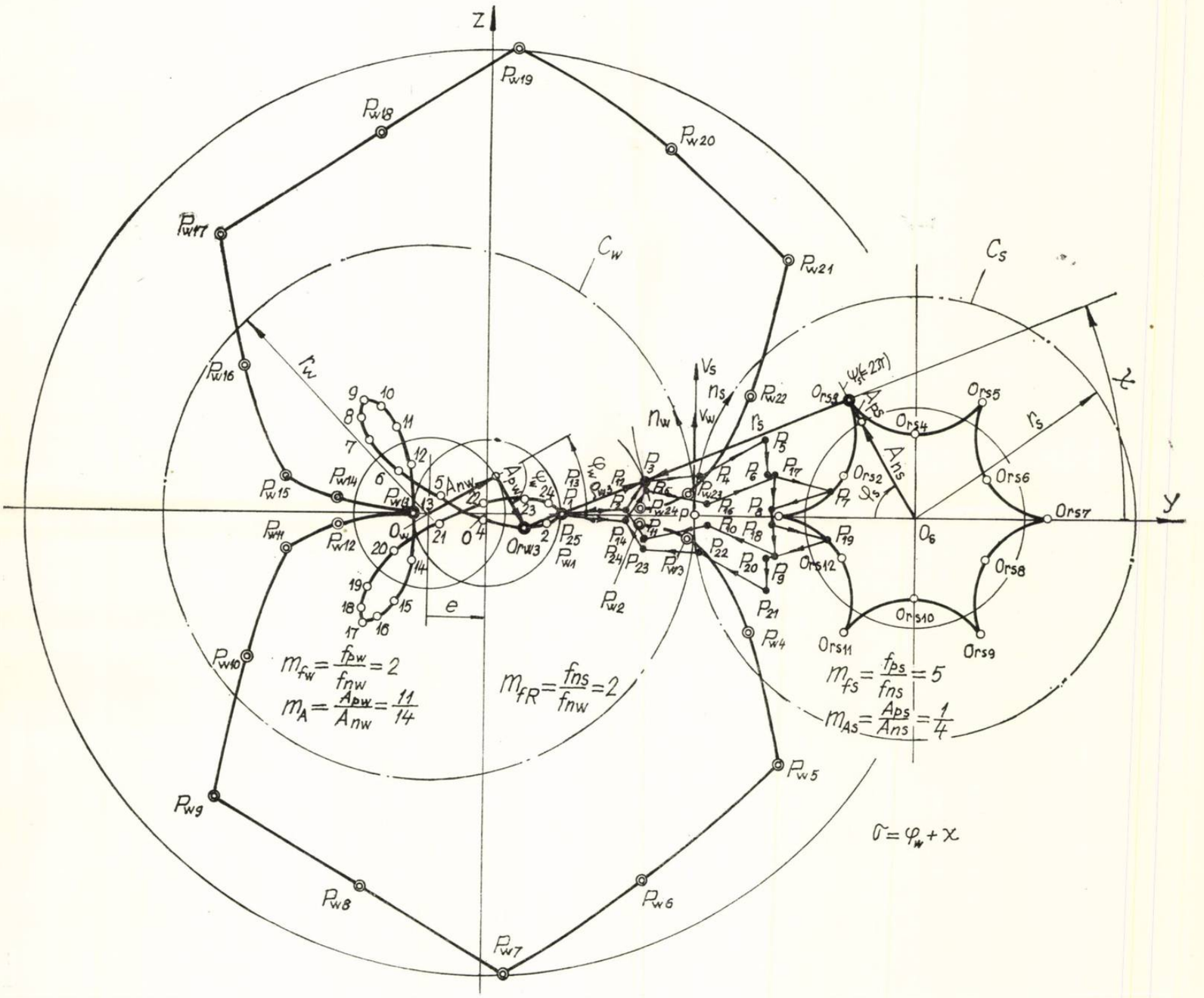
Transmiterea acestor mișcări la suprafața piesei în procesul de prelucrare reprezintă cauza determinantă a apariției erorilor de prelucrare la rectificarea și frezarea de finisare a pieselor de revoluție cu orice profil (cilindri, calibre, filete, scule profilate etc.).

Mecanismul acesta va fi explicat cu ajutorul figurii 4. Dacă nu ar exista deformații, axa de rotație a sculei s-ar afla în O_s, iar cea a piesei în O_w. Aceste axe de rotație sînt ideal-geometrice sau virtuale, deoarece pozițiile lor nu pot fi determinate direct. Punctul de contact P_0 se află



O_{rs}
A_{ps}
ψ_s
r_s
ψ_w
A_{nw}
A_{pw}
P
A_{ns}
φ_w
ρ_w
χ
φ_s
O_w
O_{rw}
P_0
O_s
r_w
r_s

Fig. 4 *a*



Z
Y
C_w
C_s
P_{w19}
P_{w18}
P_{w20}
P_{w17}
P_{w21}
P_{w16}
P_{w15}
P_{w14}
P_{w11}
P_{w12}
P_{w10}
P_{w9}
P_{w8}
P_{w7}
P_{w6}
P_{w5}
P_{w4}
P_{w3}
P_{w2}
P_{w1}
P_{w22}
P_{w23}
P_{w24}
P_{w25}
O_{rs2}
O_{rs3}
O_{rs4}
O_{rs5}
O_{rs6}
O_{rs7}
O_{rs8}
O_{rs9}
O_{rs10}
O_{rs11}
O_{rs12}
O_{rw3}
O_w
O_s
r_w
r_s
A_{nw}
A_{pw}
A_{ps}
A_{ns}
V_s
n_s
n_w
V_w
$\psi_s(=2\pi)$
φ_w
φ_s
χ
e
$m_{fw}=\frac{f_{pw}}{f_{nw}}=2$
$m_A=\frac{A_{pw}}{A_{nw}}=\frac{11}{14}$
$m_{fR}=\frac{f_{ns}}{f_{nw}}=2$
$m_{fs}=\frac{f_{ps}}{f_{ns}}=5$
$m_{As}=\frac{A_{ps}}{A_{ns}}=\frac{1}{4}$
$\sigma=\varphi_w+\chi$

Fig. 4 *b*

pe axa centrelor. Pentru ca procesul de așchiere să aibă loc, între sculă și piesă trebuie să existe o mișcare relativă. Aceasta se obține practic dînd sculei C_s o turație n_s mai mare decît turația n_w a piesei C_w; vitezele periferice vor fi respectiv v_s și v_w (fig. 4*b*). Viteza de așchiere va fi $v = v_s - v_w$, deoarece vectorii viteză au același sens și aceiași direcție.

Așa de exemplu, mașina de rectificat rotund *RU* 200 produsă de *UMC* Cugir are următoarele caracteristici: $n_s = 1440$ rot/min = const; $n_w = 50$; 85; 145; 245 și 400 rot/min.

Făcînd raportul frecvențelor de rotație se găsesc valorile

$$m_{fR} = \frac{n_s}{n_w} = \frac{f_{ns}}{f_{nw}} = 28{,}8;\ 16{,}93;\ 9{,}94;\ 5{,}87;\ 3{,}5.$$

Rezultă așadar, $f_{ns} > f_{nw}$.

Mai departe, s-a notat cu r_s — raza sculei și cu r_w raza dorită a piesei. Raza momentană a piesei s-a notat cu ρ_w.

În figura 4*b* s-a reprezentat cazul cel mai general, cînd axele de rotație ale celor două elemente în contact se deplasează pe traiectorii de vibrații în formă de trochoidă. Spre exemplu, s-a considerat că axa reală de rotație O_{rw} a piesei se deplasează pe o hipotrochoidă alungită cu: numărul buclelor $n_{Hw} = 3$, raportul dintre frecvența proprie principală f_{pw} și frecvența de rotație f_{nw} este $m_{fw} = \frac{f_{pw}}{f_{nw}} = n_{Hw} - 1 = 2$ și raportul amplitudinilor corespunzătoare este $m_{Aw} = \frac{A_{pw}}{A_{nw}} = \frac{11}{14}$.

Deplasarea axei de rotație O_{rs} a sculei are loc pe o hipotrochoidă normală de vibrații, la care: $n_{Hs} = 6$; $m_{fs} = 5$ și $m_{As} = 1/4$.

Se admite mai întîi că vectorii A_{nw} și A_{pw} sînt în fază, adică au aceeași direcție $O_w y$ și sensul către punctul de contact P_0, iar vectorii A_{ns} și A_{ps} sînt tot în fază și orientați spre P_0, (fig. 4*a*). Atunci cînd la un anumit raport m_{fR} scula se rotește cu unghiul φ_s, iar piesa cu unghiul φ_w (vezi fig. 4*a*), axele de rotație se află respectiv în punctele O_{rs} și O_{rw}, puncte care rezultă din însumarea vectorilor A_n și A_p, corespunzători celor două elemente C_s și C_w.

Presupunînd acum că raza sculei r_s rămîne constantă, este evident că variația distanței $O_{rw}O_{rs}$ dintre centrele O_{rw} și O_{rs} determină o variație a razei momentane a piesei ρ_w. Această rază face cu abscisa $O_w y$ unghiul $\varkappa$. Mai departe trebuie precizat că în timp ce vectorul A_{nw} se rotește cu unghiul φ_w în sensul arătat pe figură (trigonometric), piesa se rotește tot cu unghiul φ_w în jurul axei reale de rotație O_{rw}.

În același mod are loc și mișcarea sculei. Pentru a determina punctul corespunzător al conturului piesei, se recomandă folosirea următoarelor metode:

1). *Metoda 1*

Se construiesc cele două traiectorii ale axelor de rotații. Se ține seama apoi de raportul frecvențelor $m_{fR} = f_{ns}/f_{nw}$. Dacă, de exemplu, se alege $m_{fR} = 2$ (fig. 4*b*), atunci înseamnă că în timp ce piesa C_w se rotește odată, în jurul axei sale O_{rw}, adică străbate întreaga traiectorie a axei,

scula se va roti de două ori în același mod. Ca urmare, axa centrelor va ocupa pozițiile $O_{rw1}\ O_{rs1}$, $O_{rw2}O_{rs2}$ ... Punctele de contact corespunzătoare P_1, P_2 ... vor descrie o anumită traiectorie care se închide după un număr de cicluri egal cu raportul m_{fR}. Se observă că, atunci cînd axa de rotație a sculei se află în punctul O_{rs3} al hipocicloidei, scula s-a rotit cu unghiul $\varphi_s = \varphi_{s3}$ în jurul axei sale O_{rs3}. În același timp, piesa s-a rotit cu unghiul $\varphi_w = \varphi_{w3}$ în jurul poziției O_{rw3}, poziție determinată de vectorii A_{nw} și A_{pw}. În acest moment raza sculei este $\overline{O_{rs3}P_3} = r_s$; raza piesei este $\rho_{w3} = \overline{O_{rw3}O_{rs3}} - r_s$ și face unghiul $+ \varkappa_3$ cu abscisa $O_w y$.

Așezînd acum o hîrtie de calc, pe care s-a trasat deja intersecția axelor *yoz*, peste desenul executat în felul descris mai sus și suprapunînd punctul O de pe calc cu fiecare punct O_{rw}, orientînd în același timp axa *oy* paralel cu direcțiile succesive ale vectorului A_{nw}, se copiază pe hîrtia de calc punctele de contact P_1, P_2, P_3 ... care devin P_{w1}, P_{w2} ... Linia care unește aceste puncte (P_{w1}, P_{w2} ...) reprezintă conturul căutat al piesei. Se trasează apoi cercul de diametru minim, tangent conturului determinat în punctele exterioare extreme [punctele P_{w7} și P_{w19} (fig. 4)] și cercul concentric cu acesta, dar de diametru maxim și tangent în punctele interioare extreme (P_{w1} și P_{w13}). Diferența razelor acestor cercuri reprezintă erorile de rotunjime R_{Fv}, de diametru R_{DV}, precum și rugozitatea R_{tv}, (dacă m_{fR} ar fi fracționar).

Totodată se observă că mai apare și o eroare de poziție $e_v = A_{pw}$. Toate aceste erori sînt provocate de vibrații.

2). *Metoda 2*

Se procedează ca în cazul metodei nr. 1, cu deosebirea că nu se mai folosește hîrtia de calc, ci se măsoară razele momentane ρ_{wi} și unghiurile φ_{wi} și $\varkappa_i$ pentru fiecare poziție O_{wr} a axei de rotație a piesei. Apoi, într-un sistem de coordonate *yoz*, se determină punctele conturului cu ajutorul razei ρ_{wi} și a unghiului $\sigma_i = \varphi_{wi} + \varkappa_i$ (fig. 5). Se va avea în

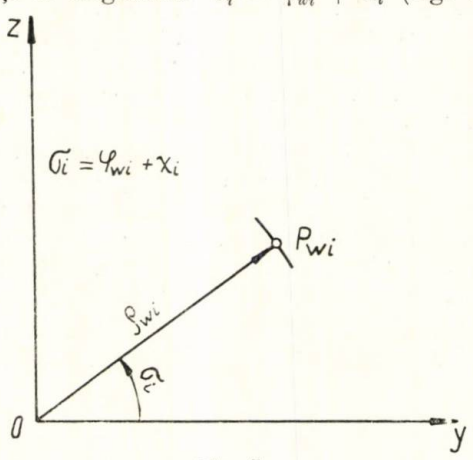


Fig. 5

vedere că în timp ce unghiul φ_w este continuu pozitiv, unghiul $\varkappa$ este pozitiv numai cînd direcția centrelor, respectiv raza ρ_w, este înclinată de la stînga sus spre dreapta jos.

3). *Metoda 3*

Se calculează coordonatele axelor de rotație pentru diferite valori ale unghiurilor φ_w și φ_s funcție de m_f corespunzător, se determină distanța $\overline{O_{rw}O_{rs}}$ din care, scăzînd raza sculei r_s, se găsește raza momentană a piesei (ρ_w) și apoi se determină prin calcul unghiul $\varkappa$. Avînd razele ρ_w și unghiurile $\sigma = \varphi_w + \varkappa$ se poate construi conturul piesei tot prin puncte (fig. 5).

4). *Metoda 4*

Cu ecuațiile (1)—(7) se pot determina punctele O_{rs} și O_{rw}. Ținînd apoi seama de raportul m_{fR}, se exprimă unghiul $\varkappa$ și raza momentană ρ_w, după care se construiește prin puncte conturul piesei. Metoda aceasta nu se recomandă deoarece necesită foarte mult timp.

Metodele descrise mai sus permit determinarea conturului piesei atunci cînd se cunosc parametrii vibrațiilor celor două sisteme în rotație: „Scula-mașină" și „piesă-dispozitiv de prindere a piesei-mașină" și invers.

Metodele prezintă o importanță teoretică și practică deosebită deoarece:

— se pot determina calitativ și cantitativ erorile de prelucrare provocate de vibrații;

— se pot obține date extrem de prețioase cu privire la construcția mașinii unelte și a dispozitivelor de prindere a piesei precum și asupra condițiilor optime de prelucrare;

— cunoscînd legătura dintre conturul piesei și vibrațiile mașinii-unelte, se pot face cercetări direct asupra piesei, cu posibilitatea tragerii concluziilor asupra comportării dinamice a mașinii;

— metodele permit efectuarea unui pas înainte spre cunoașterea mai profundă a proceselor de rectificare și frezare;

— metodele prezentate au valabilitate generală. Ele pot fi aplicate cu succes la analiza următoarelor procese și procedee de prelucrare: a) rectificarea între și fără vîrfuri a tuturor pieselor de revoluție: cilindri netezi și în trepte (indiferent de destinație), diverse profile, filete, scule profilate etc.; b) frezarea pieselor de revoluție, indiferent de profil: cu freze disc, freze melc pentru roți dințate etc.

Aplicarea metodelor susmenționate la analiza proceselor de rectificare și frezare a pieselor de revoluție a permis obținerea unor rezultate foarte importante atît pentru învățămînt, cît și pentru uzinele ce folosesc aceste procedee de prelucrare.

Figura 6 reprezintă, spre exemplu, conturul piesei pentru aceleași condiții ca în figura 4, cu deosebirea ca turația piesei este de două ori mai mare decît a sculei ($m_{fR} = 1/2$).

În figura 7 s-au reprezentat contururile pieselor prelucrate la rapoartele frecvențelor $m_{fR} = 1,\ 2,\ 3$ și 4, pentru același raport al amplitudinilor: $m_{AR} = \dfrac{A_{ns}}{A_{nw}}$, iar în figura 8 pentru raportul $m_{fR} = 4{,}166$. După cum rezultă din ultima figură, la rapoarte m_{fR} fracționare, *drumul relativ dintre piesă și sculă* [4] este diferit la diferite rotații ale piesei și direcții de măsurare.

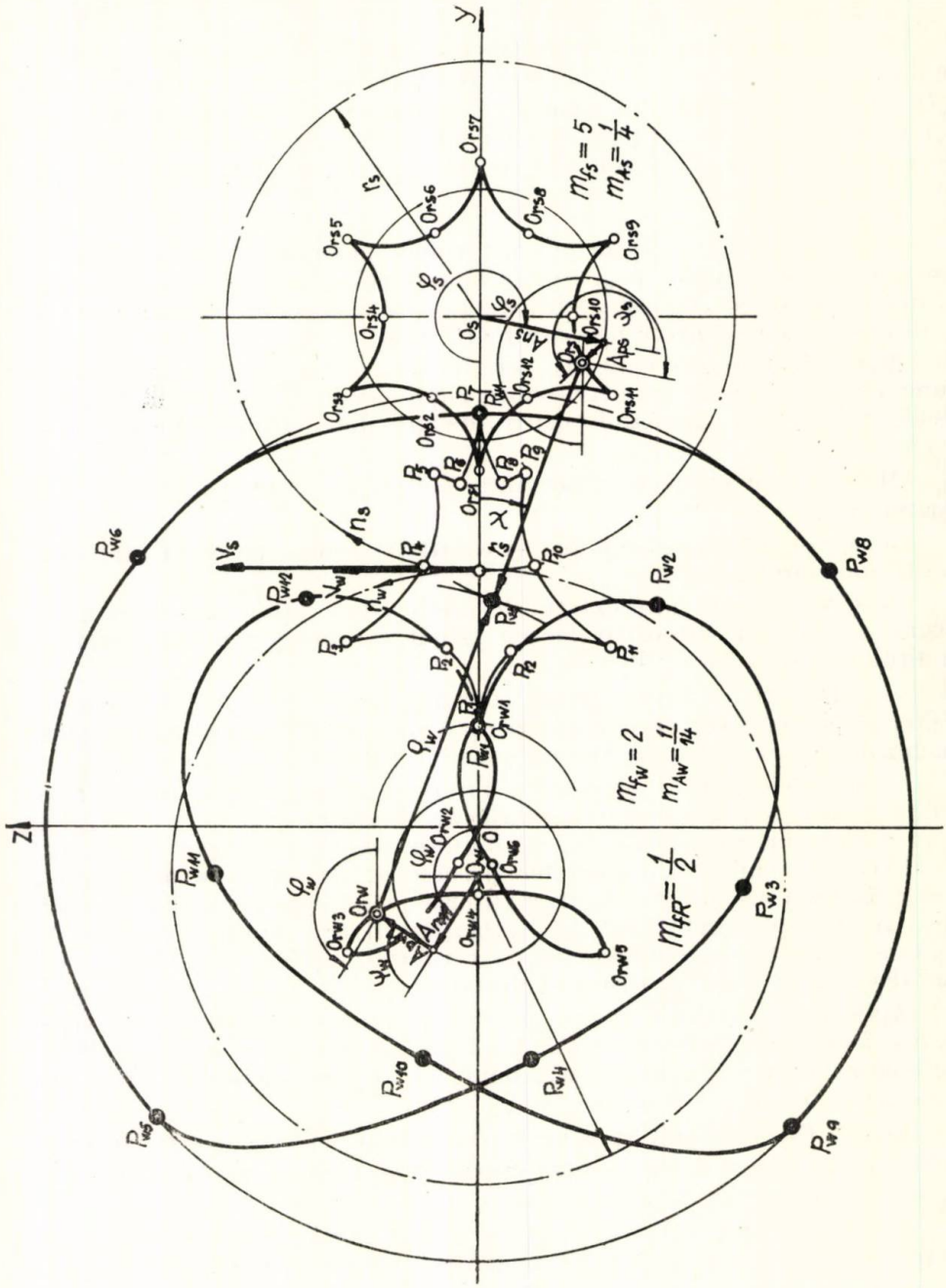


Fig. 6

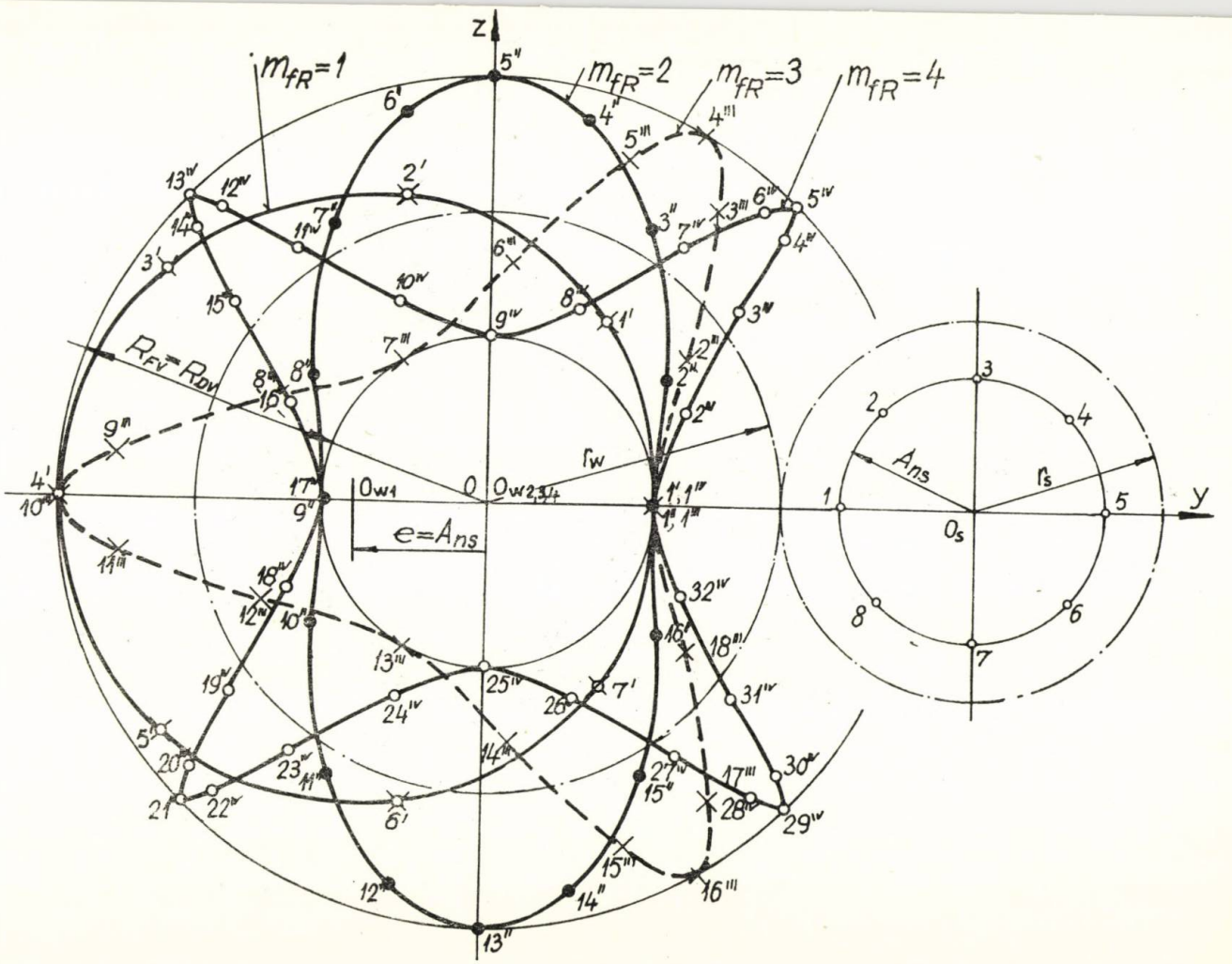
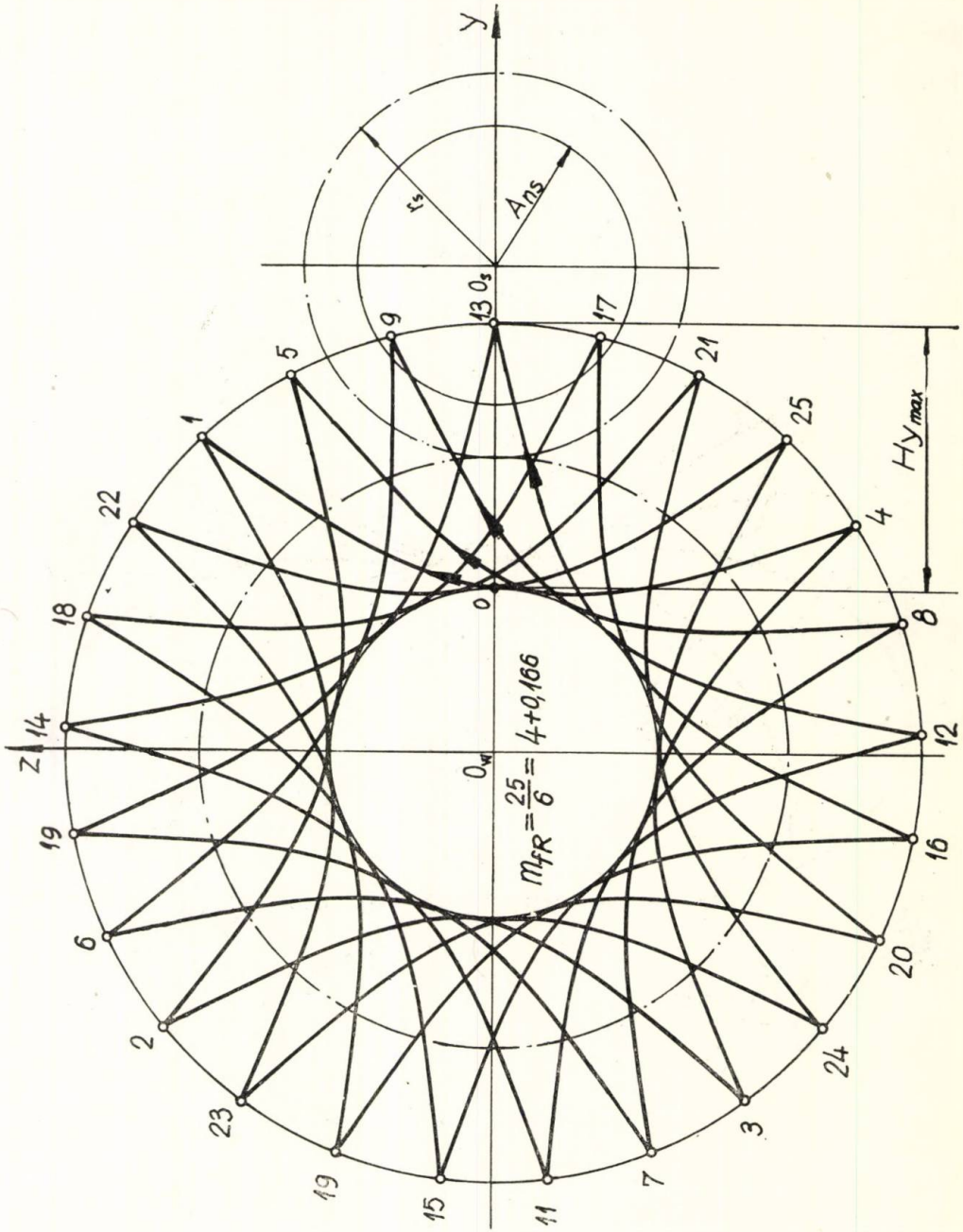


Fig. 7


y
z
r_s
A_{ns}
0_s
0_w
0
$m_{fR}=\frac{25}{6}=4+0{,}166$
Hy_{max}
1
2
3
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21
22
23
24
25

Drumul relativ maxim este $H_{y\,max} = 2\ A_{ns}$ și el determină : rugozitatea maximă, eroarea de rotunjime maximă și eroarea de diametru maximă.

Din lipsă de spațiu, concluziile cercetărilor vor face obiectul altei lucrări.

BIBLIOGRAFIE

1. P. Dodoc, *Ursachen der dynamischen Verlagerung der Werkstückdrehachse und ihre Auswirkungen auf die Herstellungsgenanigkeit beim Drehen*, Disertație, TU Dresden, 1967.
2. — *Trocoide de vibrații la axele principale ale mașinilor-unelte*, Construcția de mașini (I) **20**, *2* (1968) și (II) **20**, *3* (1968).
3. — *Fenomene de rezonanță la axele principale ale mașinilor unelte și influența lor asupra preciziei de prelucrare la strunjire*, St. cerc. mec. apl., **28**, *2* (1969).
4. — *Beitrag zur Theorie der Entstehung und Messung der Rauheit beim Drehen*, Rev. Roum. Sci. Techn. — Méc. Appl., **14**, *5* (1969).

UNELE ASPECTE ALE FRECĂRII ŞI UZURII CUPLELOR FIR-CAPTATOR ÎN TRACŢIUNEA ELECTRICA. I.

de C. STĂNESCU
Institutul politehnic Bucureşti,

B. DIMITROV
Centrul de mecanică a solidelor al Ministerului învăţământului

Procesul de uzare din zona de contact a cuplei fir-captator se desfăşoară sub forma a două procese simultane, în strînsă interdependenţă: uzarea mecanică propriuzisă şi uzarea de tip electroeroziv. Lucrarea de faţă constituie primă etapă a cercetărilor, studiindu-se influenţa diferiţilor parametri ai frecării (presiunea de contact, regimul de ungere, temperatura de lucru şi natura materialelor cuplei) asupra coeficientului de frecare şi a uzării acestor cuple, în absenţa curentului electric. Rezultatele obţinute vor fi utilizate ca elemente de comparaţie în cercetările ulterioare a fenomenelor de frecare şi uzare în prezenţa curentului electric.

1. ASPECTE GENERALE

Complexitatea fenomenelor de frecare-uzare creşte în condiţiile impuse de mişcarea de alunecare în prezenţa curentului electric, întîlnită la captatorii ce alimentează vehiculele cu tracţiune electrică. Pe baza datelor din literatură [1]—[8] se poate afirma că procesul de uzare care are loc în zona de contact a cuplei de frecare decurge sub forma a două procese simultane, în strînsă interdependenţă:

— uzarea mecanică propriu-zisă (de adeziune, abraziune), influenţată de compoziţia şi prelucrarea materialelor cuplei de frecare [4], de parametrii mecanici ai sistemului (viteza de alunecare, masa, presiunea de contact, frecvenţa de circulaţie, vibraţii etc), de calitatea lubrifiantului, de factorii meteorologici etc;

— uzarea de tip electroeroziv [2], [3], [7], [8] determinată de caracteristicile electrice ale sistemului: tensiunea şi densitatea curentului

electric, rezistența în zona de contact, viteza critică de scînteiere etc precum și de parametrii care influențează uzarea mecanică.

Ca urmare a complexității fenomenelor, cercetările sînt limitate deocamdată la transportul urban (tramvaie și troleibuze) și se desfășoară etapizat:

a) Studierea comportării cuplei de frecare în absența curentului electric.

b) Studierea frecării și uzării în prezența curentului electric continuu, pe instalații de laborator:

— la tensiuni joase,

— la tensiuni înalte.

c) Cercetări pe vehicole, în teren.

În prezenta lucrare sînt cuprinse numai cercetările din prima etapă determinîndu-se uzura mecanică propriu-zisă și coeficienții de frecare, urmînd a servi drept elemente de comparație pentru cercetările ulterioare. În același timp au fost elucidate o serie de probleme legate de proiectarea unei instalații de modelare a fenomenelor ce se vor studia în etapa a 2-a.

2. MATERIALELE UTILIZATE

2.1. Firul electric de contact din cupru electrolitic trefilat, conform STAS 686—65 [10]:

— cu secțiunea 80 mm², $\sigma_r = 36{,}2$ daN/mm² și $\varepsilon_r = 9{,}57\%$;

— cu secțiunea 100 mm², $\sigma_r = 37{,}7$ daN/mm² și $\varepsilon_r = 7{,}35\%$.

Duritatea ambelor tipuri de fire = 100—115 daN/mm².

2.2. Piesele de contact pentru tramvaie se confecționează din aluminiu slab aliat cu compoziția: Cu—3,2%, Fe-max 0,8%, Si-max 0,8%, Zn + Sb-max 0,1%, diferența procentuală Al.

Duritatea = 60—66 daN/mm².

2.3. Piesele de contact pentru troleibuze se confecționează prin turnare din fontă perlitică, cu grafit lamelar de lungime medie, avînd eutectic fosforos și urme de ferită.

Compoziția elementară este: C—3,1%, Mn—0,3%, Si—2,5%, P—0,5%, diferența procentuală Fe.

Duritatea = 150—180 daN/mm².

2.4. Ungerea firului de contact la troleibuze (periodică) și ungerea firului de contact la tramvaie (permanentă) se face cu vaselină, avînd compoziția: grafit coloidal (41%), vaselină RUL 100 (41%) și seu topit (18%).

3. DETERMINAREA COEFICIENȚILOR DE FRECARE

Experimentările au fost efectuate pe o instalație tip IMA—2 [6], care a suferit o serie de modificări necesare pentru a putea măsura coeficienții de frecare.

Cupla de frecare este formată în acest caz dintr-o bucşă în rotaţie Ø = 22,5 mm (*1*) şi o pastilă (*2*) care este apăsată pe suprafaţa bucşei cu forţa (F_N) prin intermediul unui braţ flexibil (*8*) pe care sînt lipite mărci tensometrice (*7*); pentru măsurarea forţelor normală şi tangenţială se

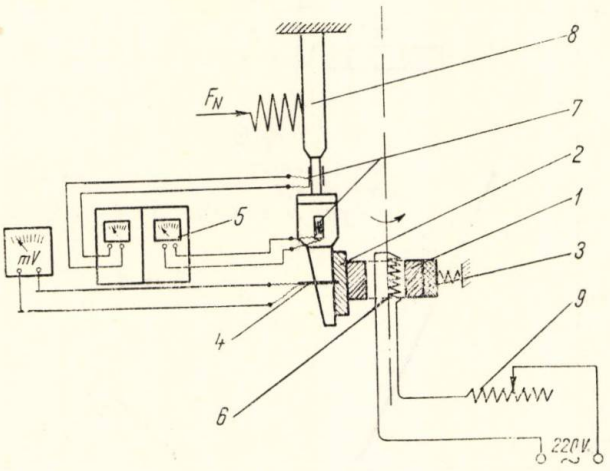


Fig. 1. — Schiţa de principiu a instalaţiei pentru determinarea coeficientului de frecare.

utilizează tensometre tip Orion (*5*). Cupla de frecare se poate încălzi cu rezistenţa electrică (*6*) a cărei temperatură se reglează cu ajutorul reostatului (*9*). Temperatura la suprafaţa cuplei de frecare se măsoară cu un termocuplu (*4*). Ungerea suprafeţelor de contact se face cu vaselină cu ajutorul unei pîsle (*3*). Instalaţia are trei trepte de viteză: V = 0,72; 1,63; 3,31 m/s.

Măsurarea coeficientului de frecare s-a efectuat după obţinerea unei suprafeţe de contact prin uzare (rodarea prealabilă a pastilei). Măsurarea dimensiunilor acestei suprafeţe, asimilată cu un dreptunghi, a fost făcută la microscop, iar presiunea P s-a calculat raportînd forţa normală (F_N) la suprafaţa aparentă a urmei.

Deoarece instalaţia nu este prevăzută cu un circuit de răcire, a funcţionat perioade de timp foarte scurte (circa 2 minute), urmate de perioade de răcire. Fiecare punct din diagramele ridicate a fost obţinut prin medierea a cinci determinări succesive. Din diagramă (fig. 2), se constată că temperatura influenţează în mare măsură valoarea coeficienţilor de frecare, existînd o valoare optimă de funcţionare, care pentru lubrifiantul utilizat este de circa 80°C.

Regimul de ungere a cuplei de frecare are o influenţă determinantă asupra funcţionării acesteia. Experimentările s-au efectuat în trei regimuri de ungere diferite, care au căutat să simuleze condiţiile din teren. În timp ce ungerea permanentă (cazul optim) şi regimul fără ungere

(cazul cel mai defavorabil) a fost relativ uşor de modelat, ungerea periodică s-a realizat sub forma unei pelicule de lubrifiant pe suprafaţa de contact

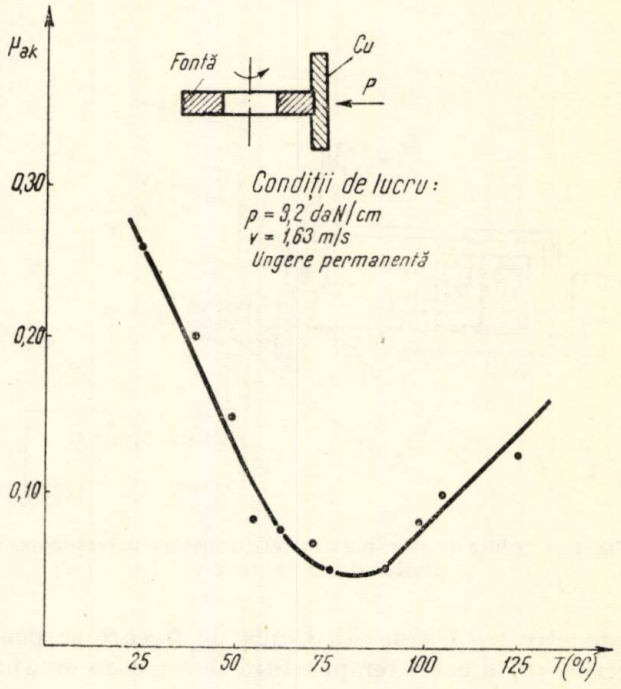


Fig. 2. — Influenţa temperaturii asupra coeficientului de frecare cinetic.

a cuplei de frecare în timpul rodării prealabile, după care dispozitivul de ungere a fost îndepărtat.

Se observă creşterea coeficienţilor de frecare cu cît ungerea este mai săracă, atingîndu-se valoarea $\mu_{ak} = 0{,}9$ în regimul fără ungere (pentru $P = 15$ daN/cm^2). Coeficienţii de frecare la ungerea periodică se situează grafic şi valoric între coeficienţii de frecare a celor două regimuri extreme. Presiunea are efecte diferite: în prezenţa lubrifiantului, coeficienţii de frecare scad cu creşterea acesteia, iar în absenţa lubrifiantului (regimul fără ungere) coeficienţii de frecare cresc o dată cu creşterea presiunii, avînd o variaţie cvasiliniară.

Natura materialelor cuplei de frecare utilizată nu exercită o influenţă deosebită asupra coeficientului de frecare în regim de ungere permanentă la viteze mai mici de 2 m/s (fig. 4).

La viteze mai mari, datorită adeziunilor şi tendinţelor de gripare, coeficientul de frecare al cuplei Al/Cu prezintă o creştere mai accentuată în raport cu cupla fontă/Cu, ceea ce era de aşteptat.

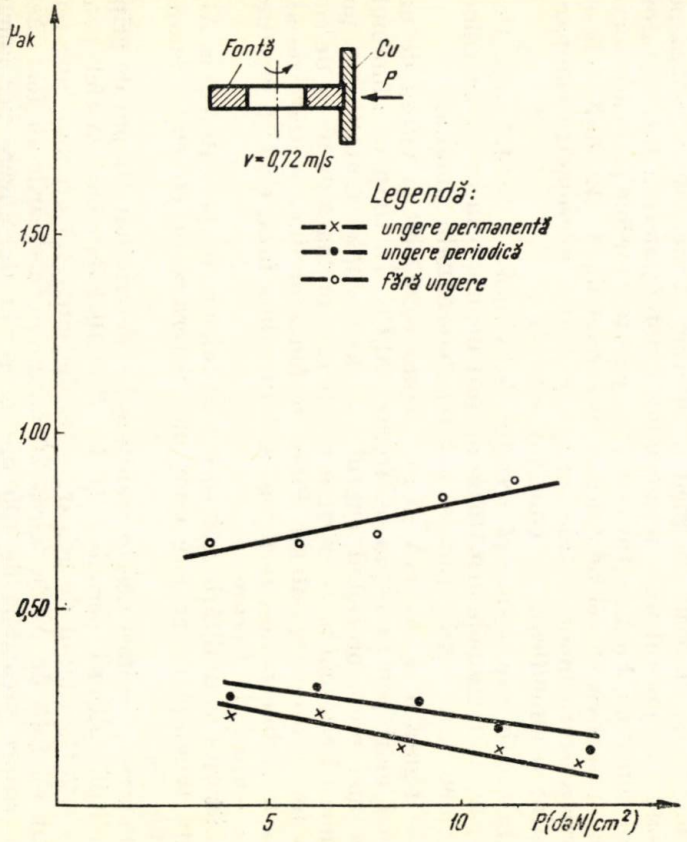


Fig. 3. — Influența regimului de ungere și a presiunii asupra coeficientului de frecare cinetic.

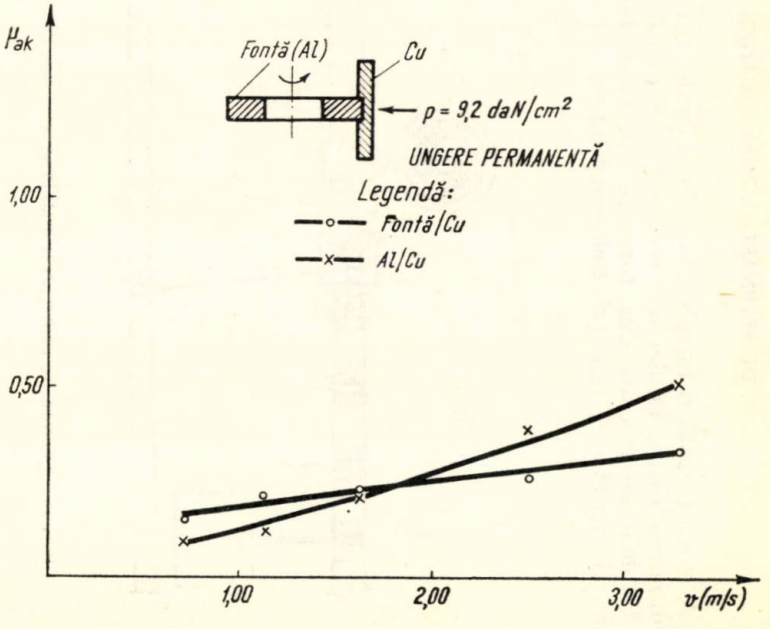


Fig. 4. — Influența materialelor cuplei de frecare și a vitezei de alunecare asupra coeficientului de frecare cinetic.

4. DETERMINAREA UZURII MECANICE

A fost utilizată o instalație cu cinci cuple, concepută inițial pentru determinarea uzurii cuplei de frecare PTFE/metal [5].

Cuplele de frecare sînt formate din cinci bucșe Ø = 54 mm (*1*) și cinci știfturi Ø = 7 mm (*2*). Cele cinci bucșe, separate prin distanțiere,

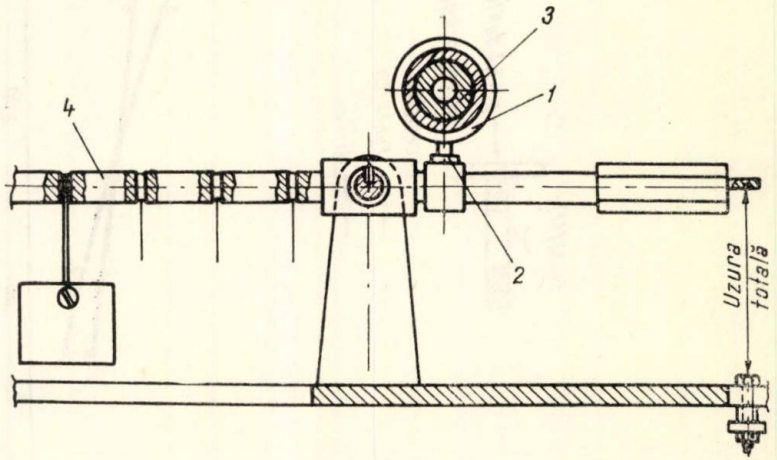


Fig. 5. — Schița de principiu a instalației cu cinci cuple de frecare.

sînt solidarizate cu axul (*3*), răcit în interior cu apă; temperatura poate fi reglată cu ajutorul unui termocuplu + potențiometru înregistrator + releu de comandă. Fiecare știft este fixat pe cîte o pîrghie (*4*), care servește atît la încărcarea cuplei de frecare cu sarcini de 1—12 daN, cît și la măsurarea uzurii liniare totale, cu ajutorul unui micrometru comparator (se obține o amplificare de cinci ori a uzurii).

Instalația are o singură treaptă de viteză: $V = 4{,}3$ m/s. Datele care apar în diagramele următoare au fost deduse prin medierea valorilor celor cinci uzuri totale (bucșă + știft) determinate simultan.

În figura 6 se observă că atît uzura totală cît și viteza de uzare sînt mai mari pentru cupla de frecare Al/Cu. În timp ce aluminul se uzează mai mult protejînd cuprul, în cazul cuplei fontă/Cu se poate aproxima că cea mai mare parte a uzurii este preluată de piesa de cupru (uzura fontei este neglijabilă). Piesa de fontă produce o uzare de abraziune asupra bucșei de cupru mai ales în prima fază, cînd se efectuează rodarea cuplei de frecare.

Datorită solubilității reciproce a metalelor componente cupla Al/Cu prezintă tendințe de gripare mult mai puternice de cît cupla fontă/Cu (vezi fig. 7).

Pentru a verifica aceste rezultate s-a determinat timpul de gripare în condițiile ungerii periodice și la $P = 10{,}2$ daN/cm². Astfel pentru cupla fontă/Cu timpul de gripare este de circa 4,5 ori mai lung (circa 90 minute), față de Al/Cu (circa 20 minute). Încercările au fost făcute după o rodare prealabilă de 100 ore în regim de ungere permanentă.

Pentru a corecta şi completa rezultatele cantitative ale uzurii obţinute cu instalaţia de mai sus (vezi fig. 5), s-a analizat la microscop aspectul suprafeţelor supuse procesului de uzare.

La cupla de frecare Al/Cu, regimul de ungere permanentă micşorează pericolul de gripare deşi nu-l elimină complet (vezi fig. 8). Vaselina acoperă majoritatea suprafeţei cu o peliculă protectoare. Transferul de

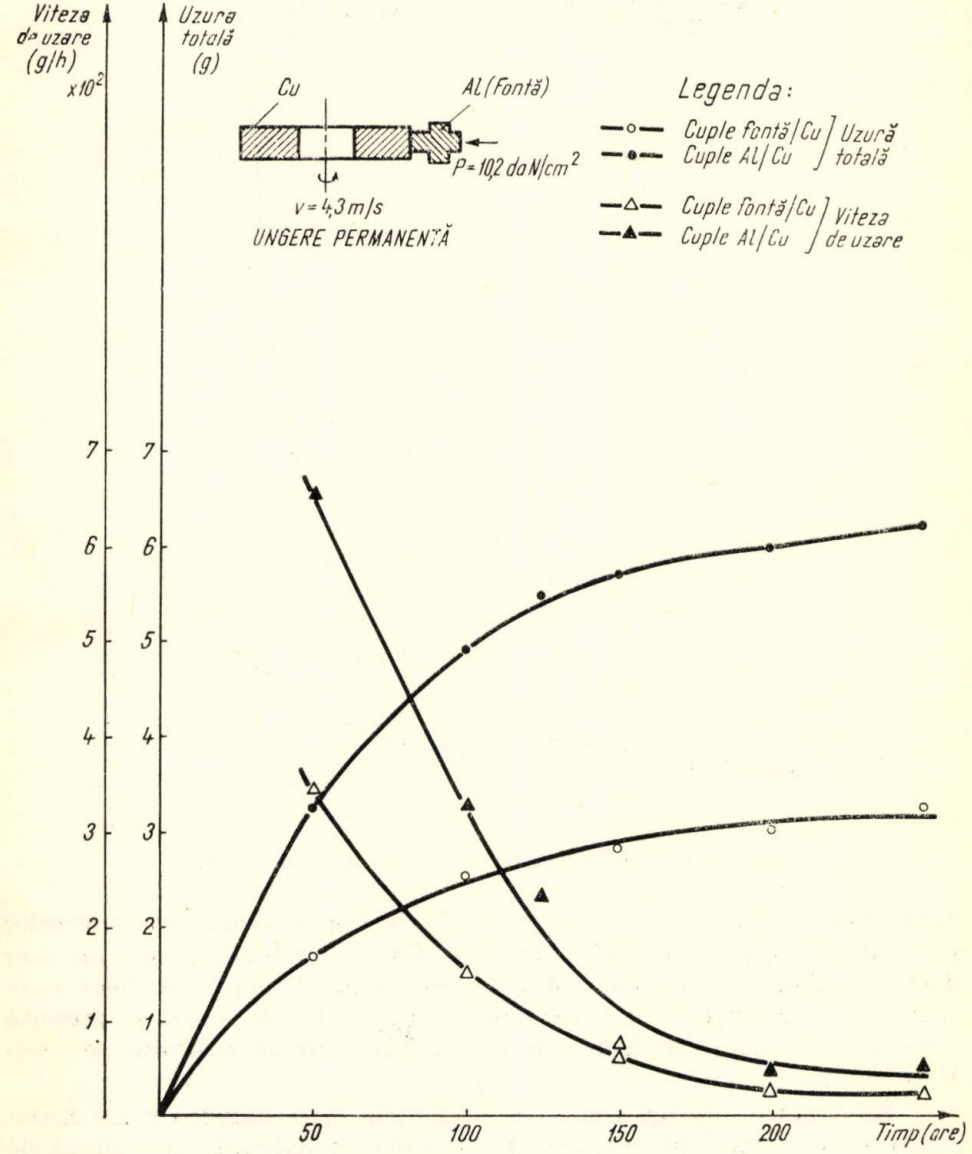


Fig. 6. — Influenţa naturii materialelor cuplei de frecare asupra uzurii totale şi a vitezei de uzare·

metal are loc rar și în strat subțire, rizurile sînt puțin adînci și provin mai probabil din perioada de rodare.

Ungerea periodică favorizează griparea cuplei Al/Cu (vezi fig. 9). Examinînd suprafețele după determinarea timpului de gripare, se con-

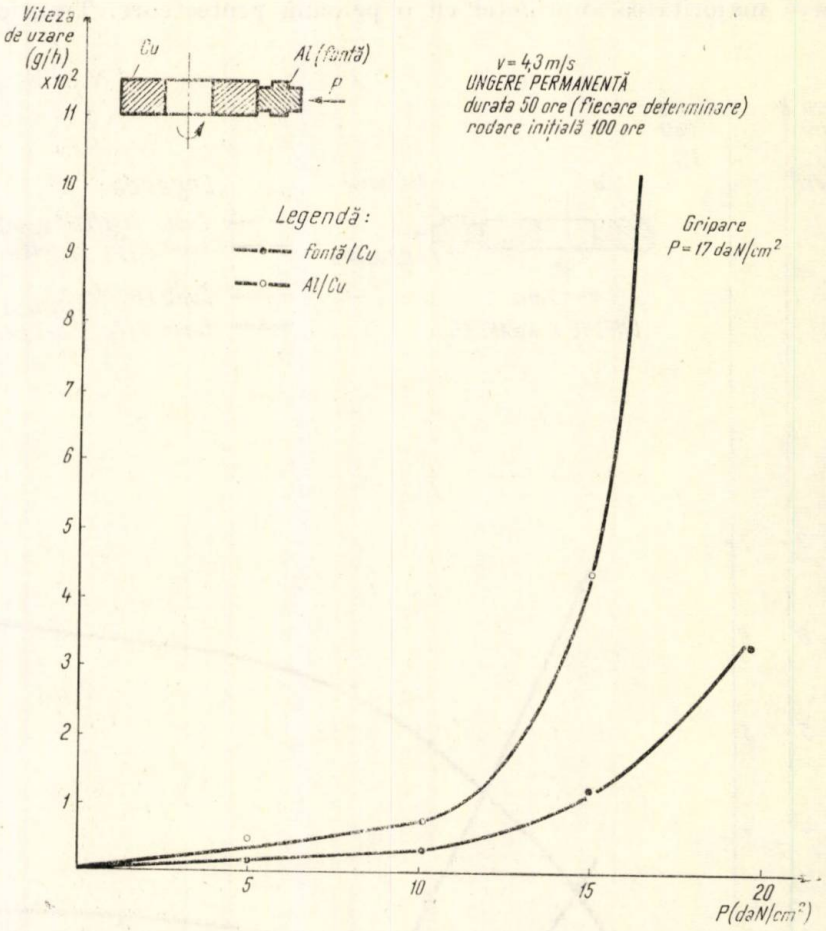
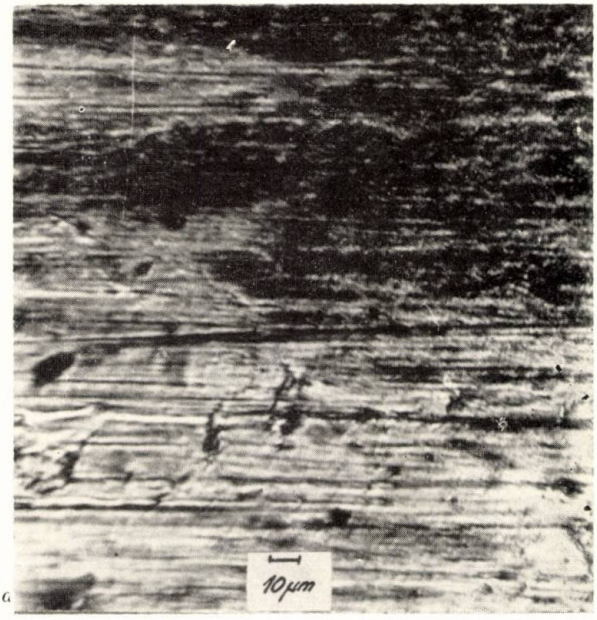


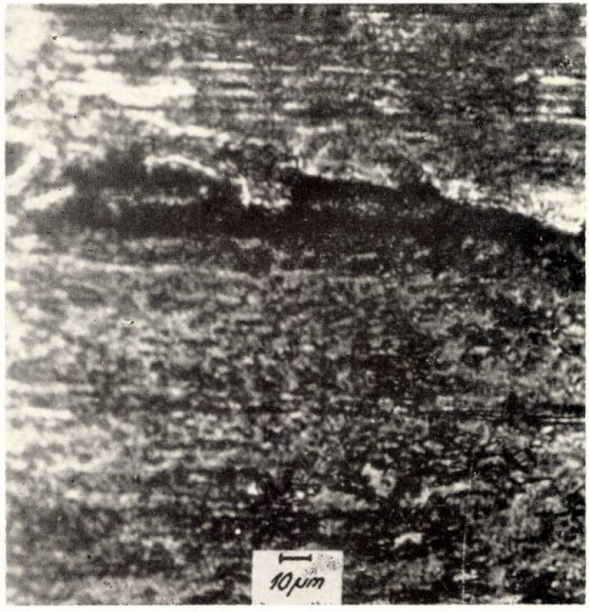
Fig. 7. — Influența presiunii asupra vitezei de uzare.

stată transferul de Al și Cu pe suprafețele opuse. Grosimea straturilor aderente variază pe aceeași suprafață. Pare că aluminiul are un ușor efect lubrifiant; pelicula de aluminiu aderentă la cupru se lustruiește în timpul funcționării, dar se exfoliază treptat. Ambele suprafețe prezintă sgîrieturi profunde. Zmulgerile de metal sînt prezente mai ales pe piesa de aluminiu.

La cupla de frecare fontă/Cu diferențele între ungerea permanentă și cea săracă sînt mai mici de cît la cupla precedentă. În regimul de ungere permanentă (vezi fig. 10) constatăm că pe suprafața piesei de



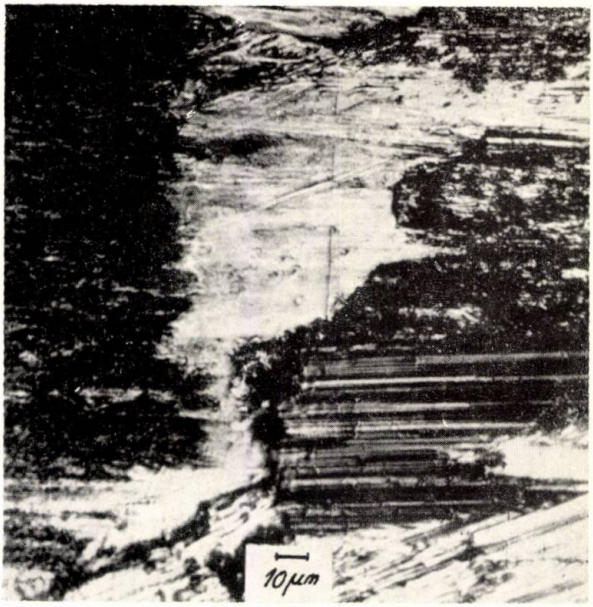
a



b

Fig. 8. — Cupla de frecare Al/Cu în regim de ungere permanentă : a) suprafaţa ştiftului de aluminiu ; b) suprafaţa bucşei de cupru.

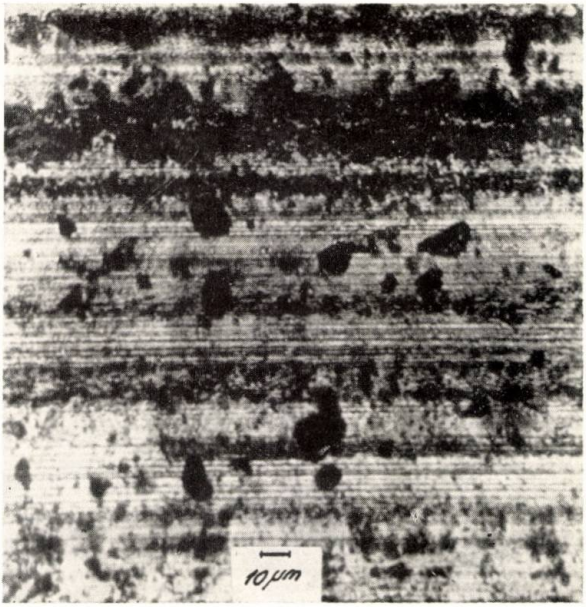
a



b

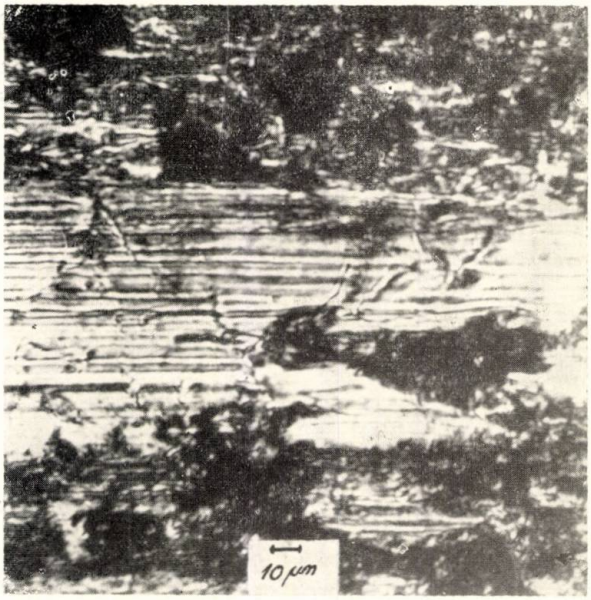
Fig. 9. — Cupla de frecare Al/Cu în regim de ungere periodică : a) suprafaţa ştiftului de aluminiu ; b) suprafaţa bucşei de cupru.

a



b

Fig. 10. — Cupla de frecare fontă/Cu în regim de ungere permanentă : a) suprafaţa ştiftului de fontă ; b) suprafaţa bucşei de cupru.



a

b

Fig. 11. — Cupla de frecare fontă/Cu în regim de ungere periodică : a) suprafaţa ştiftului de fontă ; b) suprafaţa bucşei de cupru.

fontă se menţine uneori chiar structura lamelară a grafitului, suprafaţa piesei fiind mai puţin atacată de cît aceea a bucşei de cupru, care prezintă multiple aşchieri şi smulgeri de metal.

În cazul ungerii periodice distrugerea suprafeţelor este cu mult mai puternică (vezi fig. 11). În aceste condiţii rezistenţa piesei de fontă scade brusc : pe lîngă zgîrieturi apar şi zmulgeri puternice de material, iar particulele de uzură pot fi regăsite înglobate în suprafaţa bucşei de cupru.

În ambele regimuri de ungere se constată şi transferul cuprului pe piesa de fontă ; cu toate acestea nu poate fi vorba de fenomene de gripare propriu-zise, tipul de uzare predominant fiind cel de abraziune, regimul de uzură severă apărînd datorită proceselor de aşchiere.

5. CONCLUZII

— În prezenţa lubrifiantului (vaselină grafitată), coeficienţii de frecare cinetici variază cu presiunea (scad cu creşterea acesteia) în limite restrînse şi se menţin în domeniul $\mu_{ak} = 0{,}1-0{,}4$ pentru presiuni mai mici de 15 daN/cm^2.

— Funcţionarea fără ungere provoacă creşterea coeficientului de frecare (este direct proporţional cu presiunea) putînd ajunge la $\mu_{ak} = 0{,}9$ pentru P = 15 daN/cm^2.

— Pentru cupla şi materialele încercate coeficientul de frecare depinde relativ puţin de natura acestora (în regim de ungere permanentă).

— La ambele cuple de frecare ponderea mare a uzurii rezultă în perioada de rodare, ceea ce impune o prelucrare mai atentă a suprafeţei piesei de captare a curentului.

— Ungerea permanentă protejează mai bine cupla de frecare Al/Cu, care poate funcţiona numai în acest regim (în regimul de ungere periodică se ajunge rapid la griparea acestei cuple).

— La cupla Al/Cu predomină tipul de uzare de adeziune, în timp ce la cupla fontă/Cu apare mai ales uzarea de abraziune.

Menţionăm că aceste concluzii s-au desprins din experienţe făcute în absenţa curentului electric. În etapele care urmează experienţele vor continua în prezenţa curentului electric, urmărindu-se a se clarifica unele aspecte ale mecanismului uzării de electroeroziune în contactele alunecătoare. În această situaţie, este posibil ca unele dintre concluziile de mai sus să fie infirmate sau corectate.

Primită la redacţie la 18 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Corodeanu I., *Influenţa reciprocă dintre pantograf şi linia de contact aeriană în tracţiunea electrică feroviară*, Studiu de sinteză documentară apărut în Editura centrului de documentare şi Publicaţii tehnice a Ministerului Căilor Ferate, Bucureşti, *1—60* (1966).
2. Germer L. H., *The corosion of relay contacts*, Wear **3**, *3*, 188—199 (1960).
3. Jones F. L., *The physics of electrical contacts*, At the Clarendon Press, Oxford 1957.

4. KASPEROVSKI O., *Materiale de contact pentru captatoarele de curent ale vehicolelor electrice*, Elektrische Bahnen **34**, *8*, 170—182 (1967).
5. ILIUC I., PAVELESCU D., MUŞAT M., HAAS TH., *Comportarea la frecare şi uzare a politetrafluoretilenei cu şi fără adaosuri*, Comunicarea prezentată la a II-a Conferinţă de mecanică tehnică, Bucureşti, 29—31 octombrie 1970.
6. PAVELESCU D., ILIUC I., BARBUL S., *Installation for determining the lubricating qualities of oils and the resistance to wear of materials*, Brevet Anglia nr. 935058/1963 şi Franţa nr. 1. 324. 106.
7. PRICE M. I., *Sliding electrical contacts*, Proceedings of Conference on Lubrication ond Wear, London 25—29 septembrie 1967.
8. STĂNESCU C., *Stadiul actual al cuplelor de frecare pentru captatoarele de curent în tracţiunea electrică*, Referat documentar 1969.
9. TRAVNICEK I., *Uzura în exploatarea firului de cale*, Zeleznicni Doprava a Technica, *11*, 333—336 (1960).
10. STAS 686—65, *Linii aeriene pentru tracţiunea electrică. Fir de contact.*

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

Tomul 30, nr. 6 1971

SUMAR

STUDII

Pag.

N. N. PATRAULEA, O metodă aleatorie pentru ecuaţia lui Boltzmann 1281

T. OROVEANU şi I. SPULBER, Asupra difuziei convective în tuburi de secţiune circulară 1287

N. N. PATRAULEA, ELEONORA MALAIU şi N. POSTELNICU, Aplicarea unei noi metode aleatorii la calculul pseudoşocului 1299

A. CHISĂLIŢĂ, Teorema momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotaţie în mişcarea plană 1309

L. LIBRESCU şi TR. BĂDOIU, Efectul orientării ortotropicităţii în problema flutterului supersonic al structurilor subţiri, eterogene, cilindrice circulare, de lungime infinită 1313

A. V. DARABONT, Vibraţiile transversale ale plăcilor plane cu mase concentrate ataşate 1331

M. BLUMENFELD, CORINA VOICU şi H. GHEORGHIU, Calculul iterativ al frecvenţelor proprii de vibraţie la barele drepte cu secţiune variabilă în trepte pe baza metodei celor trei necunoscute 1353

MAGDALENA POSEA, O metodă nouă pentru calculul flanşelor 1369

I. TERTEA şi TR. ONEŢ, Ruperea elementelor încovoiate din beton uşor cu granulit, armate cu bare netede (OB 38) şi cu profil periodic (PC 52) 1399

I. GIURGIU şi LUCIA GIURGIU, Metoda de repartizare a încărcărilor orizontale la clădirile etajate realizate cu diafragme verticale aşezate nesimetric 1419

L. BEINER, O metodă numerică pentru studiul mecanismului manometrelor cu tub Bourdon 1429

GH. ZGURĂ, Consideraţii privind calculul şi construcţia unei mese dinamometrice universale pentru măsurarea forţelor de aşchiere 1447

M. IVAN şi G. RUSAN, Sistem de autoreglare pe cale hidraulică a vitezei de avans la maşinile de prelucrat prin procedeul electrolitic 1461

RECENZII 1477

INDEX ALFABETIC 1479

O METODĂ ALEATORIE PENTRU ECUAȚIA LUI BOLTZMANN

de N. N. PATRAULEA
I.M.F.C.A.

Se prezintă o metodă aleatorie [1], [2], [3] pentru rezolvarea ecuației de bază a gazelor rarefiate. Metoda se aplică atît ciocnirilor elastice, cît și unor modele oarecare de legi de ciocnire. Se fac evaluări aleatorii ale integralelor de ciocnire pe domeniul cu opt dimensiuni ($\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{P}$), atașat fiecărui punct al unei rețele finite din spațiul fizic. Convergența satisfăcătoare se bazează în special pe micșorarea dispersiei prin alegerea vitezelor aleatorii $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$ ale fasciculelor considerate cu densitate de probabilitate, $f/\int f \mathrm{d}\bar{v}$.

1. Reprezentăm funcția de distribuție în trepte, definind în fiecare domeniu mic Δv_k din spațiul vitezelor funcții $f_k(t, \bar{r})$, definite prin aceea că $f_k \Delta\bar{v}_k$ este numărul probabil de molecule în $\Delta\bar{v}_k$ și în unitatea de volum a spațiului fizic.

Trunchiind convenabil spațiul vitezelor, vor exista un număr finit K de celule $\Delta\bar{v}_k$, numerotate într-o ordine care deocamdată nu interesează.

Ecuația lui Boltzmann pentru fasciculul molecular se va scrie

$$\Delta\bar{v}_k \cdot \frac{\partial f_k}{\partial t} + \bar{v}_k^* \frac{\partial f_k}{\partial \bar{r}} \Delta\bar{v}_k = \Delta\bar{v}_k \cdot \frac{\partial f_{ek}}{\partial t}, \tag{1.1}$$

termenul din partea dreaptă reprezentînd integrala ciocnirilor, iar v_k^* o viteză medie din $\Delta\bar{v}_k$.

Vom pune acum membrul doi al ecuației (1.1), sub forma

$$\Delta\bar{v}_k \cdot \frac{\partial f_{ek}}{\partial t} = \frac{1}{2} \int_{\bar{v}_1} \int_{\bar{v}_2} \int_{\bar{P}} f(\bar{v}_1) f(\bar{v}_2) |\bar{v}_2 - \bar{v}_1| S_k(\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{P}) \, \mathrm{d}\bar{v}_1 \, \mathrm{d}\bar{v}_2 \, \mathrm{d}P, \tag{1.2}$$

unde funcţiile S_k sînt definite astfel:

$$S'_{k(1,2)} = \begin{cases} S_k = S'_k - S''_k, \\ 1 \text{ dacă } \overline{v}'_1 \subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}'_2 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 1 \quad ,, \quad \overline{v}'_2 \subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}'_1 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 2 \quad ,, \quad \overline{v}'_1 \subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}'_2 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 0 \quad ,, \quad \overline{v}'_1 \not\subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}'_2 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \end{cases} \tag{1.3}$$

$$S''_{k(1,2)} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \overline{v}_1 \subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}_2 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 1 \quad ,, \quad \overline{v}_2 \subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}_1 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 2 \quad ,, \quad \overline{v}_1 \subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}_2 \subset \Delta\overline{v}_k, \\ 0 \quad ,, \quad \overline{v}_1 \not\subset \Delta\overline{v}_k,\ \overline{v}_2 \not\subset \Delta\overline{v}_k. \end{cases} \tag{1.4}$$

Vitezele $\overline{v}'_1$ şi $\overline{v}'_2$ sînt vitezele pe care le capătă moleculele după ciocnire, conform ecuaţiilor ciocnirilor elastice sau neelastice. Funcţia S' corespunde sporirii fasciculului, $\overline{v}_k$, datorită ciocnirilor mutuale ale celorlalte fascicule, în timp ce funcţia S'' corespunde pierderilor suferite de fasciculul $\overline{v}_k$ datorită ciocnirilor. Prin $\mathrm{d}\overline{P}$ s-a notat un element de suprafaţă în jurul punctului P în planul perpendicular pe viteza relativă $\overline{v}_2 - \overline{v}_1$.

2. O estimare aleatorie a integralei (1.2) este

$$\Delta\overline{v}_k \cdot \frac{\partial f_{ek}}{\partial t} = \frac{1}{2} D_{\overline{v}}^2 D_P \cdot \frac{\sum_{i=1}^{N} f_{1i} f_{2i} |\overline{v}_{2i} - \overline{v}_{1i}| S_i}{N}, \tag{2.1}$$

unde N este numărul sistemelor de valori aleatorii $(\overline{v}_{1i}, \overline{v}_{2i}, \overline{P}_i)$, $D_{\overline{v}}$ domeniul vitezelor trunchiat convenabil, iar D_P aria cercului (al cărui plan este perpendicular pe viteza relativă $\overline{v}_2 - \overline{v}_1$), avînd raza egală cu diametrul unei molecule[1]). Variabilele aleatorii $\overline{v}_i$ şi P sînt repartizate uniform pe domeniile respective.

Dacă însă pentru restrîngerea dispersiei se iau variabilele aleatorii $\overline{v}_{1i}$, $\overline{v}_{2i}$, cu densitatea de probabilitate

$$f \Big/ \int f \mathrm{d}\overline{v}, \tag{2.2}$$

atunci vom avea estimaţia mai convenabilă

$$\Delta\overline{v}_k \cdot \frac{\partial f_{ek}}{\partial t} = \frac{1}{2} \left[\int f \mathrm{d}\overline{v} \right]^2 \cdot D_P \frac{\sum_{i=1}^{N} S_{ik} |\overline{v}_{2i} - \overline{v}_{1i}|}{N}. \tag{2.3}$$

[1]) Diametrul va fi definit convenabil în cazul moleculelor nerigide.

3. Principial, numerotarea celulelor în spațiul vitezelor poate fi oarecare. De exemplu, dacă componentele vectorului-viteză pentru care adoptăm, respectiv, indicii 1, 2, 3 sînt împărțite, respectiv, în n_1, n_2, n_3 intervale, fiecărui interval atașîndu-i-se, respectiv, un indice α, β, γ, unui grup de indici α, β, γ care definește o celulă din spațiul vitezelor i se poate atașa un indice unic, prin formula

$$I = n_1 n_2 (\gamma - 1) + n_1 (\beta - 1) + \alpha, \quad 1 \leqslant I \leqslant n_1 \cdot n_2 \cdot n_3. \tag{3.1}$$

Reciproc, unei valori a indicelui I îi corespunde un singur grup de indici α, β, γ. Într-adevăr,

$$\gamma = \text{Întreg} \frac{I}{n_1 \cdot n_2} + 1. \tag{3.2}$$

Restul împărțirii $I/n_1 \cdot n_2$ se împarte mai departe la n_1. Partea întreagă a acestei împărțiri va fi $\beta - 1$, iar restul va fi γ. De altfel, ordinea definită coincide cu ordinea de înmagazinare a calculatorului IBM.

4. În scopul realizării efective a tragerii aleatorii cu densitatea $f_k / \sum_k f_k$ vom presupune mai departe spre simplificare că celulele vitezelor $\Delta \bar{v}_i$ sînt egale și vom introduce funcția de distribuție

$$\mathcal{F}_i = \sum_{j=1}^{i} f_j, \quad i = 1, 2, \ldots, I_{\max} (= n_1 \cdot n_2 \cdot n_3),$$

la fiecare etapă a iterației. Dacă acum R_1 este valoarea unei variabile aleatorii uniform repartizate pe intervalul 0,1, va trebui să găsim o valoare I_1 a indicelui I care să satisfacă relația

$$\frac{\mathcal{F}(I_1 - 1)}{\mathcal{F}(I_{\max})} < R_1 \leqslant \frac{\mathcal{F}_{I_1}}{\mathcal{F}(I_{\max})}. \tag{4.1}$$

Determinarea lui I_1 se poate face printr-un algoritm simplu la mașina de calcul, care constă în încadrarea succesivă a indicelui I între două valori M_1 și M_2, considerarea indicelui

$$I = \text{Întreg} \frac{M_1 + M_2}{2} \tag{4.2}$$

și eliminarea părții din intervalul $M_2 - M_1$ care nu cuprinde indicele ș.a.m.d. Prin maximum K încercări se poate determina indicele F dintr-un număr total de 2^K indici I. Dacă numărul tragerilor aleatorii pentru fiecare iterație este suficient de mare, cum s-ar cere, de exemplu, în cazul cînd ne propunem să descriem evoluția procesului de relaxare în timp, este posibil să fie eficient să se procedeze la o inversare a funcției $\frac{\mathcal{F}}{\mathcal{F}_{\max}}(I)$.

În acest scop se înmulțește $\mathcal{F}(I)/\mathcal{F}_{max}$ cu un factor numeric arbitrar suficient de mare M și ne restrîngem la precizia care rezultă luînd numai partea întreagă:

$$N_f(I) = \text{Întreg}\left(M\frac{\mathcal{F}(I)}{\mathcal{F}_{max}}\right). \tag{4.3}$$

Cu un algoritm simplu se poate face inversiunea celor două variabile întregi N_f și I, astfel încît N_f să fie indicele independent, iar I funcția. Se înțelege că, în general, vectorul I (N) va ocupa mai multă memorie, astfel că din acest punct de vedere prima metodă este mai avantajoasă.

5. Notînd cu δ diametrul unei molecule, presupusă aici rigidă, și cu β viteza cea mai probabilă într-un punct caracteristic, unde distribuția este maxwelliană, sau altă viteză caracteristică, vom pune

$$f = \delta^{-3}\beta^{-3}F;\ \bar{r} = \delta\bar{R};\ \bar{v} = \beta\bar{V};\ t = \frac{\delta}{\beta}\cdot T. \tag{5.1}$$

Ecuația (2.3) devine

$$\Delta\bar{V}_k\frac{\partial F_k}{\partial T} + \Delta\bar{V}_k\bar{V}_k\frac{\partial F}{\partial\bar{R}} = \frac{\pi}{2N}(\Sigma F_j\Delta\bar{V}_j)^2\sum_{\alpha=1}^{N} S_{\alpha,k}\,|\,\bar{V}_{m(\alpha)} - \bar{V}_{m(\alpha)}\,|, \tag{5.2}$$

indicii m și n referindu-se la moleculele care se ciocnesc. Vom avea deci la $T + \Delta T$

$$\Delta\bar{V}_k F_k(\bar{R},\ T+\Delta T) = \Delta\bar{V}_k F_k(\bar{R} - \bar{V}_k\Delta T,\ T) +$$

$$+\frac{\pi\Delta T}{2N}(\Sigma F_j\Delta\bar{V}_j)^2\sum_{\alpha=1}^{N} S_{m(\alpha),\,n(\alpha),\,k}\cdot|\,\bar{V}_m - \bar{V}_n\,|. \tag{5.3}$$

S-ar putea considera în loc de diametrul δ un parcurs liber mijlociu caracteristic λ și atunci la ultimul termen al ecuației (5.3) trebuie să se pună (pentru domeniul lui P) $\pi\dfrac{\delta^2}{\lambda^2}$ în loc de π.

S-ar fi putut de asemenea să se adimensionalizeze prin raportarea la lungimea $n^{-1/3}$ în loc de λ.

Pentru obținerea unei precizii satisfăcătoare, și în special în cazul cînd interesează și studiul evoluției stărilor în funcție de timp, timpul adimensional ΔT care apare în ecuația (5.3) trebuie să fie ales suficient de mic, iar numărul de ciocniri aleatorii considerate în ΔT să fie suficient de mare.

Evident, un compromis trebuie să se facă astfel încît să rezulte și durate rezonabile la calculator.

În programare trebuie să se țină seama și de faptul că $F \geqslant 0$ și, dacă în urma unor calcule rezultă F negativ, se va lua $F = 0$.

Pentru ilustrare am aplicat metoda de mai sus la fenomenul cunoscut în literatură sub denumirea de „pseudoșoc". În acest caz, relaxarea este identică în fiecare punct din spațiu fenomenul care depinde numai de timp. Rezultatele obținute au fost în acord cu realitatea.

Primită la redacție la 23 aprilie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. G. A. Bird, *Approach to translational equilibrium in a rigid sphere gas*, Physics of Fluids, **6**, 1518 (1963).
2. M. Wachman, B. B. Hamel, A *disirate ordinale Technique for the non linear Boltzmann equation with application to Pseudo-Shock Relaxation*, V Symposium of R. D. G., vol. I, 1966, p. 675.
3. A. Nordsick, *Monte Carlo Evaluation of the Boltzman Collisin Integral*, V Symposium of R.D.G., vol. I, 1966, p. 695.

ASUPRA DIFUZIEI CONVECTIVE ÎN TUBURI DE SECȚIUNE CIRCULARĂ

de T. OROVEANU și I. SPULBER
Institutul de petrol Ploiești
Centrul de mecanică a solidelor

Se prezintă o soluție aproximativă pentru determinarea variației concentrației atunci cînd într-un tub de secțiune circulară prin care curge un lichid se introduce un altul, miscibil cu primul. Problema, fiind importantă, a făcut obiectul unui mare număr de cercetări, în special pentru cazul mai simplu al mișcării laminare. Din cauza unor dificultăți de ordin matematic, toate soluțiile existente sînt fie aproximative, fie numerice. Soluția prezentată se bazează pe o aproximație referitoare la termenul de transport convectiv, care conduce la un rezultat relativ simplu și permite să se calculeze lungimea zonei de amestec dintre cele două lichide, definită convenabil.
În continuare se rezolvă aceeași problemă neglijîndu-se difuzia longitudinală și se arată că un rezultat corect din punct de vedere fizic nu se poate obține decît dacă aceasta din urmă este luată în considerație.

1. *Introducere.* Problema care face obiectul acestei lucrări apare atunci cînd într-un tub de secțiune circulară prin care curge un lichid se introduce un alt lichid, miscibil cu primul. În aceste condiții se formează o zonă de amestec între cele două lichide, în care concentrația este variabilă. Determinarea lungimii acestor zone prezintă importanță, în special în problema transportului succesiv al produselor petroliere prin conducte. Bineînțeles, nu aceasta este singura aplicație practică a rezultatelor teoretice obținute în studiul difuziei convective prin tuburi de secțiune circulară; este suficient să amintim că unele rezultate, pe care le vom menționa mai departe, au fost utilizate în studiul dezlocuirii cu solvenți a petrolului din zăcăminte.

Cele mai multe dintre cercetările întreprinse pînă în prezent se referă la mișcarea laminară; într-adevăr, deși problema este dificilă în general, pentru acest caz ecuația diferențială a concentrației este mai accesibilă unor metode variate de rezolvare decît atunci cînd mișcarea este turbulentă. Din acest motiv, în cele ce urmează ne vom mărgini tot la mișcarea laminară, pentru care vom încerca să găsim o soluție simplă, bazată pe anumite aproximații.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 6, 1971, P. 1287–1298

Punctul de plecare al tuturor cercetărilor îl constituie ecuaţia diferenţială a concentraţiei :

$$\frac{\partial c}{\partial t} + v_0\left(1 - \frac{r^2}{r_0^2}\right)\frac{\partial c}{\partial x} = D\left(\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial c}{\partial r}\right), \tag{1}$$

scrisă în coordonatele cilindrice r, θ, x, simetria axială făcînd să nu apară unghiul θ. În această ecuaţie, c este concentraţia, v_0 viteza maximă în axa tubului, r_0 raza tubului şi D coeficientul de difuzie.

Dacă introducem variabilele adimensionale

$$\tau = \frac{t\,D}{r_0^2}, \qquad \xi = \frac{x}{r_0}, \qquad \rho = \frac{r}{r_0}, \tag{2}$$

ecuaţia (1) devine

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + P(1 - \rho^2)\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 c}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}, \tag{3}$$

unde

$$P = \frac{r_0 v_0}{D} \tag{4}$$

este numărul lui Péclet de difuzie moleculară. Acest parametru fără dimensiuni dă o indicaţie asupra regimului de transport al componentei a cărei concentraţie o studiem, valorile lui mari indicînd o predominare a transportului convectiv.

Înainte de a preciza condiţia iniţială şi condiţiile la limită pe care trebuie să le satisfacă soluţia ecuaţiei (1), respectiv (3), vom aminti cîteva dintre cele mai importante rezultate obţinute pînă în prezent.

O soluţie aproximativă, de un interes considerabil, este aceea dată de G. Taylor în [14] şi [15]. Fără a intra în amănunte, vom aminti numai că printr-o serie de raţionamente ingenioase se ajunge la concluzia că repartiţia concentraţiei medii în raport cu secţiunea transversală a tubului se poate găsi ca soluţie a unei ecuaţii obişnuite de difuzie, în care, în loc de coeficientul de difuzie moleculară, apare mărimea

$$K_c = \frac{r_0^2 v_0^2}{192\,D}. \tag{5}$$

Lungimea l_0 a zonei în care concentraţia variază de la 0,9 la 0,1 din valoarea ei iniţială are expresia

$$l_0 = 3{,}6248\,\sqrt{K_c t}, \tag{6}$$

fiind deci funcţie de timp.

Ulterior, alte cercetări aupra acestei probleme au fost efectuate de G. F. Carrier [3], de M. J. Lighthill [10] și de W. N. Gill și colaboratorii într-o serie de lucrări [1], [6], [7], [8], [9], [11] și [12].

Astfel, în [1] sînt expuse rezultatele integrării numerice a ecuației (1) cu o condiție inițială și condiții la limită adecvate. Din examinarea rezultatelor se constată că soluția lui G. Taylor este valabilă pentru $P > 100$ și $\tau > 1$, numărul lui Péclet și timpul adimensional fiind definite ca în (4), respectiv (2).

Pentru lungimea zonei de amestec, definită ca în lucrările citate ale lui G. Taylor, au fost găsite, în cazul în care numărul lui Péclet este mic, formulele

$$\begin{aligned} l_0 &= 2{,}5\, P^{-0{,}75}\, \tau^{0{,}55} \qquad \text{pentru } \tau > 0{,}05\,; \\ l_0 &= 2{,}5\, P^{-0{,}75}\, \tau^{0{,}60} \qquad \text{pentru } \tau < 0{,}05. \end{aligned} \tag{7}$$

S-a arătat de asemenea că, pentru numere P mai mici decît 100 și pentru $\tau < 1$, soluția lui G. Taylor dă rezultate bune dacă în locul coeficientului K_e, definit prin (5), se introduce acela dat de R. Aris [2], și anume

$$K = D + \frac{r_0 v_m^2}{48\, D}, \tag{8}$$

cu $v_m = \frac{v_0}{2}$, punîndu-se astfel mai mult în evidență efectul difuziei moleculare, care la numere P mici este mai important.

Mai tîrziu, W. N. Gill [7] a încercat să rezolve problema printr-un procedeu de aproximații succesive destul de complicat.

Menționăm și lucrarea recentă a lui D. H. Chun [4], care a încercat rezolvarea ecuației (3) printr-o metodă de perturbații. Rezultatele găsite reprezintă însă o aproximație bună numai atunci cînd numărul lui Péclet are valori foarte mici, ceea ce reprezintă o limitare destul de serioasă, cu atît mai mult cu cît soluția are o formă foarte complicată.

Se poate deci afirma că pentru regimul laminar soluția lui G. Taylor, inclusiv lungimea zonei de amestec, rămîne de referință; cercetările ulterioare au confirmat valabilitatea ei pentru $P > 100$, iar cu modificarea adusă de R. Aris se poate aplica și pentru $P < 100$.

Pentru valori mici ale numărului lui Péclet, lungimea zonei de amestec poate fi calculată cu ajutorul formulelor date de W. N. Gill pe baza rezolvării numerice a problemei.

Soluțiile teoretice date de W. N. Gill și de D. H. Chun, prima valabilă pentru un domeniu mai larg de valori ale numărului lui Péclet de difuzie moleculară, sînt foarte complicate și greu de utilizat din acest motiv.

Precizăm de asemenea că toate formulele cunoscute pentru calculul lungimii zonei de amestec sînt aproximative și nu se poate afirma că se

aplică în mod corect la o pereche de lichide miscibile alese arbitrar. Într-adevăr, ecuaţia diferenţială a concentraţiei (1), care stă la baza tuturor studiilor întreprinse pînă în prezent, este stabilită în ipoteza că cele două lichide miscibile au aceeaşi masă specifică şi aceeaşi viscozitate. Diferenţa dintre valorile masei specifice sau dintre acelea ale viscozităţii celor două lichide influenţează în mod cert desfăşurarea fenomenului şi în particular lungimea zonei de amestec, dar aceste influenţe nu au putut fi studiate pînă în prezent din punct de vedere teoretic. Ne referim în special la influenţa diferenţei de masă specifică, care constă în mărirea lungimii zonei de amestec, deoarece lichidul mai greu are tendinţa de a se separa în regiunea de contact şi de a curge pe la partea inferioară a secţiunii.

Rezultatele teoretice sînt deci valabile în ipoteza că diferenţele amintite sînt foarte mici sau inexistente. În cele ce urmează vom reţine această ipoteză în încercarea pe care o facem de a găsi o nouă soluţie aproximativă a problemei.

2. *Rezolvarea aproximativă a problemei.* Ne vom fixa deci atenţia asupra ecuaţiei (3), care trebuie rezolvată cu următoarele condiţii:

$$\tau = 0,\ c = 0\ \ (\xi > 0),$$

$$\rho = 0,\ \frac{\partial c}{\partial \rho} = 0;\ \rho = 1,\ \frac{\partial c}{\partial \rho} = 0, \tag{9}$$

respectiv

$$\xi = 0,\ c = f(\rho),\ \xi \to \infty,\ c = 0. \tag{10}$$

Prima condiţie (9), care este condiţia iniţială, arată că urmărim să găsim concentraţia celui de-al doilea lichid care se introduce în tub, secţiunea de intrare fiind la $\xi = 0$. A doua condiţie (9) rezultă din considerente de ordin fizic, simetria axială a fenomenului indicînd existenţa unui extrem al concentraţiei în axa tubului, în timp ce a treia condiţie (9) arată că peretele tubului este impermeabil. În sfîrşit, prima condiţie (10) indică repartiţia concentraţiei în secţiunea de intrare, asupra căreia vom reveni mai departe, iar a doua condiţie (10) apare naturală în urma precizării că studiem repartiţia concentraţiei lichidului care îl dezlocuieşte pe cel iniţial existent în tub.

Ceea ce complică rezolvarea problemei astfel formulate este faptul că în ecuaţia (3) termenul de transport convectiv al concentraţiei are un coeficient variabil. Pentru a obţine o soluţie aproximativă relativ simplă este deci suficient să căutăm să dăm acestui termen o formă care să permită utilizarea unor metode de rezolvare cunoscute. În acest sens, cea mai simplă idee este aceea de a presupune că transportul convectiv al concentraţiei se efectuează cu viteza medie. În acest mod se ajunge la ecuaţia

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{P}{2}\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial c^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial c^2}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}, \tag{11}$$

a cărei soluție, satisfăcînd condițiile (9) și (10), nu este greu de găsit. Dintre procedeele care pot fi utilizate în acest scop, cel mai indicat ni se pare acela al transformărilor integrale.

Astfel, în primul rînd vom aplica transformata finită a lui Hankel

$$c_H = \int_0^1 \rho\, c\, J_0\,(\lambda_n \rho)\, \mathrm{d}\rho, \tag{12}$$

λ_n fiind rădăcinile ecuației

$$J_1\,(\lambda_n) = 0. \tag{13}$$

Se poate arăta [13] că în acest caz, dacă și concentrația satisface a treia condiție (9), avem

$$\int_0^1 \rho \left(\frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial c}{\partial \rho} \right) J_0\,(\lambda_n\, \rho)\, \mathrm{d}\rho = -\,\lambda_n^2\, c_H \tag{14}$$

și ecuația (11) devine

$$\frac{\partial c_H}{\partial \tau} + \frac{P}{2} \frac{\partial c_H}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 c_H}{\partial \xi^2} = -\,\lambda_n^2 c_H \ . \tag{15}$$

Urmează să stabilim acum condițiile pe care trebuie să le satisfacă soluția acestei ecuații. Se constată astfel imediat că trebuie să avem

$$\tau = 0, \quad c_H = 0, \tag{16}$$

și pentru a găsi celelalte condiții este necesar să precizăm forma funcției $f(\rho)$ din prima condiție (10). Vom presupune că la intrarea în tub nu se produce încă amestecul dintre cele două lichide datorit difuziei, astfel că pentru concentrație trebuie considerat numai transportul convectiv. Ținînd seama de repartiția reală a vitezei în secțiunea transversală a conductei, găsim deci

$$f(\rho) = 1 - \rho^2 \tag{17}$$

și, după un rezultat cunoscut [13],

$$\int_0^1 \rho(1 - \rho^2)\, J_0\,(\lambda_n\, \rho)\, \mathrm{d}\rho = -\,\frac{2}{\lambda_n^2} J_0\,(\lambda_n), \tag{18}$$

iar condițiile (10) iau forma

$$\xi = 0, \quad c_H = -\,\frac{2}{\lambda_n^2} J_0\,(\lambda_n); \quad \xi \to \infty, \quad c_H = 0. \tag{19}$$

Pentru găsirea soluţiei ecuaţiei (15), care satisface condiţiile (16) şi (19), apare indicat să utilizăm transformata lui Laplace în raport cu variabila τ:

$$c_{HL} = \int_0^\infty c_H \, e^{-s\tau} \, d\tau. \tag{20}$$

După cîteva calcule simple, în care ţinem seama şi de condiţia (16), ecuaţia (15) devine

$$\frac{d^2 c_{HL}}{d\xi^2} - \frac{P}{2} \frac{dc_{HL}}{d\xi} - (s + \lambda_n^2) c_{HL} = 0 \tag{21}$$

şi urmează să găsim soluţia acesteia care satisface condiţiile

$$\xi = 0, \quad c_{HL} = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2} \frac{1}{s}; \quad \xi \to \infty, \quad c_{HL} = 0. \tag{22}$$

Este uşor de constatat că această soluţie are forma

$$c_{HL} = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2} \frac{1}{s} e^{\frac{P}{4}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{16(s+\lambda_n^2)}{P^2}}\right]\xi}. \tag{23}$$

Revenirea la original ne dă [5]

$$C_H = -\frac{J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2} \left\{ e^{\frac{P}{4}\left(1 - \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \frac{P}{4}\sqrt{\left(1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}\right)\tau}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{P}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi} \operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{P}{4}\sqrt{\left(1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}\right)\tau}\right] \right\}. \tag{24}$$

Dacă ţinem seama de relaţia cunoscută

$$\operatorname{erfc}\left[-\frac{P}{4}\sqrt{\left(1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}\right)\tau}\right] + \operatorname{erfc}\left[\frac{P}{4}\sqrt{\left(1 + \frac{16\lambda_n^2}{P^2}\right)\tau}\right] = 2 \tag{25}$$

şi de dezvoltarea asimptotică a funcţiei complementare de eroare, se constată că amîndouă condiţiile (19) sînt satisfăcute. De asemenea se observă imediat că soluţia (24) satisface şi condiţia iniţială (16).

După cum se ştie, transformata finită a lui Hankel este direct legată de teoria dezvoltărilor în serie de funcţii Bessel şi, dacă ţinem seama de acest fapt, constatăm imediat că soluţia precedentă nu este completă.

Într-adevăr, pentru seriile Bessel de tipul al doilea (seriile Dini), dacă λ_n sînt rădăcinile ecuației (13), sistemul ortogonal cu ponderea ρ format din funcțiile $J_0(\lambda_n \rho)$ trebuie completat cu funcția $\rho^0 = 1$, care este ortogonală cu ele tot cu ponderea ρ. Așadar, vom considera și integrala

$$2\int_0^1 \rho(1-\rho^2)\,d\rho = \frac{1}{2} \tag{26}$$

și este necesar să găsim soluția $c_H^{(0)}$ a ecuației (15) care satisface condițiile

$$\xi = 0,\ c_H^{(0)} = \frac{1}{2};\quad \xi \to \infty,\ c_H^{(0)} = 0, \tag{27}$$

precum și condiția inițială (16).

În acest scop vom observa că soluția căutată corespunde la prima rădăcină a ecuației (13), și anume $\lambda_0 = 0$. Prin urmare, pentru ecuația (15) trebuie considerată forma particulară

$$\frac{\partial c_H}{\partial \tau} + \frac{P}{2}\frac{\partial c_H}{\partial \xi} - \frac{\partial^2 c_H}{\partial \xi^2} = 0, \tag{28}$$

care, prin aplicarea transformatei (20), devine

$$\frac{d^2 c_{HL}}{d\xi^2} - \frac{P}{2}\frac{dc_{HL}}{d\xi} - s c_{HL} = 0, \tag{29}$$

soluția ei urmînd a satisface condițiile

$$\xi = 0,\ c_{HL}^{(0)} = \frac{1}{2s};\ \xi \to \infty,\ c_{HL}^{(0)} = 0. \tag{30}$$

Găsim astfel

$$c_{HL}^{(0)} = \frac{1}{2s}\, e^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16s}{P^2}}\right)\xi}, \tag{31}$$

iar originalul are forma [5]

$$c_H^{(0)} = \frac{1}{4}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \frac{P}{4}\sqrt{\tau}\right) + e^{\frac{P}{2}\xi}\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{P}{4}\sqrt{\tau}\right)\right]. \tag{32}$$

Dacă luăm în considerație o relație de același fel cu (25) și dezvoltarea asimptotică amintită, ajungem ușor la concluzia că soluția găsită satisface condițiile (16) și (27).

Teorema de inversiune pentru transformata lui Hankel utilizată ne dă [13]

$$c = \frac{1}{4}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \frac{P}{4}\sqrt{\tau}\right) + e^{\frac{P}{2}\xi}\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{P}{4}\sqrt{\tau}\right)\right] -$$

$$- 2\sum_n \frac{J_0(\lambda_n\rho)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}\left\{e^{\frac{P}{4}\left(1-\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \frac{P}{4}\sqrt{\left(1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}\right)\tau}\right] + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{P}{4}\left(1+\sqrt{1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}}\right)\xi}\operatorname{erfc}\left[\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{P}{4}\sqrt{\left(1+\frac{16\lambda_n^2}{P^2}\right)\tau}\right]\right\}, \tag{33}$$

cu observaţia că sumarea trebuie începută de la $n = 1$, adică excluzînd prima rădăcină a ecuaţiei (13).

Într-o secţiune transversală oarecare, concentraţia are valoarea medie

$$c_m = 2\int_0^1 \rho\, c\, d\rho = \frac{1}{4}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} - \frac{P}{4}\sqrt{\tau}\right) + \right.$$

$$\left. + e^{\frac{P}{2}\xi}\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau}} + \frac{P}{4}\sqrt{\tau}\right)\right], \tag{34}$$

deoarece

$$\int_0^1 \rho J_0(\lambda_n\rho)\, d\rho = 0, \tag{35}$$

rezultat la care ajungem ţinînd seama de (13).

Dacă se consideră o conductă în care se efectuează transportul succesiv a două produse petroliere, se poate calcula lungimea finală a acestei zone şi, prin urmare, volumul total de amestec rezultat. Se consideră astfel în (34) pentru ξ valoarea care corespunde punctului final al conductei şi se calculează variaţia în timp a concentraţiei medii în această secţiune. Dacă notăm cu $c_m^{(1)}$ şi $c_m^{(2)}$ valorile extreme care definesc lungimea zonei de amestec alese în mod convenabil şi cu τ_1, respectiv τ_2, valorile corespunzătoare ale timpului adimensional, lungimea finală a zonei de amestec este $\frac{P}{2}(\tau_2 - \tau_1)\, r_0$, iar volumul total de amestec are valoarea $\pi\frac{P}{2}(\tau_2 - \tau_1)\, r_0^3$.

3. *Cîteva consideraţii asupra efectului difuziei longitudinale.* În general se consideră că termenul din ecuaţia (3) care reprezintă transportul convectiv în lungul tubului este mult mai important decît acela

care exprimă transportul prin difuzie longitudinală. În acest fel, ecuația (3) ia forma simplificată

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + P(1 - \rho^2)\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}, \tag{36}$$

iar dacă utilizăm aproximația care conduce la ecuația (11), găsim

$$\frac{\partial c}{\partial \tau} + \frac{P}{2}\frac{\partial c}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 c}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial c}{\partial \rho}. \tag{37}$$

Soluția problemei se poate căuta și luînd ca punct de plecare această ecuație tot cu condițiile (9) și (10). Urmînd aceeași cale, aplicăm din nou transformata finită a lui Hankel (12) și, dacă ținem seama și de (14), ajungem la ecuația

$$\frac{\partial c_H}{\partial \tau} + \frac{P}{2}\frac{\partial c_H}{\partial \xi} + \lambda_n^2 c_H = 0. \tag{38}$$

Soluția acestei ecuații trebuie să satisfacă, la rîndul ei, condițiile

$$\tau = 0, \qquad c_H = 0 \tag{39}$$

și

$$\xi = 0, \qquad c_H = -\frac{2}{\lambda_n^2} J_0(\lambda_n). \tag{40}$$

În continuare utilizăm, ca și în cazul precedent, transformata lui Laplace în raport cu variabila τ (20), care ne dă ecuația

$$\frac{P}{2}\frac{\mathrm{d}c_{HL}}{\mathrm{d}\xi} + (s + \lambda_n^2)\, c_{HL} = 0, \tag{41}$$

a cărei soluție trebuie să satisfacă, așa cum se constată imediat, condiția

$$\xi = 0, \qquad c_{HL} = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2}\frac{1}{s}. \tag{42}$$

Obținem astfel

$$c_{HL} = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2}\frac{1}{s} e^{-\frac{2(s+\lambda_n^2)}{P}\xi}, \tag{43}$$

funcţie imagine al cărei original este

$$c_H = 0 \tag{44}$$

pentru $0 < \tau < \frac{2\xi}{P}$ şi

$$c_H = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2} e^{-\frac{2\lambda_n^2}{P}\xi} \tag{45}$$

pentru $\tau > \frac{2\xi}{P}$.

Interpretarea acestui rezultat nu este dificilă dacă observăm că ecuaţia (38) are sistemul caracteristic

$$\frac{d\tau}{1} = \frac{2d\xi}{P} = -\frac{1}{\lambda_n^2}\frac{dc_H}{c_H}, \tag{46}$$

ale cărui soluţii sînt

$$\xi - \frac{P}{2}\tau = C_1; \qquad \ln c_H + \lambda_n^2 \tau = C_2, \tag{47}$$

cu C_1 şi C_2 constante arbitrare.

Aşadar, soluţia generală a ecuaţiei (38) este

$$\varphi\left(\ln c_H + \lambda_n^2\tau, \quad \xi - \frac{P}{2}\tau\right) = 0, \tag{48}$$

funcţia φ fiind, de asemenea, arbitrară. De aici rezultă însă

$$c_H = e^{-\lambda_n^2\tau} f\left(\xi - \frac{P}{2}\tau\right), \tag{49}$$

expresie în care f este o nouă funcţie arbitrară.

Pe de altă parte, soluţia (45) se poate pune sub forma

$$c_H = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2} e^{-\lambda_n^2\tau} e^{-\frac{2\lambda_n^2}{P}\left(\xi - \frac{P}{2}\tau\right)}, \tag{50}$$

de unde rezultă, prin comparaţie cu (49),

$$f\left(\xi - \frac{P}{2}\tau\right) = -\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2} e^{-\frac{2\lambda_n^2}{P}\left(\xi - \frac{P}{2}\tau\right)}. \tag{51}$$

Prin urmare, pentru

$$\xi - \frac{P}{2}\tau > 0, \tag{52}$$

funcția arbitrară din (49) este nulă, în timp ce pentru

$$\xi - \frac{P}{2}\tau < 0 \tag{53}$$

această funcție are expresia (51).

Soluția pe care am găsit-o satisface condițiile (39) și (40); într-adevăr, pentru $\tau = 0$, c_H este nulă peste tot ($\xi > 0$, așa cum rezultă din (52)), în timp ce la $\xi = 0$ ($\tau > 0$, așa cum se deduce din (53), deoarece P este totdeauna pozitiv) are valoarea $-\frac{2J_0(\lambda_n)}{\lambda_n^2}$.

Remarcăm, ca și în cazul precedent, că, atunci cînd este satisfăcută condiția (53), soluția găsită nu este completă, deoarece mai trebuie să considerăm și soluția care corespunde la $\lambda_n = \lambda_0 = 0$ în (38) și (41). Aceasta se găsește cu ușurință urmînd aceeași cale și are forma

$$c_H^{(0)} = 0 \tag{54}$$

atunci cînd este valabilă inegalitatea (52) și

$$c_H^{(0)} = \frac{1}{2} \tag{55}$$

dacă este satisfăcută inegalitatea (53).

Cu ajutorul aceleași teoreme de inversiune ca mai înainte [13], obținem

$$c = 0 \tag{56}$$

în domeniul definit prin (52) și

$$c = \frac{1}{2} - 4\sum_n \frac{J_0(\lambda_n \rho)}{\lambda_n^2 J_0(\lambda_n)}\, e^{-\frac{2\lambda_n^2}{P}\xi} \tag{57}$$

în domeniul definit prin (53).

Se constată imediat că într-o secțiune transversală oarecare concentrația medie are valoarea constantă $\frac{1}{2}$. Prin urmare, dacă se ia ca punct de plecare ecuația (37), nu se poate pune în evidență existența zonei de amestec, care este însă constatată pe cale experimentală. Așadar, o soluție corectă din punct de vedere fizic se poate găsi numai dacă se ține seama de efectul difuziei longitudinale. Soluția (56), respectiv (57), evi-

denţiază existenţa unei discontinuităţi de concentraţie cu o viteză de propagare $\frac{v_0}{2}$, care este înlocuită în realitate de zona de amestec.

Ne propunem ca într-o lucrare ulterioară să examinăm mai în amănunt soluţia convenabilă a problemei, care este (33), pentru a preciza eroarea introdusă prin aproximaţia efectuată în ecuaţia (11).

Primită la redacţie la 27 mai 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. Ananthakrishnan, W. N. Gill, A. J. Barduhn, *Laminar dispersion in capillaries*, A. I. Ch. E. Journal, **11**, *6* (1965).
2. R. Aris, *On the dispersion of a solute in a fluid flowing through a tube*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *235*, 1200 (1956).
3. G. F. Carrier, *On diffusive convection in tubes*, Quarterly of Applied Mathematics, **14**, *2* (1966).
4. D. H. Chun, *Distribution of concentration in flow through a circular pipe*, International Journal of Heat and Mass Transfer, **13**, *4* (1970).
5. V. A. Ditkin, P. I. Kuznețov, *Spravocinik po operaţionnomu iscisleniiu*, GITTL, Moskva—Leningrad, 1951, p. 145 şi 158.
6. W. N. Gill, V. Ananthakrishnan, *Laminar dispersion in capillaries*, II, A. I. Ch. E. Journal, **12**, *5* (1966).
7. W. N. Gill, *A note on the solution of transient dispersion problems*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *298*, 1454 (1967).
8. W. N. Gill, *Analysis of axial dispersion with time variable flow*, Chemical Engineering Science, **22**, *7* (1967).
9. W. N. Gill, V. Ananthakrishnan, *Laminar dispersion in capillaries*, IV, A. I. Ch. E. Journal, **13**, *4* (1967).
10. M. J. Lighthill, *Initial development of diffusion in Poiseuille flow*, Journal of Institute of Mathematics and its Applications, **2**, *1* (1966).
11. N. S. Reejhsingani, W. N. Gill, A. J. Barduhn, *Laminar dispersion in capillaries*, III, A. I. Ch. E. Journal,**12** , *5* (1966).
12. N. S. Reejhsingani, A. J. Barduhn, W. N. Gill, *Laminar dispersion in capillaries*, V, A. I. Ch. E. Journal, **14**, *1* (1968).
13. Ian N. Sneddon, *Fourier Transforms*, McGraw-Hill Book Company, Inc., New York — Toronto — Londra, 1951, p. 84, 89 şi 513.
14. G. Taylor, *Dispersion of soluble matter in solvent flowing slowly through a tube*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *219*, 1136 (1953).
15. G. Taylor, *Conditions under which dispersion of a solute in a stream can be used to measure molecular diffusion*, Proceedings of the Royal Society, A, Mathematical and Physical Sciences, *225*, 1163 (1954).

APLICAREA UNEI NOI METODE ALEATORII LA CALCULUL PSEUDOȘOCULUI

de N. N. PATRAULEA, ELEONORA MALAIU și N. POSTELNICU
I.M.F.C.A.

În scopul verificării metodei propuse în [1] am studiat mișcarea de relaxare cunoscută în literatură sub denumirea de pseudoșoc.

1. Fenomenul idealizat denumit pseudoșoc constă din ciocnirea a două sisteme de molecule, coexistînd în întreg spațiul fizic, fiecare dintre sisteme avînd în momentul inițial o repartiție maxwelliană față de repere animate de vitezele $\vec{U}$, respectiv $-\vec{U}$, față de un al treilea reper inerțial de referință.

Luînd axa x a sistemului general de referințe după viteza $\overline{U}$, expresia funcției inițiale de distribuție va fi

$$f = \frac{n_0}{\pi^{3/2}\beta_0^3}\{\exp[-(u-U)^2 - C^2] + \exp[-(u+U)^2 - C^2]\}, \qquad (1.1)$$

unde

n_0 este numărul densitate al fiecărui sistem,

$$C^2 = v^2 + w^2,$$

u, v, w, fiind componentele vitezei după axele fixe $Oxyz$, adimensionalizate prin raportarea lor la viteza cea mai probabilă, β_0, din momentul inițial a unuia din cele două sisteme de molecule față de reperul relativ respectiv.

2. Introducînd mai departe variabilele fără dimensiune

$$F = f\cdot\frac{\beta_0^3}{n_0}, \quad t = \frac{\delta}{\beta_0}\cdot T, \qquad (2.1)$$

$$\vec{R} = \vec{r}\sqrt[3]{n_0}, \qquad (2.2)$$

$\vec{r}$ fiind un vector oarecare de poziţie şi δ diametrul moleculei, ecuaţia (1.1) se va scrie

$$F_0 = \pi^{-3/2} [e^{-(u-U)^2-C^2} + e^{-(u+U)^2-C^2}]. \tag{2.3}$$

Cum este evident că funcţia de distribuţie în orice moment ulterior va depinde de $|u|$ şi de combinaţia $v^2 + w^2 = C^2$, am împărţit spaţiul vitezelor astfel: 20 de intervale pentru $|u|$ şi 20 de intervale pentru C^2.

Trunchierea funcţiei de distribuţie s-a făcut astfel încît nu se consideră moleculele care au componente axiale sau transversale depăşind de patru ori viteza cea mai probabilă. Astfel s-au considerat următoarele valori discrete pentru u, respectiv pentru C^2:

$$u_i = 0{,}1 + 0{,}2\ (i - 1), \tag{2.4}$$

$$i = 1{,}20,$$

$$C_i^2 = 0{,}4 + 0{,}8\ (i - 1), \tag{2.5}$$

$$i = 1{,}20.$$

Dimensiunea fiecărei celule din spaţiul vitezelor este $2\Delta u \cdot \pi\Delta(C^2)$. Factorul 2 provine din faptul că se consideră perechea elementelor din jurul punctelor u, C şi $-u$, C ca o singură celulă.

Unghiul azimutal α al vectorului-viteză s-a împărţit în 36 de intervale. În exemplul făcut s-a luat $U = 1$, adică viteza macroscopică egală cu viteza cea mai probabilă β_0, în fiecare din cele două sisteme de molecule considerate, în momentul iniţial.

Fiecărei ciocniri aleatorie considerată la evaluarea integralei din partea dreaptă a ecuaţiei (1.1) va trebui să-i furnizăm opt numere aleatorii (de fapt pseudoaleatorii), şi anume:

1) o variabilă aleatorie R_1 fixează $(|u_1|, C_1)$;
2) o variabilă aleatorie R_2 fixează $(|u_2|, C_2)$;
3) o variabilă aleatorie R_3 pentru fixarea în azimut a vectorului $\overline{C}_1$;
4) o variabilă aleatorie R_4 pentru fixarea în azimut a vectorului $\overline{C}_2$;
5) o variabilă aleatorie R_5 pentru precizarea semnului componentei u_1;
6) o variabilă aleatorie R_6 pentru componenta u_2;
7) o variabilă R_7 pentru unghiul φ de ciocnire (20 de intervale);
8) o variabilă R_8 pentru azimutul ciocnirii α (36 de intervale).

Numerele pseudoaleatorii au fost furnizate de un algoritm special la calculatorul I.B.M.

Totuşi, pentru economisirea numerelor aleatorii (spre a nu se depăşi perioada lor) şi pentru scurtarea timpului de lucru la calculator, s-au fragmentat numerele aleatorii furnizate de calculator, afectînd fiecărei variabile a ciocnirii aleatorii un număr de biţi corespunzători numărului de valori discrete, considerate la fiecare variabilă.

Astfel, pentru variabilele R_1 şi R_2 se alocă fiecăreia 13 biţi, variabilelor R_3 şi R_4 cîte 6 biţi, variabilelor R_5 şi R_6 cîte 2 biţi, R_7 6 biţi şi R_8 5 biţi.

În cazul pseudoșocului, ecuația de bază stabilită în [1] se va simplifica astfel:

$$\Delta\overline{V}_k F_k(T+\Delta T) = \Delta\overline{V}_k F_k(T) +$$

$$+\Delta T\frac{\pi}{2N}(\Sigma F_j \Delta V_j)^2 \cdot \sum_{\alpha=1}^{N} S_{k,\,m(\alpha),\,n(\alpha)} \cdot |\overline{V}_{m(\alpha)} - \overline{V}_{n(\alpha)}|. \tag{2.6}$$

Funcțiile $S_{k,\,m(\alpha),\,n(\alpha)}$ sînt definite astfel:

$$S_{k,\,m,\,n} = S'_k - S''_k,$$

$$S'_k = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \overline{v}'_m \subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}'_n \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 1 \text{ dacă } \overline{v}'_n \subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}'_1 \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 2 \text{ dacă } \overline{v}'_m \subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}'_n \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 0 \text{ dacă } \overline{v}'_m \not\subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}'_n \not\subset \Delta\overline{v}_k, \end{cases}$$

$$S'_{k,\,m,\,n} = \begin{cases} 1 \text{ dacă } \overline{v}_m \subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}_n \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 1 \text{ dacă } \overline{v}_n \subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}_m \not\subset \Delta\overline{v}_k, \\ 2 \text{ dacă } \overline{v}_m \subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}_n \subset \Delta\overline{v}_k, \\ 0 \text{ dacă } \overline{v}_m \not\subset \Delta\overline{v}_k, & \overline{v}_n \not\subset \Delta\overline{v}_k. \end{cases}$$

3. S-a considerat în lucrare cazul moleculelor rigide. Folosind unghiurile lui Euler: χ precesie, θ nutație și α rotația proprie, axa Ox după direcția vitezelor macroscopice și axa Ox' după direcția vitezei relative ($|\overline{V}_r| = W$) înainte de ciocnire (a moleculei (1) față de (2)), avem următoarele expresii pentru vitezele relative după ciocnire:

$$\overset{1}{V}'_{x'} = W\sin^2\varphi,$$

$$\overset{1}{V}'_{y'} = W\cos\varphi\sin\varphi \tag{3.1}$$

pentru molecula (1) și

$$\overset{2}{V}'_{x'} = W\cos^2\varphi,$$

$$\overset{2}{V}'_{y'} = -W\cos\varphi\sin\varphi \tag{3.2}$$

pentru molecula (2) (țintă). Unghiul de ciocnire φ și azimutul ciocnirii α' se trag aleatoriu după cum s-a arătat mai sus.

Componentele celor două viteze relative în sistemul $Oxyz$ vor fi

$$\overset{1}{V}{}'_x/W = \sin^2\varphi\cos\theta + \cos\varphi\sin\varphi\sin\theta\sin\alpha,$$

$$\overset{1}{V}{}'_y/W = \sin^2\varphi\sin\chi\sin\theta + \cos\varphi\sin\varphi(\cos\chi\cos\alpha - \sin\chi\sin\alpha\cos\theta),$$

$$\overset{1}{V}{}'_z/W = -\sin^2\varphi\cos\chi\sin\theta + \cos\varphi\sin\varphi(\sin\chi\cos\alpha + \cos\chi\cos\alpha\sin\alpha),$$

$$\overset{2}{V}{}'_x/W = \cos^2\varphi\cos\theta - \cos\varphi\sin\varphi\sin\theta\sin\alpha, \tag{3.3}$$

$$\overset{2}{V}{}'_y/W = \cos^2\varphi\sin\chi\sin\theta - \cos\varphi\sin\varphi(\cos\chi\cos\alpha - \sin\chi\sin\alpha\cos\theta),$$

$$\overset{2}{V}{}'_z/W = -\cos^2\varphi\cos\chi\sin\theta - \cos\varphi\sin\varphi(\sin\chi\cos\alpha + \cos\alpha\cos\theta\sin\alpha).$$

Elementele V, θ, χ se deduc din relaţiile

$$\overline{W} = \overline{V}_2 - \overline{V}_1, \tag{3.4}$$

$$W = \sqrt{W_x^2 + W_y^2 + W_z^2}, \tag{3.5}$$

$$\cos\theta = \frac{W_x}{W}, \tag{3.6}$$

$$\operatorname{tg}\chi = -\frac{W_y}{W_z}, \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant \chi \leqslant \frac{\pi}{2}. \tag{3.7}$$

4. S-au introdus în calculator datele corespunzătoare, alegîndu-se în ecuaţia (2.6) $\Delta T = 0{,}06$ şi 300 de cazuri aleatorii de ciocnire pe fiecare iteraţie. În total s-au programat 60 de iteraţii. În aceste condiţii, durata de lucru a calculatorului I.B.M. — 360 a fost de circa 10 min.

În diagramele 1—9 s-au trecut punctele calculate din 5 în 5 iteraţii, privitoare la funcţia

$$FF \simeq \int_0^\infty F(u, c)\, 2\pi c dc. \tag{4.1}$$

Pe fiecare diagramă s-a reprezentat la aceeaşi scară prin cele două curbe continue funcţiile FF referitoare la starea iniţială a gazului şi la starea maxwelliană. Starea finală se calculează pe baza conservării energiei cinetice totale a moleculelor.

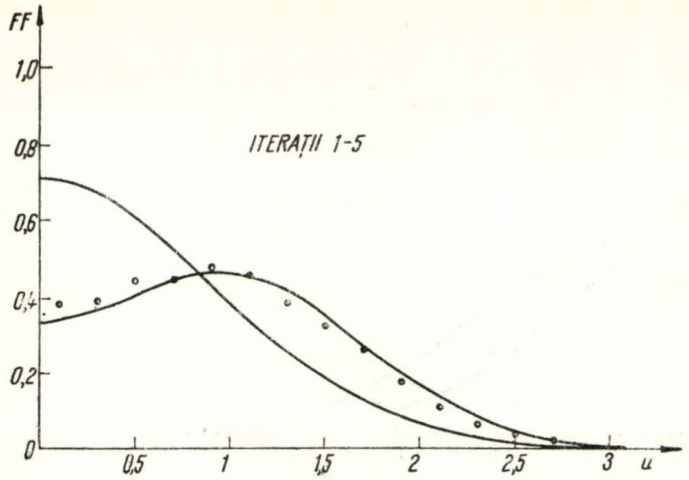


Fig. 1

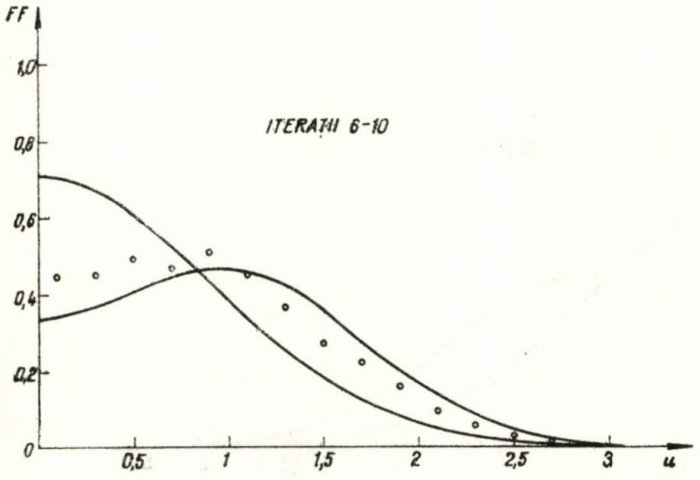


Fig. 2

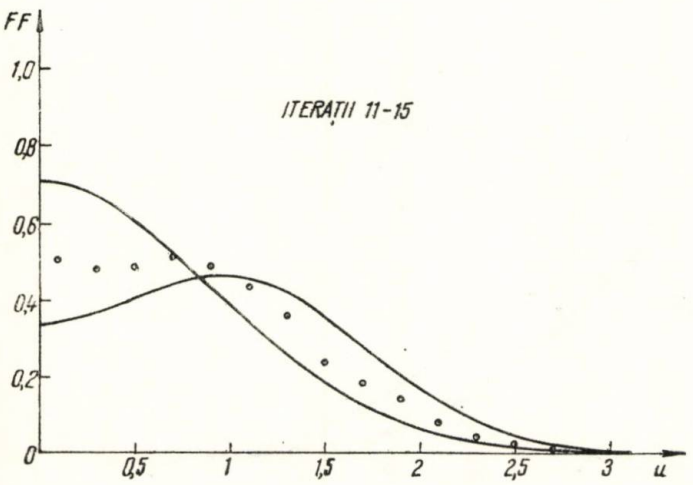


Fig. 3

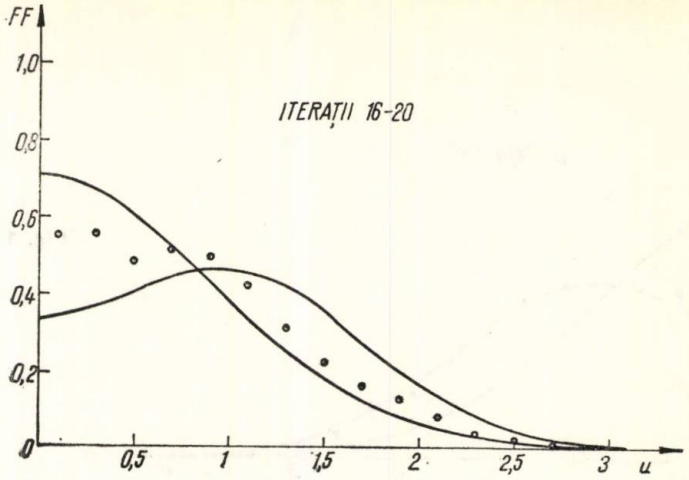


Fig. 4

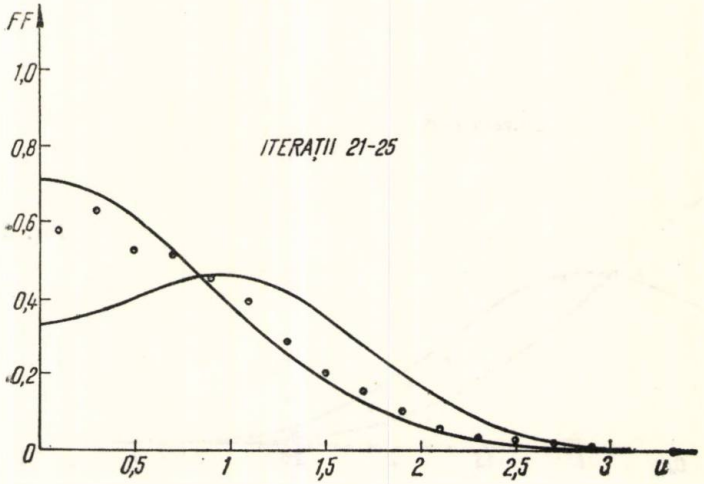


Fig. 5

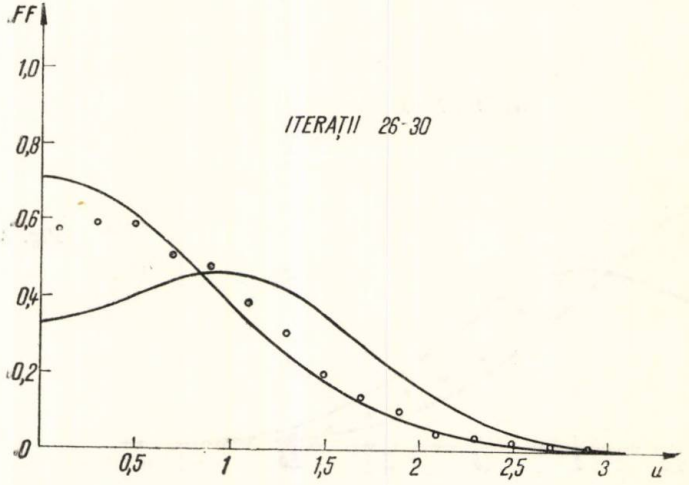


Fig. 6

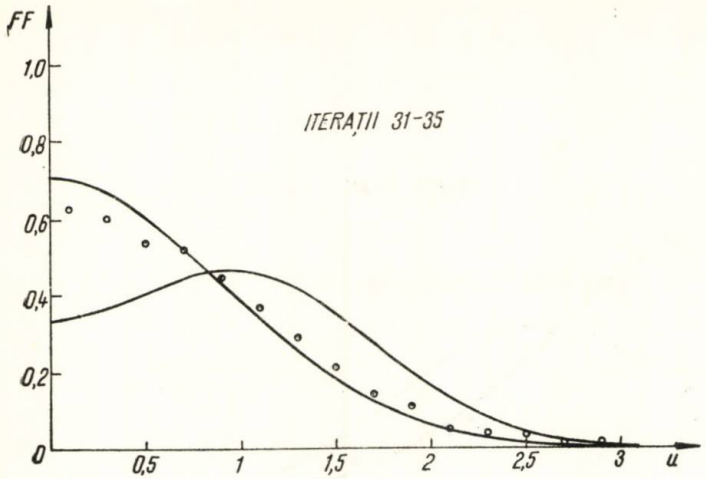


Fig. 7

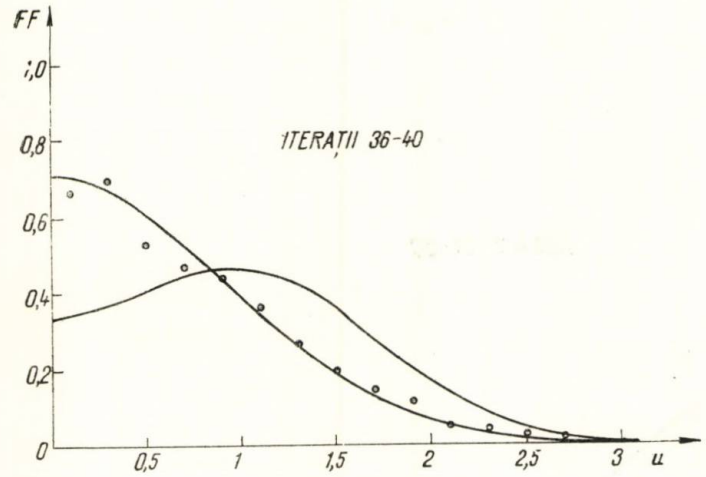


Fig. 8

Se observă din evoluția valorilor calculate că funcția de distribuție se relaxează suficient de repede către starea asimptotică maxwelliană, astfel că la interația 40 procesul de relaxare se poate considera practic încheiat.

Desigur că fluctuațiile aleatorii se pot micșora prin mărirea numărului de ciocniri aleatorii N pe iterație și o mai mică valoare a timpului adimensional ΔT.

Alegerea unui timp ΔT suficient de mic și a unui număr N suficient de mare permite studiul procesului tranzitoriu de relaxare în funcție de timpul real și nu numai funcția de distribuție finală. Se înțelege că acestea implică creșteri corespunzătoare ale duratei de lucru la calculator.

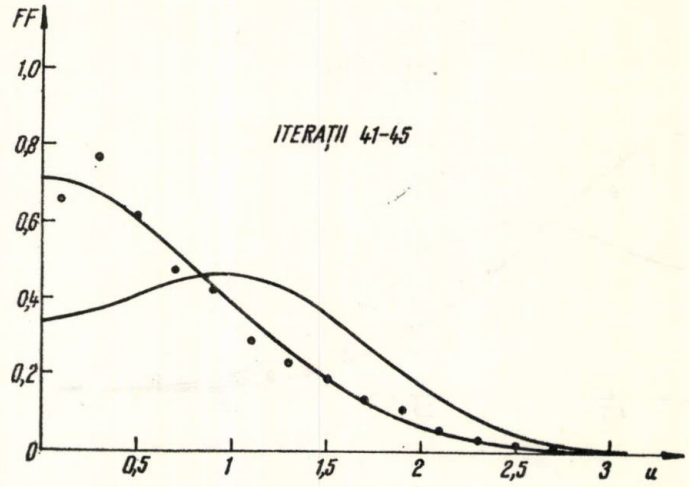

FF
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
ITERAȚII 41-45
0,5
1
1,5
2
2,5
3
u

Fig. 9

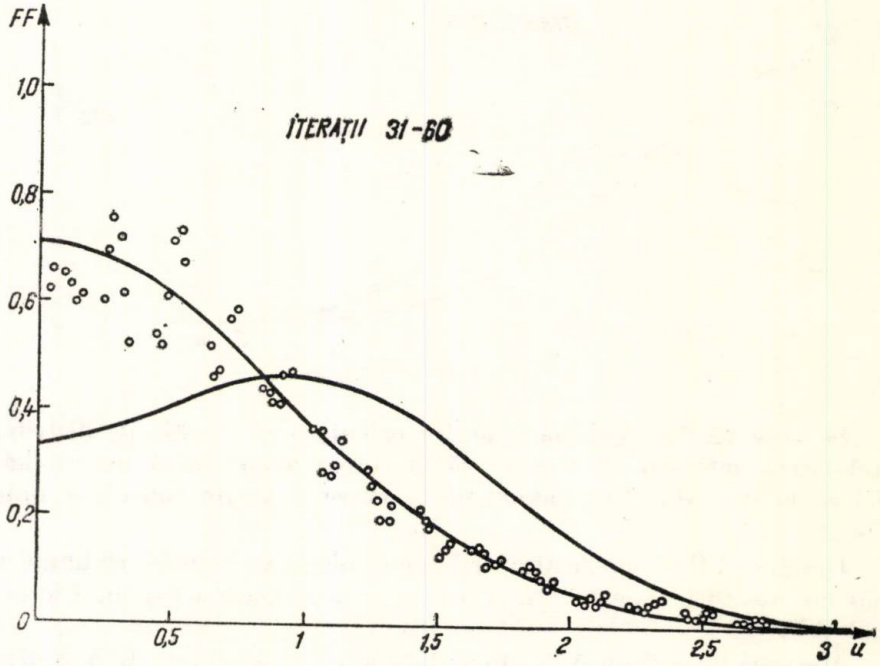

FF
1,0
0,8
0,6
0,4
0,2
0
ITERAȚII 31-60
0,5
1
1,5
2
2,5
3
u

Fig. 10

De asemenea pentru îmbunătățirea preciziei se pot considera intervale mai multe pentru variabilele aleatorii ale ciocnirii. Metoda aplicată permite mărirea numărului de valori discrete considerate la fiecare variabilă, și, de asemenea, trunchieri mai mici ale funcției de distribuție fără ca prin aceasta să crească considerabil duratele de calcul.

În diagramă s-au așezat (repartizate uniform în intervalele respective) punctele corespunzătoare iterațiilor de la 30 la 60.

Făcînd media valorilor pentru aceste iterații, se obțin punctele din figura 10. După cum se constată, acestea sînt apropiate de curba teoretică.

Primită la redacție la 23 aprilie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. N. N. PATRAULEA, *O metodă aleatorie pentru ecuația lui Boltzmann*, St. cerc. mec. apl., **30**, *6* (1281).

TEOREMA MOMENTULUI CINETIC ÎN RAPORT CU AXA INSTANTANEE DE ROTAȚIE ÎN MIȘCAREA PLANĂ

de A. CHISĂLIȚĂ
Institutul politehnic Cluj

În lucrare se stabilește teorema momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotație în mișcarea plan-paralelă a unui solid rigid.
Două note dau aplicații ale teoremei stabilite pentru un solid cu un singur grad de libertate și la care forțele de legătură au moment nul față de axa instantanee: nota I tratează despre începutul mișcării fără viteză inițială, iar nota II despre stabilitatea unei poziții de echilibru pentru un astfel de solid.

Fie un solid în mișcare plan-paralelă, π planul fix în care se mișcă centrul de masă G al solidului și I intersecția axei instantanee de rotație cu planul π. Vom nota această axă cu Iz și versorul ei cu $\vec{k}$. Fie încă A_i un punct al solidului, $\vec{v}_i$ viteza sa și $\vec{r}_i = \overrightarrow{IA}_i$.

Vom mai nota: $\overrightarrow{K_G}$ momentul cinetic al solidului în mișcarea în jurul lui G, K_{Gz} momentul cinetic în raport cu axa Gz de versor $\vec{k}$, $\vec{R}$ vectorul rezultant al forțelor aplicate solidului și $\overrightarrow{M_G}$, iar M_{Gz} momentul rezultant al acestor forțe în raport cu G, respectiv Gz; aceleași notații cînd G se înlocuiește cu I. În fine, M va însemna masa solidului.

Reamintim formula după care se schimbă momentul unui sistem de vectori la schimbarea polului de reducere:

$$\overrightarrow{M_{O'}} = \overrightarrow{M_O} + \overrightarrow{O'O} \times \vec{R},$$

din care, considerînd două axe paralele, Oz, $O'z$, de versor $\vec{k}$, deducem

$$M_{O'z} = M_{Oz} + (\overrightarrow{O'O},\ \vec{R},\ \vec{k}). \qquad (1)$$

Să considerăm sistemul de vectori $\{m_i\vec{v}_i\}$ (m_i fiind masa punctului A_i), de torsor în G : $M\vec{v}_G$, $\vec{K}_G$[1]), unde $\vec{v}_G$ este viteza lui G. Cu formula (1) obținem momentul cinetic în raport cu Iz sub forma

$$K_{Iz} = K_{Gz} + (\vec{IG},\ M\vec{v}_G,\ \vec{k})$$

și, derivînd (derivata absolută), avem cu notațiile obișnuite

$$\dot{K}_{Iz} = \dot{K}_{Gz} + (\dot{\vec{IG}},\ M\vec{v}_G\ \vec{k}) + (\vec{IG},\ M\vec{a}_G,\ \vec{k}) = M_{Gz} + (\vec{IG},\ \vec{R},\ \vec{k}) +$$

$$+ M[\dot{\vec{IG}} \times (\vec{\omega} \times \vec{IG})] \cdot \vec{k},$$

unde s-a ținut cont de teorema momentului cinetic în raport cu G și de teorema mișcării centrului de masă; $\vec{\omega} = \omega_z\vec{k}$ e viteza unghiulară instantanee.

Ținînd cont de (1) și dezvoltînd dublul produs din al treilea termen, se obține

$$\dot{K}_{Iz} = M_{Iz} + M\omega_z \cdot \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{IG}^2). \tag{2}$$

Pe de altă parte, avem

$$K_{Iz} = \omega_z \cdot \mathcal{J}_{Iz},$$

unde $\mathcal{J}_{Iz}$ este momentul de inerție al solidului în raport cu axa instantanee de rotație, și, derivînd (absolut), obținem

$$\dot{K}_{Iz} = \varepsilon_z \mathcal{J}_{Iz} + \omega_z \cdot \dot{\mathcal{J}}_{Iz} = \varepsilon_z \mathcal{J}_{Iz} + \omega_z \cdot M\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\vec{IG})^2, \tag{3}$$

unde s-a ținut cont de $\mathcal{J}_{Iz} = \mathcal{J}_{Gz} + M \cdot \vec{IG}^2$ și s-a notat $\varepsilon_z = \dot{\omega}_z$.

Din (2) și (3) deducem relația

$$\varepsilon_z \cdot \mathcal{J}_{Iz} + \frac{1}{2} M\omega_z \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(IG^2) = M_{Iz}, \tag{4}$$

pe care o numim *teorema momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotație*

---

[1]) Momentul rezultant în G al sistemului considerat este $\sum_i \vec{GA}_i \times m_i\vec{v}_i$, egal însă cu $\vec{K}_G$.

Observații.

1. În cazul unui solid cu un singur grad de libertate θ și la care forțele de legătură au moment nul față de axa Iz[1]), relația (4) dă ecuația diferențială a mișcării (în acest caz, M_{Iz} e momentul față de Iz al forțelor direct aplicate).

2. Dacă $IG = \text{const}$ rezultă

$$\varepsilon_z \cdot \mathcal{J}_{Iz} = M_{Iz}, \tag{5}$$

adică (4) ia aceeași formă ca și teorema momentului cinetic în mișcarea în jurul centrului de masă.

3. Dacă $M_{Iz} \equiv 0$ și $IG \neq \text{const}$, momentul cinetic față de Iz *nu se conservă* (se conservă însă energia cinetică; vezi observațiile 4 și 5).

4. Dacă $\omega_z \neq 0$, teorema stabilită este echivalentă cu teorema energiei; într-adevăr, înmulțind în (4) ambii membri cu $\omega_z \cdot dt = d\theta_z$, se obține teorema energiei și, reciproc, din aceasta se poate deduce (4).

În pozițiile (momentele) în care $\omega_z = 0$, teorema (4) e mai „tare" decît teorema energiei (vezi de exemplu, nota I).

5. Utilizarea teoremei (4) în locul teoremei momentului cinetic în raport cu Gz sau cu o axă fixă Oz este avantajoasă în problemele în care sînt întrunite condițiile din observația 1 sau 2.

★

NOTA I. Considerăm un solid cu un singur grad de libertate și la care forțele de legătură au moment nul față de axa Iz. Pentru o mișcare care începe fără viteză inițială, adică la $t = 0$, $\omega_z = 0$, se deduce din (4) că semnul accelerației unghiulare ε_z în momentul inițial este același cu semnul momentului M_{Iz}.

Rezultă că, *dacă viteza inițială e nulă, solidul începe să se miște, rotindu-se în jurul axei instantanee inițiale I_0z în sensul momentului rezultant al forțelor direct aplicate în raport cu axa I_0z* (forțele de legătură având moment nul față de I_0z).

O aplicație a acestui rezultat la studiul echilibrului solidului rigid supus la două reazeme simple cu frecare se va da în altă lucrare.

NOTA II. Asupra stabilității echilibrului unui solid rigid cu un grad de libertate și la care reacțiunile legăturilor au moment nul față de axa Iz.

Presupunem că forțele aplicate solidului depind numai de poziția solidului. Rezultatul precedent ne permite să enunțăm următoarea condiție *necesară și suficientă* pentru stabilitatea unei poziții izolate de echilibru:

„*Echilibrul în poziția θ_0 este stabil dacă și numai dacă solidul așezat fără viteză inițială în vecinătatea lui θ_0 are tendința să revină în poziția θ_0*" [2]).

Într-adevăr, fie θ unghiul mișcării plane, ales ca parametru de poziție al solidului, și $M_{Iz}(\theta)$ momentul rezultant față de Iz al forțelor direct

[1]) Exemple: solid acționat de forțe coplanare și supus la două reazeme simple fără frecare sau solid care se rostogolește fără alunecare, mai general, solid cu legături ideale.

[2]) Remarcăm că definiția stabilității echilibrului nu coincide cu criteriul enunțat (pentru această definiție, vezi, de ex. [2], p. 264).

aplicate. Presupunem $M_{Iz}(\theta)$ funcție continuă pe o vecinătate a lui θ_0 și anulîndu-se pe această vecinătate numai în θ_0. Introducem funcția de forță prin $U(\theta) = \int_{\theta_0}^{\theta} M_{Iz}(\theta) \cdot d\theta$[1]).

Se știe că în cazul unui sistem a cărui poziție depinde de un parametru, dacă există o funcție de forță depinzînd numai de poziție, condiția necesară și suficientă de stabilitate a unei poziții de echilibru izolate este ca funcția de forță să admită maxim în acea poziție (vezi [1], p. 174—176, teorema lui Diriclet și reciproca ei, și [2], p. 267).

Or, condiția ca $U(\theta)$ să aibă un maxim în θ_0 este ca $\frac{dU}{d\theta}$ să se anuleze în θ_0, trecînd de la valori pozitive la valori negative cînd θ crește de la valori mai mici ca θ_0 la valori mai mari ca θ_0 într-o anumită vecinătate a lui θ_0.

Cum $\frac{dU}{d\theta} = M_{Iz}(\theta)$, această condiție e echivalentă cu cea din enunțul propoziției dacă avem în vedere rezultatul din nota I.

Primită la redacție la 8 decembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. J. Chazi, *Cours de mécanique rationnelle*, tome I, Paris, Gauthier — Villars, 1947.
2. — , *Cours de mécanique rationnelle*, tome II, Paris, Gauthier — Villars, 1948.

[1]) Forța generalizată este $M_{Iz}(\theta)$, deoarece lucrul mecanic corespunzător variației $\delta\theta$ este $M_{Iz} \cdot (\theta)\delta\theta$.

EFECTUL ORIENTĂRII ORTOTROPICITĂȚII ÎN PROBLEMA FLUTTERULUI SUPERSONIC AL STRUCTURILOR SUBȚIRI, ETEROGENE, CILINDRICE CIRCULARE, DE LUNGIME INFINITĂ

de L. LIBRESCU și TR. BĂDOIU
I.M.F.C.A.

Se prezintă un studiu analitic al problemei flutterului structurilor cilindrice circulare subțiri, de lungime infinită, construite prin suprapunerea unui număr arbitrar de straturi elastice, subțiri, ortotrope. Structura astfel construită se consideră plasată într-un curent de gaz de mare viteză supersonică, paralel axei cilindrului. Se studiază influența variației unghiului de orientare a ortotropicității asupra mărimilor critice de flutter și se trag concluzii privind obținerea în acest sens a unor condiții de optimum.

1. INTRODUCERE

Folosirea pe scară din ce în ce mai largă atît în domeniul construcțiilor aerospațiale, cît și în alte domenii ale tehnologiei moderne a unor materiale ortotrope netradiționale, ca, de exemplu, a materialelor armate cu fibre (a plasticelor armate cu fibre de metal sau a metalelor armate cu fibre de cuartz, fibrele constituind armătura putînd fi orientate în mod convenabil în cursul fabricării structurii), a creat posibilitatea alegerii unei orientări a armăturii (concretizată prin unghiul Φ de rotire al axelor fizice ale materialului în raport cu acele geometrice, vezi fig. 1), astfel încît structura să aibă o comportare optimă. În cazul analizei problemei de flutter a structurilor subțiri construite din astfel de materiale, studiul de optim rezidă în acest context în determinarea unghiului Φ de orientare a fibrelor (numit și unghi de orientare al ortotropicității), pentru care viteza critică de flutter capătă o valoare maximă.

Urmînd această linie, în cele ce urmează vom analiza efectul variației unghiului de orientare al ortotropicității în problema flutterului axial-simetric al structurilor cilindrice circulare, complete, subțiri, de lungime infinită.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 6, 1971, P. 1313–1329

Vom considera în plus că structura este construită prin suprapunerea pe grosime a unui număr de straturi subţiri, materialul fiecărui strat (j) avînd constantele sale fizico-mecanice şi unghiul Φ_j de orientare al ortotropicităţii.

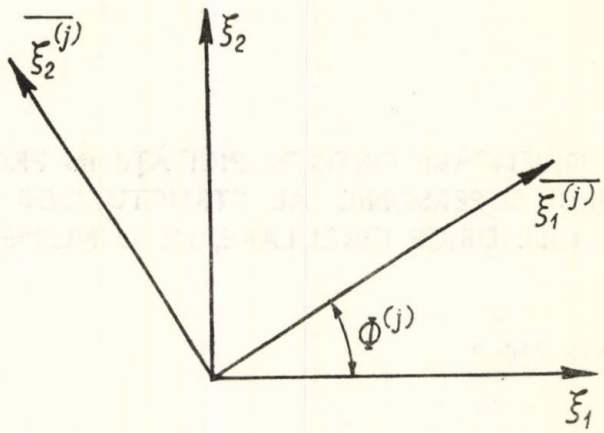


Fig. 1

2. IPOTEZE. CONSIDERAŢII GEOMETRICE

Considerăm o structură subţire, de formă cilindrică circulară, de grosime constantă h, infinit lungă, construită prin suprapunerea arbitrară a p straturi elastice, materialul fiecărui strat fiind omogen şi ortotrop. În ceea ce priveşte suprafaţa de referinţă a eforturilor şi a momentelor, aceasta va fi aleasă drept suprafaţă inferioară a celui de-al r-lea strat, considerat

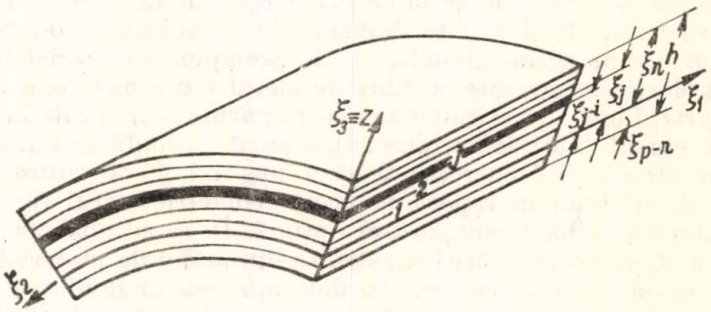


Fig. 2

de la suprafaţa de mărginire exterioară a structurii ($p \geqslant r \geqslant 1$). În felul acesta, din totalul de p straturi care alcătuiesc structura, r sînt dispuse deasupra suprafeţei de referinţă a structurii, iar $p-r$ dedesubtul acestei suprafeţe (fig. 2).

În cazul în care structura este construită prin suprapunerea simetrică a $2l+1$ ($l=1,2,\ldots$) straturi elastice (simetria menționată este de natură geometrică și fizico-mecanică, ea referindu-se și la valorile unghiurilor de orientare a ortotropicității), suprafața de referință se alege

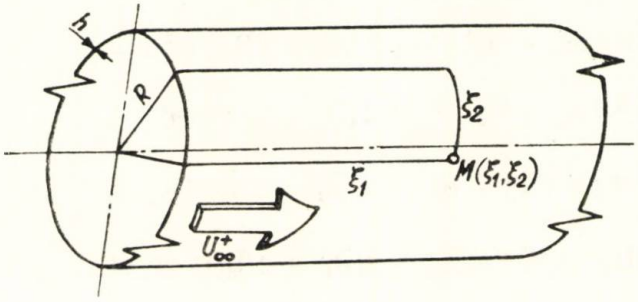


Fig. 3

drept suprafața mediană a stratului median. Fie R raza de curbură a suprafeței de referință a structurii, suprafață pe care o vom raporta la un sistem de coordonate curbiliniu ortogonal (ξ_1, ξ_2), reprezentat în figura 3.

Structura se consideră plasată într-un curent de gaz de mare viteză supersonică, exterior structurii și paralel axei cilindrului.

Ecuația echilibrului aeroelastic va fi dedusă admițînd următoarele ipoteze:

a) straturile din care este construită structura sînt împreunate rigid, astfel încît sînt excluse dezlipiri sau alunecări pe suprafețele de separare ale acestora;

b) pentru fiecare strat și pentru structura în ansamblu este considerată valabilă ipoteza Love-Kirchhoff;

c) materialul fiecărui strat este presupus elastic, omogen și ortotrop, direcțiile principale de ortotropie fiind considerate rotite în jurul axei ξ_3 cu unghiul $\Phi^{(j)}$ în raport cu sistemul (ξ_1, ξ_2);

d) mișcarea structurii se consideră axial-simetrică;

e) sînt presupuse valabile condițiile de aplicabilitate a formulei presiunii aerodinamice bazate pe *teoria pistonului* (vezi Bolotin [1]).

În scopul obținerii ecuațiilor echilibrului aeroelastic este necesar a deduce expresia coeficienților elastici ai materialului stratului (j) în sistemul de coordonate (ξ_1, ξ_2), atunci cînd sînt cunoscuți respectiv coeficienții elastici

$$\overline{B}_{11}^{(j)}=\frac{\overline{E}_1^{(j)}}{1-\overline{\mu}_1^{(j)}\overline{\mu}_2^{(j)}};\quad \overline{B}_{22}^{(j)}=\frac{\overline{E}_2^{(j)}}{1-\overline{\mu}_1^{(j)}\overline{\mu}_2^{(j)}},$$

$$\overline{B}_{12}^{(j)}=\frac{\overline{E}_1^{(j)}\overline{\mu}_2^{(j)}}{1-\overline{\mu}_1^{(j)}\overline{\mu}_2^{(j)}}=\frac{\overline{E}_2^{(j)}\overline{\mu}_1^{(j)}}{1-\overline{\mu}_1^{(j)}\overline{\mu}_2^{(j)}};\quad \overline{B}_{66}^{(j)}=\overline{G}_{12}^{(j)}, \tag{1}$$

în sistemul de coordonate coincizînd cu direcţiile principale de ortotropie (constantele de ortotropie), unde $\overline{E}_i^{(j)}$; $\overline{\mu}_i^{(j)}$ reprezintă modulul lui Young, respectiv coeficientul Poisson în direcţia coordonatei ξ_i $(i = 1,2)$.

Legătura dintre cele două grupe de coeficienţi elastici este dată prin (vezi, de exemplu, [2])

$$
\begin{aligned}
B_{11}^{(j)} &= \overline{B}_{11}^{(j)} m_{(j)}^4 + \overline{B}_{22}^{(j)} n_{(j)}^4 + 2(\overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)}) m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,\\
B_{22}^{(j)} &= \overline{B}_{11}^{(j)} n_{(j)}^4 + \overline{B}_{22}^{(j)} m_{(j)}^4 + 2(\overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)}) m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,\\
B_{12}^{(j)} &= \overline{B}_{12}^{(j)} + [\overline{B}_{11}^{(j)} + \overline{B}_{22}^{(j)} - 2(\overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)})] m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,\\
B_{66}^{(j)} &= \overline{B}_{66}^{(j)} + [\overline{B}_{11}^{(j)} + \overline{B}_{22}^{(j)} - 2(\overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)})] m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,\\
B_{16}^{(j)} &= [\overline{B}_{22}^{(j)} n_{(j)}^2 - \overline{B}_{11}^{(j)} m_{(j)}^2 + (\overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)})(m_{(j)}^2 - n_{(j)}^2)] m_{(j)} n_{(j)},\\
B_{26}^{(j)} &= [\overline{B}_{22}^{(j)} m_{(j)}^2 - \overline{B}_{11}^{(j)} n_{(j)}^2 - (\overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)})(m_{(j)}^2 - n_{(j)}^2)] m_{(j)} n_{(j)},
\end{aligned}
\tag{2}
$$

unde

$B_{ik}^{(j)}$ reprezintă coeficienţii elastici referiţi la sistemul de coordonate (ξ_1, ξ_2), iar

$$
m_{(j)} = \cos \Phi^{(j)}, \quad n_{(j)} = \sin \Phi^{(j)}. \tag{3*}
$$

Rezultă deci din (2) că, în cazul în care axele de referinţă geometrice formează cu axele fizice un unghi $\Phi^{(j)}$, cei şase coeficienţi elastici independenţi prin care este caracterizată ortotropia materialului (stratului (j)) pot fi complet definiţi prin intermediul celor referiţi la axele principale de ortotropie şi prin unghiul $\Phi^{(j)}$.

În cazul $\Phi^{(j)} = 0$ $(j = 1,2,\ldots)$ rezultă

$$
\begin{aligned}
&B_{11}^{(j)} = \overline{B}_{11}^{(j)}; \quad B_{22}^{(j)} = \overline{B}_{22}^{(j)}; \quad B_{12}^{(j)} = \overline{B}_{12}^{(j)},\\
&\overline{B}_{66}^{(j)} = B_{66}^{(j)}; \quad B_{16}^{(j)} = B_{26}^{(j)} = 0,
\end{aligned}
\tag{4*}
$$

ceea ce implică faptul binecunoscut că, în cazul în care axele principale de ortotropie coincid cu axele geometrice, materialul este caracterizat prin patru constante independente (cazul ortotropiei).

Ţinînd seama de relaţiile care definesc expresiile rigidităţilor de întindere C_{ik}, de încovoiere D_{ik} şi de întindere-încovoiere K_{ik} în

*) Peste tot în lucrare indicele (j) întovărăşind o anumită mărime fizică sau geometrică arată că aceasta se referă la stratul (j) al structurii.

teoria structurilor nesimetrice construite, date de (vezi Ambarțumian [2], Librescu [3]) :

$$\begin{Bmatrix} C_{ik} \\ 3D_{ik} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} B_{ik}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix},$$

$$K_{ik} = \frac{1}{2}\left[\sum_{j=1}^{r} B_{ik}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} B_{ik}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\right], \tag{5}$$

se pot obține, ținînd seama de formulele de transformare (2), expresiile acestor rigidități prin intermediul coeficienților elastici referiți la direcțiile principale de ortotropie și unghiul Φ, precum urmează :

$$\begin{Bmatrix} C_{11} \\ 3D_{11} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} m_{(j)}^4 + \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} n_{(j)}^4 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_3^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,$$

$$\begin{Bmatrix} C_{22} \\ 3D_{22} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} m_{(j)}^4 + \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} n_{(j)}^4 + \tag{6}$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_3^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,$$

$$\begin{Bmatrix} C_{12} \\ 3D_{12} \end{Bmatrix} = \left[\sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} + \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} - \right.$$

$$\left. - 2 \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_3^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix}\right] m_{(j)}^2 n_{(j)}^2 + \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{12}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix},$$

$$\begin{Bmatrix} C_{66} \\ 3D_{66} \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{66}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} + \left[\sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} + \right.$$

$$\left. + \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} - 2 \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_3^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix}\right] m_{(j)}^2 n_{(j)}^2,$$

BUDAPEST EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

$$\begin{Bmatrix} C_{16} \\ 3D_{16} \end{Bmatrix} = \Bigg[\sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} n_{(j)}^2 - \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} m_{(j)}^2 -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} (m_{(j)}^2 - n_{(j)}^2) \Bigg] m_{(j)}\, n_{(j)},$$

$$\begin{Bmatrix} C_{26} \\ 3D_{26} \end{Bmatrix} = \Bigg[\sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} m_{(j)}^2 - \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} n_{(j)}^2 -$$

$$- \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} \begin{Bmatrix} \xi_{(j)} - \xi_{(j-1)} \\ \xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3 \end{Bmatrix} (m_{(j)}^2 - n_{(j)}^2) \Bigg] m_{(j)}\, n_{(j)},$$

$$K_{11} = \frac{1}{2} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) m_{(j)}^4 + \sum_{j=1}^{r} B_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, n_{(j)}^4 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^2\, n_{(j)}^2 - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^4 -$$

$$- \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, n_{(j)}^4 - 2 \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^2\, n_{(j)}^2 \Bigg\},$$

$$K_{22} = \frac{1}{2} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^4 + \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, n_{(j)}^4 +$$

$$+ 2 \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^2\, n_{(j)}^2 - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, n_{(j)}^4 -$$

$$- 2 \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^2\, n_{(j)}^2 - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2)\, m_{(j)}^4 \Bigg\},$$

$$K_{12} = \frac{1}{2} \Bigg\{ \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{12}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{12}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) +$$

$$+ \Bigg[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) +$$

$$+ \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) -$$

$$- 2 \sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) + 2 \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \Bigg] m_{(j)}^2\, n_{(j)}^2 \Bigg\},$$

$$K_{16} = \left\{ \left[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \right] m_{(j)}^2 - \right.$$

$$- \left[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \right] n_{(j)}^2 +$$

$$\left. + \left[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \right] (m_{(j)}^2 - n_{(j)}^2) \right\} m_{(j)} n_{(j)},$$

$$K_{26} = \left\{ \left[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{22}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \right] m_{(j)}^2 - \right.$$

$$- \left[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} (\overline{B}_{11}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \right] n_{(j)}^2 -$$

$$\left. - \left[\sum_{j=1}^{r} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) - \sum_{j=r+1}^{p} \overline{B}_{3}^{(j)} (\xi_{(j)}^2 - \xi_{(j-1)}^2) \right] (m_{(j)}^2 - n_{(j)}^2) \right\} m_{(j)} n_{(j)},$$

unde

$$\overline{B}_{3}^{(j)} = \overline{B}_{12}^{(j)} + 2\overline{B}_{66}^{(j)}.$$

În cazul structurilor simetrice construite din $(2l+1)$ straturi ortotrope, ținînd seama că expresia rigidităților nenule este dată prin

$$C_{ik} = 2 \sum_{j=1}^{l+1} B_{ik}^{(j)} (\xi_{(j)} - \xi_{(-1)}),$$

$$D_{ik} = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{l+1} B_{ik}^{(j)} (\xi_{(j)}^3 - \xi_{(j-1)}^3), \tag{7}$$

se obține fără dificultate, similar ca în cadrul structurilor nesimetric construite, expresiile acestor rigidități prin intermediul constantelor elastice $\overline{B}_{ik}^{(j)}$ și a unghiurilor $\Phi^{(j)}$.

Nu vom proceda la scrierea explicită a acestor expresii.

3. ECUAȚIILE ECHILIBRULUI AEROELASTIC. DEDUCEREA MĂRIMILOR CRITICE DE FLUTTER

Ecuația echilibrului aeroelastic, scrisă în formă compactă, este dată de

$$(\mathcal{S} - \mathcal{A} - \mathcal{J})\ (w) = 0, \tag{8}$$

unde operatorul structural $\mathcal{S}(w)$ este definit prin [4],

$$\mathcal{S}(w) = \left(\frac{d_{21}^2}{A_{22}} + D_{11} - D_{11}^0\right) w,_{1111} - 2\frac{d_{21}}{RA_{22}} w,_{11} + \frac{1}{R^2 A_{22}} w, \tag{9}$$

operatorul de inerţie $\mathcal{I}(w)$ prin

$$\mathcal{I}(w) = -\left(m_0 \frac{\partial^2}{\partial t^2} + m_0 \varepsilon \frac{\partial}{\partial t}\right)(w) \tag{10}$$

şi operatorul aerodinamic prin

$$\mathcal{A}(w) = -\rho_0 c_\infty \left(\frac{\partial}{\partial t} + U_\infty \frac{\partial}{\partial \xi_1}\right)(w), \tag{11}$$

unde $w = w(\xi_1, t)$ reprezintă componenta radială a vectorului deplasare, ε coeficientul de amortizare structurală, t timpul, ρ_0 densitatea gazului, c_∞ viteza sunetului, U_∞ viteza curentului neperturbat, $m_0 = \sum_{j=1}^{p} \gamma_{(j)}(\xi_{(j)} - \xi_{(j-1)})$ masa redusă a structurii.

În plus intervin parametrii

$$\begin{aligned}
D_{11}^0 &= K_{11}d_{11} + K_{12}d_{21} + K_{16}d_{61},\\
d_{21} &= A_{22}K_{21} + A_{21}K_{11} + A_{26}K_{16},\\
d_{11} &= A_{11}K_{11} + A_{12}K_{12} + A_{16}K_{16},\\
d_{61} &= A_{16}K_{11} + A_{26}K_{12} + A_{66}K_{16},
\end{aligned} \tag{12}$$

$$A_{11} = \frac{C_{22}C_{66} - C_{26}^2}{\Omega}, \quad A_{22} = \frac{C_{11}C_{66} - C_{16}^2}{\Omega},$$

$$A_{12} = A_{21} = \frac{C_{16}C_{26} - C_{12}C_{66}}{\Omega}, \quad A_{16} = \frac{C_{12}C_{26} - C_{16}C_{22}}{\Omega},$$

$$A_{26} = \frac{C_{12}C_{16} - C_{26}C_{11}}{\Omega}, \quad A_{66} = \frac{C_{11}C_{22} - C_{12}^2}{\Omega},$$

$$\Omega = (C_{11}C_{22} - C_{12}^2)\, C_{66} + 2C_{12}C_{16}C_{26} - C_{11}C_{26}^2 - C_{22}C_{16}^2,$$

care depind de rigidităţile structurii definite prin relaţiile (6) (în cazul structurilor nesimetric construite).

Considerînd în (8) soluții de forma

$$w = w_0 e^{i(\Omega t - k\xi_1)}, \qquad i = (-1)^{1/2}, \tag{13}$$

care sînt proprii propagării undelor în medii infinite (vezi Landau și Lifschitz [5]), se obține ecuația caracteristică, scrisă în formă adimensională,

$$\widetilde{\Omega}^2 - i\left(\widetilde{\varepsilon} + \frac{\rho_0 R}{m_0}\right)\widetilde{\Omega} + i\,\frac{\rho_0 R}{m_0}\,\widetilde{k}M - \widetilde{\Omega}_1^2 = 0, \tag{14}$$

unde

$$\widetilde{\Omega}_1^2 = \left(\widetilde{D}_{11} - \widetilde{D}_{11}^0 + \frac{1}{\widetilde{A}_{22}}\,\widetilde{d}_{21}^2\right)\widetilde{k}^4 + \frac{2\widetilde{d}_{21}\widetilde{k}^2}{\widetilde{A}_{22}} + \frac{1}{\widetilde{A}_{22}} \tag{15}$$

reprezintă pătratul frecvențelor proprii de vibrare a structurii în vid în absența amortizării, $k = \dfrac{\pi}{\lambda}$ fiind numărul de undă (λ — lungimea semiundei în direcția generatoarelor structurii cilindrice), Ω frecvența de vibrare a structurii și w_0 constantă în general complexă.

Parametrii adimensionali prin intermediul cărora este exprimată ecuația caracteristică sînt definiți prin

$$\begin{aligned}
&\widetilde{\Omega} = \Omega R c_\infty^{-1},\ \widetilde{k} = kR,\ \widetilde{d}_{ij} = d_{ij}R^{-1},\\
&\widetilde{A}_{ij} = A_{ij}c_\infty^2\ m_0,\ \widetilde{D}_{ij} = D_{ij}R^{-2}m_0^{-1}\,c_\infty^{-2},\\
&\widetilde{K}_{ij} = K_{ij}R^{-1}m_0^{-1}c_\infty^{-2},\ \widetilde{\varepsilon} = \varepsilon R\,c^{-1},
\end{aligned} \tag{16}$$

unde parametrii neafectați de tildă au fost definiți prin relațiile (6).

Din (13) se vede că soluția este stabilită dacă pentru toate valorile posibile ale lui k este satisfăcută condiția Im $\Omega > 0$; în cazul satisfacerii inegalității inverse se obține condiția de pierdere a stabilității de tipul flutter. În felul acesta, stabilitatea sistemului fluid-structură depinde de caracterul rădăcinilor ecuației caracteristice.

Condițiile pentru ca ecuația algebrică în $\widetilde{\Omega}$ cu coeficienții complecși să nu posede rădăcini cu parte imaginară negativă pot fi exprimate prin condițiile Routh-Hurwitz generalizate (vezi Chebotorev și Meiman[6] sau Bolotin [1]), a căror aplicare permite obținerea expresiei vitezei critice de flutter, dată de

$$M_* = \left(1 + \frac{m_0\varepsilon}{\rho_0 c_\infty}\right)\frac{\widetilde{\Omega}_1}{\widetilde{k}}, \tag{17}$$

al cărui minim,

$$M_{*\min} = \left(1 + \frac{m_0 \varepsilon}{\rho_0 c_\infty}\right)\left[2\left[\frac{\tilde{d}_{21}}{\tilde{A}_{22}} + \left\{\left(\tilde{D}_{11} - \tilde{D}^0_{11} + \frac{\tilde{d}^2_{21}}{\tilde{A}_{22}}\right)\frac{1}{\tilde{A}_{22}}\right\}^{1/2}\right]\right]^{1/2}, \tag{18}$$

se obţine pentru

$$\tilde{k} = \left[\tilde{A}_{22}\left(\tilde{D}_{11} - \tilde{D}^0_{11} + \frac{\tilde{d}^2_{21}}{\tilde{A}_{22}}\right)\right]^{-1/4}. \tag{19}$$

În cazul structurilor simetric construite din $2l + 1$ ($l = 1,2,\ldots$) straturi, mărimile d_{ij} sînt nule ($d_{ij} = 0$), şi în acest caz viteza critică minimă de flutter este definită prin

$$M_{*\min} = \left(1 + \frac{m_0 \varepsilon}{\rho_0 c_\infty}\right)(2(D_{11}/A_{22})^{1/2})^{1/2}, \tag{20}$$

minim realizat pentru

$$\tilde{k} = (\tilde{A}_{22}\tilde{D}_{11})^{-1/4}. \tag{21}$$

Ţinînd seama în expresiile mărimilor critice de flutter (date prin (18) şi (19) în cazul structurilor nesimetric construite şi prin (20) şi (21) în cazul structurilor simetric construite) de (6) şi respectiv (7) şi presupunînd cunoscute constantele elastice din sistemul de coordonate care coincide cu direcţiile principale de ortotropie, se obţine dependenţa

$$M_{*\min} = M_{*\min}(\Phi^{(j)}). \tag{22}$$

Maximul funcţiei (22) determină valoarea unghiului $\Phi^{(j)}$ de orientare a ortotropicităţii materialului stratului (j), valoare care în contextul problemei studiate constituie condiţia de optimum.

Cîteva cazuri concrete privind studiul de optim al problemei flutterului structurilor cilindrice circulare ortotrope de lungime infinită care permit obţinerea unor concluzii cu caracter general în acest domeniu sînt prezentate în paragraful următor.

4. EXEMPLU NUMERIC

În cele ce urmează vom examina în cadrul unor exemple numerice efectul orientării ortotropicităţii asupra caracteristicilor critice de flutter a structurilor cilindrice circulare eterogene de lungime infinită.

Vom considera în acest sens două cazuri distincte a) şi b) de eterogenitate a structurii.

Cazul a. Corespunde structurilor cilindrice circulare de lungime infinită, simetric construite din trei straturi ortotrope, straturile exterioare fiind identice din punctul de vedere atît al proprietăţilor fizico-mecanice, cît şi al proprietăţilor geometrice. În cadrul acestui caz vom considera trei subcazuri ($a_1 - a_3$):

subcazul a_1 : în cadrul acestui subcaz, straturile exterioare se consideră că au grosimea $h_1 = h_3 = \delta$, iar stratul median grosimea $h_2 = 4\delta$ (grosimea totală $h = 6\,\delta$). Straturile exterioare sînt confecționate din materiale cu ortotropie de tipul 1, iar stratul median cu ortotropia de tipul 2 (vezi tabela 1);

subcazul a_2 : straturile au, respectiv, aceleași grosimi ca în cazul variantei precedente, straturile exterioare fiind confecționate din materiale cu ortotropia de tipul 2, iar stratul median din materiale cu ortotropia de tipul 1;

subcazul a_3 : straturile au, respectiv, aceleași grosimi ca în cazul variantelor precedente, materialul lor corespunzînd tipului 2 de ortotropie:

$$(\overline{E}_1^{(1)} = \overline{E}_1^{(2)} = \overline{E}_1^{(3)} = E;\ \overline{E}_2^{(1)} = \overline{E}_2^{(2)} = \overline{E}_2^{(3)} = 2E,$$
$$\overline{\mu}_1^{(1)} = \overline{\mu}_1^{(2)} = \overline{\mu}_1^{(3)} = 0{,}33;\ \overline{\mu}_2^{(1)} = \overline{\mu}_2^{(2)} = \overline{\mu}_2^{(3)} = 0{,}165). \tag{23}$$

În ceea ce privește unghiurile de orientare ale ortotropicității corespunzînd materialului celor trei straturi, în cazul celor trei subcazuri ($a_1 - a_3$) acestea se consideră a fi $\Phi^{(2)} = \Phi^{(3)} = \Phi''$, $\Phi^{(1)} = \Phi'$.

Cazul b. Acest caz corespunde structurilor cilindrice circulare de lungime infinită, construite prin suprapunerea a două straturi de grosime egală ($\delta_1 = \delta_2 = h/2$). Vom avea în vedere trei subcazuri ($b_1 - b_3$):

subcazul b_1 : în cadrul acestui subcaz, stratul inferior este confecționat dintr-un material cu ortotropia de tipul 1, iar cel superior dintr-un material cu ortotropia de tipul 2;

subcazul b_2 : în cadrul acestui subcaz, stratul superior este confecționat dintr-un material cu ortotropia de tipul 1, iar cel inferior cu ortotropia de tipul 2;

subcazul b_3 : cele două straturi care alcătuiesc structura sînt confecționate din același material corespunzînd tipului 2 de ortotropie. Unghiurile de orientare ale ortotropicității corespunzînd materialului stratului superior și inferior sînt notate, respectiv, cu Φ' și Φ''.

Menționăm că exemplele numerice sînt dezvoltate considerînd valabilă relația $\dfrac{m_0 \varepsilon}{\rho_0 c_\infty} \ll 1$.

Pe baza relațiilor din paragrafele 2 și 3 a fost reprezentată dependența vitezei critice minime de flutter:

$$\mathcal{M}_* \equiv 2^{-1/2} M_{*\min} \frac{h}{R} \left(\frac{m_0}{RE}\right)^{1/2} c_\infty,$$

în funcție de unghiurile de orientare a ortotropicității Φ' și Φ'', în cazurile *a* în figurile $4a_1 - 4a_3$ și în cazurile *b* în figurile $6b_1 - 6b_3$, precum și dependența mărimii $\widetilde{k}_1 = \widetilde{k}_* \left(\dfrac{h}{R}\right)^{1/2}$ în funcție de unghiurile Φ' și Φ'' în (cazul *a* în figurile $5a_1 - 5a_3$ și în cazul *b* în figurile $7b_1 - 7b_3$).

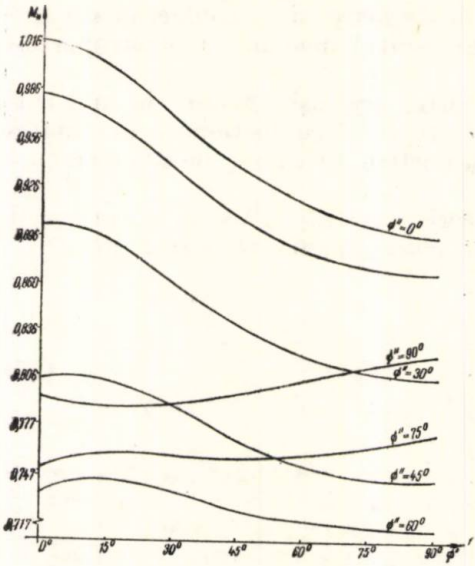


Fig. $4a_1$

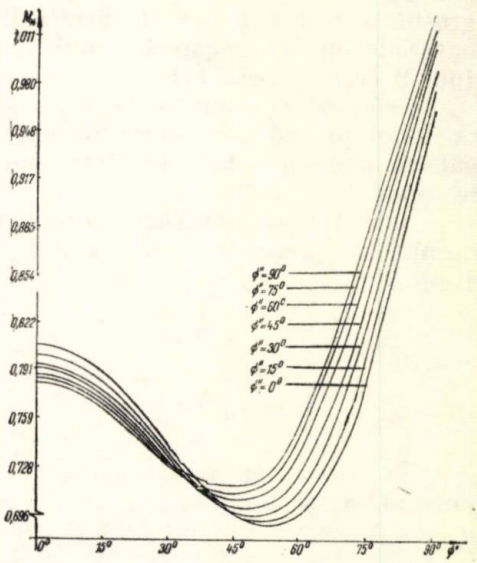


Fig. $4a_2$

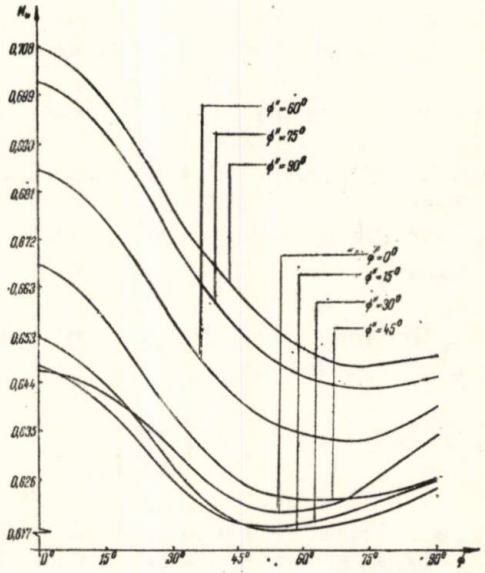


Fig. $4a_3$

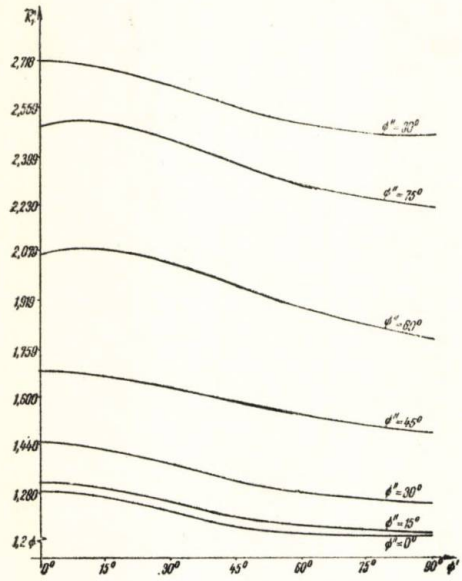


Fig. $5a_1$

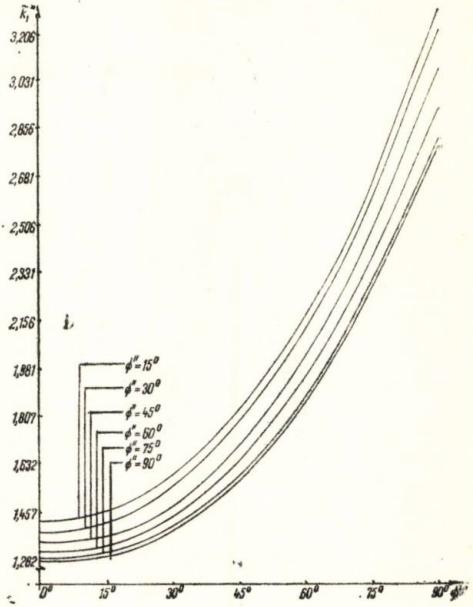


Fig. $5a_2$

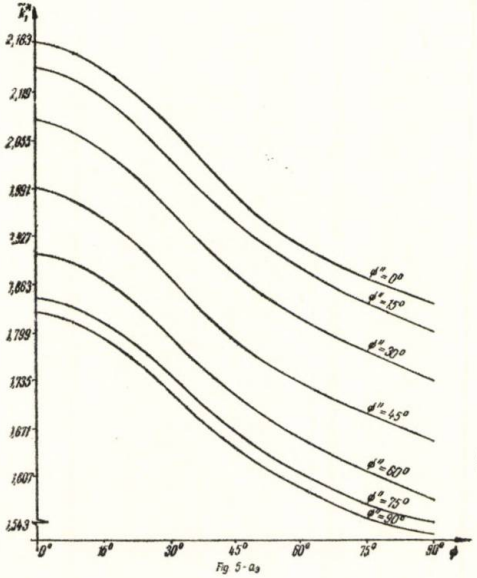


Fig 5 - a_3

Fig. $5a_3$

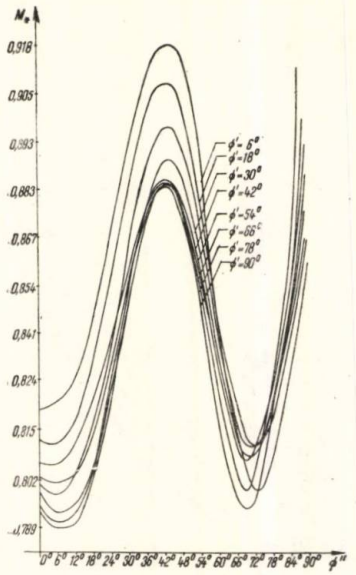


Fig. $6b_1$

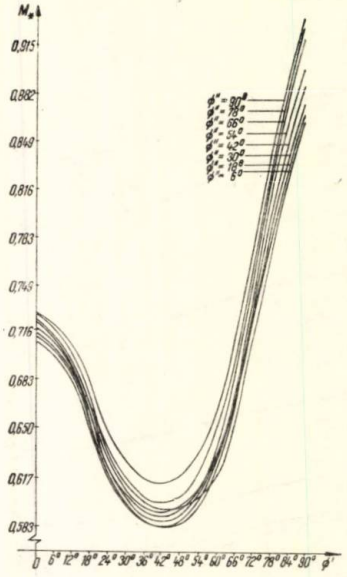


Fig. $6b_2$

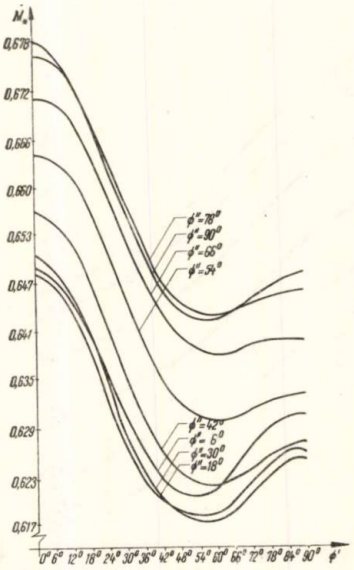


Fig. $6b_3$

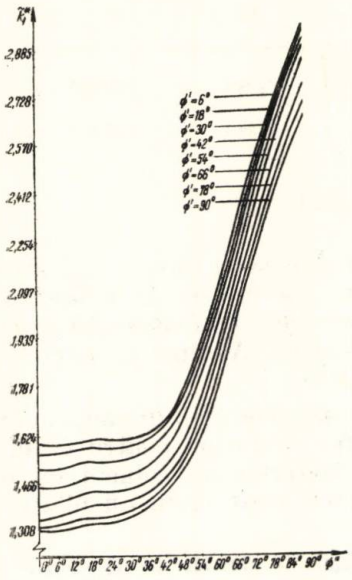


Fig. 7b$_1$

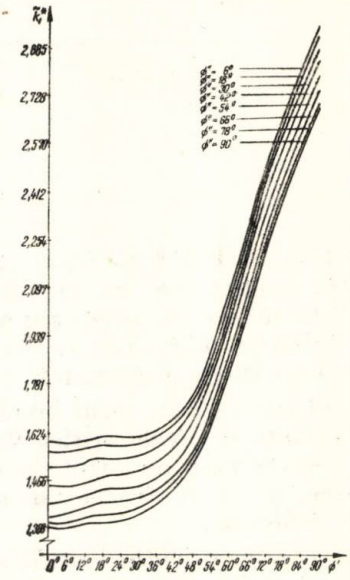


Fig. 7b$_2$

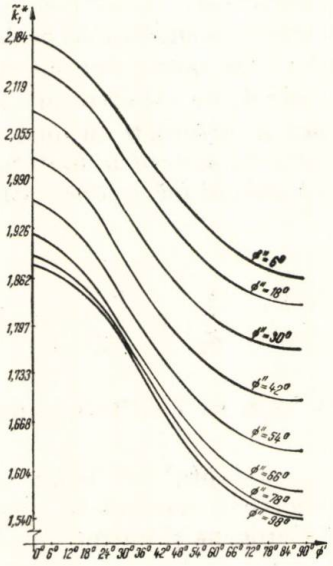


Fig. 7b$_3$

Tabela 1

Tipul de ortotropie	$\overline{E}_1$	$\overline{E}_2$	$\overline{\mu}_1$	$\overline{\mu}_2$	$\overline{G}_{12}$
Tipul 1	IOE	E	0,349	0,0349	0,5 E
Tipul 2	E	2E	0,165	0,33	0,5 E

5. CONCLUZII

A fost analizată problema flutterului axial-simetric al structurilor eterogene, subțiri, de lungime infinită, punîndu-se în evidență efectul variației unghiului de orientare a ortotropicității materialului straturilor asupra variației mărimilor critice de flutter. Analiza curbelor rezultate permite a se trage următoarele concluzii :

a) în contrast cu cazul învelitorii omogene [8], în cadrul căruia valoarea maximă a vitezei critice de flutter se obține pentru cazul în care direcțiile principale de ortotropie ale materialului coincid cu direcțiile geometrice, în cazul structurilor eterogene acest lucru nu mai constituie o regulă generală ;

b) variația orientării ortotropicității în straturile al căror material este caracterizat prin grade de ortotropie ridicate atrage după sine variații puternice a mărimilor critice de flutter ; variația mărimilor critice de flutter este insignifiantă în cazul materialelor caracterizate prin gradele de ortotropie reduse ;

c) variația mărimilor critice de flutter ca funcție de variația un ghiurilor de orientare a ortotropicității materialului fiecărui strat depinde în mod puternic de rapoartele modulelor de elasticitate care corespund diverselor straturi (și, evident, de raportul grosimilor diferitelor straturi).

Concluziile *b* și *c* pot fi formulate în mod concis, spunînd că efectul variației unghiului de ortotropicitate a materialului stratului j este cu atît mai puternic asupra variației mărimilor critice de flutter, cu cît valoarea rapoartelor

$$\frac{\overline{B}_{ik}^{(j)}}{\overline{B}_{11}^{(j)}} \; ; \; \frac{h_{(j)}}{h_{(1)}} \; ; \; \frac{\overline{B}_{ik}^{(s)}}{\overline{B}_{ik}^{(j)}} \quad (s \neq j) \tag{24}$$

este mai mare. Aceasta vine să confirme concluziile trase de Bagdasarian [7].

În concluzie subliniem faptul că, chiar în cazul particular considerat (flutterul axial-simetric), rezultatele obținute relevă capacitatea potențială a structurilor eterogene și anizotrope de realizare a unei proiectări optime.

Primită la redacție la 19 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. V. V. Bolotin, *Nekonservativnie zadaci teorii uprugoi ustoicivosti*, Moskva, Fizmatghiz, 1961.
2. S. A. Ambarțumian, *Teoria anizotropnîh obolocek*, Moskva, Fizmatghiz, 1961.
3. L. Librescu, *Vibrations et stabilité aéroélastique des structures cylindriques non-homogènes placées dans un courant fluid compressible*, Rev, Méc., Appl., **8**, *2*, 251–276 (1963).
4. L. Librescu, *Statica și dinamica structurilor elastice, anizotrope și eterogene*, București, Edit. Academiei, 1969.
5. L. D. Landau, E. M. Lifschitz, *Teoria uprugosti*, Moskva, Izd. „Nauka", 1965.
6. N. G. Chebotorev, N. S. Meiman, *Problema Rausa — Gurvitza dlia polinomov i țelîh funkții*, Izd. ANSSR, 1949.
7. G. E. Bagdasarian, *Ustoicivosti anisotropnoi sloistoi țilindriceskoi obolocki v sverhsvucovom potoke gaza*, Dokladî Akad. Nauk Arm. SSR, **39**, *5* (1964).
8. — *Ustoicivosti anisotropnoi țilindriceskoi obolociki v sverhsvucovom potoke gaza*, Izv. Akad. Nauk. Arm. SSR, **15**, *6* (1962).

VIBRAȚIILE TRANSVERSALE ALE PLĂCILOR PLANE CU MASE CONCENTRATE ATAȘATE

de A. V. DARABONT
Institutul politehnic București

În lucrare se studiază vibrațiile transversale ale plăcilor plane dreptunghiulare la care sînt atașate un număr finit de mase concentrate, pentru exprimarea cărora se utilizează distribuția lui Dirac.
Se abordează diferite cazuri particulare, cum sînt vibrațiile proprii, vibrațiile forțate armonice și aperiodice și vibrațiile în cazul în care asupra plăcii plane acționează forțe de compresiune sau de întindere situate în planul median al plăcii.

1. GENERALITĂȚI

Teoria distribuțiilor s-a dovedit extrem de eficace la studiul sistemelor materiale de masă discontinuu variabilă și acționate de forțe excitatoare cu caracteristici discontinuu variabile. În acest sens pot fi citate ca exemple lucrările [1] — [7].

În prezenta lucrare sînt analizate unele metode de utilizare a teoriei distribuțiilor la studiul vibrațiilor transversale ale plăcilor cu mase adiționale concentrate.

Pentru a exprima ecuația vibrațiilor plăcilor plane, facem ipoteza că o secțiune transversală, inițial plană, rămîne și în timpul încovoierii tot plană și normală la suprafața în care trece planul median Oxy. Vom nota cu z ordonatele diferitelor puncte ale plăcii, normal pe planul Oxy, iar cu w săgeata în (x, y) a suprafeței mediane față de poziția sa inițială, măsurate normal pe planul Oxy (fig. 1).

Săgeata $w\,(x, y)$ a planului median în cazul în care placa este supusă la o acțiune descrisă de funcția $q(x, y)$ satisface ecuația cu derivate parțiale

$$\frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \nabla^4 w = q(x, y),$$

unde E este modulul de elasticitate al plăcii, h grosimea plăcii, ν coeficientul lui Poisson, iar

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}.$$

Să presupunem că plăcii i se atașează o masă concentrată M_1, centrul de masă avînd coordonatele x_1 y_1, și că asupra plăcii acționează

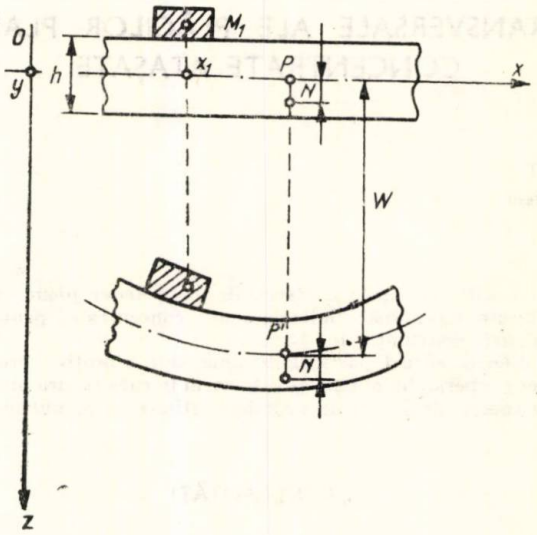


Fig. 1

o forță descrisă de funcția $q(x, y, t)$. În acest caz, introducînd forța de inerție corespunzătoare :

$$-[\rho h + M_1 \delta(x - x_1,\ y - y_1)]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2},$$

ecuația de mișcare se scrie

$$N\nabla^4 w + [\rho h + M_1 \delta(x - x_1, y - y_1)]\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t),$$

unde

$$N = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

este rigiditatea la încovoiere a plăcii plane, q masa specifică a plăcii, iar $\delta(x - x_1,\ y - y_1)$ distribuția lui Dirac de două variabile.

În cazul unei plăci, cu un număr arbitrar de mase concentrate adiționale $M_1, M_2, \ldots, M_k$ în punctele $A_1(x_1, y_1), A_2(x_2, y_2), \ldots, A_k\ (x_k, y_k)$, ecuația diferențială a deformării plăcii este de forma

$$N \nabla^4 w + \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_1, y - y_1) \right] \frac{\partial^2 W}{\partial t^2} = q(x, y, t). \tag{1}$$

Condițiile la limită în coordonate n, s vor fi date de relațiile [3]

$$\nabla^2 w = (1 - \nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \sin^2 \theta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \theta \right], \tag{2}$$

$$\frac{\partial \nabla^2 w}{\partial n} = (1 - \nu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \sin \theta \cos \theta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} (\sin^2 \theta - \cos^2 \theta) \right]. \tag{3}$$

În cazul în care placa este încastrată, condițiile pe contur capătă forma simplă

$$w = 0, \frac{\partial w}{\partial n} = 0. \tag{4}$$

Pentru o placă simplu rezemată, de-a lungul unei porțiuni drepte a conturului vom avea

$$w = 0, \ \nabla^2 w = 0. \tag{5}$$

Condițiile inițiale precizează deformarea plăcii plane și viteza la momentul $t = 0$:

$$w(x, y, 0) = f(x, y); \frac{\partial w}{\partial t}(x, y, 0) = g(x, y), \tag{6}$$

unde $f(x,y)$ și $g(x,y)$ sînt funcții cunoscute.

Rezolvînd ecuația diferențială (1) în condițiile la limită (4) sau (5) și în condițiile inițiale (6), momentele încovoietoare se pot determina cu relațiile

$$M_x = -N \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right); \ M_y = -N \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right), \tag{7}$$

iar pentru momentele de răsucire cu relația

$$M_{xy} = -(1 - \nu) N \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}. \tag{8}$$

2. VIBRAȚIILE PLĂCILOR PLANE DREPTUNGHIULARE

2.1. VIBRAȚIILE PROPRII

Pentru a studia vibrațiile proprii ale unei plăci dreptunghiulare, trebuie să integrăm ecuația omogenă (1). Presupunem că ea admite o soluție de forma

$$w(x, y, t) = W(x, y)\, e^{i\omega t}. \tag{9}$$

Înlocuind în ecuația omogenă (1), obținem

$$\nabla^4 W - \left[\lambda^4 + \gamma^2 \sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x - x_i, y - y_i)\right] W = 0, \tag{10}$$

unde

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2}{c^2};\quad c^2 = \frac{N}{\rho h};\quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{N}.$$

Pentru anumite condiții de contur putem scrie

$$W(x, y) = X(x)\, Y(y). \tag{11}$$

În acest caz, ecuația (10) devine

$$X^{IV}(x)\, Y(y) + 2X''(x)\, Y''(y) + X(x)\, Y^{IV}(y) - \lambda^4 X(x)\, Y(y) -$$

$$- \gamma^2 \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i, y - y_i)\, X(x)\, Y(y) = 0. \tag{12}$$

În ecuația (12), funcțiile $X(x)$ și $Y(y)$ pot fi separate [3] dacă

$$Y''(y) = -\beta^2 Y(y);\ Y^{IV}(y) = -\beta^2\, Y''(y)$$

sau

$$X''(x) = -\alpha^2 X(x);\ X^{IV}(x) = -\alpha^2 X''(x), \tag{13}$$

unde β și α se determină din condițiile la limită (4) sau (5). Condițiile (13) sînt îndeplinite de funcțiile trigonometrice sin αx, respectiv sin βx.

Să considerăm cazul unei plăci dreptunghiulare simplu rezemate pe laturile $y = 0, b$. În acest caz avem

$$Y_m(y) = C \sin \beta_m y;\ \beta_m = \frac{m\pi}{b}\ (m = 1,2,\ldots,\infty). \tag{14}$$

Această funcție satisface condițiile

$$Y_m(0) = Y_m(b) = Y_m''(0) = Y_m''(b) = 0 \tag{15}$$

pentru orice m întreg, deci și condițiile la limită (5)

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = \nabla^2 w(x, 0, t) = \nabla^2 w(x, b, t) = 0. \tag{16}$$

Introducem soluția (14) în (12), multiplicăm ecuația obținută cu $\sin \beta_m y$, integrăm de la 0 la b și obținem

$$X^{IV} - 2\beta_m^2 X'' - (\lambda^4 - \beta_m^4) X - \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X \, \delta(x - x_i) \sin^2 \beta_m y_i = 0, \tag{17}$$

unde

$$\gamma_m^2 = \frac{2\omega^2}{N b \beta_m},$$

Aplicînd relației (17) transformarea Laplace, obținem

$$q^4 \overline{X}(q) = q^3 X(0) - q^2 X'(0) - q X''(0) - X'''(0) - 2\beta_m^2 [q^2 \overline{X}(q) -$$

$$- q X(0) - X'(0)] - (\lambda^4 - \beta_m^4) \overline{X}(q) - \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X(x_i) \times$$

$$\times e^{-qx_i} \sin^2 \beta_m y_i = 0, \tag{18}$$

unde

$$\overline{X}(q) = \int_0^\infty e^{-qx} X(x) \, dx, \quad \int_0^\infty \delta(x - x_i) \, e^{-qx} X(x) \, dx = e^{-qx_i} X(xi).$$

Din (18) obținem

$$\overline{X}_{(q)} = \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{\varepsilon^2}{q^2 - \delta^2} + \frac{\delta^2}{q^2 + \varepsilon^2} \right) [q X(0) + X'(0)] +$$

$$+ \frac{1}{2\lambda^2} \left(\frac{1}{q^2 - \delta^2} - \frac{1}{q^2 + \varepsilon^2} \right) \left[q X''(0) + X'''(0) - \right.$$

$$\left. - \gamma_m \sum_{i=1}^{k} M_i X(x_i) e^{-qx_i} \sin^2 \beta_m y_i \right], \tag{19}$$

$$\varepsilon^2 = \lambda^2 - \beta_m^2; \quad \delta^2 = \lambda^2 + \beta_m^2.$$

Efectuînd transformata Laplace inversă, din (19) rezultă

$$X(x) = X(0)\ \Phi_1(x) + X'(0)\,\Phi_2(x) + X''(0)\,\Phi_3(x) + X'''(0)\,\Phi_4(x) -$$

$$- \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i\, X(x_i)\,\Phi_5(x)\sin^2 \beta_m y_i\, H(x - x_i), \tag{20}$$

unde

$$\Phi_1(x) = \frac{1}{2\lambda^2}(\varepsilon^2 \operatorname{ch} \delta x + \delta^2 \cos \varepsilon x),$$

$$\Phi_2(x) = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{\varepsilon^2}{\delta}\operatorname{sh} \delta x + \frac{\delta^2}{\varepsilon}\sin \varepsilon x\right),$$

$$\Phi_3(x) = \frac{1}{2\lambda^2}(\operatorname{ch}\delta x - \cos \varepsilon x);\ \Phi_4(x) = \frac{1}{2\lambda^2}\left(\frac{1}{\delta}\operatorname{sh}\delta x - \frac{1}{\varepsilon}\sin \varepsilon x\right),$$

$$\Phi_5(x) = \frac{1}{2\lambda^2}\left[\frac{1}{\delta}\operatorname{sh}\delta(x - x_i) - \frac{1}{\varepsilon}\sin \varepsilon (x - x_i)\right]. \tag{21}$$

Să studiem cîteva cazuri particulare. Să considerăm o placă cu laturile $x = 0, a$ încastrate. În acest caz, condiţiile la limită vor fi de forma

$$X(0) = X'(0) = X(a) = X'(a) = 0. \tag{22}$$

Soluţia (20) va lua forma

$$X(x) = X''(0)\,\Phi_3(x) + X'''(0)\,\Phi_4(x) - \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i\, X(x_i)\,\Phi_5(x)\sin^2 \beta_m y_i \times$$

$$\times H(x - x_i). \tag{23}$$

Ţinînd seama de ultimele două condiţii la limită de la (22), formăm sistemul de ecuaţii

$$X(a) = X''(0)\,\Phi_3(a) + X'''(0)\,\Phi_4(a) - \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i\, X(x_i)\,\Phi_5(a)\sin^2 \beta_m y_i \times$$

$$\times H(a - x_i) = 0, \tag{24}$$

$$X'(a) = X''(0)\,\Phi_3'(a) + X'''(0)\,\Phi_3(a) - \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i\, X(x_i) \times$$

$$\times \Phi_5'(a)\sin^2 \beta_m y_i\, H(a - x_i),$$

cu ajutorul căruia obținem pentru $X''(0)$ și $X'''(0)$ expresiile

$$X''(0) = \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X(x_i) \sin^2 \beta_m y_i H(a - x_i) \times$$

$$\times \frac{\Phi_5(a)\Phi_3(a) - \Phi_5'(a)\Phi_4(a)}{\Phi_3^2(a) - \Phi_4(a)\Phi_3'(a)}, \tag{25}$$

$$X'''(0) = \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X(x_i) \sin^2 \beta_m y_i H(a - x_i) \frac{\Phi_3(a)\Phi_5'(a) - \Phi_5(a)\Phi_3'(a)}{\Phi_3^2(a) - \Phi_4(a)\Phi_3'(a)}.$$

Înlocuind relațiile (25) în soluția (23), după o serie de calcule obținem

$$X(x) = \gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X(x_i) \sin^2 \beta_m y_i \Phi_I^i(x), \tag{26}$$

unde

$$\Phi_I^i(x) = \frac{H(a - x_i)}{\Phi_3^2(a) - \Phi_4(a)\Phi_3'(a)} \{\Phi_3(x)[\Phi_5(a)\Phi_3(a) - \Phi_5'(a)\Phi_4(a)] + \tag{27}$$

$$+ \Phi_4(x)[\Phi_3(a)\Phi_5'(a) - \Phi_5(a)\Phi_5'(a)]\} - \Phi_5(x) H(x - x_i).$$

Pentru $x = x_j$ $(j = 1,2,\ldots,k)$, relația (26) devine

$$\gamma_m^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X(x_i) \sin^2 \beta_m y_i \Phi_I^{ij} - X(x_j) = 0 \quad (j = 1,2,\ldots,k), \tag{28}$$

unde

$$\Phi_I^{ij} = \Phi_I^i(x_j).$$

Soluțiile nebanale ale ecuațiilor (28) se determină anulînd determinantul format de coeficienții necunoscutelor:

$$\begin{vmatrix} \gamma_m^2 M_1 \sin^2 \beta_m y_1 \Phi_I^{11} - 1 & \gamma_m^2 M_2 \sin^2 \beta_m y_2 \Phi_I^{21}, \ldots, \gamma_m^2 M_k \sin^2 \beta_m y_k \Phi_I^{k1} \\ \gamma_m^2 M_1 \sin^2 \beta_m y_1 \Phi_I^{12} & \gamma_m^2 M_2 \sin^2 \beta_m y_2 \Phi_I^{22} - 1, \ldots, \gamma_m^2 M_k \sin^2 \beta_m y_k \Phi_I^{k2} \\ \vdots & \vdots \\ \gamma_m^2 M_1 \sin^2 \beta_m y_1 \Phi_I^{1k} & \gamma_m^2 M_2 \sin^2 \beta_m y_2 \Phi_I^{2k}, \ldots, \gamma_m^2 M_k \sin^2 \beta_m y \Phi_I^{kk} - 1 \end{vmatrix} = 0. \tag{29}$$

Cu ajutorul ecuațiilor (29) se pot calcula valorile consecutive ale lui ε_{mn}, respectiv δ_{mn}, pentru o valoare dată a lui β_m. Utilizînd apoi relațiile

$$\varepsilon_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 - \beta_m^2 \text{ și } \delta_{mn}^2 = \lambda_{mn}^2 = \beta_{mn}^2,$$

putem determina valorile consecutive a lui λ_{mn}.

Frecvențele consecutive ale vibrațiilor sînt date de formula

$$\omega_{mn} = \lambda_{mn}^2 c. \tag{30}$$

În mod analog se pot studia și celelalte cazuri particulare de vibrații proprii corespunzătoare altor condiții la limită, ca, de exemplu, în cazul în care laturile $x = 0, a$ sînt libere.

Pentru a studia ortogonalitatea funcțiilor proprii, să considerăm două moduri diferite de vibrații libere ale plăcilor plane, respectiv $W_{ji}(x, y)$ și $W_{mn}(x, y)$. Acestea satisfac ecuațiile diferențiale

$$\begin{aligned} \nabla^4 W_{ji}(xy) - \frac{\omega_{ji}^2}{N} \varepsilon(xy)\, W_{ni}(xy) = 0, \\ \nabla^4 W_{mn}(xy) - \frac{\omega_{mn}^2}{N} \varepsilon(xy)\, W_{mn}(xy) = 0, \end{aligned} \tag{31}$$

unde

$$\varepsilon(xy) = \rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i, y - y_i). \tag{32}$$

Ecuațiile (31) pot fi considerate ca fiind ecuațiile suprafețelor deformate corespunzătoare încărcării:

$$q(x, y, t) = \omega^2 \varepsilon(xy)\, W(xy),$$

deoarece ecuația diferențială a deformării statice a plăcii este de forma

$$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q(xy)}{N}. \tag{33}$$

Aplicînd teorema de reciprocitate a lui Betti [3] încărcărilor

$$q_{ji}(xyt) = \omega_{ji}^2 \varepsilon(x, y)\, W_{ji}(xy),$$

$$q_{mn}(xyt) = \omega_{mn}^2 \varepsilon(xy)\, W_{mn}(xy)$$

și deplasărilor corespunzătoare $W_{jl}(xy)$ și $W_{m}(xy)$, obținem

$$\omega_{jl}^2 \int_0^a \int_0^b \varepsilon(xy)\, W_{jl}(xy)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy =$$

$$= \omega_{mn}^2 \int_0^a \int_0^b \varepsilon(xy)\, W_{mn}(xy)\, W_{jl}(xy)\, dx\, dy$$

sau

$$(\omega_{jl}^2 - \omega_{mn}^2) \int_0^a \int_0^b \varepsilon(xy)\, W_{jl}(xy)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy = 0. \tag{34}$$

Deoarece mărimile ω_{jl}, ω_{mn} aparțin unor moduri de vibrație diferite, iar $\omega_{jl} \neq \omega_{mn}$, relația (34) ne conduce la

$$\int_0^a \int_0^b \varepsilon(xy)\, W_{jl}(xy)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy = 0. \tag{35}$$

Funcțiile proprii ale vibrațiilor libere ale plăcii sînt deci ortogonale de pondere $\varepsilon(x,y)$.

Ținînd seama de relația (34) și calculînd integrala (35), obținem

$$\int_0^a \int_0^b W_{jl}(xy)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy = -\frac{1}{\rho h} \sum_{i=1}^{k} M_i\, W_{jl}(x_i, y_i)\, W_{mn}(x_i\, y_i),$$

unde membrul din dreapta este o constantă.

Notăm integrala

$$\int_0^a \int_0^b \varepsilon(xy)\, W_{mn}^2(xy)\, dx\, dy = A_{mn}. \tag{36}$$

2.2. VIBRAȚIILE ARMONICE FORȚATE

Presupunem că placa plană este supusă încărcării

$$q(xy,t) = q(x,y)\, e^{i\omega t}. \tag{37}$$

Pentru rezolvarea ecuației (1) în condițiile la limită corespunzătoare, încercăm o soluție de forma (9). Înlocuind în (1), obținem

$$\nabla^4 W - \left[\lambda^4 + \gamma^2 \sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x - x_i,\ y - y_i)\right] W = \frac{q(xy)}{N}, \tag{38}$$

unde

$$\lambda^4 = \frac{\omega^2}{c^2};\quad c^2 = \frac{N}{\rho h};\quad \gamma^2 = \frac{\omega^2}{N}.$$

Dezvoltăm expresia încărcării $q(xy)$ şi a amplitudinii $W(xy)$ în serie de funcţii proprii ale vibraţiilor armonice; funcţiile proprii satisfac ecuaţia

$$\nabla^4 W_{mn} - \left[\lambda_{mn}^4 + \gamma_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i, y - y_i)\right] W_{mn} = 0, \tag{39}$$

în aceleaşi condiţii la limită ca ecuaţia (1).

Astfel putem scrie

$$W(x, y) = \sum_{m,n}^{\infty} A_{mn} W_{mn}(xy); \; q(xy) = \sum_{m,n}^{\infty} Q_{mn} W_{mn}(x, y), \tag{40}$$

$$A_{mn} = \int_0^a \int_0^b W(xy) \, W_{mn}(xy) \, dx \, dy,$$

$$Q_{mn} = \int_0^a \int_0^b q(xy) \, W_{mn}(xy) \, dx \, dy. \tag{41}$$

Să multiplicăm ambii membri ai ecuaţiei (38) cu $W_{mn}(xy)$ şi să integrăm pe domeniul acoperit de placă:

$$\int_b^a \int_0^b \nabla^4 W(xy) \, W_{mn}(xy) \, dx \, dy - \lambda^4 \int_0^a \int_0^b W(xy) \, W_{mn}(xy) \, dx \, dy -$$

$$- \gamma^2 \sum_{i=1}^{k} M_i \int_0^a \int_0^b \delta(x - x_i, y - y_i) \, W(xy) \, W_{mn}(xy) \, dx \, dy =$$

$$= \frac{1}{N} \int_0^a \int_0^b q(xy) \, W_{mn}(xy) \, dx \, dy. \tag{42}$$

Integrînd şi ţinînd seama de relaţiile (39), (40) şi (41), avem

$$W(xy) = \frac{c^2}{N} \sum_{m\,n}^{\infty} \left[\frac{W_{mn}(xy)}{\omega_{mn}^2 \left(1 - \dfrac{\omega^2}{\omega_{mn}^2}\right)} \int_0^a \int_0^b q(u, v) \, W_{mn}(u, v) \, du \, dv - \right.$$

$$\left. - W_{mn}(xy) \sum_{i=1}^{k} M_i \, W(x_i \, y_i) \, W_{mn}(x_i \, y_i) \right], \tag{43}$$

unde

$$\omega_{mn}^2 = \lambda_{mn}^4 \, c^2 \text{ şi } \omega^2 = \lambda^4 \, c^2.$$

Înlocuind apoi relația (43) în (9), obținem expresia deplasării $w(x, y, t)$.

Pentru $M_1 = M_2 = \ldots = M_k = 0$, relația (43) ne conduce la soluția problemei vibrațiilor plăcii plane fără mase etașate și cunoscută în literatură [3].

În cazul particular al unei forțe concentrate unitare cu o variație armonică în timp aplicată în punctul de coordonate ξ și η, avem

$$q(x\,y\,t) = 1 \cdot \delta(x - \xi, y - \eta)\, e^{i\omega t}.$$

Deoarece

$$\int_0^a \int_0^b q(u, v)\, W_{mn}(u, v)\, du\, dv = \int_0^a \int_0^b \delta(u - \xi, u - \eta)\, W_{mn}(u, v)\, du\, dv =$$

$$= W_{mn}(\xi, \eta),$$

relația (9), ținînd seama și de (43), devine

$$w(x, y, t) = \frac{c^2 e^{i\omega t}}{N} \sum_{m,n}^{\infty} \left[\frac{W_{mn}(xy)\, W(\xi, \eta)}{\omega_{mn}^2 \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_{mn}^2}\right)} - \right.$$

$$\left. - W_{mn}(xy) \sum_{i=1}^{k} M_i\, W(x_i\, y_i)\, W_{mn}(x_i\, y_i) \right]. \qquad (44)$$

2.3. VIBRAȚIILE APERIODICE LIBERE ȘI FORȚATE

Să considerăm ecuația diferențială a vibrațiilor plăcii plane:

$$N \nabla^4 w + \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x - x_i, y - y_i) \right] \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \qquad (45)$$

cu condițiile inițiale

$$w(x, y, 0) = f(x, y); \quad \dot{w}(x, y, 0) = g(x, y) \qquad (46)$$

și cu condițiile la limită corespunzătoare.

Pentru partea omogenă a ecuației (45) încercăm o soluție de forma

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} W_{mn}(xy)\, T_{mn}(t) \qquad (47)$$

şi, înlocuind în această ecuaţie, obţinem

$$N\, T_{mn}(t)\, \nabla^4 W_{mn}(xy) + \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x - x_i, y - y_i)\right] \ddot{T}_{mn}(t) \times$$

$$\times\, W_{mn}(xy) = 0 \qquad (m, n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{48}$$

Separînd variabilele, rezultă

$$N\, \nabla^4 W_{mn}(xy) - \omega_{mn}^2\, \varepsilon(xy)\, W_{mn}(xy) = 0, \tag{49}$$

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2\, T_{mn}(t) = 0, \tag{50}$$

unde

$$\varepsilon(x, y) = \rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x - x_i, y - y_i),$$

$$\omega_{mn}^2 = -\frac{\ddot{T}_{mn}(t)}{T_{mn}(t)}. \tag{51}$$

Pentru a studia vibraţiile forţate, înlocuim soluţia (47) în ecuaţia diferenţială (45), apoi multiplicăm relaţia obţinută cu $M_{jl}(x, y)$ şi integrăm pe domeniul acoperit de placă; ţinînd seama de relaţiile (49) şi (36), putem scrie

$$\sum_{m,n}^{\infty} \int_0^a \int_0^b T_{mn}(t)\, \varepsilon(xy)\, \omega_{mn}^2\, W_{mn}^2\, dx\, dy +$$

$$+ \sum_{m,n}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \varepsilon(xy)\, \ddot{T}_{mn}(t)\, W_{mn}^2\, dx\, dy = \int_0^a \int_0^b q(x, y, t)\, W_{mn}\, dx\, dy,$$

unde

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{1}{A_{mn}} \int_0^a \int_0^b q(x, y, t)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy$$

$$(m, n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{52}$$

Presupunem că sarcina $q(x, y, t)$ se poate scrie sub forma

$$q(x, y, t) = \varphi(x, y)\, F(t).$$

În acest caz, soluția ecuației (52) va fi de forma

$$T_{mn}(t) = T_{mn}(0)\cos\omega_{mn}t + \frac{\dot{T}_{mn}(0)}{\omega_{mn}}\sin\omega_{mn}t +$$

$$+\frac{1}{\omega_{mn}A_{mn}}\int_0^a\int_0^b \varphi(u,v)\,W_{mn}(u,v)\,du\,dv\int_0^t F(\tau)\sin\omega_{mn}\times$$

$$\times(t-\tau)\,d\tau. \tag{53}$$

Constantele $T_{mn}(0)$ și $\dot{T}_{mn}(0)$ trebuie să satisfacă condițiile inițiale (46) și soluția (47), adică

$$\sum_{m,n}^{\infty} W_{mn}(xy)\,T_{mn}(0) = f(x,y);\quad \sum_{m,n}^{\infty} W_{mn}(xy)\,\dot{T}_{mn}(0) = g(x,y). \tag{54}$$

Ținînd seama de condiția de ortogonalitate de la (36), rezultă

$$T_{mn}(0) = \frac{1}{A_{mn}}\int_0^a\int_0^b \varepsilon(x,y)\,W_{mn}(x,y)f(x,y)\,dx\,dy,$$

$$\dot{T}_{mn}(0) = \frac{1}{A_{mn}}\int_0^a\int_0^b \varepsilon(x,y)\,W_{mn}(x,y)\,g(x,y)\,dx\,dy. \tag{55}$$

Deci soluția (47) va lua forma

$$w(x,y,t) = \sum_{m,n}^{\infty}\frac{W_{mn}(x,y)}{A_{mn}}\left\{\int_0^a\int_0^b \varepsilon(u,v)\,W_{mn}(u,v)\,du\,dv\times\right.$$

$$\times\left[f(u,v)\cos\omega_{mn}t + \frac{1}{\omega_{mn}}g(u,v)\sin\omega_{mn}t\right]+$$

$$+\frac{1}{\omega_{mn}}\int_0^a\int_0^b \varphi(u,v)\,W_{mn}(u,v)\,du\,dv\int_0^t F(t)\sin\omega_{mn}\times$$

$$\left.\times(t-\tau)\,d\tau\right\}. \tag{56}$$

Să studiem cîteva cazuri particulare.

a) Să presupunem că $q(x,y,t) = \varphi(x,y)F(t) = 0$ și că avem următoarele condiții la limită:

$$w(x,y,0) = f(x,y) = 0;\quad \dot{w}(x,y,0) = g(x,y) = V\delta(x-\xi, y-\eta).$$

Ţinînd seama că

$$\frac{1}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \int_0^a \int_0^b \varepsilon(x, y)\, g(xy)\, W_{mn}(x, y)\, dx\, dy =$$

$$= \frac{1}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t \int_0^a \int_0^b \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i\, \delta(x - x_i, y - y_i) \right] W_{mn}(xy) \times$$

$$\times V\, \delta(x - \xi, y - \eta)\, dx\, dy = \frac{1}{\omega_{mn}} \sin \omega_{mn} t + \Big[\rho h\, V\, W_{mn}(\xi, \eta) +$$

$$+ \int_0^a \int_0^b V \sum_{i=1}^{k} W_{mn}(xy)\, M_i\, \delta(x - x_i, y - y_i)\, \delta(x - \xi, y - \eta)\, dx\, dy \Big] =$$

$$= \frac{V}{\omega_{mn}} [\rho h + M(\xi, \eta)]\, W_{mn}(\xi, \eta) \sin \omega_{mn} t,$$

unde $M(\xi, \eta)$ este masa al cărei centru de masă are coordonatele ξ, η. Dacă $x_i \neq \xi$ şi $y_i \neq \eta$, cel de-al doilea termen este nul. Deci soluţia (56) devine

$$w(x, y, t) = V \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{mn}(xy)}{A_{mn}}\, W_{mn}(\xi, \eta)\, [\rho h + M(\xi, \eta)] \frac{\sin \omega_{mn} t}{\omega_{mn}} \qquad (57)$$

b) Placa este supusă unei sarcini statice, luată instantaneu la momentul $t = 0$. După îndepărtarea sarcinii, placa va executa vibraţii libere.

Admitem că în relaţia (56)

$$q(xyt) = \varphi(x, y)\, F(t) = 0 \text{ şi } g(xy) = 0\,;\ f(xy) = w_{st}(xy),$$

unde w_{st} reprezintă deplasarea statică a plăcii plane pentru $t \leqslant 0$. Rezultă deci

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{mn}(xy)}{A_{mn}} \cos \omega_{mn} t \left[\rho h \int_0^a \int_0^b W_{mn}(xy)\, w_{st}(xy) \times \right.$$

$$\left. \times\, dx\, dy + \sum_{i=1}^{k} M_i\, W_{mn}(x_i\, y_i)\, w_{st}(x_i\, y_i) \right]. \qquad (58)$$

Să considerăm acum cazul vibraţiilor forţate ale unei plăci plane cu condiţii iniţiale omogene, adică

$$f(xy) = g(xy) = 0.$$

c) În punctul de coordonate ξ, η al plăcii, acționează o forță concentrată, continuă în timp:

$$q(x, y, t) = 1 \cdot \delta(x - \xi, y - \eta)\, H(t),$$

unde $H(t)$ este funcția lui Heaviside.

Deoarece

$$\int_0^a \int_0^b \delta(x - \xi, y - \eta)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy = W_{mn}(\xi, \eta),$$

$$\int_0^t H(t) \sin \omega_{mn}(t - \tau)\, d\tau = \frac{1}{\omega_{mn}} (1 - \cos \omega_{mn} t),$$

relația (56) devine

$$w(xyt) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{mn}(xy)}{A_{mn}\, \omega_{mn}^2} W_{mn}(\xi, \eta)\, (1 - \cos \omega_{mn} t). \tag{59}$$

d) În punctul de coordonate ξ, η al plăcii, se aplică impulsul $q(xyt) = 1 \cdot \delta(x - \xi, y - \eta, t)$.

Deoarece

$$\int_0^t \delta(t) \sin \omega_{mn}(t - \tau)\, d\tau = \sin \omega_{mn} t,$$

din relația (56) rezultă

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{mn}(xy)}{A_{mn}\, \omega_{mn}} W_{mn}(\xi, \eta) \sin \omega_{mn} t. \tag{60}$$

e) Forța $q(xyt)$ se deplasează cu viteza constantă v de-a lungul liniei $y = \eta$, adică

$$q(x, y, t) = F(t)\, \delta(x - vt, y - \eta)\, [H(a) - H(vt - a)].$$

Ținînd seama că

$$\int_0^a \int_0^b \delta(x - vt, y - \eta)\, W_{mn}(xy)\, dx\, dy = W_{mn}(vt, \eta) = X_m(vt)\, Y_n(\eta),$$

relația (56) devine

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{W_{mn}(xy)}{A_{mn}\, \omega_{mn}} \int_0^t F(\tau)\, W_{mn}(vt, \eta) \sin \omega_{mn}(t - \tau)\, d\tau. \tag{61}$$

Dacă $F(t) = F_0 H(t)$, relația (61) devine

$$w(x, y, t) = \sum_{m,n}^{\infty} \frac{F_0 W_{mn}(xy)}{A_{mn} \omega_{mn}} \int_0^t W_{mn}(vt, \eta) \sin \omega_{mn}(t - \tau) \, d\tau. \quad (62)$$

3. VIBRAȚIILE TRANSVERSALE ALE PLĂCILOR PLANE SUPUSE LA FORȚE DE COMPRESIUNE SAU DE ÎNTINDERE SITUATE ÎN PLANUL MEDIAN AL PLĂCII

Să considerăm o placă dreptunghiulară, simplu rezemată pe laturile sale, supusă acțiunii forțelor de compresiune q_1, q_2 orientate în planul median al plăcii și sarcinii $q(x,y,t)$ dirijată normal la planul median al plăcii (fig. 2).

Presupunem că placa are grosimea h, masa specifică ρ și că de placă sînt atașate rigid un număr finit de mase concentrate M_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$, centrul maselor avînd coordonatele

$$A_i(x_i, y_i) \; (i = 1, 2, \ldots, k).$$

Problema vibrațiilor transversale ale plăcii plane fără mase concentrate a fost studiată de Nowacki [3].

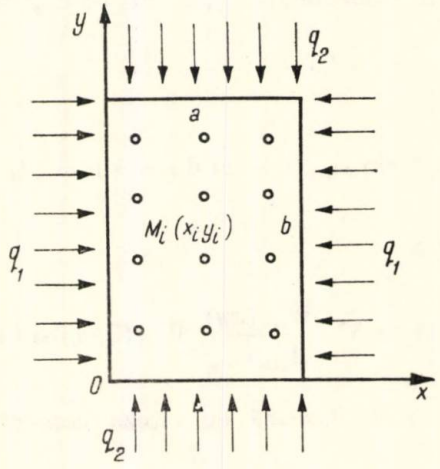


Fig. 2

În cazul în care ținem seama și de prezența maselor concentrate, ecuația diferențială a vibrațiilor transversale este de forma

$$N\nabla^4 w + q_1 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i, y - y_i) \right] \times$$

$$\times \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x, y, t), \quad (63)$$

cu condițiile inițiale

$$w(x, y, 0) = f(xy); \qquad \dot{w}(x, y, 0) = g(xy) \tag{64}$$

și cu condițiile la limită

$$w = 0; \qquad \nabla^2 w = 0. \tag{65}$$

Pentru partea omogenă a ecuației (63), încercăm o soluție de forma

$$w(x, y, t) = \sum_{m, n}^{\infty} W_{m, n}(xy)\ T_{mn}(t) \tag{66}$$

și, înlocuind, obținem

$$\left[N\nabla^4 W_{mn}(xy) + q_1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2}\right] T_{mn}(t) +$$

$$+ \left[\rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i, y - y_i)\right] \ddot{T}_{mn}(t)\ W_{mn}(xy) = q(x, y, t)$$

$$(m, n = 1, 2, \ldots, \infty).$$

Separăm variabilele și obținem

$$N\nabla^4 W_{mn}(xy) + q_1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial x^2} + q_2 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} - \omega_{mn}^2 \varepsilon(xy)\ W_{mn}(xy) = 0, \tag{67}$$

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = 0, \tag{68}$$

unde

$$\varepsilon(xy) = \rho h + \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i, y - y_i),$$

$$\omega_{mn}^2 = -\frac{\ddot{T}_{mn}(t)}{T_{mn}(t)}. \tag{69}$$

Pentru a studia ecuația (67), scriem

$$W_{mn}(xy) = X(x)\ Y(y) \tag{70}$$

și ecuația (67) devine

$$X_m^{IV} Y_n + 2X_m'' Y_n'' + X_m Y_n^{IV} + \frac{q_1}{N} X_m'' Y_n + \frac{q^2}{N} X_m Y_n'' -$$

$$- \lambda_{mn}^4 X_m Y_n - \gamma_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i)\, \delta(y - y_i)\, X_m Y_n = 0, \tag{71}$$

unde

$$\lambda_{mn}^4 = \frac{\omega_{mn}^2}{c^2}; \qquad c^2 = \frac{N}{\rho h}; \qquad \gamma_{mn}^2 = \frac{\omega_{mn}^2}{N}.$$

Deoarece laturile $y = 0$, b sînt simplu rezemate, putem scrie

$$Y_n(y) = C \sin \beta_n y; \qquad \beta_n = \frac{n\pi}{6} \qquad (n = 1, 2, \ldots, \infty). \tag{72}$$

Această funcţie satisface condiţiile

$$Y_n(0) = Y_n(b) = Y_n''(0) = Y_n''(b) = 0, \tag{73}$$

pentru orice n întreg, deci şi condiţiile la limită

$$w(x, 0, t) = w(x, b, t) = \nabla^2 w(x, 0, t) = \nabla^2 w(x, b, t) = 0. \tag{74}$$

Introducem soluţia (72) în ecuaţia (71), multiplicăm relaţia obţinută cu $\sin \beta_n y$ şi integrăm de la 0 la b şi obţinem

$$X_m^{IV} - \left(2\beta_n^2 - \frac{q_1}{N}\right) X_m'' - \left(\lambda_{mn}^4 - \beta_n^4 + \frac{q_2}{N}\beta_n^2\right) X_m -$$

$$- \mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i \delta(x - x_i) X_m \sin^2 \beta_n y_i = 0, \tag{75}$$

unde

$$\mu_{mn}^2 = \frac{2\gamma_{mn}^2}{b\beta_n}.$$

Aplicînd relaţiei (75) transformarea Laplace, obţinem

$$q^4 \overline{X}_m(q) - q^3 X_m(0) - q^2 X_m'(0) - q X_m''(0) - X_m'''(0) -$$

$$- \left(2\beta_n^2 - \frac{q_1}{N}\right)[q^2 \overline{X}_m(q) - q X_m(0) - X_m'(0)] -$$

$$- \left(\lambda_{mn}^4 - \beta_n^4 + \frac{q_2}{N}\beta_n^2\right) \overline{X}_n(q) - \mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i) \, e^{-qx_i} \sin^2 \beta_n y_i = 0, \tag{76}$$

unde

$$\overline{X}_m(q) = \int_0^\infty e^{-qx} X_m(x) \, dx; \qquad \int_0^\infty \delta(x - x_i) \, e^{-qx} X_m(x) \, dx = e^{-qx_i} X_m(x_i).$$

Din relația (76) putem determina pe $\overline{X}(q)$; obținem

$$\overline{X}_m(q) = \frac{1}{q^4 - q^2\alpha_n^2 - \nu_{mn}^4}\left\{(q^2 - \alpha_n^2)\,[qX_m(0) + X'_m(0)] + \right.$$

$$\left. + qX''_m(0) + X'''_m(0) + \mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\, e^{-qx_i} \sin^2 \beta_n y_i\right\}, \tag{77}$$

unde

$$\alpha_n^2 = 2\beta_n^2 - \frac{q_1}{N}; \quad \nu_{mn}^4 = \lambda_{mn}^4 - \beta_n^4 + \frac{q_2}{N}\beta_n^2. \tag{78}$$

Notînd

$$E(x) = \frac{1}{\delta}\operatorname{sh}\delta x - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sh}\varepsilon x; \quad F(x) = \operatorname{ch}\delta x - \operatorname{ch}\varepsilon x,$$

$$E(x - x_i) = \frac{1}{\delta}\operatorname{sh}\delta(x - x_i) - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sh}\varepsilon(x - x_i), \tag{79}$$

$$G(x) = \delta \operatorname{sh}\delta x - \varepsilon \operatorname{sh}\varepsilon x; \quad H(x) = \delta^2 \operatorname{ch}\delta x - \varepsilon^2 \operatorname{ch}\varepsilon x;$$

$$\delta^2 = \frac{\alpha_n^2}{2} + \sqrt{\frac{\alpha_n^4}{4} + \nu_{nm}^4}, \tag{80}$$

$$\varepsilon^2 = \frac{\alpha_n^2}{2} - \sqrt{\frac{\alpha_n^4}{4} + \nu_{mn}^4},$$

transformata inversă a relației (77) va fi de forma

$$X_m(x) = \frac{1}{\delta^2 - \varepsilon^2}\left\{X_m(0)[H(x) - \alpha_n^2 F(x)] + X'_m(0)\,[G(x) - \alpha_n^2 E(x)] + \right.$$

$$+ X''_m(0)\,F(x) + X'''_m(0)\,F(x) + \mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i) \times$$

$$\left. \times E(x - x_i) \sin^2 \beta_n y\, H(x - x_i)\right\}. \tag{81}$$

Deoarece și laturile $x = 0$, a sînt simplu rezemate, condițiile la limită vor fi

$$X_m(0) = X''_m(0) = X_m(a) = X''_m(a) = 0. \tag{82}$$

Ţinînd seama de primele două condiţii de la (82), relaţia (81) devine

$$X_m(x) = \frac{1}{\delta^2 - \varepsilon^2}\left\{X'_m(0)\,[G(x) - \alpha_n^2 E(x)] + X'''_m(x)\,E(x) + \right.$$

$$\left. + \mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\,E(x - x_i)\sin^2\beta_n y_i H(x - x_i)\right\}, \tag{83}$$

expresiile constantelor $X'_m(0)$ şi $X'''_m(0)$ fiind de forma

$$X'_m(0) = \frac{\mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)[G(a-x_i)\,E(a) - E(a-x_i)\,G(a)]\sin^2\beta_n y_i H(a-x_i)}{[G(a) - \alpha_n^2 E(a)] - [H'(a) - \alpha_n^2 G(a)]\,E(a)}, \tag{84}$$

$$X'''_m(0) = \frac{\mu_{mn}^2 \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\{E(a - x_i)\,[H'(a) - \alpha_n^2 G(a)] - \rightarrow}{[G(a) - \alpha_n^2 E(a)]\,G(a) - [H'(a) - \alpha_n^2 G(a)]\,E(a)}$$

$$\leftarrow \frac{- G(a - x_i)\,[G(a) - \alpha_n^2 E(a)]\}\sin^2\beta_n y_i H(a - x_i)}{}. \tag{85}$$

Înlocuind relaţiile (84) în soluţia (83), obţinem

$$X_m(x) = \frac{\mu_{mn}^2}{\delta^2 - \varepsilon^2} \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\,\Phi_1^i(x)\sin^2\beta_n y_i, \tag{86}$$

unde

$$\Phi_1^i(x) = \frac{\left\{\left[\frac{(\delta^2 - \varepsilon^2)^2}{\varepsilon^2\delta}\operatorname{sh}\delta a + \varepsilon\operatorname{sh}\varepsilon a\right]\operatorname{sh}\varepsilon x\operatorname{sh}\varepsilon(a - x_i) - \right.}{\varepsilon\delta\operatorname{sh}\varepsilon a\,[(\delta^2 - \varepsilon^2)^2\operatorname{sh}\delta a + \varepsilon\delta(1 + \alpha_n^2)]\operatorname{sh}\varepsilon a} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{\left. - \left[\frac{(\delta^2 - \varepsilon^2)^2}{\delta^2\varepsilon}\operatorname{sh}\delta x + \delta\operatorname{sh}\varepsilon x\right]\operatorname{sh}\varepsilon a\operatorname{sh}\delta(a - x_i)\right\}H(a - x_i) + }{} \rightarrow$$

$$\leftarrow \frac{+\left[\frac{1}{\delta}\operatorname{sh}\delta(x - x_i) - \frac{1}{\varepsilon}\operatorname{sh}\varepsilon(x - x_i)\right]H(x - x_i)}{}. \tag{87}$$

Pentru $x = x_j$ $(j = 1, 2, \ldots, k)$, relaţia (86) devine

$$\frac{\mu_{mn}^2}{\delta^2 - \varepsilon^2} \sum_{i=1}^{k} M_i X_m(x_i)\,\Phi_1^i(x_y)\sin^2\beta_n y_i - X_m(x_y) = 0$$

$$(j = 1,2,\ldots, k). \tag{88}$$

Soluțile nebanale ale ecuațiilor de la (88) se determină anulînd determinantul format de coeficienții necunoscutelor. Înlocuind $X_m(x)$ și $Y_n(y)$ date de relațiile (86) și (72) în (70), putem determina $W_{mn}(xy)$.

Pentru a studia vibrațiile forțate, vom înlocui soluția (66) în ecuația diferențială (63), multiplicăm relația obținută cu $W_{jl}(xy)$ și integrăm pe domeniul acoperit de placă:

$$\sum_{mn}^{\infty} \int_0^a \int_0^b T_{mn} \left[N \nabla^4 M_{mn} + q_1 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} + q_2 \frac{\partial^2 W_{mn}}{\partial y^2} \right] W_{jl} \, dx \, dy +$$

$$+ \sum_{m,n}^{\infty} \int_0^a \int_0^b \varepsilon(x, y) \, \ddot{T}_{mn} W_{mn} W_{jl} \, dx dy = \int_0^a \int_0^b q(xyt) W_{jl} \, dx \, dy. \tag{89}$$

Ținînd seama de relațiile (67) și (36), putem scrie

$$\ddot{T}_{mn}(t) + \omega_{mn}^2 T_{mn}(t) = \frac{1}{A_{mn}} \int_0^a \int_0^b q(xyt) \, W_{mn}(xy) \, dxdy$$

$$(m,n = 1,2,\ldots,\infty), \tag{90}$$

care este, după cum se vede, o relație identică cu (52).

Înlocuind soluția ecuației (90) în (66), obținem o relație analogă cu (56).

Primită la redacție la 17 februarie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. W. Kecs, P. P. Teodorescu, *Aplicații ale teoriei distribuțiilor în mecanică*, București, Ed. Academiei, 1970.
2. E. Tocaci, *Aspecte ale utilizării teoriei distribuțiilor în mecanică*, St. cerc. mec. apl., **29**, *1*, 27—45 (1970).
3. W. Nowacki, *Dinamica sistemelor elastice* (trad. din limba poloneză), București, Edit. tehnică, 1969.
4. Ye Chen, *On the Vibration of Beams or Rods Carryng a Concentrated Mass*, în Journal Appl. Mech., Trans. ASME, June 1963.
5. Amba — Rao C. L. Suhohi E. S., *On the Vibration of Elastic Beams Carryug on Arbitrary Number of Concentrated* Masses.
6. V. P. Madan, *Impulshive Excitation of Vibroelastic Beams*, Ph. D. Thessis, 1968, Dep. of. Matematics University of Toronto, Canada.
7. — *Vibration of vibroelastic beams corryng an arbitrary number of ceoncentrated masses*, în Revue Roumanie de Mathematiques pures et appliques, **XV**, *2*, 267—277 (1970).

CALCULUL ITERATIV AL FRECVENȚELOR PROPRII DE VIBRAȚIE LA BARELE DREPTE CU SECȚIUNE VARIABILĂ ÎN TREPTE PE BAZA METODEI CELOR TREI NECUNOSCUTE

de M. BLUMENFELD, CORINA VOICU și H. GHEORGHIU
Institutul politehnic București

Se prezintă calculul frecvențelor proprii de vibrație ale unei bare drepte cu secțiune constantă sau variabilă în trepte ținînd cont de efectul masei proprii și al maselor concentrate, precum și de cuplurile concentrate datorită inerției de rotație. Calculul se face pe baza metodei celor trei necunoscute. Relațiile de recurență care stau la baza acestei metode includ condițiile la limită și permit prin structura lor o programare ușoară. Pentru fiecare interval al barei de secțiune constantă se admite un polinom de gradul șase pentru fibra medie deformată. S-au verificat relațiile de recurență la bare rezemate și încastrate la care se cunoaște frecvența proprie fundamentală.
Metoda permite calculul frecvențelor proprii superioare pe baza cunoașterii formei fibrei medii deformate a primului mod de vibrație.

1. INTRODUCERE

Calculul frecvențelor proprii de vibrație ale unei bare drepte cu secțiune constantă sau variabilă în trepte poate fi redus, prin introducerea forțelor de inerție, la calculul deformației barei respective sub acțiunea unor sarcini proporționale, în fiecare punct, cu mărimea deformației [1] — [3]. În acest caz, grinda se consideră solicitată de următoarele sarcini:

a) *sarcini distribuite datorite efectului masei proprii*:

$$q(x) = \rho S v(x)\,\omega^2, \tag{1}$$

unde v este deformația de încovoiere, S aria secțiunii barei, ρ masa specifică a materialului din care este confecționată bara, ω pulsația vibrației proprii;

b) *sarcini concentrate datorite efectului maselor concentrate*:

$$Q_i = m_i v_i \omega^2, \tag{1'}$$

unde m_i este masa din punctul i, iar v_i săgeata din același punct;

c) *cupluri concentrate datorite inerţiei de rotaţie*:

$$M_i^* = J_i \theta_i \omega^2, \tag{1''}$$

unde J_i este momentul de inerţie al masei m_i în raport cu o axă perpendiculară în i pe planul în care are loc rotaţia, iar θ_i unghiul de deformaţie al grinzii în acelaşi punct.

Deoarece deformaţia barei nu este cunoscută, problema poate fi rezolvată prin metoda iterativă propusă de Stodola [2]. Factorul ω^2, pentru o anumită bară şi formă normală de vibraţie, este o constantă; ca urmare, se pot admite drept sarcini mărimile

$$p(x) = \frac{q(x)}{\omega^2} = \rho S v(x), \tag{2}$$

$$P_i = \frac{Q_i}{\omega^2} = m_i v_i, \tag{2'}$$

$$K_i = \frac{M_i^*}{\omega^2} = J_i \theta_i, \tag{2''}$$

care sînt independente de pulsaţia necunoscută ω. Grinda încărcată cu aceste sarcini va avea deformaţii proporţionale cu grinda încărcată cu sarcinile (2), (2'), (2''), factorul de proporţionalitate fiind ω^2.

Se alege o formă a grinzii deformate (v_{int}) şi apoi se calculează sarcinile datorită forţelor de inerţie cu relaţiile (2, 2', 2'') şi deformaţia ($v_{\text{ieş}}$) produsă de aceste sarcini. Dacă deformaţia obţinută nu coincide cu cea aleasă, calculul se repetă, admiţînd drept deformaţie (v_{int}) cea obţinută prin calculul precedent. Metoda este rapid convergentă, astfel că, atunci cînd diferenţa dintre valorile normalizate ale săgeţilor la intrare şi cele de la ieşire este mai mică decît o cantitate foarte mică fixată iniţial, pulsaţia vibraţiei proprii ω se poate calcula pe baza relaţiei de proporţionalitate între săgeţi:

$$\frac{v_{\text{int}}}{v_{\text{ieş}}} = \omega^2 \qquad \text{sau} \qquad \omega = \sqrt{\frac{v_{\text{int}}}{v_{\text{ieş}}}}. \tag{3}$$

Acest mod de a rezolva problema pune două probleme dificile, în special atunci cînd efectul preponderent este datorat masei proprii a grinzii:

a) găsirea unei funcţii simple care să exprime cît mai fidel sarcina $p(x)$, dată de relaţia (2);

b) calculul deformaţiei grinzii sub această sarcină.

În lucrarea de faţă se consideră grinda împărţită în mai multe porţiuni, pe fiecare porţiune sarcina p variind după o lege parabolică; coeficienţii parabolei vor fi determinaţi în aşa fel, încît să se respecte condiţiile la limită impuse de porţiunile alăturate atît pentru sarcina p, cît şi pentru primele sale două derivate.

Calculul momentelor încovoietoare și al săgeților se va face prin metoda celor trei necunoscute [4]. Aceasta conduce la relații de recurență simplu de programat pe un calculator cifric. Datorită formei admise pentru sarcina p și a modului cum se determină aceasta, rezultatele obținute sînt foarte apropiate de cele exacte, diferența micșorîndu-se evident, cînd crește numărul de secțiuni în care este împărțită grinda.

Deoarece forma fibrei deformate obținută se suprapune practic peste cea reală, ea poate fi utilizată pentru calculul frecvențelor superioare prin metoda „purificării", a lui Stodola [2], bazată pe ortogonalitatea modurilor proprii de vibrație.

Prezentarea relațiilor de calcul și a metodicii de lucru se face considerîndu-se că problema se rezolvă pe un calculator cifric. Nu s-au dat programe detaliate, deoarece, pe baza relațiilor stabilite și a organigramelor prezentate, programarea se poate face fără dificultăți speciale.

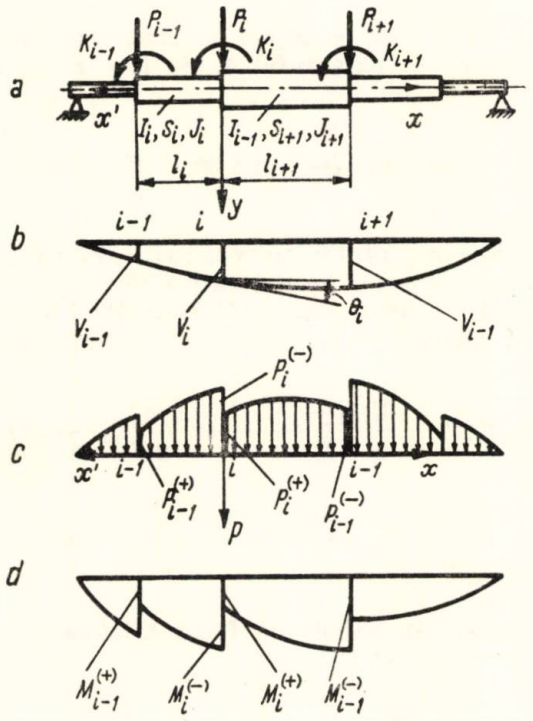


Fig. 1

2. RELAȚIILE DE RECURENȚĂ BAZATE PE METODA CELOR TREI NECUNOSCUTE

2.1. CALCULUL MOMENTELOR ÎNCOVOIETOARE

În figura 1*a* s-a reprezentat o bară cu secțiune variabilă în trepte, pe care s-au notat și caracteristicile geomentrice. Pe aceeași figură s-au mai reprezentat: forma fibrei medii deformate în cazul primului mod

de vibraţie (fig. 1*b*), variaţia sarcinii distribuite (fig. 1*c*) corespunzătoare relaţiei (2) şi variaţia momentului încovoietor (fig. 1*d*). S-a presupus că bara este solicitată şi de forţe de inerţie P_i şi cupluri concentrate K_i, date de relaţiile (2′) şi (2″).

Presupunîndu-se posibilitatea existenţei unor discontinuităţi în mărimile care intervin în calcul, s-au notat cu (+) valorile de la dreapta şi cu (−) valorile de la stînga unui anumit punct.

Fie intervalul $i, i+1$ din grinda dată cu secţiune cunoscută, raportat la sistemul de axe xiy cu originea în punctul i. Deoarece nu se cunoaşte forma reală a fibrei medii deformate, astfel că nu se poate calcula sarcina distribuită p cu relaţia (2), se va admite, cum s-a arătat în paragraful 1, că această sarcină variază parabolic :

$$p_{i,\,i+1}(x) = A_i x^2 + B_i x + C_i, \tag{4}$$

unde coeficienţii A_i, B_i, C_i se presupun cunoscuţi, modul de determinare al acestora fiind arătat în paragraful 4. Se integrează ecuaţia diferenţială

$$\frac{\mathrm{d}^2 M_{(x)}}{\mathrm{d}x^2} = -\,p_{(x)} = -\,(A_i x^2 + B_i x + C_i), \tag{5}$$

obţinîndu-se expresia momentului încovoietor, care va cuprinde şi două constante de integrare. Acestea se determină punînd condiţiile la limită pe intervalul $i, i+1$: pentru $x = 0$, $M(0) = M_i^{(+)}$ şi pentru $x = l_{i+1}$, $M\,(l_{i+1}) = M_{i+1}^{(-)}$. Momentul încovoietor va avea expresia

$$M_{(x)} = M_i^{(+)} + \frac{M_{i+1}^{(-)} - M_i^{(+)}}{l_{i+1}} + \frac{A_i x}{12}(l_{i+1}^3 - x^3) +$$

$$+ \frac{B_i x}{6}(l_{i+1}^2 - x^2) + \frac{C_i x}{2}(l_{i+1} - x). \tag{6}$$

Derivînd expresia (6), se obţine forţa tăietoare, care la dreapta punctului i, pentru $x = 0$, va fi

$$T_i^{(+)} = \frac{M_{i+1}^{(-)} - M_i^{(+)}}{l_{i+1}} + A_i \frac{l_{i+1}^3}{12} + B_i \frac{l_{i+1}^2}{6} + C_i \frac{l_{i+1}}{2}. \tag{7}$$

Forţa tăietoare $T_i^{(-)}$ la stînga punctului i se poate determina pe o cale analogă, alegînd însă un sistem de axe $x'iy$ cu originea tot în i, dar cu axa x' orientată de la dreapta la stînga. Dacă se admite că sarcina distribuită pe acest interval are expresia

$$p_{i,\,i-1}(x') = A_i' x'^2 + B_i' x' + C_i', \tag{8}$$

se obține următoarea expresie pentru $T_i^{(-)}$:

$$T_i^{(-)} = \frac{M_{i-1}^{(+)} - M_i^{(-)}}{l_i} + A_i' \frac{l_i^3}{12} + B_i' \frac{l_i^2}{6} + C_i' \frac{l_i}{2}. \tag{9}$$

Ținînd seama de schimbarea sensului axei x pentru determinarea lui $T_i^{(-)}$, relația dintre cele două forțe tăietoare este

$$T_i^{(+)} + T_i^{(-)} = - P_i, \tag{10}$$

unde P_i este dat de relația (2'). Relația dintre momentele încovoietoare la dreapta și stînga punctului i este

$$M_i^{(-)} = M_i^{(+)} + K_i, \tag{11}$$

unde pentru K_i s-a admis sensul din figura 1*a*. Înlocuind (7) și (9) în (10) și ținînd seama și de relația (11), se obține relația de recurență pentru calculul momentelor :

$$\begin{aligned} &- M_{i-1} l_{i+1} + M_i (l_i + l_{i+1}) - M_{i+1} l_i = K_{i+1} l_i - K_i l_{i+1} + \\ &+ l_i l_{i+1} \left[\frac{l_{i+1}}{2} \left(A_i \frac{l_{i+1}^2}{6} + B_i \frac{l_{i+1}}{3} + C_i \right) + \right. \\ &\left. + \frac{l_i}{2} \left(A_i' \frac{l_i^2}{6} + B_i' \frac{l_i}{3} + C_i' \right) + m_i v_i \right]. \end{aligned} \tag{12}$$

În această relație s-a notat pentru simplificare $M^{(+)} = M$.

2.2. CALCULUL SĂGEȚILOR

Pentru calculul săgeților se înlocuiește expresia $M_{(x)}$, dată de relația (6), în ecuația diferențială

$$v'' = - \frac{M_{(x)}}{EI}. \tag{13}$$

Urmînd metodica arătată mai sus [4], se integrează ecuația difefențială (13), se pun condițiile la limită pe intervalul $i, i+1$ ($x = 0$, $v = v_i$ și $x = l_{i+1}$, $v = v_{i+1}$) și se determină expresia săgeții într-o secțiune oarecare sub forma unui polinom de gradul șase :

$$EI_{i+1} v_{(x)} = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6, \tag{14}$$

unde

$$a_0 = EI_{i+1}v_i,$$

$$a_1 = \frac{EI_{i+1}(v_{i+1} - v_i)}{l_{i+1}} + \frac{l_{i+1}}{6} \times$$

$$\times \left[2M_i + M_{i+1} + K_{i+1} + \frac{l_{i+1}^2}{60}(4A_i l_{i+1}^2 + 7B_i l_{i+1} + 15C_i)\right],$$

$$a_2 = -\frac{M_i}{2},$$

$$a_3 = -\frac{1}{6}\left[\frac{M_{i+1} + K_{i+1} - M_i}{l_{i+1}} + \frac{l_{i+1}}{2}\left(A_i \frac{l_{i+1}^2}{6} + B_i \frac{l_{i+1}}{3} + C_i\right)\right], \quad (15)$$

$$a_4 = \frac{C_i}{24},$$

$$a_5 = \frac{B_i}{120},$$

$$a_6 = \frac{A_i}{360}.$$

Derivînd expresia (14) şi înlocuind $x = 0$, se determină unghiul de deformaţie la dreapta punctului i:

$$\theta_i^{(+)} = \frac{a_1}{EI_{i+1}} = \frac{v_{i+1} - v_i}{l_{i+1}} + \frac{l_{i+1}}{6EI_{i+1}} \times$$

$$\times \left[2M_i + M_{i+1} + K_{i+1} + \frac{l_{i+1}^2}{60}(4A_i l_{i+1}^2 + 7B_i l_{i+1} + 15C_i)\right]. \quad (16)$$

Repetînd calculele pe intervalul i, $i-1$ cu sistemul de axe schimbat, se determină unghiul de deformaţie la stînga lui i:

$$\theta_i^{(-)} = \frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} + \frac{l_i}{6EI_i} \times$$

$$\times \left[2M_i + 2K_i + M_{i-1} + \frac{l_i^2}{60}(4A_i' l_i^2 + 7B_i' l_i + 15C_i')\right]. \quad (17)$$

Aplicînd condiția de continuitate a unghiului de deformație sub forma $\theta_i^{(+)} = -\theta_i^{(+)}$ din cauza orientării diferite a sistemului de axe, se obține pe baza relațiilor (16) și (17) următoarea ecuație de recurență pentru calculul săgeților :

$$-v_{i-1}l_{i+1} + v_i(l_i + l_{i+1}) - v_{i+1}l_i =$$

$$= \frac{l_i l_{i+1}}{6E}\left\{\frac{l_{i+1}}{I_{i+1}}\left[2M_i + M_{i+1} + K_{i+1} + \frac{l_{i+1}^2}{60}(4A_i l_{i+1}^2 + 7B_i l_{i+1} + 15C_i)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{l_i}{I_i}\left[2M_i + M_{i-1} + 2K_i + \frac{l_i^2}{60}(4A_i' l_i^2 + 7B_i' l_i + 15C_i')\right]\right\}. \qquad (18)$$

3. APLICAREA RELAȚIILOR DE RECURENȚĂ LA BARE REZEMATE ȘI ÎNCASTRATE

3.1. BARE SIMPLU REZEMATE

Pentru calculul momentelor încovoietoare se aplică relația (12) pe grupe de cîte două intervale alăturate, obținîndu-se un sistem de ecuații cu matrice Jacobi, care se completează cu cele două condiții de rezemare (momentele la capete sînt nule). Soluțiile acestui sistem reprezintă momentele încovoietoare la dreapta tuturor punctelor ce limitează intervalele în care s-a împărțit grinda. Dacă este necesar, valorile momentelor la stînga punctelor respective se determină cu relația (11).

Cunoscînd momentele încovoietoare, se pot determina săgețile în mod asemănător prin scrierea unui sistem de ecuații bazat pe relația de recurență (18). Sistemul se completează cu condițiile de rezemare (săgețile la cele două capete sînt nule).

Rezolvarea celor două sisteme de ecuații se face recursiv [5]. Algoritmul este simplu, astfel că programul poate fi înregistrat pe o singură cartelă a calculatorului de birou Olivetti „Programma 101".

3.2. BARE ÎNCASTRATE

Pentru bare încastrate, relațiile de recurență se aplică și mai simplu, nemaifiind necesară scrierea unui sistem de ecuații.

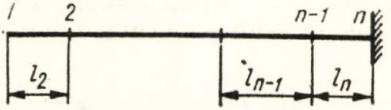


Fig. 2

Astfel, la bara încastrată din figura 2 se știe că $M_1 = 0$ și $T_1^{(+)} = 0$. Din relația (7), pentru $i = 1$, se obține

$$M_2 = -\frac{l_2^2}{2}\left(A_1\frac{l_2^2}{6} + B_1\frac{l_2}{3} + C_2\right). \qquad (19)$$

Se scrie relaţia (12) sub forma

$$M_{i+1} = (K_i - M_{i-1})\frac{l_{i+1}}{l_i} + M_i\frac{l_i + l_{i+1}}{l_i} - K_{i+1} - l_{i+1}\times$$

$$\times\left[\frac{l_{i+1}}{2}\left(A_1\frac{l_{i+1}^2}{6} + B_i\frac{l_{i+1}}{3} + C_i\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{l_i}{2}\left(A_i'\frac{l_i^2}{6} + B_i'\frac{l_i}{3} + C_i'\right) + P_i\right]. \qquad (20)$$

Cunoscînd acum $M_1 = 0$ şi M_2 din relaţia (19), se poate obţine pentru $i = 2$ momentul încovoietor M_3, apoi pentru $i = 3$ momentul M_4 etc., mergînd recursiv pînă la momentul din încastrare M_n.

Pentru calculul săgeţilor se procedează în mod analog, începînd calculul de la încastrare către capătul liber, deoarece $v_n = 0$ şi $\theta_n = 0$. Din relaţia (17), pentru $i = n$ se obţine săgeata v_{n-1} (s-a înlocuit $K_n = 0$):

$$v_{n-1} = -\frac{l_n^2}{6EI_n}\left[2M_n + M_{n-1} + \frac{l_n^2}{60}(4A_n'l_n^2 + 7B_n' + 15C_n')\right]. \qquad (21)$$

Se scrie relaţia (18) sub forma

$$v_{i-1} = v_i\frac{l_i + l_{i+1}}{l_{i+1}} - v_{i+1}\frac{l_i}{l_{i+1}} - \frac{l_i}{6E}\times$$

$$\times\left\{\frac{l_{i+1}}{I_{i+1}}\left[2M_i + M_{i+1} + K_{i+1} + \frac{l_{i+1}^2}{60}(4A_il_{i+1}^2 + 7B_il_{i+1} + 15C_i)\right] + \right.$$

$$\left. + \frac{l_i}{I_i}\left[2M_i + M_{i+1} + 2K_i + \frac{l_i^2}{60}(4A_i'l_i^2 + 7B_i'l_i + 15C_i')\right]\right\}. \qquad (22)$$

Cunoscînd $v_n = 0$ şi v_{n-1}, se poate obţine pentru $i = n - 1$, folosind relaţia (22), săgeata v_{n-2}, apoi pentru $i = n - 2$ săgeata v_{n-3}, mergînd recursiv pînă la săgeata capătului liber v_1.

4. DETERMINAREA COEFICIENŢILOR PARABOLEI $p_{(x)}$

Se consideră două intervale alăturate $i, i + 1$ şi $i, i - 1$, pe care variaţia sarcinii datorită inerţiei este dată de relaţiile (4) şi (8):

$$p_{i,i+1}(x) = A_ix^2 + B_ix + C_i,$$

$$p_{i,i-1}(x') = A_i'x'^2 + B_i'x' + C_i'.$$

Pentru determinarea celor șase coeficienți necunoscuți (A_i, B_i, C_i, A_i', B_i', C_i') sînt necesare șase condiții. Dintre acestea, patru sînt evidente, și anume (se ține seama de relația (2)) :

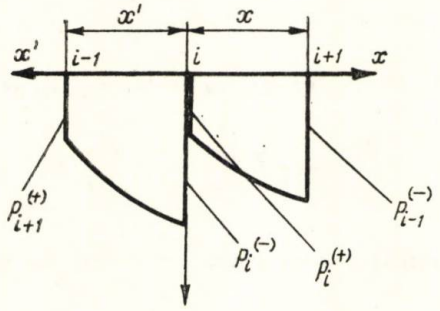


Fig. 3

— intervalul i, $i+1$:

$$x = 0; \qquad p_{i,i+1}(0) = p_i^{(+)} = C_i = \rho S_{i+1} v_i, \tag{I}$$

$$x = l_{i+1}; \qquad p_{i,i+1}(l_{i+1}) = p_{i+1}^{(-)} = A_i l_{i+1}^2 + B_i l_{i+1} + C_i = \rho S_{i+1} v_{i+1}; \tag{II}$$

— intervalul i, $i-1$:

$$x' = 0; \qquad p_{i,i-1}(0) = p_i^{(-)} = C_i' = \rho S_i v_i, \tag{III}$$

$$x' = l_i; \qquad p_{i,i-1}(l_i) = p_{i-1}^{(+)} = A_i' l_i^2 + B_i' l_i + C_i' = \rho S_i v_{i-1}. \tag{IV}$$

Celelalte două condiții pot fi puse în diferite moduri. În lucrarea de față se vor impune drept condiții suplimentare relații între valorile primei derivate la cele două curbe în punctul i, respectiv între valorile celei de-a doua derivate, în același punct.

Prima derivată. Derivînd relația (2), se obține

$$\frac{dp}{dx} = \rho S \frac{dv}{dx} = \rho S \theta, \tag{23}$$

unde θ este tangenta la fibra medie deformată. Ținînd seama și de derivatele relațiilor (4) și (8), se găsește

$$\left(\frac{dp_{i,i+1}}{dx}\right)_{x=0} = B_i = \rho S_{i+1} \theta_i^{(+)}, \tag{24}$$

$$\left(\frac{dp_{i,i-1}}{dx}\right)_{x=0} = B_i' = \rho S_i \theta_i^{(-)}. \tag{25}$$

Din cauza orientării sistemului de axe avem $\theta_i^{(+)} = -\theta_i^{(-)}$, astfel că rezultă

$$B_i' = -\frac{S_i}{S_{i+1}} B_i. \tag{V}$$

A doua derivată. Derivînd din nou relaţia (23), se obţine

$$\frac{\mathrm{d}^2 p}{\mathrm{d}x^2} = \rho S \frac{\mathrm{d}^2 v}{\mathrm{d}x^2} = -\frac{S\rho}{EI} M, \tag{26}$$

unde M este momentul încovoietor. Derivînd de două ori (4) şi (8), se obţine

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 p_{i,i+1}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0} = 2A_i = -\frac{\rho \cdot S_{i+1}}{EI_{i+1}} M_i^{(+)}, \tag{27}$$

$$\left(\frac{d^2 p_{i,i-1}}{\mathrm{d}x^2}\right)_{x=0} = 2A_i' = -\frac{\rho S_i}{EI_i} M_i^{(-)} = -\frac{\rho S_i}{EI_i}(M_i^{(+)} + K_i) =$$

$$= -\frac{\rho S_i}{EI_i}(M_i^{(+)} + J_i \theta_i). \tag{28}$$

Înlocuind pe θ_i din relaţia (24) şi pe $M_i^{(+)}$ din (27), relaţia (28) devine

$$A_i' = \frac{S_i}{S_{i+1}}\left(A_i \frac{I_{i+1}}{I_i} - \frac{B_i \cdot \varepsilon_i}{I_i}\right), \tag{VI}$$

unde

$$\varepsilon_i = \frac{J_i}{2E}. \tag{29}$$

Din sistemul de ecuaţii (I) — (VI) se obţin expresiile coeficienţilor căutaţi :

$$A_i = \frac{\rho \cdot I_i \cdot S_{i+1}}{l_{i+1} I_i + l_i I_{i+1} + l_i l_{i+1} \varepsilon_i}\left[\frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} + \frac{(v_{i+1} - v_i)(1 + \varepsilon_i l_i / I_i)}{l_{i+1}}\right],$$

$$B_i = \frac{\rho \cdot S_{i+1}}{l_{i+1} I_i + l_i I_{i+1} + l_i l_{i+1} \varepsilon_i}\left[\frac{I_{i+1} l_i (v_{i+1} - v_i)}{l_{i+1}} - \frac{l_{i+1} I_i (v_{i-1} - v_i)}{l_i}\right], \tag{30}$$

$$C_i = \rho \cdot S_{i+1} v_i ;$$

$$A'_i = \frac{\rho \cdot I_{i+1} S_i}{l_{i+1} I_i + l_i I_{i+1} + l_i l_{i+1} \varepsilon_i} \left[\frac{v_{i-1} - v_i}{l_i} + \frac{(v_{i+1} - v_i)(1 + \varepsilon_i l_{i+1}/I_{i+1})}{l_{i+1}} \right],$$

$$B'_i = \frac{\rho \cdot S_i}{l_{i+1} I_i + l_i I_{i+1} + l_i l_{i+1} \varepsilon_i} \left[-\frac{I_{i+1} l_i (v_{i+1} - v_i)}{l_{i+1}} + \frac{l_{i+1} I_i (v_{i-1} - v_i)}{} \right], \quad (31)$$

$$C'_i = \rho \cdot S_i v_i .$$

Cînd nu există mase concentrate sau nu se ia în considerare inerția de rotație, $\varepsilon_i = 0$.

5. METODICA DE LUCRU

Metodica de lucru pentru o grindă simplu rezemată împărțită în n puncte fără mase concentrate este dată spre exemplificare sub forma organigramei din figura 4.

1. Se dau elementele geometrice (l, S, I) și se alege o formă arbitrară pentru săgețile normalizate de intrare $v_{i,\ \mathrm{int}}$.

Se alege o valoare Δ pentru eroarea relativă admisibilă între valoarea de intrare și cea de ieșire.

2. Se calculează coeficienții A_i, B_i, ... cu relațiile (30) și (31), făcînd să varieze i de la 2 la $n - 1$.

3. Se calculează coeficienții ecuației de recurență (12) pentru momente și cu valorile-limită $M_1 = 0$ și $M_n = 0$ se rezolvă sistemul, obținîndu-se momentele încovoietoare M_i în toate punctele de la 1 la n.

4. Se repetă calculul pentru ecuația de recurență (18), sistemul rezolvîndu-se după adăugarea valorilor $v_i = 0$ și $v_n = 0$. Se obțin săgețile la ieșire $v_{i,\ \mathrm{ies}}$ de la 1 la n.

5. Se alege drept valoare de referință săgeata punctului aflat la mijlocul grinzii ($v_{K,\ \mathrm{ies}}$) și se calculează valorile normalizate ale săgeților.

6. Se verifică erorile relative ale tuturor săgeților grinzii. Dacă erorile sînt mai mari decît cele admise Δ, se înlocuiesc valorile săgeților de intrare cu cele de ieșire normalizate și calculul se reia de la punctul 2. Dacă *toate* erorile sînt mai mici decît Δ, se trece la punctul 7.

7. Calculul pulsației proprii cu relația (3). Dacă se urmărește cunoașterea pulsației fundamentale, calculul se oprește. În caz contrar se trece la determinarea pulsațiilor superioare prin metoda arătată în paragraful următor.

6. CALCULUL FRECVENȚELOR PROPRII SUPERIOARE

Calculul frecvențelor proprii superioare se poate face prin metoda „purificării" a lui Stodola, bazată pe proprietatea de ortogonalitate a modurilor superioare [2]. Se cunoaște cu suficientă precizie forma $v_{i(x)}$ a

primului mod de vibraţie determinată prin calculul iterativ arătat anterior. Se notează cu $v^*_{2(x)}$ forma celui de-al doilea mod de vibraţie, obţinută la ieşirea din calculul iterativ, care însă va conţine inevitabil unele

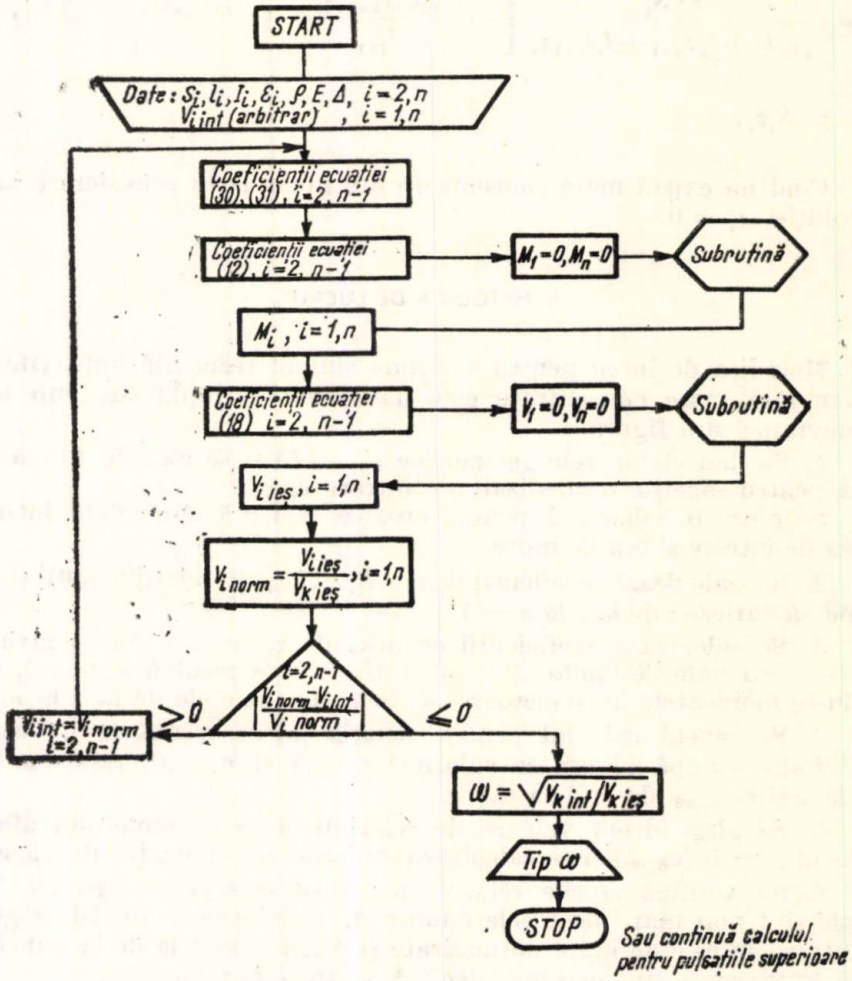


Fig. 4

resturi din armonica întîi. Se urmăreşte obţinerea unei forme $v_{2\,int(x)}$ a armonicii a doua pentru iteraţia următoare:

$$v_{2\,int(x)} = v^*_{2(x)} - A \cdot v_{1(x)}\,, \tag{32}$$

în care factorul A se determină în aşa fel, încît să se elimine din modul doi de vibraţie resturile primului mod. Dacă se ia în considerare numai

efectul masei proprii a barei, factorul A se calculează cu relația [2].

$$A = \frac{\sum \int_0^l S \cdot v^*_{2(x)} \cdot v_{1(x)}\, dx}{\sum \int_0^l S \cdot v^2_{1(x)}\, dx}, \tag{33}$$

unde S este aria secțiunii grinzii, constantă pe fiecare porțiune de integrare, iar $\sum$ arată că se efectuează însumarea pe toată lungimea barei.

Calcularea integralelor este de obicei foarte dificilă; pe baza metodei celor trei necunoscute calculul este însă simplu și ușor de programat. Într-adevăr, forma generală $v(x)$ a săgeții a fost stabilită anterior sub forma relației (14) și a relațiilor (15). În cazul de față vor apărea două expresii ale săgeții: una corespunzătoare formei $v_{1(x)}$, ai cărei coeficienți sînt determinați prin calculul iterativ al primei forme de vibrație, cealaltă corespunzătoare formei $v^*_{2(x)}$, obținută la ieșirea din calculul iterativ efectuat pentru obținerea celei de-a doua pulsații:

$$\begin{aligned} EI_{i+1} v_{1(x)} &= a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + a_4 x^4 + a_5 x^5 + a_6 x^6, \\ EI_{i+1} v^*_{2(x)} &= b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + b_4 x^4 + b_5 x^5 + b_6 x^6. \end{aligned} \tag{34}$$

Coeficienții a_i se determină cu relațiile (15) pe baza valorilor corespunzătoare iterației finale de la prima armonică, iar coeficienții b_i pe baza acelorași relații, dar cu valorile corespunzătoare ieșirii din calculul iterativ pentru armonica a doua. Se notează cu $SUM\,1$ numărătorul și cu $SUM\,2$ numitorul din relația (33). Înlocuind expresiile (34) și efectuînd integrarea, se obține pentru numărătorul $SUM\,1$ o expresie de forma

$$SUM\,1 = \sum \int_0^{l_{i+1}} S \cdot v^*_{2(x)} v_{1(x)}\, dx = \sum_{i=0}^{i=n-1} \left\{ \frac{S_{i+1} l_{i+1}}{EI^2_{i+1}} \times \right.$$

$$\times \left[b_0 \left(a_0 + a_1 \frac{l_{i+1}}{2} + a_2 \frac{l^2_{i+1}}{3} + a_3 \frac{l^3_{i+1}}{4} + a_4 \frac{l^4_{i+1}}{5} + a_5 \frac{l^5_{i+1}}{6} + a_6 \frac{l^6_{i+1}}{7} \right) + \right.$$

$$+ l_{i+1} b_1 \left(a_0 \frac{1}{2} + a_1 \frac{l_{i+1}}{3} + a_2 \frac{l^2_{i+1}}{4} + a_3 \frac{l^3_{i+1}}{5} + a_4 \frac{l^4_{i+1}}{6} + a_5 \frac{l^5_{i+1}}{7} + a_6 \frac{l^6_{i+1}}{8} \right) +$$

$$+ l^2_{i+1} b_2 \left(a_0 \frac{1}{3} + a_1 \frac{l_{i+1}}{4} + a_2 \frac{l^2_{i+1}}{5} + a_3 \frac{l^3_{i+1}}{6} + a_4 \frac{l^4_{i+1}}{7} + a_5 \frac{l^5_{i+1}}{8} + a_6 \frac{l^6_{i+1}}{9} \right) +$$

$$+ l^3_{i+1} b_3 \left(a_0 \frac{1}{4} + a_1 \frac{l_{i+1}}{5} + a_2 \frac{l^2_{i+1}}{6} + a_3 \frac{l^3_{i+1}}{7} + a_4 \frac{l^4_{i+1}}{8} + a_5 \frac{l^5_{i+1}}{9} + a_6 \frac{l^6_{i+1}}{10} \right) +$$

$$+ l^4_{i+1} b_4 \left(a_0 \frac{1}{5} + a_1 \frac{l_{i+1}}{6} + a_2 \frac{l^2_{i+1}}{7} + a_3 \frac{l^3_{i+1}}{8} + a_4 \frac{l^4_{i+1}}{9} + a_5 \frac{l^5_{i+1}}{10} + a_6 \frac{l^6_{i+1}}{11} \right) +$$

$$+ l_{i+1}^5 b_5 \left(a_0 \frac{1}{6} + a_1 \frac{l_{i+1}}{7} + a_2 \frac{l_{i+1}^2}{8} + a_3 \frac{l_{i+1}^3}{9} + a_4 \frac{l_{i+1}^4}{10} + a_5 \frac{l_{i+1}^5}{11} + a_6 \frac{l_{i+1}^6}{12} \right) +$$

$$+ l_{i+1}^6 b_6 \left(a_0 \frac{1}{7} + a_1 \frac{l_{i+1}}{8} + a_2 \frac{l_{i+1}^2}{9} + a_3 \frac{l_{i+1}^3}{10} + a_4 \frac{l_{i+1}^4}{11} + a_5 \frac{l_{i+1}^5}{12} + a_6 \frac{l_{i+1}^6}{13} \right) \right] \Bigg\}. \quad (35)$$

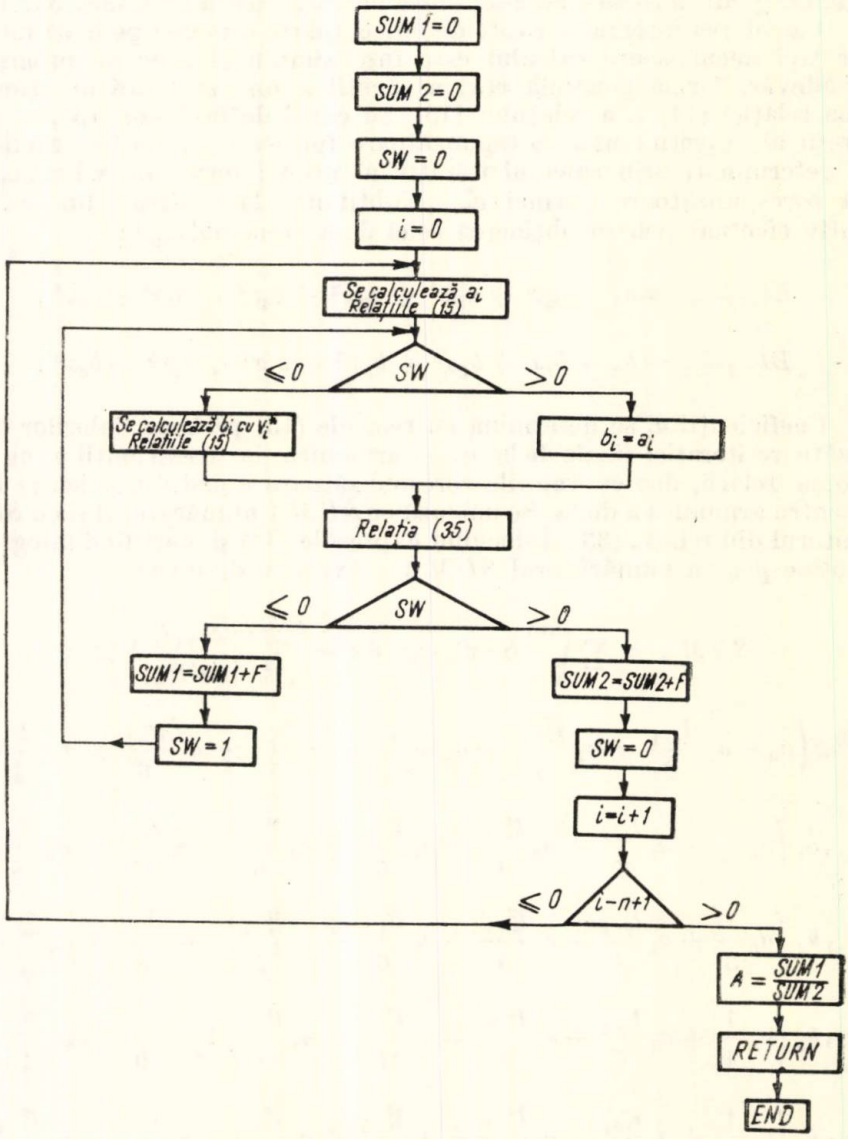


Fig. 5

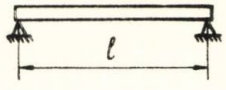
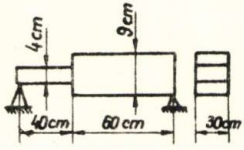
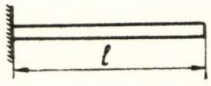
Numitorul SUM_2 al expresiei se obține din relația (35), înlocuind coeficienții b_i prin a_i, deoarece în locul produsului $v_2^* \cdot v_1$ trebuie calculat v_1^2.

Un exemplu (sub forma unei subrutine) privind modul cum poate fi programat calculul coeficientului A este dat în schema logică din figura 5.

7. APLICAȚII ȘI CONCLUZII

Pe baza metodologiei indicate s-au calculat pulsațiile proprii fundamentale pentru barele simplu rezemate și încastrate din tabela 1.

Tabela 1

Nr. crt.	Forma barei	Valoarea exactă a pulsației proprii	Soluții obținute prin calculul bazat pe variația parabolică a încărcării		
			Numărul de intervale în care s-a împărțit bara	Valoarea pulsației proprii	Eroare față de valoarea exactă
1		$\omega = \frac{\alpha}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$ unde $\alpha = 9{,}8696$	2	$\alpha = 9{,}717$	1,3%
			4	$\alpha = 9{,}8614$	0,082%
			8	$\alpha = 9{,}8691$	0,005%
2		$\omega = 73{,}5537$Hz	5	73,5306	0,03%
			10	73,5542	0,005%
3		$\omega = \frac{3{,}52}{l^2}\sqrt{\frac{EI}{\rho S}}$	4	3,5172	0,079%

După cum se vede, în cazul împărțirii într-un număr mai mare de intervale, valoarea obținută pentru pulsația proprie se suprapune practic peste valoarea exactă. Trebuie remarcat faptul că existența variației de secțiune la grinda a doua nu are influență asupra preciziei rezultatului din cauza modului cum s-au determinat coeficienții parabolelor $p_{(z)}$.

Metoda poate fi extinsă fără nici o modificare de principiu și asupra barelor cu moment de inerție variabil continuu.

Primită la redacție la 25 martie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. S. S. Ponomariev, V. L. Biderman, K. K. Liharev, V. M. Makuşkin, N. N. Malinin, V. I. Feodosiev, *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. III, Bucureşti, Edit. tehnică, 1964.
2. J. P. Den Hartog, *Mechanical Vibrations*, New York, McGraw-Hill Book Company, 1956.
3. F. Buckens, *Vitesses critiques*, Institut de mécanique et mathématiques appliquées, Heverlee — Louvain, Belgium.
4. M. Blumenfeld, *Calculul deformaţiilor grinzilor drepte prin metoda celor trei necunoscute* Buletinul Institutului politehnic Bucureşti, XIV (1962).
5. D. Mc Cracken, W. S. Dorn, *Numerical Methods and FORTRAN Programmigg*, New York, J. Wiley Sons, 1964.

O METODĂ NOUĂ PENTRU CALCULUL FLANȘELOR

de MAGDALENA POSEA
Institutul de construcții București

Pe baza teoriei elementelor finite se prezintă o metodă generală de calcul pentru determinarea stării de deformație și de eforturi în elementele principale ale unei îmbinări cu flanșe. Metoda este aplicabilă sub aceeași formă la toate tipurile de flanșe și permite luarea concomitentă în considerație a deformabilității flanșelor, șuruburilor și garniturii.
Algoritmul întocmit îndeplinește toate condițiile necesare pentru a fi transpus cu ușurință într-un program de calcul la un ordinator.

Îmbinările cu flanșe au o largă utilizare în construcția de utilaje (vase, aparatură statică, conducte etc.) și de comportarea lor depinde în mare măsură buna funcționare tehnologică a utilajelor respective. Adăugînd la acest aspect necesitatea realizării îmbinărilor cu un consum cît mai redus de metal, ajungem la explicația reală a atenției deosebite acordate construcției și calculului acestor elemente.

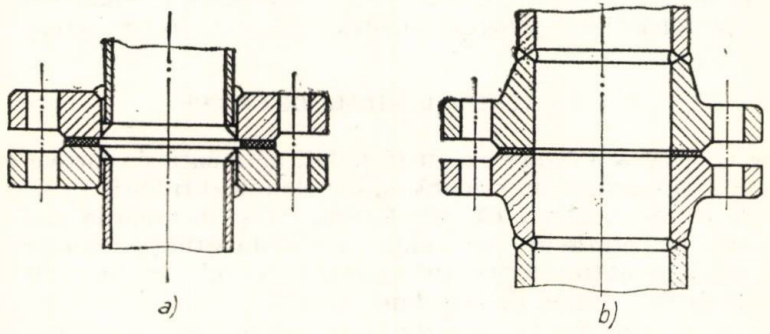


Fig. 1

În general, flanșele sînt plate (fig. 1*a*) sau cu gît (fig. 1*b*) și pentru calculul lor au fost elaborate multe metode, dintre care unele aproximative. Procedeele exacte de calcul [1]—[3] constau în separarea plăcii (talerului)

flanşei de mantaua aparatului (fig. 2*a*), rezolvarea independentă a plăcii şi a învelişului pentru încărcările exterioare şi pentru eforturile de legătură, după care, prin scrierea condiţiilor de continuitate pe direcţiile legăturilor suprimate, se determină eforturile necunoscute. La flanşele cu gît se aleg ca necunoscute eforturile de la îmbinarea gîtului flanşei cu

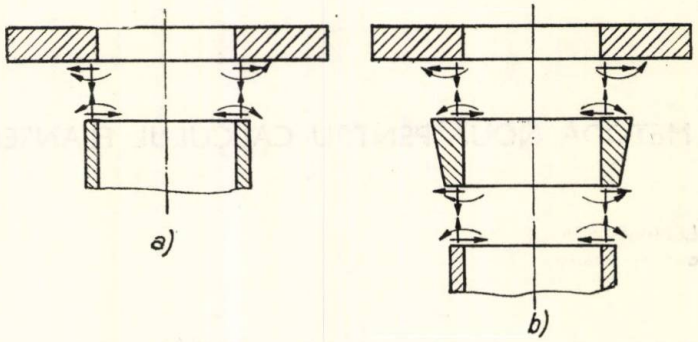


Fig. 2

placa circulară şi cu mantaua aparatului (fig. 2*a*). Determinînd expresiile deformaţiilor pe fiecare dintre cele trei elemente componente, prin integrarea ecuaţiilor diferenţiale caracteristice fiecărui element şi scrierea ecuaţiilor de continuitate pentru secţiunile de separare se obţin valorile necunoscutelor. Se precizează că rezolvarea ecuaţiei diferenţiale pentru gît, datorită secţiunii sale variabile, necesită introducerea unor funcţii speciale.

Acest algoritm, care stă la baza metodelor de calcul al flanşelor, necesită un volum mare de calcul şi, în plus, prezintă dezavantajul de a nu permite cu uşurinţă folosirea calculatoarelor cifrice.

În lucrarea de faţă se prezintă o metodă nouă de calcul al flanşelor, bazată pe teoria elementelor finite, care îndeplineşte condiţiile esenţiale transpunerii ei într-un program adecvat calculatoarelor cifrice.

1. SCHEMA GENERALĂ DE CALCUL

Se consideră o flanşă cu gît (fig. 3*a*), acţionată de forţele exterioare provenite din presiunea interioară p_i, forţele din şuruburi, P_s şi reacţiunea garniturii P_g. Se observă că atît flanşa, cît şi încărcările sînt simetrice faţă de axul de rotaţie al aparatului. În această situaţie, eforturile unitare în orice secţiune obţinută prin intersecţia învelişului cu un plan $z = r$ sînt aceleaşi şi depind numai de coordonatele z şi r.

În mod imaginar se împarte în elemente finite întreaga secţiune a flanşei (fig. 3*b*), notîndu-se cu *o* elementul comun plăcii şi gîtului flanşei, ale cărui dimensiuni se aleg $g_p = h_p$ în direcţia axei z şi $g_m = h_m$ în direcţia axei r.

Secţiunile de separaţie ale elementelor finite (fig. 3*b*) se vor nota cu $1, 2, \ldots, n$ pe porţiunea gîtului flanşei şi a învelişului şi cu $1', 2', \ldots, n'$ pe porţiunea de placă.

Fiecare element finit va purta denumirea rostului de separaţie din dreapta, stabilit în funcţie de un observator aşezat astfel încît să aibă

sensul pozitiv al axei spre dreapta. Astfel elementul h are lungimea l_h, iar elementul h' de pe placă lungimea $l_{h'}$. Elementele finite considerate pot fi de lungimi diferite sau egale.

Ultimul element n de pe înveliș se alege în așa fel, încît în rostul n starea de eforturi să nu mai fie influențată de prezența îmbinării. În con-

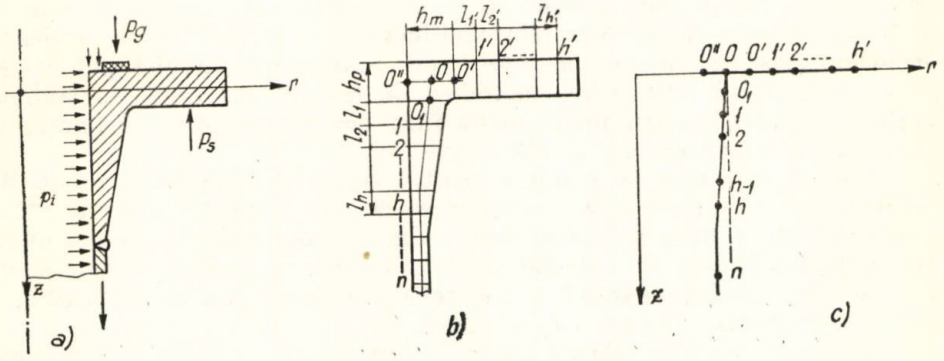


Fig. 3

secință, în secțiunea n starea de eforturi și cea de deformații pot fi determinate din ecuațiile generale ale învelișului respectiv, considerat de obicei în teoria de membrană.

Pe baza ipotezei normalelor drepte, admisă totdeauna în teoria plăcilor plane și a plăcilor curbe subțiri, rezultă că starea de eforturi în orice punct al învelișului sau al plăcii este complet determinată dacă se cunoaște deformarea suprafeței mediane. Îmbinarea considerată necesită deci stabilirea deformării suprafeței mediane (fig. 3*c*), compusă dintr-o placă inelară în zona talerului, un trunchi de con în zona gîtului flanșei și un cilindru în zona curentă a mantalei aparatului. Deplasările unui punct curent se notează cu u și w , u în sensul axei r și w în sensul axei z atît pentru placa inelară, cît și pentru zona conică sau cilindrică.

Deplasările punctelor de separație dintre elementele finite ale suprafeței (fig. 3*c*), denumite puncte nodale, se vor considera ca necunoscute de bază.

Etapele principale de calcul ale metodei elementului finit ce se va aplica sînt următoarele:

— se alege o funcție care definește în mod unic deplasările pe lungimea fiecărui element în funcție de deplasările celor două noduri de la capetele elementului finit considerat;

— se exprimă eforturile în interiorul elementului în funcție de starea de deformație considerată și de caracteristicile elastice și geometrice ale elementului respectiv;

— se determină la extremitățile fiecărui element un sistem de forțe nodale (forțe și cuple) care echilibrează tensiunile de margine ale elementului finit considerat și sarcinile exterioare (forțe și cuple) aplicate pe acesta;

— din echilibrul forțelor din punctele nodale al suprafeței provenite din forțele nodale ale elementelor vecine (și, eventual, din anumite sar-

cini exterioare aplicate concentrat în aceste puncte) se obține un sistem de ecuații algebrice, a cărui soluție reprezintă tocmai deplasările necunoscute ale nodurilor (punctele de legătură dintre elementele finite). După calculul acestor necunoscute se determină starea de deformație și de eforturi în orice punct al suprafeței.

Se precizează că forțele nodale de la extremitățile elementelor finite depind de numărul parametrilor aleși ca necunoscute în fiecare nod și pot fi determinate fie pe baza teoremei lucrului mecanic virtual, aplicată corpurilor elastice, fie pe baza teoremei minimului energiei potențiale totale. La calculul flanșelor, metodica de rezolvare prezentată trebuie detaliată separat pentru un element finit curent de pe gîtul flanșei și pentru un element curent al plăcii inelare.

Forma ecuațiilor de condiție pentru toate nodurile elementelor de pe gît sau de pe placă este aceeași, ceea ce constituie un mare avantaj al metodei în privința alcătuirii atît a algoritmului, cît și a programului corespunzător pentru un calculator cifric. O atenție sporită trebuie acordată numai modului de stabilire a forțelor nodale de pe elementul finit o, comun atît gîtului flanșei, cît și plăcii.

De asemenea din schema generală prezentată se deduce că metoda propusă pentru calculul flanșelor se poate aplica sub aceeași formă la toate tipurile de flanșe și pentru orice fel de încărcare ceea ce nu are loc în cadrul metodelor clasice.

2. CALCULUL GÎTULUI FLANȘEI ȘI AL PORȚIUNII DE MANTA CONSIDERATĂ

2.1. FUNCȚIA DEPLASĂRILOR

Se consideră un element finit $i - j$ (fig. 4*a*) de lungime l, măsurată pe generatoarea conului, raportat la un sistem de axe $r-z$, cu originea în centrul flanșei, și la un sistem de axe $y - s$, cu originea în i, extremitatea stîngă a elementului.

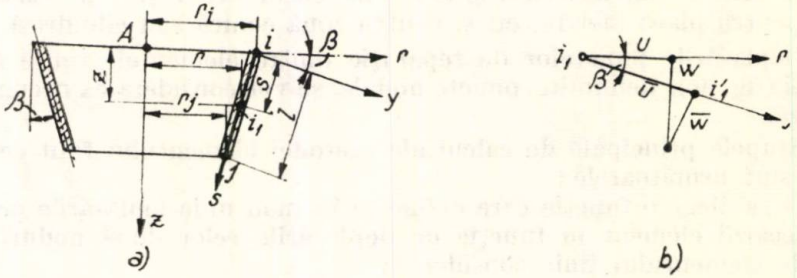


Fig. 4

Ca necunoscute se aleg deplasările nodurilor (u, w) și rotirile acestora (φ). Pentru fiecare punct, aceste necunoscute formează un vector-coloană:

$$\{\delta\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \\ \varphi \end{Bmatrix}. \tag{1}$$

Astfel pentru nodurile i, j se obțin vectorii

$$\{\delta_i\} = \begin{Bmatrix} u_i \\ w_i \\ \varphi_i \end{Bmatrix}; \quad \{\delta_j\} = \begin{Bmatrix} u_j \\ w_j \\ \varphi_j \end{Bmatrix}, \tag{2}$$

care determină vectorul necunoscutelor pentru elementul considerat e:

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}. \tag{3}$$

În sistemul de axe $y - s$, deplasările unui punct curent i_1, $\overline{u}$ și $\overline{w}$ se exprimă în funcție de deplasările u, v (fig. 4*b*) prin relațiile

$$\overline{u} = u \cos\beta + w \sin\beta,$$

$$\overline{w} = -u \sin\beta + w \cos\beta.$$

Ținînd seama de ipoteza normalelor drepte, rezultă că secțiunea curentă i_1 are rotirea

$$\varphi = \overline{\varphi} = \frac{d\overline{u}}{ds} \tag{4}$$

și relațiile de transformare de mai sus, scrise sub formă matriceală, conduc la relația

$$\{\overline{\delta}\} = \begin{Bmatrix} \overline{u} \\ \overline{w} \\ \overline{\varphi} \end{Bmatrix} = [\lambda]\{\delta\}, \tag{5}$$

în care $\{\delta\}$ are expresia (1), iar

$$[\lambda] = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta & 0 \\ -\sin\beta & \cos\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{6}$$

reprezintă matricea de transformare a deplasărilor din sistemul $r - z$ în deplasările sistemului $y - s$.

Alegînd ca necunoscute deplasările și rotirile de la capetele elementului, care sînt în număr de șase, se pot alege deplasările u, w ale unui punct curent de pe element în funcție de șase parametri astfel:

$$\begin{aligned} \overline{u} &= \alpha_1 + \alpha_2 s + \alpha_3 s^2 + \alpha_4 s^3, \\ \overline{w} &= \alpha_5 + \alpha_6 s. \end{aligned} \tag{a}$$

Pe baza condițiilor la limită din punctele $i(s = 0)$ și $j\ (s = l)$, unde se consideră cunoscuți vectorii $\{\bar{\delta}_i\}$, $\{\bar{\delta}_j\}$ cu expresii similare celor date de formula (2), se determină valorile parametrilor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_6$ în funcție de necunoscutele de la capete $\bar{u}_i, \bar{w}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{u}_j, \bar{w}_j, \bar{\varphi}_j$, după care expresiile (a) pot fi scrise sub forma

$$\bar{u} = \bar{u}_i\left(1 - 3\frac{s^2}{l^2} + 2\frac{s^3}{l^3}\right) + \varphi_i l\left(\frac{s}{l} - 2\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) +$$

$$+ \bar{u}_j\left(3\frac{s^2}{l^2} - 2\frac{s^3}{l^3}\right) + \bar{\varphi}_j l\left(-\frac{s^2}{l^2} + \frac{s^3}{l^3}\right) \tag{b}$$

$$\bar{w} = \bar{w}_i\left(1 - \frac{s}{l}\right) + \bar{w}_j\frac{s}{l}.$$

Ținînd seama că deplasările $\bar{u}_i, \bar{w}_i, \bar{\varphi}_i, \bar{u}_j, \bar{w}_j, \bar{\varphi}_j$ alcătuiesc vectorul $\{\bar{\delta}\}^e$ similar cu (3) și, notînd

$$s' = \frac{s}{l}, \tag{7}$$

deplasările $\bar{u}$, $\bar{w}$ pot fi constituite în vectorul

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1-3s'^2+2s'^3 & 0 & l(s'-2s'^2+s'^3) & 3s'^2-2s'^3 & 0 & l(-s'^2+s'^3) \\ \hline 0 & 1-s' & 0 & 0 & s' & 0 \end{array}\right]\begin{Bmatrix} \bar{\delta}_i \\ \bar{\delta}_j \end{Bmatrix}. \tag{c}$$

Notînd matricele

$$[H'_i] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 - s'^2 + 2s'^3 & 0 & l(s' - 2s'^2 + 3s'^3 \\ \hline 0 & 1 - s' & 0 \end{array}\right] \tag{8}$$

$$[H'_j] = \left[\begin{array}{c|c|c} 3s'^2 - 2s'^3 & 0 & l(-s'^2 + s'^3 \\ \hline 0 & s' & 0 \end{array}\right] \tag{9}$$

și

$$[H_i] = [H'_i][\lambda];\quad [H_j] = [H'_j][\lambda];\quad [H] = [H_i, H_j], \tag{10}$$

relația (c), ținînd seama de (5), devine

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} \bar{u} \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = [H_i\ H_j]\begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = [H]\{\delta\}^e. \tag{11}$$

Relația (11), denumită funcția deplasărilor, exprimă deplasările în orice punct de pe element în funcție de necunoscutele considerate la noduri.

2.2. EXPRIMAREA EFORTURILOR ÎN FUNCȚIE DE DEPLASĂRI

2.2.1 *Aspectul geometric.* Se consideră un element cu lungimea ds după generatoare și se notează cu AB fibra mediană și cu CD o fibră curentă la distanța y de AB, admisă pozitivă cînd se află în exteriorul suprafeței mediane (fig. 5*a*).

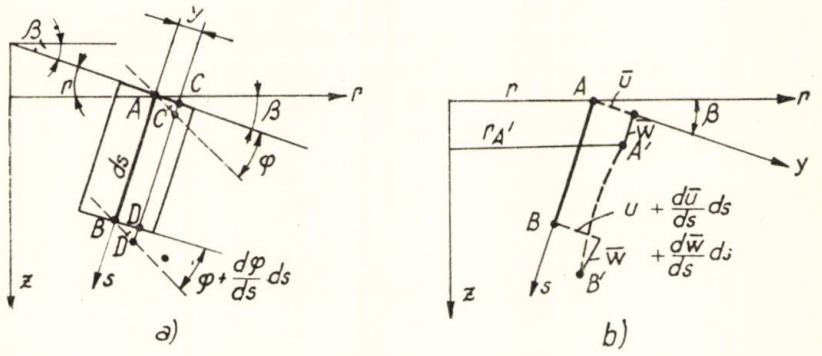


Fig. 5

În planul $y - s$, deformația specifică ε_s provine atît din deplasările fibrei mediane (fig. 5*b*), cît și din încovoierea elementului indicată numai schematic în figura 5*a*.

Din încovoierea elementului se obține

$$\varepsilon^{i}_{s,y} = \frac{C'D' - CD}{CD} = \frac{y\left(\varphi + \frac{d\varphi}{ds}ds\right) - y\varphi}{ds} = y\frac{d\varphi}{ds}. \qquad (d)$$

Ținînd seama de variația lui $\overline{w}$ în lungul elementului (fig. 5*b*) și de relația (4) care se introduce în (*d*), rezultă deformația specifică în sensul lui s a fibrei curente CD sub forma

$$\varepsilon_{s,y} = \frac{d\overline{w}}{ds} + y\frac{d^2\overline{u}}{ds^2}. \qquad (12)$$

Deplasările din planul $y - s$ produc însă și deformații inelare. Astfel, punctul C aflat pe raza $r_c = r + y\cos\beta$ înainte de deformație (fig. 5*a*) se găsește după deformație, ținînd seama că A ajunge în A' (fig. 5*b*), pe raza

$$r_{c'} = r_{A'} - y\varphi\sin\beta = r + \overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta + y\cos\beta - y\varphi\sin\beta.$$

În consecință, deformația specifică inelară are expresia

$$\varepsilon_{\theta,y} = \frac{2\pi r_c' - 2\pi r_c}{2\pi r_c} = \frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta - y\varphi\sin\beta}{r + y\cos\beta},$$

care, neglijînd pe y față de r, cum se obișnuiește în cazul învelișurilor subțiri, și ținînd seama de (4), devine

$$\varepsilon_{\theta,y} = \frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} - y\frac{\sin\beta}{r}\frac{d\overline{u}}{ds}. \tag{13}$$

Relațiile (12) și (13) exprimă deformațiile specifice pentru un punct curent al grosimii învelișului în funcție de deplasările suprafeței mediane.

2.2.2. *Aspectul fizic.* Întrucît starea de tensiuni care apare este plană (σ_y, tensiunea normală pe suprafața mediană se consideră nulă), legea generalizată a lui Hooke are forma

$$\varepsilon_{s,y} = \frac{1}{E}(\sigma_s - \mu\sigma_\theta),$$
$$\varepsilon_{\theta,y} = \frac{1}{E}(\sigma_\theta - \mu\sigma_s), \tag{14}$$

unde σ_s, σ_θ sînt tensiunile după generatoare, respectiv după un inel, într-un punct curent al grosimii elementului la distanța y de suprafața mediană (fig.6).

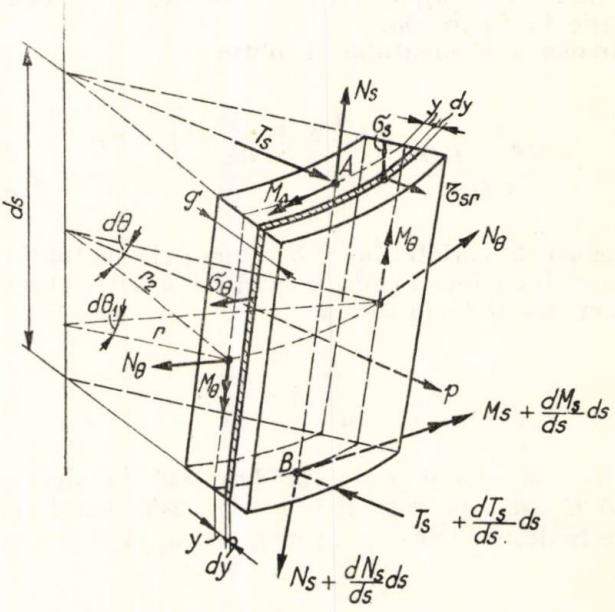


Fig. 6

Explicitînd din relațiile (14) eforturile unitare și înlocuind deformațiile specifice în funcție de deplasări în conformitate cu relațiile (12), (13), se obține

$$\sigma_s = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{d\overline{w}}{ds} + y\frac{d^2\overline{u}}{ds^2} + \mu\left(\frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} - y\frac{\sin\beta}{r}\frac{d\overline{u}}{ds}\right)\right],$$

$$\sigma_\theta = \frac{E}{1-\mu^2}\left[\frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} - y\frac{\sin\beta}{r}\frac{d\overline{u}}{ds} + \mu\left(\frac{d\overline{w}}{ds} + y\frac{d^2\overline{u}}{ds^2}\right)\right]. \tag{15}$$

Aceste relații exprimă eforturile unitare într-un punct curent în funcție de deplasările suprafeței mediane.

2.2. 3. *Aspectul static.* Ținînd seama de simetria încărcărilor, eforturile secționale care apar pe un element de înveliș în teoria de momente sînt cele reprezentate în figura 6. Eforturile axiale sînt considerate pozitive cînd sînt de întindere, iar momentele încovoietoare cînd întind partea din interior a învelișului.

Din echivalența dintre eforturile unitare normale și cele secționale se obține

$$N_s r_2\,d\theta = \int_{-g/2}^{+g/2}\sigma_s(r_2+y)\,d\theta\,dy \;;\; M_s r_2\,d\theta = -\int_{-g/2}^{+g/2}\sigma_s(r_2+y)\,d\theta\,dy\cdot y,$$

$$N_\theta\,ds = \int_{-g/2}^{+g/2}\sigma_\theta\,ds\,dy \;;\; M_\theta\,ds = -\int_{-g/2}^{+g/2}\sigma_\theta\,ds\,dy\cdot y. \tag{e}$$

Folosind din nou ipoteza plăcii subțiri, care permite neglijarea lui y față de r sau r_2 (a doua rază principală a învelișului prin introducerea expresiilor (15) în relațiile de echivalență (e) și ținînd seama că $\overline{u}$ și $\overline{w}$ nu depind de y, iar $\int_{-g/2}^{+g/2} y\,dy = 0$, rezultă

$$N_s = \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{d\overline{w}}{ds} + y\frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r}\right),$$

$$N_\theta = \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta}{r} + \mu\frac{d\overline{w}}{ds}\right), \tag{16}$$

$$M_s = \frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{d^2\overline{u}}{ds^2} - \mu\frac{\sin\beta}{r}\frac{d\overline{u}}{ds}\right),$$

$$M_\theta = \frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(-\frac{\sin\beta}{r}\frac{d\overline{u}}{ds} + \mu\frac{d^2\overline{u}}{ds^2}\right).$$

Notînd :

— vectorul deformațiilor specifice,

$$\{\varepsilon\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_s \\ \varepsilon_\theta \\ \chi_s \\ \chi_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dfrac{d\overline{w}}{ds} \\ (\overline{u}\cos\beta - \overline{w}\sin\beta)/r \\ -\dfrac{d^2\overline{u}}{ds^2} \\ \dfrac{\sin\beta}{r}\dfrac{d\overline{u}}{ds} \end{Bmatrix}; \tag{17}$$

— matricea elementelor elastice și geometrice,

$$[D] = \frac{Eg}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2/12 & \mu g^2/12 \\ 0 & 0 & \mu g^2/12 & g^2/12 \end{bmatrix}; \tag{18}$$

— vectorul eforturilor secționale,

$$\{N\} = \{N_s N_\theta M_s M_\theta\}^T, \tag{19}$$

unde indicele superior T indică transpunerea, rezultă expresia vectorului eforturilor secționale în funcție de deplasări sub forma

$$\{N\} = [D]\{\varepsilon\}, \tag{20}$$

în care matricea $[D]$ are rol de matrice de transformare.

În componența vectorului eforturilor secționale nu a fost introdusă forța tăietoare T_s, deoarece, după cunoașterea celorlalte eforturi, ea poate fi determinată din ecuațiile de echilibru ale elementului infinitezimal (fig.6).

Astfel, din ecuația de momente față de axa y ce trece prin B (fig. 6) se obține

$$T_s = \frac{dM_s}{ds} - M_s\frac{\sin\beta}{r}, \tag{f}$$

în care, introducînd expresia lui M_s din (16), rezultă

$$T_s = -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left[\frac{d^3\overline{u}}{ds^3} - (1+\mu)\frac{\sin\beta}{r}\frac{d^2\overline{u}}{ds^2}\right] \tag{21}$$

Celelalte două ecuații de echilibru distincte care mai pot fi scrise pentru elementul considerat (fig. 6) nu se mai reproduc, deoarece în metodologia de rezolvare ce se adoptă nu sînt necesare. Se menționează că separarea forței tăietoare de celelalte eforturi secționale a fost posibilă, datorită faptului că tensiunile τ nu intervin în relațiile dintre σ și ε, date de legea generalizată a lui Hooke.

În vectorul eforturilor secționale s-au reținut numai componentele indicate în (19), deoarece numai acestea determină, în principal, grosimea învelișului și calculele sînt mai simple decît în cazul cînd s-ar considera și T_s.

2.2.4. *Exprimarea vectorilor deformațiilor specifice și eforturilor secționale în funcție de deplasările nodurilor.* Introducînd expresiile $\overline{u}$ și $\overline{w}$ date de relația (c) în (17) și ținînd seama de (5), se obține

$$\{\varepsilon\} = \begin{vmatrix} 0 & -1/l & 0 \\ (1-3s'^2+2s'^3)\dfrac{\cos\beta}{r} & -\dfrac{1-s'}{r}\sin\beta & \dfrac{l}{r}(s'-2s'^2+s'^3)\cos\beta \\ \dfrac{6}{l^2}(1-2s') & 0 & \dfrac{2}{l}(2-3s') \\ \dfrac{6\sin\beta}{lr}(-s+s'^2) & 0 & \dfrac{\sin\beta}{r}(1-4s'+3s'^2) \end{vmatrix} \tag{22}$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 1/l & 0 \\ \dfrac{3s'^2-2s'^3}{r}\cos\beta & -\dfrac{s'}{r}\sin\beta & \dfrac{l}{r}(-s'^2+s'^3)\cos\beta \\ -\dfrac{6}{l^2}(1-2s') & 0 & \dfrac{2}{l}(1-3s') \\ \dfrac{6\sin\beta}{lr}(s'-s'^2) & 0 & \dfrac{\sin\beta}{r}(2s'+3s'^2) \end{vmatrix} \begin{Bmatrix} [\lambda]\,\delta_i \\ [\lambda]\,\delta_j \end{Bmatrix}$$

sau

$$\{\varepsilon\} = [B]\{\delta\}^e = [B_i\ B_j]\{\delta\}^e, \tag{22'}$$

care reprezintă vectorul deformațiilor specifice într-un punct de pe un element finit oarecare în funcție de deplasările nodurilor elementului considerat. În trecerea de la (22') la (22) s-au notat:

$$[B_i'] = \begin{vmatrix} 0 & -1/l & 0 \\ (1-3s'^2+2s'^3)\dfrac{\cos\beta}{r} & -\dfrac{1-s'}{r}\sin\beta & \dfrac{l}{r}(s'-2s'^2+s'^3)\cos\beta \\ \dfrac{6}{l^2}(1-2s') & 0 & \dfrac{2}{l}(2-3s') \\ \dfrac{6\sin\beta}{lr}(-s'+s'^2) & 0 & (1-4s'+3s'^2)\dfrac{\sin\beta}{r} \end{vmatrix} \tag{23}$$

$$[B'_j] = \begin{bmatrix} 0 & 1/l & 0 \\ \dfrac{3s'^2 - 2s'^3}{r}\cos\beta & -\dfrac{s'}{r}\sin\beta & \dfrac{l}{r}(-s'^2 + s'^3)\cos\beta \\ -\dfrac{6}{l^2}(1 - 2s') & 0 & \dfrac{2}{l}(1 - 3s') \\ \dfrac{6}{lr}(s' - s'^2)\sin\beta & 0 & \dfrac{1}{r}(-2s' + 3s'^2)\sin\beta \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$[B_i] = [B'_i]\,[\lambda] \quad ; \quad [B_j] = [B'_j]\,[\lambda]. \tag{25}$$

Introducînd vectorul $\{\varepsilon\}$ dat de (22) în (20), rezultă expresia vectorului eforturilor secționale într-un punct curent al unui element finit :

$$\{N\} = [D]\,[B]\,\{\delta\}^e = [D]\,[B_i, B_j]\,\{\delta\}^e, \tag{26}$$

în funcție de deplasările nodurilor elementului respectiv.

2.3. STABILIREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE PENTRU DETERMINAREA DEPLASĂRILOR NODALE

Notînd elementele finite în care a fost împărțită suprafața conică cu indicele nodului din dreapta (pentru observatorul așezat astfel încît să aibă sensul pozitiv al axei z spre dreapta), rezultă că elementul h de lungime l_h pe generatoare și l'_h pe axa z este cuprins între nodurile $h-1$ și h (fig. 7a).

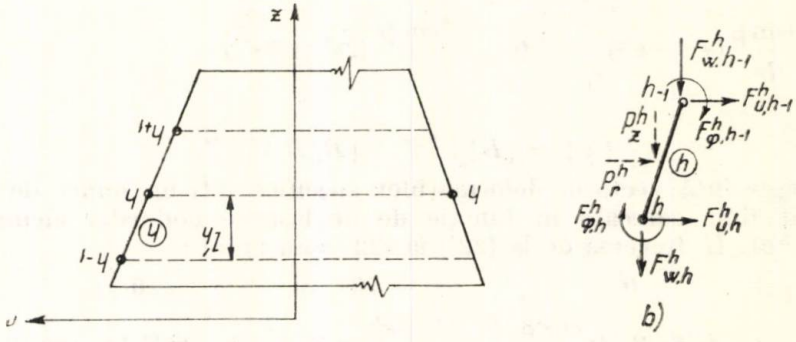


Fig. 7

În fiecare nod al suprafeței (1, . . ., $h-1$, h, $h+1$, ...) s-au considerat cîte trei necunoscute (u, w, φ), ceea ce permite introducerea la fiecare capăt al elementului a unui sistem de forțe nodale compus din două componente-forță : pozitive cînd sînt dirijate în sensul pozitiv al deplasărilor corespunzătoare și o componentă cuplu, considerat pozitiv cînd ro-

teşte orar, adică în acelaşi sens cu rotirea pozitivă φ. Pentru elementul h (fig. 7*b*), forţele nodale formează vectorul-coloană

$$\{F\}^h = (\{F_{h-1}F_h\}^h)^T = (\{F_{u,h-1}\,F_{w,h-1}F_{\varphi,h-1}F_{u,h}\,F_{w,h}\,F_{\varphi,h}\}^h)^T, \quad (27)$$

unde indicele superior T înseamnă transpunere.

Forţele exterioare de pe element pot fi constituite de asemenea într-un vector :

$$\{\overline{p}\}^h = \begin{Bmatrix} p_y \\ p_s \end{Bmatrix}^h = \begin{bmatrix} \cos\beta & \sin\beta \\ -\sin\beta & \cos\beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} p_r \\ p_z \end{Bmatrix}^h = [\lambda_1]\{p\}^h, \quad (28)$$

cu componentele după y şi s exprimate în funcţie de componentele după r şi z prin intermediul matricei de transformare $[\lambda_1]$, a cărei alcătuire se recunoaşte uşor din (28).

Forţele nodale $\{F\}$ de pe fiecare element finit trebuie să fie în echilibru cu tensiunile de margine şi forţele exterioare aplicate pe elementul respectiv.

2.3.1. *Determinarea forţelor nodale.* Pentru aceasta se va folosi teorema lucrului mecanic virtual aplicată corpurilor elastice, pe baza căreia, într-o deplasare virtuală compatibilă cu legăturile, lucrul mecanic al eforturilor ($\overline{L}_{ef}$) este egal cu lucrul mecanic al forţelor exterioare ($\overline{L}_{ex}$) :

$$\overline{L}_{ef} = \overline{L}_{ex}. \quad (29)$$

Ca deplasări virtuale pentru un element oarecare e se vor folosi fiecare dintre componentele vectorului deplasărilor nodale $\{\delta^*\}^e$, care este identic cu cel dat de (3), semnul * indicînd caracterul de virtual.

Întrucît deplasărilor nodale virtuale $\{\delta^*\}^e$ le corespund deformaţiile specifice virtuale $\{\varepsilon^*\}^e$, se obţine

$$(\overline{L}_{ef})^e = \iint (\{\varepsilon^*\}^e)^T \{N\}\, ds\, ds_1, \quad (g)$$

unde ds_1 reprezintă lungimea după paralel a elementului. Ţinînd seama de simetria încărcărilor, prin folosirea relaţiilor (7), (22) (26) rezultă

$$(\overline{L}_{ef})^e = (\{\delta^*\}^e)^T \int [B]^T[D]\,[B]\,\{\delta\}^e\, 2\pi rl\, ds', \quad (30)$$

unde r reprezintă raza paralelului în punctul s' de pe generatoarea elementului e.

În categoria forţelor exterioare ale elementului intrînd forţele nodale (27) şi forţele exterioare efectiv aplicate (28), lucrul mecanic virtual al acestora se calculează cu expresia

$$(\overline{L}_{ex})^e = (\{\delta^*\}^e)^T \{F\}^e + \int (\{f^*\}^e)^T \{p\}\, ds\, ds_1,$$

care, ţinînd seama de simetria încărcării, de (11) şi (28), devine

$$(\overline{L}_{ex})^e = (\{\delta^*\}^e)^T (\{F\}^e + \int [H]^T\,[\lambda_1]\,\{p\}\, 2\pi rl\, ds'). \quad (31)$$

Introducînd expresiile (30) şi (31) în egalitatea (29), care trebuie să existe pentru orice deplasare virtuală, se obţin valorile forţelor nodale pe elementul considerat:

$$\{F\}^e = \left(\int [B]^T [D] [B] 2\pi rl \, ds'\right) \{\delta\}^e - \int [H]^T [\lambda_1] \{p\} 2\pi \, rlds'. \quad (32)$$

Notînd

$$[k]^e = \int [B]^T [D] [B] 2\pi rlds', \quad (33)$$

denumită matricea de rigiditate a elementului, şi

$$\{F\}_p^e = \int [H]^T [\lambda_1] \{p\} 2\pi \, rlds', \quad (34)$$

vectorul forţelor nodale corespunzătoare sarcinilor exterioare efectiv aplicate, relaţia (32) devine

$$\{F\}^e = [k]^e \{\delta\}^e - \{F\}_p^e. \quad (35)$$

Deoarece în cazul analizat elementul finit considerat are numai două noduri (i în stînga şi j în dreapta), matricea de rigiditate, care este o matrice pătratică 6×6, se descompune în patru submatrice:

$$[k]^e = \begin{bmatrix} k_{ii} & k_{ij} \\ k_{ji} & k_{jj} \end{bmatrix}^e, \quad (36)$$

tot pătratice, fiecare de dimensiuni 3×3.

Ţinînd seama că $[B] = [B_i, B_j]$, prin dezvoltarea relaţiei (33) în forma (36) se obţine

$$[k_{ij}]^e = \int [B_i]^T [D] [B_j] 2\pi \, rl \, ds', \quad (37)$$

în care $[B_i]$, $[B_j]$ au expresiile (25). Celelalte submatrice din (37) se determină prin permutarea corespunzătoare a indicilor în (37).

2.3.2. *Ecuaţiile de echilibru ale nodurilor.* Prin determinarea forţelor nodale (35) sînt satisfăcute ecuaţiile de echilibru pe fiecare element finit luat separat. De asemenea este asigurată continuitatea dintre elemente, deoarece pentru capetele elementelor ce se întîlnesc într-un nod au fost considerate aceleaşi deplasări (săgeţi şi rotiri).

Trebuie însă ca şi nodurile, adică corpurile de legătură dintre elementele finite, să fie în echilibru.

Considerînd un nod curent h (fig. 7), sistemul de forţe care-l acţionează este reprezentat prin forţele nodale de la capetele elementelor ce se

întîlnesc în el. Pentru echilibru trebuie ca suma acestora să fie nulă. Scriind aceasta pentru toate nodurile, se obțin condițiile

$$\sum_e \{F_h\}^e = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots, n), \tag{38}$$

care, prin înlocuirea forțelor nodale (35), se transformă într-un sistem de ecuații algebrice în care necunoscutele sînt deplasările nodurilor.

În cazul analizat, cînd nodul h are legături numai cu nodurile $h-1$ (la stînga) și $h+1$ (la dreapta), sistemul (38), pe baza relației (27), devine

$$\{F_h\}^h + \{F_h\}^{h+1} = 0 \quad (h = 1, 2, \ldots n). \tag{38'}$$

Ținînd seama de (3) și determinînd componentele corespunzătoare din (35), sistemul (38') ia forma

$$\begin{aligned} &[k_{h,h-1}]^h \{\delta_{h-1}\} + ([k_{h,h}]^h + [k_{h,h}]^{h+1}) \{\delta_h\} + \\ &+ [k_{h,h+1}]^{h+1} \{\delta_{h+1}\} - (\{F_h\}_p^h + \{F_h\}_p^{h+1}) = 0 \\ &(h = 1, 2, \ldots, n), \end{aligned} \tag{39}$$

în care fiecare ecuație conține deplasările a cîte trei noduri succesive. Fac excepție ecuațiile corespunzătoare primului și ultimului nod, care conțin numai necunoscutele a cîte două noduri. Un astfel de sistem este denumit sistem cu matrice Jacobi. El prezintă avantajul că poate fi soluționat cu ușurință prin metoda eliminării.

Sistemul (39), care reprezintă sistemul de ecuații de condiție pentru determinarea deplasărilor nodale, poate fi scris matriceal sub forma

$$[K]\{\delta\} - \{F\}_p = 0, \tag{40}$$

în care $[K]$ reprezintă matricea Jacobi a întregului sistem, $\{\delta\}$ vectorul tuturor necunoscutelor și $\{F\}$ vectorul termenilor liberi, compus din componentele (34) pentru toate elementele finite considerate.

Coeficienții ecuațiilor sistemului (39) se calculează cu ușurință din relația (37) prin particularizarea corespunzătoare a indicilor, ținînd seama atît de ordinea $i \to j$, admisă pentru un element oarecare, cît și de ordinea $h-1$, h, $h+1$ a nodurilor:

$$[k_{h,h-1}]^h = \int_{(h)} [B_j]^T [D] [B_i] 2\pi r_h l_h \, ds', \tag{41}$$

$$\begin{aligned} [k_{hh}] = [k_{hh}]^h + [k_{hh}]^{h+1} = &\int_h [B_j]^T [D] [B_j] 2\pi r_h l_h \, ds' + \\ &+ \int_{h+1} [B_i]^T [D] [B_i] 2\pi r_{h+1} l_{h+1} \, ds', \end{aligned} \tag{42}$$

$$[k_{h,h+1}]^{h+1} = \int_{h+1} [B]^T [D] [B_j] 2\pi r_{h+1} l_{h+1} \, ds'. \tag{43}$$

Se înțelege că matricele $[B_i]$, $[B_j]$, $[D]$ se introduc în formulele (41), (42), (43) cu valorile lor corespunzătoare elementului trecut ca domeniu la integralele respective. Acest fapt îl precizează și indicele trecut la raza curentă, respectiv la lungimea elementului.

Termenul liber, calculat pornind de la (34) și ținînd seama de (10), are forma

$$\{F_h\}_p = \{F_h\}_p^h + \{F_h\}_p^{h+1} = \int_h [H_j]^T [\lambda_1] \{p\} 2\pi r_h l_h \, ds' +$$

$$+ \int_{h+1} [H_i]^T [\lambda_1] \{P\} 2 \pi r_{h+1} l_{h+1} \, ds', \tag{44}$$

în care primul termen se referă la elementul h, cuprins între nodurile $h - 1$ și h, și al doilea la elementul $h + 1$, cuprins între nodurile h și $h + 1$.

În cazul unor sarcini concentrate aplicate pe elementele finite, integralele din (44) se transformă în sume.

Cînd învelișul este acționat de sarcini concentrate exterioare și în dreptul nodurilor :

$$\{P_h\}_p = \{P_{u,h} \; P_{w,h} \; \mathfrak{M}_{\varphi,h}\}^T, \tag{45}$$

termenul liber al ecuației (39) se compune din (44), la care se adaugă (45) :

$$\{L_h\} = \{F_h\}_p + \{P_h\}_p. \tag{46}$$

2.4. OBSERVAȚII ȘI CONCLUZII PRIVIND CALCULUL GÎTULUI FLANȘEI

a. Împărțirea învelișului în elemente se face atît pe zona gîtului flanșei, cît și în continuare pe manta, pînă într-o zonă unde se apreciază că influența discontinuității datorită flanșei nu se mai resimte. În această zonă se cunosc fie deplasările ultimului nod al rețelei de elemente finite, fie eforturile determinate în teoria de membrană. În funcție de aceste eforturi se determină o relație între deplasările nodurilor ultimului element finit considerat cu ajutorul relației (26), după care se poate începe rezolvarea succesivă a sistemului general de ecuații (40).

Pentru zona cilindrică a mantalei, matricele de rigiditate și forțele nodale exterioare se calculează cu aceleași expresii de la partea tronconică, în care se introduce particularizarea $\beta = 0$. Prin aceasta, matricele de transformare $[\lambda]$, $[\lambda_1]$ devin matrice-unitate.

b. Matricea de rigiditate a unui element se poate calcula prin efectuarea integrării fiecărui termen al produsului matriceal prevăzut de formula (33) sau printr-un procedeu adecuat de integrare numerică.

Submatricele indicate de (36) în care se descompune matricea de rigiditate se calculează cu expresia (37) fie prin integrare clasică termen cu termen, fie printr-un procedeu de integrare numerică.

Se menționează că procedeele de integrare numerică sînt preferabile în cazul folosirii calculatoarelor cifrice.

c. Rezolvarea sistemului (40) conduce la valorile deplasărilor nodurilor, în funcție de care eforturile în orice secțiune se determină cu formula (26).

Se precizează că rezolvarea sistemului de ecuații, datorită particularităților matricei lui se face cu ușurință la un calculator cifric, chiar la un număr foarte mare de necunoscute. Sistemul poate fi rezolvat și iterativ, după metoda celor două șiruri de transmiteri utilizate la grinzile continui [6], unde însă problema este mai simplă, deoarece la fiecare nod există o singură necunoscută și nu trei, ca în cazul de față.

Problema abordată putea fi soluționată și numai cu cîte două necunoscute la fiecare nod (deplasările u, w), dar în acest caz ar fi intervenit discontinuități în valorile rotirilor secțiunilor a două elemente finite vecine. Pentru eliminarea acestui neajuns și mărirea exactității valorilor deplasărilor și eforturilor, s-a preferat sistemul cu trei necunoscute la fiecare nod.

d. Exactitatea rezultatelor poate fi îmbunătățită prin mărirea numărului elementelor în care se împarte suprafața. Pornind inițial de la un anumit număr de elemente și mărind apoi numărul acestora, se poate analiza și rapiditatea de convergență a soluțiilor obținute către soluția exactă. Se subliniază posibilitatea importantă de a lua elemente de dimensiuni mai mici în zonele unor concentrări de eforturi mai mari și elemente mai mari în restul învelișului. În acest fel, metoda permite obținerea rezultatelor cu exactitatea dorită în toate zonele învelișului.

e. Ordinea practică a operațiilor pentru calculul gîtului unei flanșe și a mantalei care îl continuă este următoarea:

— se împarte suprafața în elemente finite, precizîndu-se pentru fiecare dintre ele l, g, r, β. Pentru r se determină dependența față de s și razele de la capetele elementului, iar pentru g se ia grosimea medie a elementului;

— se precizează sarcinile exterioare de pe fiecare element și de la noduri, așa cum prevăd formulele (28) și (45);

— se calculează matricea de rigiditate (33) pentru fiecare element. Elementele acesteia care sînt submatrice (36) se determină cu expresia (37);

— se determină forțele nodale exterioare (34) pentru fiecare element;

— se alcătuiește sistemul de ecuații (39) prin utilizarea formulelor (41)—(46);

— se rezolvă sistemul ecuațiilor de condiție (39) sau (40) și se obțin deplasările și rotirile în toate nodurile;

— se determină eforturile secționale $\{N\}$, formula (26), pentru orice secțiune. Sînt suficiente însă eforturile din secțiunile unde sau fost considerate nodurile;

— după cunoașterea eforturilor secționale se determină eforturile unitare după formulele cunoscute ale rezistenței materialelor și se fac verificările de rezistență necesare în conformitate cu teoria de rupere care se adoptă.

3. CALCULUL TALERULUI FLANȘEI

Talerul flanșei reprezintă din punct de vedere static o placă circulară inelară, încastrată elastic de gîtul flanșei și acționată de sarcini provenite din presiunea interioară, strîngerea șuruburilor și reacțiunea garniturii.

Calculul deplasărilor și al eforturilor prin metoda elementului finit se conduce în mod asemănător ca în cazul gîtului flanșei. Legătura dintre

gîtul flanşei şi placă se face prin elementul o (fig. 3b), care se va trata în mod separat în capitolul următor. De aceea în acest capitol, pe baza ipotezelor generale admise în teoria plăcilor, se va dezvolta metoda elementului finit pentru calculul plăcilor circulare încărcate simetric faţă de axul central atît cu forţe normale pe planul plăcii, cît şi cu forţe în planul ei. Metodologia de rezolvare este generală şi va putea fi aplicată în cazul oricărei plăci circulare încărcate simetric, particularizînd numai în mod corespunzător termenii care conţin sarcinile exterioare şi condiţiile de rezemare.

3.1. EFORTURI SECŢIONALE ŞI FUNCŢIA DEPLASĂRILOR

La o placă circulară încărcată cu sarcini normale simetric faţă de axul central [7], [8], eforturile secţionale M_r, M_θ, T_r, pe baza ipotezei normalelor drepte (fig. 8a), se exprimă în funcţie de deplasarea $w = w(r)$, normală pe planul plăcii, prin relaţiile

$$M_r = -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{d\varphi}{dr}+\mu\frac{\varphi}{r}\right)=-\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{d^2w}{dr^2}+\mu\frac{dw}{dr}\right),$$

$$M_\theta = -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{\varphi}{r}+\mu\frac{d\varphi}{dr}\right)=-\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}+\mu\frac{d^2w}{dr^2}\right), \tag{47}$$

$$T_r = -\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{d^2\varphi}{dr^2}+\frac{1}{r}\frac{d\varphi}{dr}-\frac{\varphi}{r^2}\right)=-$$

$$-\frac{Eg^3}{12(1-\mu^2)}\left(\frac{d^3w}{dr^3}+\frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2}-\frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right),$$

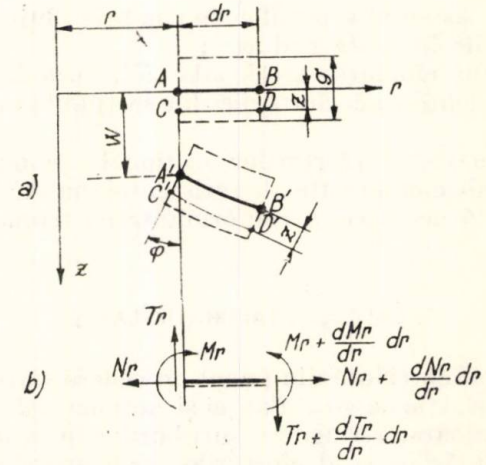


Fig. 8

obținute prin studiul aspectului geometric, fizic și static, analizate pe un element infinit mic. Valoarea rotirii într-un punct curent al plăcii (fig. 8*a*) este

$$\varphi = \frac{dw}{dr} \tag{48}$$

Sub acțiunea sarcinilor simetrice din planul plăcii apar eforturile secționale N_r, N_θ [7], [8], care se exprimă în funcție de deplasarea după rază $u = u(r)$ prin relațiile

$$N_r = \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{du}{dr} + \mu\frac{u}{r}\right),$$
$$N_\theta = \frac{Eg}{1-\mu^2}\left(\frac{u}{r} + \mu\frac{du}{dr}\right), \tag{49}$$

În figura 8*b* sînt indicate semnele pozitive ale eforturilor secționale N_r, M_r, T_r; N_θ este pozitiv cînd este de întindere, iar M_θ cînd întinde partea inferioară a plăcii (subliniată punctat în figura 8*b*).

Eforturile secționale se constituie într-o matrice-coloană:

$$\{N\} = \{N_r\ N_\theta\ M_r\ M_\theta\ T_r\},^T \tag{50}$$

denumită vectorul eforturilor, și deplasările de asemenea într-o matrice coloană:

$$\{\delta\} = \{u\ w\ \varphi\}^T, \tag{51}$$

denumită vectorul deplasărilor (indicele superior T indică transpunerea).

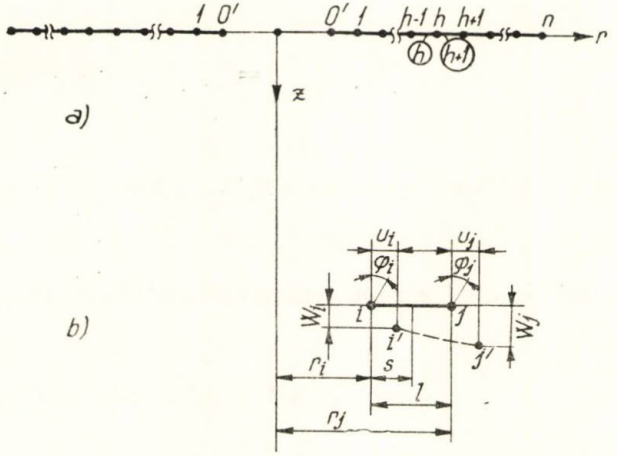


Fig. 9

Se împarte placa în elemente finite, care, datorită simetriei, se reduc la segmente după rază (dig. 9*a*). Acestea se notează cu indicele rostului din dreapta pentru observatorul așezat pe axa z cu mîna dreaptă

spre sensul pozitiv al axei r. Astfel elementul h va fi cuprins între nodurile $h-1$ și h (fig. 9*a*).

Alegînd un element finit $i-j$ oarecare (i în stînga și j în dreapta) de lungime l, deplasările de la capete (fig. 9*b*),

$$\{\delta_i\} = \{u_i\ w_i\ \varphi_i\}^T;\ \{\delta_j\} = \{u_j\ w_j\ \varphi_j\}^T, \tag{52}$$

vor forma vectorul-coloană

$$\{\delta\}^e = \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix}, \tag{53}$$

Deplasările u, w într-un punct curent s al elementului constituite în vectorul

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix}, \tag{54}$$

denumit funcția deplasărilor, se vor exprima în funcție de deplasările de la capete, care vor fi luate drept necunoscute ale problemei.

3.1.1. *Funcția deplasărilor.* Componentele u, w dependente de parametrul s (fig. 9*b*) și de șase constante, întrucît la capete se consideră cunoscute cele șase componente ale vectorului (53), se aleg sub forma

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 s,$$

$$w = \alpha_3 + \alpha_4 s + \alpha_5 s^2 + \alpha_6 s^3.$$

Procedînd în mod identic ca la punctul 2.1, se determină $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \ldots, \alpha_6$ în funcție de $\{\delta_i\}$, $\{\delta_j\}$ și, ținînd seama de (54), de (53) și de notația (7), se obține

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} u \\ w \end{Bmatrix} =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1-s' & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & l(s'-2s'^2+s'^3 & 0 & 3s'^2-2s'^3 & l(-s'^2+s'^3 \end{array}\right] \begin{Bmatrix} \delta_i \\ \delta_j \end{Bmatrix} = \tag{55}$$

$$= [H]\{\delta\}^e,$$

care reprezintă funcția deplasărilor pentru elementul considerat e. Notînd

$$[H_i] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1-s' & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & l(s'-2s'^2+s'^3) \end{array}\right], \tag{56}$$

$$[H_j] = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3s'^2-2s'^3 & l(-s'^2+s'^3 \end{array}\right], \tag{57}$$

matricea de transformare $[H]$ se scrie sub forma

$$[H] = [H_i\ H_j]. \tag{58}$$

3.1.2. *Exprimarea eforturilor secționale în funcție de deplasările nodurilor.* Aranjînd eforturile secționale (49), (47) în ordinea indicată de (50) și notînd

$$\{\varepsilon\} = \left\{\frac{du}{dr}, \frac{u}{r}, -\frac{d^2w}{dr^2}, -\frac{1}{r}\frac{dw}{dr}, -\left(\frac{d^3w}{dr^3} + \frac{1}{r}\frac{d^2w}{dr^2} - \frac{1}{r^2}\frac{dw}{dr}\right)\right\}^T, \tag{59}$$

vectorul deformațiilor specifice, și

$$[D] = \frac{Eg}{1-\mu^2}\begin{bmatrix} 1 & \mu & 0 & 0 & 0 \\ \mu & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g^2/12 & \mu g^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & \mu g^2/12 & g^2/12 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & g^2/12 \end{bmatrix}, \tag{60}$$

matricea elementelor elastice și geometrice, rezultă vectorul eforturilor secționale (50) sub forma

$$\{N\} = [D]\{\varepsilon\}. \tag{61}$$

Explicitînd componentele vectorului deformațiilor specifice (59) în funcție de deplasările nodurilor $\{\delta\}$ prin intermediul funcției deplasărilor (55) și notînd

$$[B_i] = \left[\begin{array}{c|c} -1/l & 0 \\ (1-s')/l & 0 \\ 0 & 6(1-2s')/l^2 \\ 0 & 6s'(1-s')/lr \\ 0 & 6(1-2r/l)/l^2 r + 6s'(s'-2r/l-1)/lr^2 \end{array}\right. \tag{62}$$

$$\left.\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 2(2-3s')/l \\ -(1-4s'+3s'^2)/r \\ (4-6r/l+l/r)/lr + s'(3s'l/r - 4l/r - 6)/lr \end{array}\right],$$

$$[B_j] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1/r & 0 \\ 0 & -6\,(1-2s')/l^2 \\ 0 & -6s'\,(1-s')/lr \\ 0 & 6\,(2r/l-1)/l^2r + 6s'\,(1+2r/l-s')/lr^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2\,(1-3s')l, \\ s'\,(2-3s')/r \\ 2\,(1-3r/l)/lr + s'/3s' - 2 - 6r/l)/r^2 \end{bmatrix}, \tag{63}$$

$$[B] = [B_i\ B_j], \tag{64}$$

se obține

$$\{\varepsilon\}^e = [B]\,\{\delta\}^e. \tag{65}$$

Introducînd (65) în (61), rezultă eforturile secționale în funcție de deplasări:

$$\{N\} = [D]\,[B]\,\{\delta\}^e. \tag{66}$$

Cu ajutorul acestei relații se pot determina eforturile secționale în orice punct al elementului considerat prin particularizarea corespunzătoare a matricei $[B]$, în care variabile sînt atît s', cît și $r = r_i + ls'$.

3.2. STABILIREA ECUAȚIILOR DE CONDIȚIE PENTRU DETERMINAREA NECUNOSCUTELOR

Placa se consideră împărțită în elemente finite ca în figura 9*a*. Zonele de separație dintre elemente sînt denumite noduri. Pe fiecare element acționează un sistem de sarcini, notat sub forma

$$\{p\} = \{p_r,\ p_z\}^T. \tag{67}$$

Procedînd în mod identic ca la paragraful 2.3, se analizează separat echilibrul fiecărui element finit și echilibrul fiecărui nod. Din echilibrul fiecărui element finit, cu ajutorul teoremei lucrului mecanic virtual, se determină la capetele elementului un sistem de forțe nodale:

$$\{F\}^e = [k]^e\,\{\delta\}^e - \{F\}_p^e, \tag{68}$$

unde

$$[k]^e = \int_{r_i}^{r_j} [B]^T [D] [B] 2\pi r dr \tag{69}$$

reprezintă matricea de rigiditate a elementului și

$$\{F\}_p^e = \int_{r_i}^{r_j} [H]^T \{p\} 2\pi r \, dr \tag{70}$$

vectorul forțelor nodale al sarcinilor exterioare.

În expresiile (69), (70), matricea $[B]$ se calculează cu formula (64), matricea $[D]$ cu (60) și matricea $[H]^T$ pornind de la (58).

Se observă că forțele nodale (68) cuprind aceleași elemente ca în cazul forțelor nodale (35) de la calculul gîtului flanșei și au aceleași semnificații. Expresiile lor, deși s-au notat cu aceleași simboluri, sînt însă diferite. S-a preferat folosirea acelorași notații pentru scurtarea expunerii acestui capitol prin utilizarea directă a unor rezultate finale din paragraful 2.3. Astfel, submatricea $[k_{ij}]$ a matricei (69), folosind direct pe (37), este

$$[k_{ij}]^e = \int_{r_i}^{r_j} [B_i]^T [D] [B_j] 2\pi r \, dr. \tag{71}$$

În acest caz se folosește variabila $dr = l ds' = ds$, $[B_i]$ este dat de (62), $[B_j]$ de (63) și $[D]$ de (60).

Din echilibrul nodurilor (vezi 2.3.2) se obține sistemul ecuațiilor de condiție

$$[k_{h,h-1}]^h \{\delta_{h-1}\} + ([k_{hh}]^h + [k_{hh}]^{h+1}) \{\delta_h\} + [k_{h,h+1}]^{h+1} \{\delta_{h+1}\} - (\{F_h\}_p^h + \{F_h\}_p^{h+1}) = 0$$

$$(h = 1, 2, \ldots, n), \tag{72}$$

identic ca scriere cu (39), în care coeficienții și termenii liberi au expresii similare cu (41)—(43), respectiv cu (44):

$$[k_{h,h-1}]^h = \int_{r_{h-1}}^{r_h} [B_j]^T [D] [B_i] 2\pi r \, dr, \tag{73}$$

$$[k_{hh}] = [k_{hh}]^h + [k_{hh}]^{h+1} = \int_{r_{h-1}}^{r_h} [B_j]^T [D] [B_j] 2\pi r \, dr +$$

$$+ \int_{r_h}^{r_{h+1}} [B_i]^T [D] [B_i] 2\pi r \, dr, \tag{74}$$

$$[k_{h,h+1}]^{h+1} = \int_{r_h}^{r_{h+1}} [B_i]^T [D] [B_j] 2\pi r \, dr, \tag{75}$$

$$\{F_h\}_p = \{F_h\}_p^h + \{F_h\}_p^{h+1} = \int_{r_{h-1}}^{r_h} [H_j]^T \{p\} 2\pi r \, dr + \int_{r_h}^{r_{h+1}} [H_i]^T \{p\} 2\pi r \, dr \tag{76}$$

În aceste expresii, matricele $[H_i]$, $[H_j]$, $[D]$, $[B_i]$ şi $[B_j]$ sînt date în ordine de (56), (57), (60), (62), şi (63). În cazul elementelor cu secţiune variabilă, matricea $[D]$ se calculează cu grosimea medie a elementului respectiv.

Cînd în nodurile reţelei de elemente finite se aplică forţe şi cuple concentrate

$$\{P_h\}_p = \{P_{h,r},\ P_{h,z}\mathfrak{M}_{h,\varphi}\}^T, \tag{77}$$

atunci termenul liber al ecuaţiei (72) devine

$$\{L_h\} = \{F_h\}_p + \{P_h\}_p \tag{78}$$

şi întregul sistem de ecuaţii se scrie sub forma

$$[K]\{\delta\} - \{L\} = 0, \tag{79}$$

unde $[K]$, reprezintă matricea caracteristică a întregului sistem, $\{\delta\}$ vectorul tuturor necunoscutelor şi $\{L\}$ vectorul tuturor termenilor liberi, al cărui componente se calculează cu (78) sau numai cu (76).

Se precizează că placa trebuie să aibă cel puţin un contur de rezemare. Acesta va fi ales totdeauna şi ca nod al reţelei de elemente finite. Condiţiile în deplasări, rotiri şi eforturi cunoscute pe conturul de rezemare şi pe marginile plăcii cînd acestea nu sînt şi contururi de rezemare conduc la structurarea unică a sistemului (79). Din rezolvarea sistemului se obţin deplasările nodurilor, după care cu expresia (66) se calculează eforturile în orice secţiune.

Referitor la caracteristicile sistemului (79), la modalităţile de rezolvare şi la avantajele algoritmului întocmit pe baza elementelor finite se păstrează în întregime observaţiile şi concluziile menţionale la punctul 2.4 de la calculul gîtului flanşei. În plus se precizează că formuelele stabilite pentru coeficienţii ecuaţiilor de condiţie (79) nu depind de poziţia şi de numărul contururilor de rezemare cînd acestea se află în nodurile reţelei. În acest fel, faţă de metoda cunoscută a integrării ecuaţiei diferenţiale pe fiecare interval de variaţie continuă a încărcării, procedeul expus, prin elementele finite, prezintă avantajul unei formulări unice, în care termenii se calculează cu relaţii de recurenţă, iar condiţiile impuse de fiecare contur de rezemare se introduc direct în alcătuirea sistemului de ecuaţii. În consecinţă, atît volumul de muncă pentru alcătuirea algoritmului şi a programului pentru un calculator cifric, cît şi timpul efectiv de lucru al calculatorului sînt mai reduse decît în cazul aplicării altor procedee cunoscute, mai ales pentru plăci cu secţiune variabilă încărcate oricum şi cu mai multe contururi de rezemare.

4. ASAMBLAREA GÎTULUI FLANŞEI CU TALERUL EI

Legătura dintre gîtul flanşei cu talerul ei se realizează prin elementul O (fig. 3*b*). Secţiunile acestuia din O_1 şi O' (fig. 10) trebuie să aibă aceleaşi deformaţii ca secţiunile corespunzătoare de pe elementul *1* al gîtului, respectiv *1'* al talerului. În figura 10 s-au indicat şi forţele exterioare care solicită direct elementul O (nu s-au indicat forţele de legătură din O_1 şi O').

Din echilibrul elementului *1* al gîtului, prin particularizarea relației (35), se obțin forțele nodale de la capătul O_1 (pe elementul *1*) sub forma

$$\{F_{0_1}\}^1 = [k_{0_1,0_1}]^1 \{\delta_{0_1}\} + [k_{0_1,1}]^1 \{\delta_1\} - \{F_{0_1}\}^1_p, \tag{80}$$

în care $[k_{0_1,1}]^1$ se determină cu formula (43), $[k_{0_1,0_1}]^1$ cu formula (42), din care se ia numai al doilea termen, și $\{F_{0_1}\}^1_p$ cu formula (44), din care de asemenea se reține numai termenul al doilea.

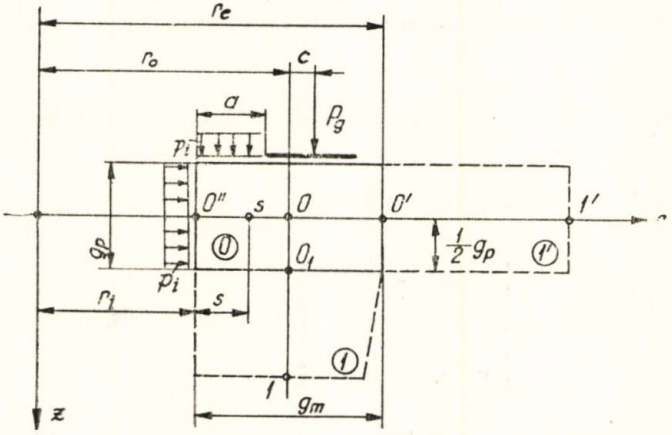


Fig. 10

Considerînd elementul *O* ca făcînd parte din placă, deplasările nodurilor *O''* și *O'* (cu cîte trei componente vezi 51) formează vectorul

$$\{\delta\}^0 = \begin{Bmatrix} \delta_{0''} \\ \delta_{0'} \end{Bmatrix}, \tag{81}$$

în funcție de care, cu ajutorul formulei (66), se determină eforturile secționale în orice punct al axei elementului.

Pornind de la funcția (55), într-un punct curent *S* al elementului *O* (fig. 10) se definește vectorul-deplasare:

$$\{\delta_s\}^0 = \begin{Bmatrix} u_s \\ w_s \\ \varphi_s \end{Bmatrix}^0 =$$

$$= \left[\begin{array}{c|c|c|c|c|c} 1-s' & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-3s'^2+2s'^3 & l(s'-2s'^2+s'^3) & 0 & 3s'^2-2s'^3 & l(-s'^2+s'^3) \\ 0 & 6(-s'+s'^2)/l & 1-4s'+s'^2 & 0 & 6(s'-s'^2)/l & -2s'+3s'^2 \end{array}\right] \{\delta\}^0, \tag{82}$$

în care φ_s se calculează din w cu (48); $s' = s/l$; $l = g_m$.

În mijlocul elementului, punctul O, vectorul-deplasare $\{\delta_0\}^0$, obținut prin particularizarea $s' = \frac{l}{2}$ în (82), se aranjează sub forma

$$\{\delta_0\}^0 = \{u_0 w_0 \varphi_0\}^T = [d_{0''} d_{0'}] \{\delta\}^0 = [d] \{\delta\}^0, \tag{83}$$

în care matricele $[d_{0''}]_{3\times 3}$, $[d_{0'}]_{3\times 3}$ conțin primele, respectiv ultimele trei coloane ale matricei de transformare din (82).

Pe baza ipotezei normalelor drepte, componentele vectorului $\{\delta_{0_1}\}$ se exprimă în funcție de componentele vectorului $\{\delta_0\}^0$ prin relațiile evidente

$$u_{0_1} = u_0 - \varphi_0 \cdot \frac{1}{2} g_p ; \qquad w_{0_1} = w_0 ; \qquad \varphi_{0_1} = \varphi_0 ,$$

care, transpuse matriceal, conduc la

$$\{\delta_{0_1}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\frac{1}{2} g_p \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \{\delta_0\}^0 = [e] \{\delta_0\}^0, \tag{84}$$

unde matricea de transformare $[e]_{3\times 3}$ se identifică cu ușurință. Introducînd (83) în (84) , se obține

$$\{\delta_{0_1}\} = [G] \{\delta\}^0, \tag{85}$$

în care

$$[G] = [e] [d] = [G_{0''} G_{0'}] \tag{86}$$

reprezintă o matrice de transformare 3×6, care se descompune în matricele $[G_{0''}]$, $[G_{0'}]$, care conțin primele, respectiv ultimele trei coloane ale lui $[G]$.

Înlocuind (85), în (80) și schimbînd semnul întregii relații, rezultă vectorul

$$\{F_{0_1}\} = [k_{0_1.0_1}]^1 [G] \{\delta\}^0 + [k_{0_1.1}]^1 \{\delta_1\} - \{F_{0_1}\}_p^1, \tag{87}$$

care reprezintă acțiunea elementului *1* asupra elementului *O* și pentru acesta din urmă intră în categoria forțelor exterioare.

Dînd un sistem de deplasări virtuale $\{\delta^*\}^0$ similar cu deplasările reale ale elementului (81), se calculează :

— lucrul mecanic al eforturilor,

$$\overline{L}_{ef} = \iint (\{\varepsilon^*\}^0)^T \{N\} \, dA = (\{\delta^*\}^0)^T \int_{r_i}^{r_e} [B]^T [D] [B] \{\delta\}^0 \, 2\pi r \, dr =$$

$$= (\{\delta^*\}^0)^T [k]^0 \{\delta\}^0, \tag{h}$$

pe baza relaţiilor (65), (66), (68), (69), şi

— lucrul mecanic virtual a forţelor exterioare,

$$\overline{L}_{ex} = (\{\delta^*\}^0)^T \{F\}^\circ + \int \{f^*\}^T \{p\}\, 2\pi r\, dr + \{\delta^*_{0_1}\}^T \{F_{0_1}\}, \qquad (i)$$

unde $\{F\}^\circ$ reprezintă forţele nodale din O'' şi O' necesare pentru echilibrul elementului o, iar $\{p\}$ se referă la toate sarcinile exterioare aplicate pe element (fig. 10). Ţinînd seama de (55) şi de particularităţile diferite ale sarcinii interioare p_i şi ale reacţiunii garniturii, care se ia ca o forţă concentrată în planul elementului, termenul al doilea din (i) se scrie sub forma

$$\int \{f^*\}^T \{p\}\, 2\pi r\, dr = (\{\delta^*\}^0)^T \left(\int_{r_i}^{r_i+a} [H]^T \{p_i\}\, 2\pi r\, dr + [H_g]^T \{P_g\}\, 2\pi r_g \right), \qquad (j)$$

în care $[H_g]$ reprezintă matricea (58) particularizată pentru poziţia razei garniturii $r_g = r_0 + c$ (fig. 10).

Aplicînd teorema lucrului mecanic virtual (29), adică egalînd (h) cu (i), ţinînd seama de (j), (80), (85) — (87) şi notînd

$$\{F\}^0_p = \begin{Bmatrix} F_{0''} \\ F_{0'} \end{Bmatrix}^0_p = \int_{r_i}^{r_i+a} [H]^T \{p_i\}\, 2\pi r\, dr, \qquad (88)$$

$$\{\overline{F}\}^0_p = \begin{Bmatrix} \overline{F}_{0''} \\ \overline{F}_{0'} \end{Bmatrix}^0_p = \{F\}^0_p + [G]^T \{F_{0_1}\}^1_p, \qquad (89)$$

$$\{F\}^0_g = \begin{Bmatrix} F_{0''} \\ F_{0'} \end{Bmatrix}^0_g = [H_g]^T \{P_g\}\, 2\pi r_g = [H_g]^T \{P_g\}, \qquad (90)$$

$$[\overline{k}]^0_{6\times 6} = \begin{bmatrix} \overline{k}_{0'',0''} & \overline{k}_{0'',0'} \\ \overline{k}_{0',0''} & \overline{k}_{0',0'} \end{bmatrix} = [k]^0 + [G]^T [k_{0_1 0_1}]^1 [G], \qquad (91)$$

$$[\overline{k}_{0,1}]_{6\times 3} = \begin{bmatrix} \overline{k}_{0'',1} \\ \overline{k}_{0',1} \end{bmatrix} = [G]^T [k_{0_1,1}]^1, \qquad (92)$$

se obţin forţele nodale ale elementului O:

$$\{F\}^0 = \begin{Bmatrix} F_{0''} \\ F_{0'} \end{Bmatrix}^0 = [\overline{k}]^0 \{\delta\}^0 + [\overline{k}_{0,1}] \{\delta_1\} - \{\overline{F}\}^0_p - \{F\}^0_g. \qquad (93)$$

Întrucît reacţiunea garniturii depinde de deformabilitatea ei, se poate scrie

$$\{\overline{P}\}_g = [k_g] \{f_g\}, \qquad (l)$$

unde $\{f_g\}$ este funcția deplasărilor (55), particularizată pentru raza garniturii, iar

$$[k_g] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2E_g b_g/h_g \end{bmatrix} 2\pi r_g \tag{94}$$

matricea de rigiditate a garniturii, în care b_g, h_g sînt lățimea, respectiv grosimea garniturii și E_g modulul de elasticitate al garniturii (la calculul rigidității s-a luat jumătate din grosimea garniturii, deoarece planul median al acesteia nu suferă deplasări).

Ținînd seama de (55) și (94), relația (l) devine

$$\{P\}_g = [k_g]\,[H_g]\,[\{\delta\}^0. \tag{95}$$

Introducînd aceasta în (90) apoi în (93) și notînd

$$[\bar{k}]^g = [H_g]^T\,[k_g]\,[H_g], \tag{96}$$

care este o matrice 6×6, se obțin forțele nodale sub forma

$$\{F\}^0 = \begin{Bmatrix} F_{0''} \\ F_{0'} \end{Bmatrix} = ([\bar{k}]^0 - [\bar{k}]^g)\,\{\delta\}^0 + [\bar{k}_{0,1}]\,\{\delta_1\} - \{\bar{F}\}^0_p\,. \tag{97}$$

Condițiile de echilibru ale nodurilor o'' și o' fiind

$$\begin{aligned} \{F_{0''}\}^0 &= 0, \\ \{F_{0'}\}^0 + \{F_{0'}\}^{1'} &= 0, \end{aligned} \tag{m}$$

în care $\{F_{0''}\}^0$, $\{F_{0'}\}^0$ se obțin din (97), iar $\{F_{0'}\}^{1'}$ din (68) particularizată pentru elementul $1'$ al plăcii (fig. 3 *b*, *c*), rezultă ecuațiile

$$[\bar{k}_{0'',1}]\,\{\delta_1\} + ([\bar{k}_{0'',0''}]^0 - [\bar{k}_{0'',0''}]^g)\,\{\delta_{0''}\} + ([\bar{k}_{0'',0'}]^0 - [\bar{k}_{0'',0'}]^g)\,\{\delta_{0'}\} - \{\bar{F}_{0''}\}^0_p = 0, \tag{98}$$

$$[\bar{k}_{0',1}]\,\{\delta_1\} + ([\bar{k}_{0',0''}]^0 - [\bar{k}_{0',0''}]^g)\,\{\delta_{0''}\} + ([\bar{k}_{0',0'}]^0 - [\bar{k}_{0',0'}]^g + [\bar{k}_{0',0'}]^{1'})\,\{\delta_{0'}\} + [k_{0',1'}]^{1'}\,\{\delta_{1'}\} - (\bar{F}_{0'})^0_p + \{F_{0'}\}^{1'}_p = 0 \tag{99}$$

În consecință, asamblarea gîtului flanșei cu talerul ei constă în adăugarea la ecuațiile de condiție pentru nodurile 1, 2, ..., n de pe gît și pentru nodurile $1'$, $2'$, ... n' de pe taler a ecuațiilor de condiție (85), (98) și (99). Se obține în acest fel un sistem de $(n + n' + 3)$ vectori necunoscuți cu tot atîtea ecuații.

După determinarea necunoscutelor și a deplasărilor nodurilor se calculează eforturile cu (26) pe gît și cu (66) pe placă, care se folosește și pentru elementul O (fig. 10).

Pentru obținerea ecuațiilor (85), (98) și (99) se putea adopta și un alt procedeu, bazat pe studiul echilibrului și al deformațiilor elementului o, considerat ca un inel [5]. Procedeul utilizat însă, avînd aceeași structură cu modul de tratare al părților principale, gît și placă, contribuie la unitatea lucrării și, în plus, permite introducerea într-o formă simplă și generală a influenței deformabilității garniturii.

5. CONCLUZII

a. În metodele cunoscute pentru calculul îmbinărilor cu flanșe se procedează, de regulă, astfel: se descompune îmbinarea în manta, gît și taler, introducîndu-se forțele de legătură corespunzătoare; se determină suprafața mediană deformată a fiecărei părți componente prin integrarea unor ecuații diferențiale și scrierea condițiilor de continuitate; se calculează apoi eforturile finale pe baza soluțiilor ecuațiilor diferențiale și a valorilor obținute pentru forțele de legătură. Metodele se diferențiază între ele, în principal, prin modul de stabilire și de rezolvare a ecuațiilor diferențiale care intervin și, în unele cazuri, prin introducerea unor ipoteze simplificatoare. Aplicarea lor concretă întîmpină dificultăți, datorită volumului mare de calcule și algoritmelor de alcătuire, care nu permit o programare ușoară la calculatoarele cifrice sau analogice.

b. Metoda de calcul propusă în această lucrare, bazată pe descompunerea părților componente ale flanșei în elemente finite și pe studiul echilibrului fiecărui element finit și al fiecărui nod de legătură dintre elemente, prezintă un algoritm simplu cu operații ciclice, a cărui programare la calculatoarele cifrice este ușoară. De asemenea, datorită particularităților matricei sistemului de ecuații la care se ajunge, rezolvarea acestuia, chiar în cazul unui număr mare de necunoscute, va necesita calculatorului cifric un timp de lucru redus. În plus este posibilă și o rezolvare a sistemului de ecuații prin iterații pe o schemă similară cu cea de la rezolvarea grinzilor continui.

c. Metoda de calcul prezentată este generală și se aplică sub aceeași formă la toate tipurile de flanșe. Ea ține seama concomitent atît de deformabilitatea flanșelor, cît și de cea a garniturii. În acest fel se elimină ipotezele simplificatoare, întîlnite la multe metode cunoscute, referitoare la punctul în jurul căruia se produce rotirea flanșei.

Metoda permite de asemenea luarea în considerație a deformabilității șuruburilor. Acest fapt nu modifică algoritmul general, ci numai condiția de echilibru pentru nodul în care se aplică forța din șurub.

Un avantaj al metodei prezentată îl constituie și faptul că algoritmul necesită relativ puține date inițiale de introdus în calculatorul cifric.

d. Algoritmele dezvoltate pentru gîtul flanșei (cap. 2) și pentru placa acesteea (cap. 3) pot fi folosite și indepedent pentru calculul în teoria de momente a unor învelișuri conice sau cilindrice, respectiv a unor plăci circulare încărcate simetric.

e. Elementele finite în care se împarte imaginar placa pot avea dimensiuni diferite; ele se aleg mai mici în zonele în care eforturile au variații mai bruște. În acest fel, rezultatele se pot obține cu precizia dorită în orice secțiune a flanșei.

Faţă de metoda diferenţelor finite, în care, de regulă, se folosesc reţele cu acelaşi pas şi condiţiile la limită se introduc în mod aproximativ prin utilizarea unor puncte din afara conturului real al suprafeţei considerate metoda prezentată este superioară prin simplitatea algoritmului, prin uşurinţa de introducere a condiţiilor la limită şi mai ales prin exactitatea rezultatelor.

Primită la redacţie la 14 aprilie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. E. L. Brownell, H. E. Young, *Process equipment design*, Londra, 1959.
2. Şt. Teodorescu, *Construcţia şi calculul mecanic al aparaturii statice din instalaţiile de prelucrare a ţiţeiului şi petrochimice Bucureşti*, Litografia Învăţămîntului, 1956.
3. M. Renert, G. Tănase, *Calculul şi construcţia utilajului chimic*, vol. I, ed. a 2-a, Bucureşti, Edit. didactică şi pedagogică, 1964.
4. O. C. Zienkiewicz, *The finite element method in structural and continuum mechanics*, Londra, 1967.
5. R. Amon şi colab., *Circular plate with suported edge-beam*, Journal of the engineering mechanics division, june 1968.
6. P. Mazilu, *Statica construcţiilor*, vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică 1959.
7. S. D. Ponomariov şi colab., *Calculul de rezistenţă în construcţia de maşini*, vol. II, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
8. Gh. Buzdugan, *Rezistenţa materialelor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1970.

RUPEREA ELEMENTELOR ÎNCOVOIATE DIN BETON UȘOR CU GRANULIT, ARMATE CU BARE NETEDE (OB 38) ȘI CU PROFIL PERIODIC (PC 52)

de I. TERTEA și TR. ONEȚ
Institutul politehnic Cluj

Ținînd seama de valorile-limită ale deformațiilor betonului ușor și de condițiile specifice de solicitare a armăturii în elementele din beton ușor armat, se stabilesc procentele maxime de armare pentru secțiunile dreptunghiulare simplu armate, întocmindu-se tabele care pot fi folosite în proiectarea curentă.

1. OBIECTUL CERCETĂRII

Într-un studiu anterior [5] am relevat faptul că, în momentul ruperii grinzilor din beton ușor cu procente mici de armare, efortul de întindere din armătură depășește limita sa de curgere.

Avînd în vedere că deformabilitatea mai mare a betonului ușor în comparație cu a celui greu poate conduce la manifestarea fenomenului de hiperrezistență a oțelului (înțelegînd prin aceasta solicitarea oțelului în domeniul de consolidare), *studiul de față urmărește comportarea la rupere a elementelor încovoiate din beton ușor, armate cu bare netede (OB 38) și cu profil periodic (PC 52), cuprinzînd toată gama procentelor de armare* ($0 < \mu \leqslant \mu_{max}$).

2. PROGRAMUL DE EXPERIMENTARE

2.1. *Elementele experimentale*, sub formă de grinzi cu secțiune dreptunghiulară simplu armată, au avut dimensiunile de $15 \times 30 \times 320$ cm (fig. 1) și au fost armate cu bare cu profil periodic (seria 1) și cu bare netede (seria 2) sub formă de carcase sudate (fig. 2). Procentele de armare ale grinzilor au variat între 0,07 și 2,32% pentru seria 1 și între 0,07 și 2,82% pentru seria 2 (tabela 1).

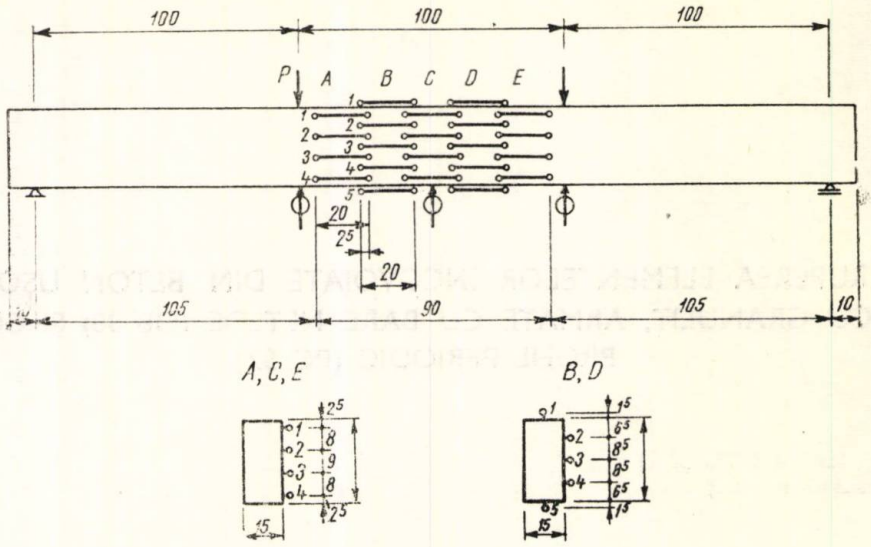


Fig. 1. — Grinzile experimentale şi echiparea lor.

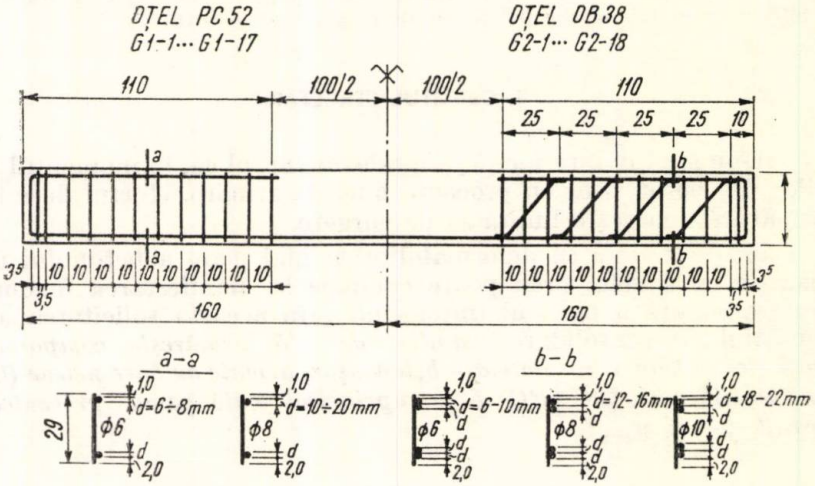


Fig. 2. — Armarea grinzilor.

Betonul din care s-au realizat elementele experimentale a avut următoarea compoziţie (pentru 1 m³):

— ciment PZ 400 . . . . . .315 kg,
— apă . . . . . .250 l,
— nisip de rîu (0—3) . . . . . .320 kg,
— granulit de Mureşeni (0—3) . . . . . .255 kg,
(3—7) . . . . . .195 kg,
(7—15) . . . . . .515 kg.

Tabela 1

Caracteristicile grinzilor experimentale

Indicativul grinzilor		Numărul şi diametrul barelor	A_a cm²	h_0 cm	μ %	Vîrsta betonului (zile)	
seria 1	seria 2					seria 1	seria 2
1	2	3	4	5	6	7	8
G1–1	G2–1	1 Ø 6	0,28	27,7	0,07	32–35	30
G1–2	G2–2	2 Ø 6	0,57	27,7	0,14	31–33	30
G1–3	G2–3	3 Ø 6	0,85	27,7	0,20	34–35	27
G1–4	G2–4	2 Ø 8	1,01	27,6	0,24	34–38	27
G1–5	G2–5	1 Ø 6	1,29	27,6	0,31	38–40	30
G1–6	G2–6	2 Ø 10	1,57	27,5	0,38	32	30
G1–7	G2–7	2 Ø 12	2,26	27,4	0,55	31–37	30
G1–8	G2–8	3 Ø 10	2,36	27,5	0,57	31–34	30
G1–9	G2–9	2 Ø 14	3,08	27,3	0,75	31–34	30
G1–10	G2–10	3 Ø 12	3,39	27,4	0,82	31–34	30
G1–11	G2–11	2 Ø 16	4,02	27,2	0,98	31–33	30
G1–12	G2–12	3 Ø 14	4,62	27,3	1,13	31–34	31
G1–13	G2–13	2 Ø 18	5,09	27,1	1,25	31–33	29
G1–14	G2–14	3 Ø 16	6,03	27,2	1,48	32–34	29
G1–15	G2–15	2 Ø 20	6,28	27,0	1,55	34–35	31
G1–16	G2–16	3 Ø 18	7,63	27,1	1,88	37	31
G1–17	G2–17	3 Ø 20	9,42	27,0	2,32	34–38	28
–	G2–18	3 Ø 22	11,40	26,9	2,82	–	28

Notă. Indicativele din seria 1 cuprind cîte două elemente identice, iar cele din seria 2 cîte un element.

Încercările de control asupra betonului la vîrsta la care au fost încercate grinzile au arătat următoarele rezultate :

	Seria 1	*Seria 2*
— rezistența la compresiune :		
(kgf/cm²)		
— minimă	170,	220,
— maximă	280,	268,
— medie . . .	215,	247,

— densitatea aparentă a betonului :

(kg/m³)		
— minimă	1590,	1695,
— maximă	1870,	1810,
— medie	1726,	1728.

Oţelul folosit la confecţionarea armăturilor a avut următoarele caracteristici :

	PC 52	OB 38
— limita de curgere (kgf/mm²)	30—46	22—32
— rezistenţa de rupere (kgf/mm²)	40—59	36—45.

Menţionăm faptul că oţelul OB 38 a prezentat un palier de curgere foarte redus, astfel încît alura curbei caracteristice a fost asemănătoare cu cea a oţelului PC 52.

Executarea grinzilor experimentale s-a făcut în cofraje de lemn căptuşite cu tablă, compactarea betonului făcîndu-se prin vibrare. Grinzile au fost păstrate în regim mixt : 6 zile în mediu umed, iar restul în aer.

2.2. *Încercarea grinzilor* s-a făcut cu o maşină hidraulică universală (fig. 3). Echiparea grinzilor (fig. 1 şi 3) s-a făcut cu comparatoare cu pre-

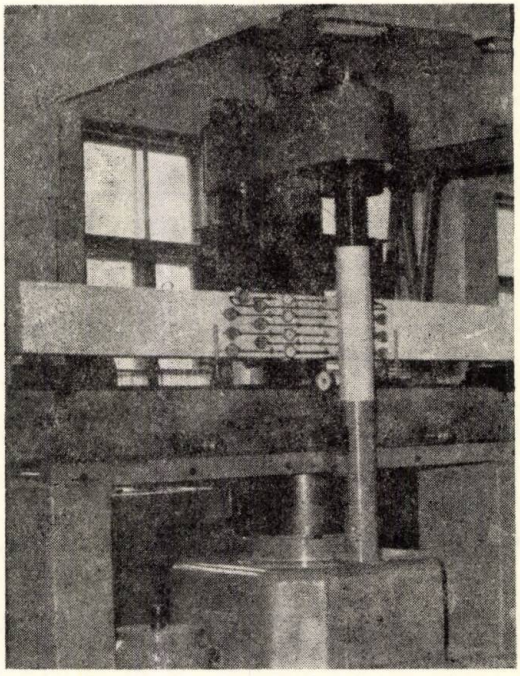


Fig. 3. — Încercarea elementelor experimentale.

cizia de 0,01 şi 0,001 mm pentru măsurarea deformaţiilor pe înălţimea secţiunii şi cu comparatoare sau fleximetre Maximov (precizia 0,1 mm) pentru măsurarea săgeţilor. Numărul mare de comparatoare pentru măsurarea deformaţiilor pe înălţimea secţiunii grinzii a fost impus de necesitatea acoperirii cu aparate de măsură a întregii zone din grindă

cu moment încovoietor constant, dată fiind variabilitatea posibilă a calității betonului pe această zonă.

Încărcarea s-a aplicat în trepte de 1/10 din sarcina prezumtivă de rupere a grinzilor.

3. REZULTATELE EXPERIMENTALE ȘI INTERPRETAREA LOR

Ruperea elementelor de beton armat cu procente mici și mijlocii de armare sub acțiunea momentului încovoietor începe prin curgerea armăturii întinse (la o valoare a momentului încovoietor M_c) și se termină prin strivirea betonului din zona comprimată a secțiunii (la o valoare a momentului încovoietor M_r). Intervalul dintre cele două valori ale momentului încovoietor corespunde solicitării armăturii în domeniul de consolidare și este cu atît mai mare, cu cît procentul de armare este mai redus.

Momentele încovoietoare deduse pe cale experimentală la intrarea în curgere a armăturii (M_c^e) și la strivirea betonului (M_r^e) sînt date în tabelele 2 și 3. Raportul dintre ele (coloana 8) a variat între 0,65 și 1,00. Primele două grinzi din fiecare serie avînd procentul de armare sub cel minim [5] pot fi considerate ca elemente din beton simplu.

Pentru comparație s-au dat în tabelele 2 și 3 valorile momentelor încovoietoare calculate după STAS 8000-67 [3] (notate cu M_c^s) și după Recomandările CEB [2] (notate cu M_r^c), potrivit distribuției de eforturi unitare din figura 4. Luarea în considerare a fenomenului de hiperrezistență a oțelului în cel de-al doilea caz s-a făcut prin multiplicarea limitei de curgere a oțelului (σ_c) cu un coeficient K_a:

$$\sigma_{au} = K_a \sigma_c, \tag{1}$$

pentru care CEB recomandă [1] o relație empirică valabilă pentru betonul greu:

$$K_a = 1{,}28 - \frac{\sigma_{0.2}}{50\,000} - 0{,}45\,\frac{\sigma_{0.2}}{R_{cil}}\,\mu. \tag{2}$$

În figura 5 se prezintă variația raportului dintre momentele încovoietoare experimentale și cele calculate [3] în funcție de valoarea procentului de armare.

Din analiza rezultatelor obținute reiese că momentele încovoietoare experimentale la intrarea în curgere a armăturii sînt, după cum e și firesc, foarte apropiate de cele calculate după STAS 8000-67. Diferența dintre cele două serii de valori poate fi cauzată de variabilitatea calității materialelor și a condițiilor de lucru.

Ruperea elementelor se produce însă la valori ale momentului încovoietor apreciabil mai mari decît cele calculate fie după STAS 8000-67 (diferențele fiind cuprinse între 1 și 73 % pentru seria 1 și între 12 și 72 % pentru seria 2 de grinzi), fie după Recomandările CEB (diferențele fiind cuprinse între 1 și 49 % respectiv 7 și 44 %).

Tabela 2

Încercarea la rupere a grinzilor armate cu oțel PC 52

Indicativ	μ	R_b^e	R_i^n	$M_r^e \times 10^3$	$B_r^e = \frac{M_r^e}{bh_0^2 R_i^n}$	$M_c^e \times 10^3$	$\frac{M_c^e}{M_r^e}$	STAS 8000–67		CEB	
								σ_c	$M_c^c \times 10^3$	σ_{au}	M_r^c
	%	kgf/cm²	kgf/cm²	kgf.cm		kgf.cm		kgf/cm²	kgf.cm	kgf/cm²	kgf.cm
G1– 1	0,07	262	230	59 59	0,023 0,023	53 47	0,90 0,80	4,300	33	5,080	39
G1– 2	0,14	284	247	110 110	0,040 0,040	89 89	0,81 0,81	4,300	66	5,080	78
G1– 3	0,20	244	215	155 155	0,065 0,065	119 119	0,77 0,77	4,300	97	5,030	113
G1– 4	0,24	288	250	149 155	0,054 0,056	106 106	0,71 0,68	4,200	112	4,920	130
G1– 5	0,31	236	209	205 202	0,089 0,088	157 157	0,77 0,78	4,200	143	4,870	164
G1– 6	0,38	204	183	228 239	0,115 0,120	156 156	0,68 0,65	3,400	138	3,980	160
G1– 7	0,55	250	220	277 274	0,116 0,115	207 207	0,75 0,76	3,100	180	3,630	208
G1– 8	0,57	230	204	319 339	0,144 0,152	231 231	0,72 0,68	3,400	206	3,950	236

Tabela 2: (continuare)

Indicativ	μ %	R_b^e kgf/cm²	R_i^n kgf/cm²	$M_r^e \times 10^3$ kgf.cm	$B_r^e = \frac{M_r^e}{bh_0^2 R_i^n}$	$M_c^e \times 10^3$ kgf.cm	$\frac{M_c^e}{M_r^e}$	STAS 8000–67		CEB	
								σ_c kgf/cm²	$M_c^c \times 10^2$ kgf.cm	σ_{au} kgf/cm²	M_r^c kgf.cm
G1– 9	0,75	170	156	329 319	0,195 0,190	283 283	0,86 0,89	3,200	244	3,620	269
G1–10	0,82	176	161	354 359	0,204 0,206	308 308	0,87 0,86	3,100	258	3,500	284
G1–11	0,98	196	177	404 392	0,213 0,207	307 307	0,76 0,78	3,400	328	3,780	356
G1–12	1,13	179	163	462 449	0,263 0,255	407 408	0,88 0,91	3,200	352	3,520	374
G1–13	1,25	171	157	445 445	0,267 0,267	408 357	0,92 0,80	3,300	386	3,530	398
G1–14	1,48	206	185	529 529	0,267 0,267	509 509	0,96 0,96	3,400	472	3,640	488
G1–15	1,55	223	198	559 529	0,269 0,254	509 509	0,91 0,96	3,700	523	3,890	535
G1–16	1,88	189	171	656 644	0,326 0,361	609 609	0,93 0,95	3,300	545	3,370	535
G1–17	2,32	185	168	728 758	0,413 0,424	658 758	0,91 1,00	3,700	681	3,700	648

Notă: Valorile σ_c sînt determinate pe epruvete de control.

Tabela 3

Încercarea la rupere a grinzilor armate cu oțel OB 38

Indicativ	μ	R_b^c	R_i^n	$M_r^e \times 10^3$	$B_r^e = \frac{M_r^e}{bh_0^2 R_i^n}$	$M_c^e \times 10^3$	$\frac{M_c^e}{M_r^e}$	STAS 8000 — 67		CEB	
								σ_c	$M_c^c \times 10^3$	σ_{au}	M_r^c
	%	kgf/cm²	kgf/cm²	kgfcm		kgf.cm		kgf/cm²	kgf.cm	kgf.cm²	kgf.cm
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
G2— 1	0,07	268	234	49	0,019	49	1,00	3,000	23	3,660	28
G2— 2	0,14	268	234	60	0,023	59	0,98	3,000	46	3,630	56
G2— 3	0,20	268	234	92	0,035	79	0,86	3,000	68	3,630	83
G2— 4	0,24	268	234	89	0,035	79	0,89	2,600	70	3,145	84
G2— 5	0,31	257	226	137	0,055	109	0,80	2,600	90	3,145	107
G2— 6	0,38	257	226	170	0,068	114	0,67	2,400	99	2,900	118
G2— 7	0,55	241	213	234	0,102	163	0,70	2,400	139	2,880	167
G2— 8	0,57	241	213	240	0,103	166	0,69	2,400	148	2,880	176
G2— 9	0,75	257	226	268	0,110	220	0,82	2,200	175	2,640	208
G2—10	0,82	257	226	335	0,137	231	0,69	2,400	208	2,860	246
G2—11	0,98	259	227	312	0,128	254	0,81	2,200	225	2,620	263
G2—12	1,13	259	227	367	0,149	307	0,84	2,200	257	2,595	298
G2—13	1,25	231	205	355	0,163	307	0,87	2,300	289	2,665	327
G2—14	1,48	231	205	465	0,212	393	0,85	2,200	326	2,530	366
G2—15	1,55	221	197	461	0,222	393	0,85	2,400	360	2,740	400
G2—16	1,88	221	197	481	0,230	414	0,86	2,300	414	2,560	448
G2—17	2,32	220	196	607	0,294	507	0,84	2,400	511	2,615	537
G2—18	2,82	220	196	663	0,326	608	0,92	2,400	592	2,540	600

Notă. Valorile sînt σ_c determinate pe epruvete de control.

Deformabilitatea mai mare a betonului ușor în comparație cu a celui greu face ca alungirea armăturii din elemente încovoiate de beton ușor să fie mai pronunțată, efortul efectiv din armătură (σ_a) în momentul

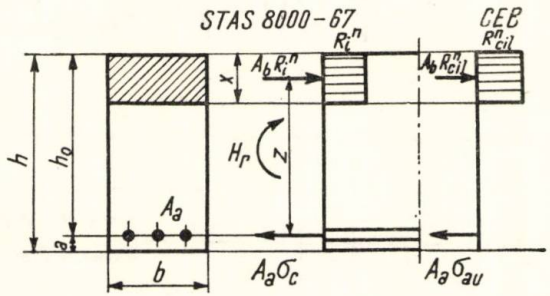


Fig. 4. — Calculul momentului de rupere.

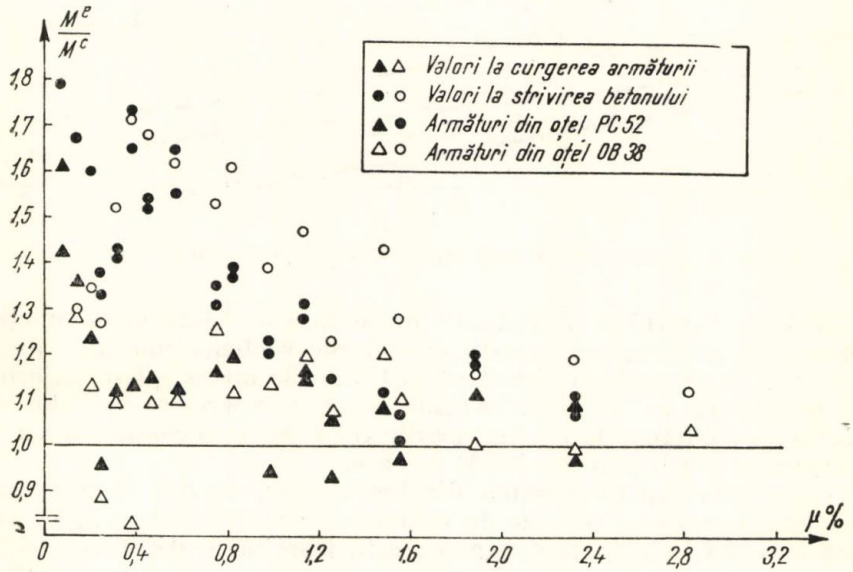


Fig. 5. — Variația raportului dintre momentele experimentale și cele de calcul pentru diferite procente de armare.

ruperii grinzilor depășind în toate cazurile limita de curgere a oțelului. Fenomenul este cu atît mai posibil, cu cît oțelul prezintă un palier de curgere mai redus.

Pentru aprecierea intensității fenomenului de hiperrezistență a oțelului s-a pornit de la ecuația de moment încovoietor în raport cu rezultanta eforturilor de compresiune din beton (fig. 4), pusă sub forma

$$\frac{M_r^e}{bh_0^2 R_i^n} = \mu m_a \frac{\sigma_c}{R_i^n}\left(1 - 0{,}5\,\mu m_a \frac{\sigma_c}{R_i^n}\right), \qquad (3)$$

şi, determinînd valorile momentelor de rupere prin încercări experimentale, s-au calculat valorile coeficientului condiţiilor de lucru ale armăturii m_a cu relaţia

$$m_a = \frac{\sigma_a}{\sigma_c} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{R_i^n}{\sigma_c} \left(1 - \sqrt{1 - 2\frac{M_r^e}{bh_0^2 R_i^n}}\right). \qquad (4)$$

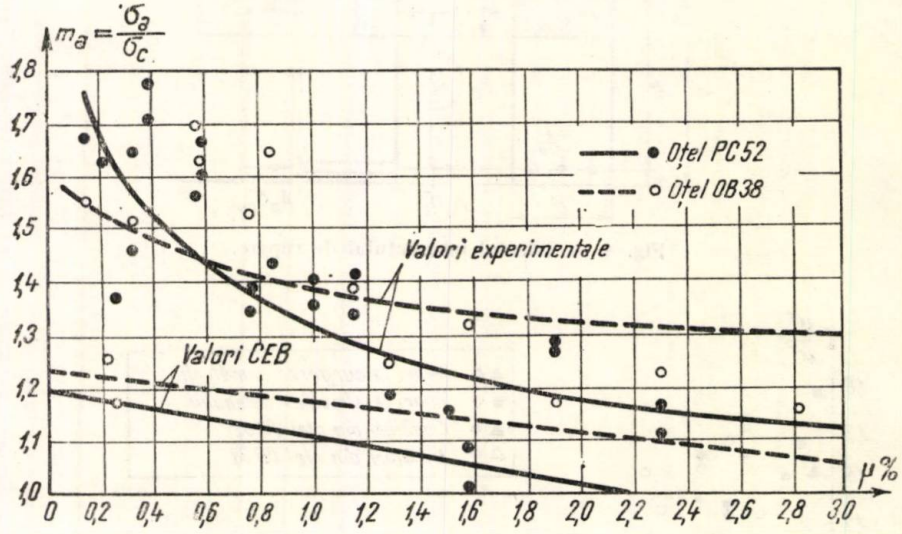


Fig. 6. — Variaţia coeficientului m_a în funcţie de procentul de armare μ.

Valorile acestui coeficient sînt prezentate în figura 6, în funcţie de procentul de armare, comparativ cu valorile coeficientului K_a, date de relaţia (2). Se observă din figură că atît valorile medii, cît şi majoritatea valorilor individuale ale coeficientului m_a sînt superioare valorilor coeficientului K_a, diferenţele dintre valorile celor doi coeficienţi reducîndu-se pe măsura creşterii procentului de armare.

Caracterul ruperii grinzilor din beton uşor, armate cu bare netede sau cu profil periodic, depinde de valoarea procentului de armare. Astfel, la procente mici de armare ruperea este însoţită de deformaţii (săgeţi) reduse şi de un număr mic de fisuri în zona întinsă a elementului (fig. 7). O dată cu creşterea procentului de armare, fisurile din zona întinsă a betonului se îndesesc, iar ruperea grinzilor se produce la săgeţi mari (fig. 8) prin deschiderea puternică a acestor fisuri, urmată de apariţia fisurilor orizontale în zona comprimată. Un detaliu tipic de rupere a grinzilor este redat în figura 9. Grinzile puternic armate se rup prin zdrobirea betonului înainte ca fisurile apărute în număr mare în zona întinsă să se deschidă prea mult şi fără ca săgeţile grinzilor să devină importante (fig. 10). În toate cazurile, potrivit observaţiilor experimentale efectuate, ruperea are un caracter *mai casant* decît în cazul betonului greu.

Scurtarea-limită a betonului ε_i, măsurată în momentul ruperii grinzilor, a fost cuprinsă între 1,00 şi 8,20‰ la grinzile din seria 1 şi între 1,40 şi 5,90‰ la cele din seria 2. În ansamblu, media aritmetică a valori-

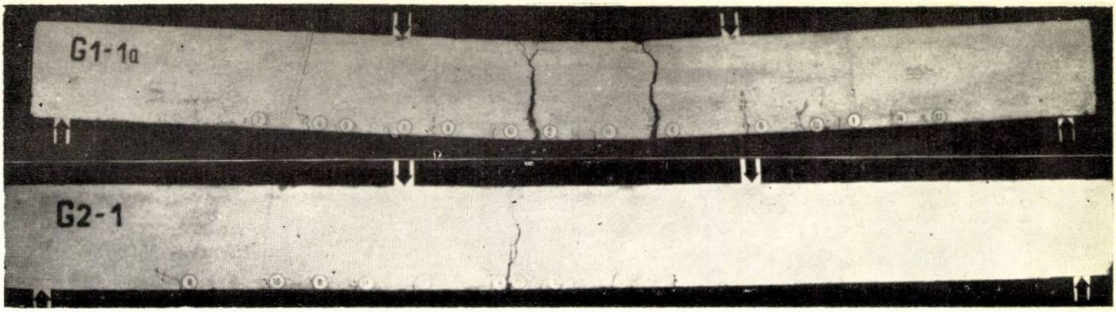


Fig. 7. — Aspectul grinzilor G 1—1 şi G 2—1 ($\mu = 0{,}07\,\%$) după încercare.

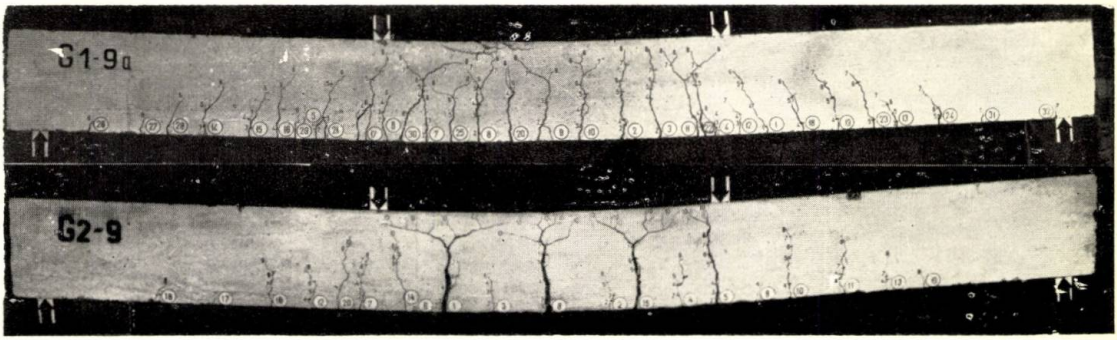


Fig. 8. — Aspectul grinzilor G 1—9 şi G 2—9 ($\mu = 0{,}75\,\%$) după încercare.

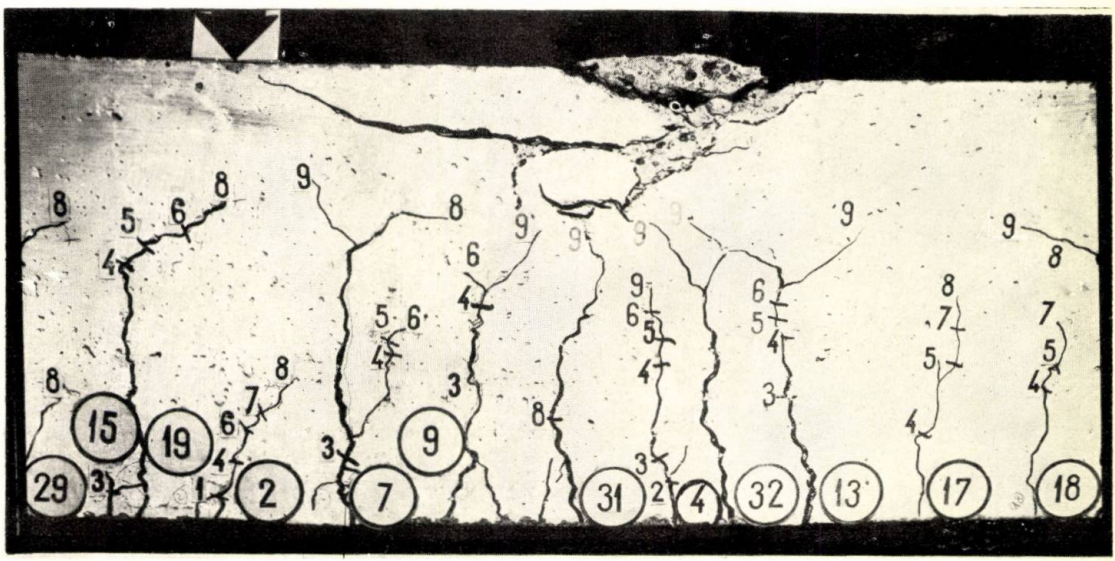
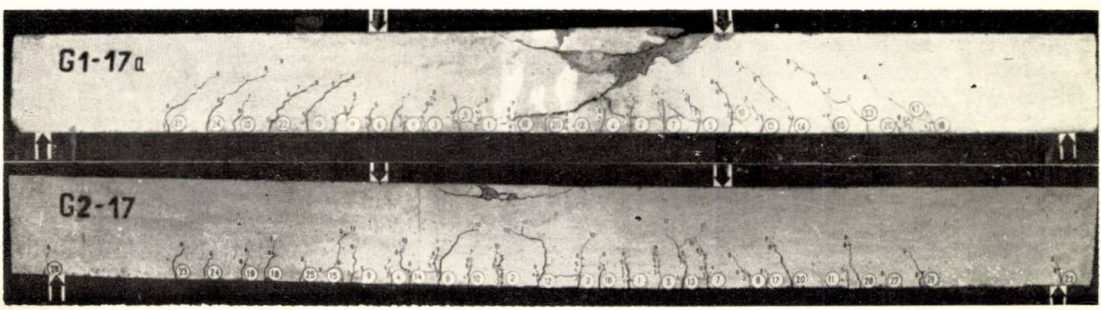


Fig. 9. — Detaliu tipic de rupere a grinzilor.



lor experimentale obținute pentru scurtarea-limită a betonului ușor (fig. 11) este 4,76‰ și întrece valoarea admisă pentru betonul greu (3,5‰).

În figura 12 se prezintă variația tipică a deformațiilor betonului pe înălțimea grinzii în două secțiuni (B și E) din zona de moment încovoie-

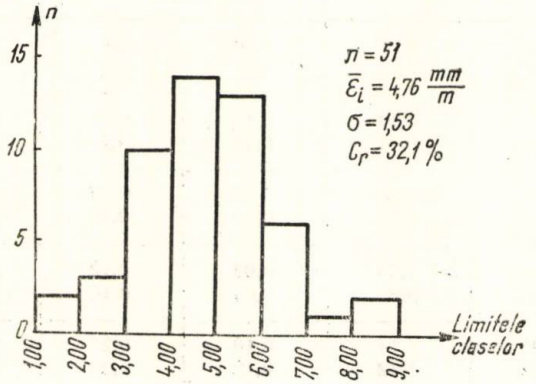


Fig. 11. — Histograma valorilor ε_i obținute la încercarea grinzilor.

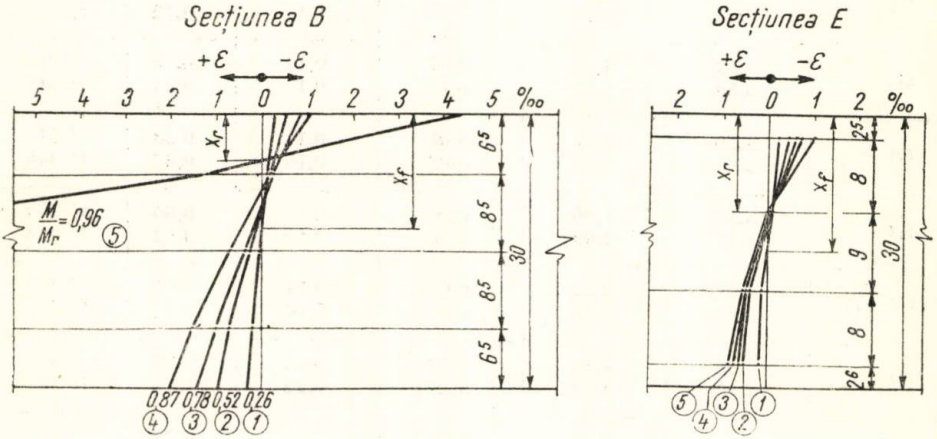


Fig. 12. — Variația deformațiilor betonului pe înălțimea secțiunii la grinda G 2—13 (μ = 1,25 %).

tor constant (fig. 1). Se observă că pînă în apropierea ruperii grinzii deformațiile nu diferă prea mult de la o secțiune transversală a grinzii la alta, pentru ca în momentul ruperii această diferență să se accentueze brusc ca urmare a creșterii puternice a deformațiilor în secțiunea de rupere a grinzii (secțiunea B din fig. 12). Se vede de asemenea că variația acestor deformații pe înălțimea secțiunii este aproape liniară pînă în momentul ruperii grinzii, ceea ce permite să se accepte valabilitatea ipotezei secțiunilor plane.

Tabela 4

Valorile deschiderii fisurilor şi ale săgeţii grinzilor din seria I, măsurate sub sarcini de exploatare

Indicativul grinzilor	M_r tfm	M_e tfm	αf (mm)		f cm	$\frac{f}{l}$
			medie	maximă		
G1— 1	0,59 0,59	0,33 0,33	0,03 0,03	0,07 0,03	0,10 0,04	1/3000 1/7500
G1— 2	1,10 1,10	0,61 0,61	0,10 0,11	0,16 0,25	0,40 0,40	1/ 750 1/ 750
G1— 3	1,55 1,55	0,86 0,86	0,07 0,09	0,17 0,18	0,38 0,31	1/ 790 1/ 970
G1— 4	1,49 1,55	0,83 0,86	0,08 0,07	0,12 0,16	0,35 0,37	1/ 860 1/ 810
G1— 5	2,05 2,02	1,14 1,12	0,10 0,12	0,20 0,20	0,49 0,53	1/ 613 1/ 567
G1— 6	2,28 2,39	1,26 1,33	0,09 0,11	0,15 0,20	0,54 0,64	1/ 555 1/ 468
G1— 7	2,77 2,74	1,54 1,52	0,08 0,09	0,16 0,17	0,58 0,72	1/ 517 1/ 417
G1— 8	3,19 3,39	1,77 1,88	0,07 0,18	0,14 0,19	0,72 0,64	1/ 417 1/ 419
G1— 9	3,29 3,19	1,83 1,77	0,08 0,09	0,17 0,16	0,58 0,67	1/ 517 1/ 448
G1—10	3,54 3,59	1,96 1,99	0,06 0,06	0,12 0,10	0,60 0,62	1/ 500 1/ 484
G1—11	4,02 3,92	2,22 2,18	0,08 0,08	0,14 0,16	0,61 0,61	1/ 892 1/ 492
G1—12	4,62 4,49	2,56 2,50	0,06 0,09	0,10 0,22	0,75 0,72	1/ 400 1/ 417
G1—13	4,45 4,45	2,47 2,47	0,08 0,08	0,12 0,16	0,73 0,70	1/ 412 1/ 428
G1—14	5,29 5,29	2,94 2,94	0,06 0,05	0,12 0,15	0,76 0,70	1/ 394 1/ 428
G1—15	5,59 5,29	3,10 2,94	0,08 0,12	0,15 0,20	0,76 0,74	1/ 394 1/ 406
G1—16	6,56 6,44	3,65 3,58	0,06 0,07	0,10 0,19	0,73 0,77	1/ 412 1/ 390
G1—17	7,28 7,58	4,04 4,22	0,06 0,06	0,10 0,10	0,92 0,79	1/ 326 1/ 380

Considerînd că stadiul de exploatare este definit de o valoare a momentului încovoietor

$$M_e = \frac{M_r}{1{,}8}, \tag{5}$$

s-au măsurat deschiderile fisurilor şi săgeata la mijlocul deschiderii grinzilor (tabelele 4 şi 5). Valorile medii ale deschiderii fisurilor au variat între 0,10 şi 0,06 mm (în ordine crescătoare a procentelor de armare) la seria 1 şi între 0,10 şi 0,08 mm la seria 2 de grinzi, iar valorile săgeţilor au fost cuprinse între 1/970 şi 1/380 din deschidere, respectiv între 1/2 500 şi 1/316 din deschidere.

Tabela 5

Valorile deschiderii fisurilor şi ale săgeţii grinzilor din seria 2, măsurate sub sarcini de exploatare

Indicativul grinzilor	M_r tfm	M_e tfm	α f (mm)		cm	$\frac{f}{l}$
			medie	maximă		
G2— 1	0,49	0,27	0,02	0,03	0,05	1/ 6000
G2— 2	0,60	0,33	0,02	0,03	0,06	1/ 5000
G2— 3	0,92	0,51	0,03	0,05	0,12	1/ 2500
G2— 4	0,89	0,49	0,02	0,05	0,03	1/10000
G2— 5	1,37	0,76	0,06	0,11	0,37	1/ 812
G2— 6	1,70	0,94	0,11	0,25	0,52	1/ 577
G2— 7	2,34	1,30	0,13	0,22	0,48	1/ 625
G2— 8	2,40	1,33	0,06	0,10	0,41	1/ 731
G2— 9	2,68	1,49	0,07	0,11	0,43	1/ 698
G2—10	3,35	1,86	0,08	0,17	0,53	1/ 567
G2—11	3,12	1,73	0,08	0,17	0,49	1/ 612
G2—12	3,67	2,04	0,07	0,16	0,61	1/ 492
G2—13	3,55	1,97	0,07	0,16	0,46	1/ 652
G2—14	4,65	2,58	0,06	0,08	0,49	1/ 612
G2—15	4,61	2,54	0,06	0,10	0,58	1/ 518
G2—16	4,81	2,67	0,07	0,11	0,62	1/ 484
G2—17	6,07	3,36	0,05	0,09	0,64	1/ 468
G2—18	6,63	3,68	0,08	0,12	0,95	1/ 316

Ţinînd seama de efectul pe care-l au contracţia şi curgerea lentă a betonului uşor asupra stării de fisurare şi deformaţii a elementelor încovoiate, potrivit unui studiu anterior al autorilor [7] se poate aprecia că în cazul încărcărilor de lungă durată deschiderea fisurilor n-ar depăşi 0,20 mm, iar săgeata grinzilor ar fi mai mică decît $l/200$. Aceste valori se încadrează în limitele normate [3] admise pentru betonul greu în condiţii normale de exploatare.

Rezultă, prin urmare, că sporul de capacitate portantă, cauzat de manifestarea fenomenului de hiperrezistenţă a oţelului, poate fi luat în considerare la calculul grinzilor din beton armat uşor, fără a prejudicia exploatarea normală a acestora.

4. RELAŢII DE CALCUL

Calculul elementelor încovoiate din beton uşor cu secţiune dreptunghiulară simplu armată în starea-limită a capacităţii portante în secţiuni normale se poate face, potrivit ipotezelor din figura 13, cu ajutorul relaţiei

$$M \leqslant bxR_i(h_0 - 0{,}5\,x) = A_a m_a R_a(h_0 - 0{,}5x), \qquad (6)$$

în care M reprezintă momentul încovoietor produs de încărcările de calcul, R_i, R_a rezistenţele de calcul ale betonului şi armăturii date în tabele [3], ia m_a coeficientul condiţiilor de lucru ale armăturii dat în figura 14.

Curbele din figura 14 s-au stabilit prin prelucrarea statistică a rezultatelor experimentale (fig. 6) şi reprezintă valori minime corespunzînd unui prag de semnificaţie de 5% admis în Recomandările CEB [2].

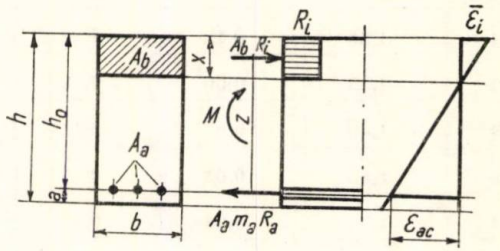


Fig. 13. — Calculul elementelor încovoiate la starea-limită a capacităţii portante.

Se remarcă faptul că, deşi fenomenul de hiperrezistenţă a oţelului se manifestă mai intens în elementele încovoiate din beton uşor armat comparativ cu cele din beton greu, valorile minime probabile ale coeficientului m_a sînt apropiate de cele recomandate de Soretz pentru betonul greu [8]. Această situaţie este cauzată de gradul de dispersie a rezultatelor experimentale ca urmare a variabilităţii calităţii agregatelor uşoare care se produc în prezent la noi în ţară.

Înălţimea zonei comprimate de beton se determină cu ajutorul ecuaţiei de proiecţie pe axa elementului:

$$bxR_i = A_a m_a R_a. \tag{7}$$

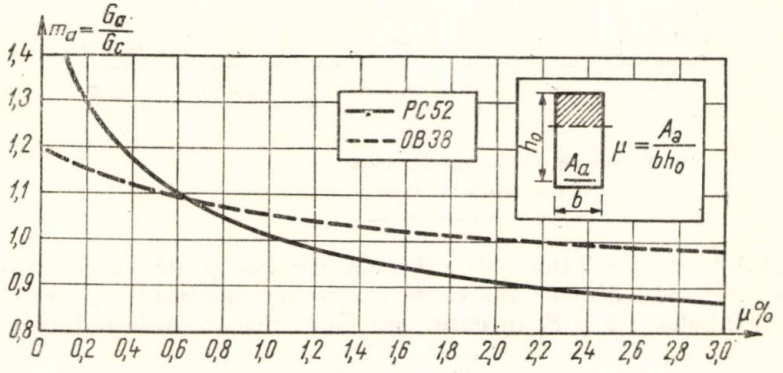


Fig. 14. — Valorile minime ale coeficientului m_a în funcţie de mărimea procentului de armare.

Întrucît normele româneşti de calcul [3] nu admit să se realizeze elemente supraarmate, este necesar să fie îndeplinită condiţia

$$x \leqslant \frac{\bar{\varepsilon}_i}{\bar{\varepsilon}_i + \varepsilon_{ac}} h_0. \tag{8}$$

Ţinînd seama de valoarea scurtării-limită a betonului $\bar{\varepsilon}_i$ determinată experimental (fig. 11) şi de cea a alungirii armăturii în momentul atingerii limitei de curgere (reale sau convenţionale),

$$\varepsilon_{ac} = 0{,}002 + \frac{\sigma_{0.2}}{E_a}, \tag{9}$$

relaţia (8) devine

$$\xi = \frac{x}{h_0} \begin{matrix} \leqslant 0{,}60 \text{ pentru oţel OB 38,} \\ \leqslant 0{,}56 \text{ pentru oţel PC 52,} \end{matrix} \tag{8'}$$

iar momentul încovoietor maxim pe care îl poate prelua secţiunea dreptunghiulară simplu armată are valoarea

$$M_{max} = bh_0^2 R_i \xi_{max} (1 - 0{,}5\ \xi_{max}) = B_{max} bh_0^2 R_i, \tag{10}$$

în care

$B_{max} = 0{,}42$ pentru oţel OB 38,
$= 0{,}40$ pentru oţel PC 52.

Valorile maxime ale procentului de armare sînt date în tabela 6.

Tabela 6

Valorile procentului maxim de armare pentru secţiuni dreptunghiulare simplu armate din beton uşor

Calitatea oţelului	Marca betonului			
	B 150	B 200	B 250	B 300
OB 38	2,28	2,86	3,43	4,57
PC 52	1,54	1,93	2,32	3,08

Notă. Valorile din tabel au fost calculate admiţînd:

$\xi_{max} = 0{,}60$ pentru oţel OB 38;
$= 0{,}56$ pentru oţel PC 52.

Valabilitatea relaţiei (8′) este confirmată şi de cercetările altor autori [6]. Pentru dimensionarea şi verificarea secţiunilor de recomandă utilizarea tabelelor 7 şi 8, în care s-au făcut următoarele notaţii :

$$\xi = \mu m_a \frac{R_a}{R_i}; \quad B = \xi(1-0{,}5\ \xi), \qquad (11)$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{B}}; \quad \xi = 1-0{,}5\ \xi.$$

Se observă că valorile maxime ale coeficientului ξ din tabelele 7 şi 8 sînt mai reduse decît cele date de relaţiile (8′), întrucît la întocmirea tabelelor s-au avut în vedere valorile subunitare ale coeficientului m_a în domeniul procentelor mari de armare (conform fig. 14).

5. CONCLUZII

Încercările experimentale efectuate scot în evidenţă necesitatea luării în considerare la calculul de rezistenţă al elementelor încovoietoare din beton armat uşor a solicitării oţelului în zona de consolidare.

Intensitatea cu care se produce acest fenomen, apreciată după valorile medii ale încercărilor, este mai pronunţată la elementele realizate din beton armat uşor decît la cele din beton greu.

Ţinînd seama de gradul de împrăştiere a deformaţiilor-limită ale betoanelor uşoare, apreciem că la calculul elementelor încovoiate din beton uşor armat este indicat a se lua în considerare valori minime pentru coeficientul condiţiilor de lucru a armăturii (m_a), determinate cu o probabilitate suficient de mare. Valorile coeficientului m_a din figura 14, stabilite pe baza acestui principiu (corespunzător unei probabilităţi de 95%), pot fi supraunitare sau subunitare, în funcţie de mărimea procentului de armare.

Betonul uşor prezintă o deformabilitate sporită şi în acelaşi timp o fragilitate mai mare decît betonul greu. Scurtarea-limită a betonului uşor, obţinută prin încercări ($\bar{\varepsilon}_i = 4{,}76$ mm/m), depăşeşte cu 36% pe cea admisă pemtru betonul greu.

Calculul elementelor încovoiate cu secţiune dreptunghiulară simplu armată, luînd în considerare particularităţile de comportare sub încărcări

Tabela 7

Calculul secţiunilor dreptunghiulare simplu armate cu bare din oţel PC 52 (R_a = 2900 kgf/cm²)

μ %	B 200, R_i = 100 kgf/cm²				B 250, R_i = 120 kgf/cm²				B 300, R_i = 160 kgf/cm²			
	ξ	r	ζ	B	ξ	r	ζ	B	ξ	r	ζ	B
0,10	0,041	5,000	0,980	0,040	0,034	5,500	0,983	0,033	0,025	6,330	0,988	0,025
0,15	0,058	4,220	0,971	0,056	0,049	4,570	0,976	0,048	0,036	5,350	0,982	0,035
0,20	0,075	3,722	0,963	0,072	0,063	4,050	0,969	0,061	0,047	4,660	0,977	0,046
0,25	0,091	3,385	0,955	0,087	0,076	3,702	0,962	0,073	0,057	4,270	0,972	0,055
0,30	0,107	3,150	0,947	0,101	0,089	3,430	0,956	0,085	0,067	3,922	0,967	0,065
0,35	0,122	2,960	0,939	0,114	0,101	3,225	0,950	0,096	0,076	3,700	0,962	0,073
0,40	0,137	2,795	0,932	0,128	0,114	3,057	0,943	0,107	0,085	3,504	0,958	0,081
0,45	0,151	2,675	0,925	0,140	0,126	2,910	0,937	0,118	0,095	3,333	0,953	0,090
0,50	0,165	2,570	0,918	0,151	0,137	2,790	0,932	0,128	0,103	3,190	0,949	0,098
0,55	0,178	2,480	0,911	0,162	0,149	2,685	0,926	0,138	0,112	3,080	0,944	0,105
0,60	0,191	2,400	0,905	0,173	0,159	2,620	0,921	0,146	0,120	2,975	0,940	0,113
0,65	0,206	2,320	0,897	0,185	0,171	2,525	0,915	0,156	0,128	2,883	0,936	0,120
0,70	0,217	2,280	0,892	0,193	0,180	2,465	0,910	0,164	0,136	2,802	0,932	0,127
0,75	0,230	2,215	0,885	0,204	0,192	2,402	0,904	0,173	0,144	2,735	0,928	0,134
0,80	0,244	2,160	0,878	0,214	0,202	2,345	0,899	0,181	0,152	2,675	0,924	0,140
0,85	0,256	2,115	0,872	0,223	0,214	2,295	0,893	0,190	0,160	2,601	0,920	0,147
0,90	0,269	2,070	0,866	0,233	0,224	2,240	0,888	0,199	0,168	2,550	0,916	0,154
0,95	0,281	2,035	0,860	0,242	0,234	2,200	0,883	0,206	0,175	2,507	0,913	0,159
1,00	0,293	2,000	0,854	0,250	0,244	2,155	0,878	0,214	0,183	2,452	0,909	0,166
1,10	0,316	1,940	0,842	0,266	0,262	2,090	0,869	0,228	0,197	2,378	0,902	0,177
1,20	0,341	1,880	0,830	0,283	0,284	2,025	0,858	0,244	0,213	2,295	0,894	0,190
1,30	0,366	1,829	0,817	0,299	0,302	1,973	0,849	0,256	0,228	2,222	0,886	0,202
1,40	0,390	1,785	0,805	0,314	0,321	1,925	0,840	0,270	0,243	2,158	0,879	0,214
1,50	0,413	1,743	0,794	0,328	0,341	1,880	0,830	0,283	0,258	2,112	0,871	0,224
1,60	0,436	1,708	0,782	0,341	0,362	1,835	0,819	0,296	0,272	2,167	0,864	0,234
1,70	0,458	1,680	0,771	0,354	0,382	1,798	0,809	0,309	0,287	2,012	0,857	0,246
1,80	0,485	1,649	0,758	0,368	0,404	1,759	0,798	0,322	0,303	1,971	0,849	0,257
1,90	0,507	1,627	0,747	0,378	0,421	1,733	0,790	0,332	0,317	1,939	0,842	0,266
2,00					0,439	1,710	0,781	0,343	0,330	1,904	0,835	0,275
2,10					0,461	1,678	0,770	0,355	0,346	1,865	0,827	0,286
2,20					0,478	1,657	0,761	0,364	0,359	1,843	0,821	0,294
2,30					0,500	1,630	0,750	0,375	0,375	1,817	0,813	0,304
2,40									0,388	1,785	0,806	0,313
2,50									0,404	1,760	0,798	0,322
2,60									0,415	1,742	0,793	0,328
2,70									0,431	1,718	0,785	0,338
2,80									0,442	1,706	0,779	0,344
2,90									0,458	1,680	0,771	0,354
3,00									0,473	1,665	0,764	0,361

$$M = Bbh_0^2 R_i \qquad h_0 = r\sqrt{\frac{M}{bR_i}} \qquad A_a = \frac{\mu\%}{100} bh_0 = \frac{M}{\zeta h_0 m_a R_a}$$

ale betonului armat uşor cu agregate de granulit, se poate face cu ajutorul relaţiilor (6), (7) şi (8), respectiv a tabelelor 7 şi 8.

Luarea în considerare a unei rezistenţe sporite a armăturii în calculul elementelor încovoiate de beton armat uşor cu procente mici de armare la starea-limită a capacităţii portante este posibilă, deoarece sînt satisfăcute concomitent şi stările-limită de exploatare a elementelor (starea-limită de deformaţii şi starea-limită de deschidere a fisurilor sub acţiunea încărcărilor de scurtă şi de lungă durată).

Primită la redacţie la 25 mai 1970

Tabe

Calculul secțiunilor dreptunghiulare, simplu armate

μ %	B 150, $R_i = 80$ kgf/cm²				B 200, $R_i = 100$ kgf/cm²			
	ξ	r	ζ	B	ξ	r	ζ	B
0,10	0,031	5,780	0,985	0,030	0,025	6,320	0,988	0,025
0,15	0,046	4,720	0,977	0,045	0,037	5,270	0,982	0,036
0,20	0,060	4,150	0,970	0,058	0,048	4,610	0,976	0,047
0,25	0,075	3,722	0,963	0,072	0,060	4,150	0,970	0,058
0,30	0,089	3,422	0,956	0,085	0,071	3,832	0,965	0,068
0,35	0,104	3,190	0,948	0,098	0,083	3,555	0,959	0,079
0,40	0,117	3,013	0,942	0,110	0,094	3,352	0,953	0,089
0,45	0,131	2,858	0,935	0,122	0,105	3,175	0,948	0,099
0,50	0,145	2,719	0,928	0,135	0,116	3,030	0,942	0,109
0,55	0,159	2,615	0,921	0,146	0,127	2,900	0,937	0,119
0,60	0,171	2,530	0,915	0,156	0,137	2,795	0,932	0,128
0,65	0,186	2,428	0,907	0,169	0,149	2,690	0,926	0,138
0,70	0,198	2,362	0,901	0,178	0,159	2,620	0,921	0,146
0,75	0,212	2,300	0,894	0,189	0,170	2,530	0,915	0,156
0,80	0,224	2,240	0,888	0,199	0,180	2,472	0,910	0,164
0,85	0,239	2,180	0,881	0,210	0,191	2,402	0,905	0,173
0,90	0,250	2,135	0,875	0,218	0,200	2,350	0,900	0,180
0,95	0,264	2,090	0,868	0,229	0,211	2,300	0,895	0,189
1,00	0,278	2,045	0,861	0,239	0,222	2,252	0,889	0,197
1,10	0,303	1,970	0,849	0,257	0,243	2,162	0,879	0,213
1,20	0,327	1,910	0,837	0,274	0,262	2,090	0,869	0,228
1,30	0,356	1,845	0,822	0,292	0,278	2,045	0,861	0,239
1,40	0,378	1,801	0,811	0,306	0,303	1,972	0,849	0,257
1,50	0,405	1,758	0,798	0,323	0,324	1,919	0,838	0,271
1,60	0,428	1,719	0,786	0,337	0,343	1,873	0,829	0,284
1,70	0,455	1,682	0,773	0,352	0,364	1,830	0,818	0,298
1,80	0,477	1,660	0,762	0,363	0,382	1,803	0,809	0,308
1,90	0,503	1,626	0,749	0,376	0,403	1,761	0,799	0,322
2,00	0,525	1,601	0,738	0,388	0,420	1,733	0,790	0,332
2,10	0,551	1,581	0,725	0,400	0,441	1,704	0,780	0,344
2,20	0,577	1,560	0,712	0,411	0,462	1,679	0,769	0,355
2,30					0,478	1,655	0,761	0,364
2,40					0,499	1,635	0,751	0,374
2,50					0,520	1,615	0,740	0,384
2,60					0,540	1,595	0,730	0,394
2,70					0,555	1,579	0,723	0,400
2,80					0,577	1,560	0,712	0,411
2,90								
3,00								
3,10								
3,20								
3,30								
3,40								
3,50								
3,60								
3,70								
3,80								
3,90								
4,00								
4,10								
4,20								
4,30								
4,40								
4,50								

$$M = Bbh_0^2 R_i \qquad h_0 = r\sqrt{\frac{M}{bR_i}}$$

la 8

cu bare din oțel OB 38 (R_a = 2100 kgf/cm²)

B 250, R_i = 120 kgf/cm²				B 300, R_i = 160 kgf/cm²			
ξ	r	ζ	B	ξ	r	ζ	B
0,020	7,070	0,990	0,020	0,015	8,165	0,993	0,015
0,030	5,860	0,985	0,029	0,023	6,585	0,989	0,023
0,040	5,060	0,980	0,039	0,030	5,870	0,985	0,029
0,050	4,520	0,975	0,049	0,037	5,265	0,982	0,036
0,059	4,180	0,971	0,057	0,045	4,760	0,978	0,044
0,069	3,860	0,966	0,067	0,052	4,430	0,964	0,051
0,078	3,648	0,961	0,075	0,059	4,180	0,971	0,057
0,087	3,475	0,957	0,083	0,066	3,955	0,967	0,064
0,097	3,290	0,952	0,092	0,073	3,782	0,974	0,070
0,106	3,162	0,947	0,100	0,079	3,623	0,961	0,076
0,114	3,060	0,943	0,107	0,086	3,490	0,957	0,082
0,124	2,938	0,938	0,116	0,093	3,341	0,954	0,089
0,132	2,847	0,934	0,123	0,099	3,259	0,951	0,094
0,142	2,753	0,929	0,132	0,106	3,160	0,947	0,100
0,150	2,684	0,925	0,138	0,112	3,070	0,944	0,106
0,159	2,612	0,921	0,146	0,119	2,982	0,941	0,112
0,167	2,550	0,917	0,153	0,125	2,922	0,938	0,117
0,176	2,500	0,912	0,160	0,132	2,855	0,934	0,123
0,186	2,430	0,907	0,169	0,139	2,781	0,931	0,129
0,202	2,352	0,899	0,181	0,152	2,670	0,924	0,140
0,218	2,270	0,891	0,194	0,164	2,575	0,918	0,150
0,236	2,190	0,882	0,208	0,177	2,490	0,912	0,161
0,252	2,125	0,874	0,220	0,189	2,420	0,906	0,171
0,271	2,061	0,865	0,234	0,202	2,345	0,899	0,181
0,286	2,021	0,857	0,245	0,214	2,282	0,893	0,191
0,304	1,968	0,848	0,258	0,228	2,220	0,886	0,202
0,318	1,935	0,841	0,267	0,238	2,180	0,881	0,210
0,336	1,888	0,832	0,280	0,252	2,130	0,874	0,220
0,350	1,860	0,825	0,288	0,262	2,090	0,869	0,228
0,368	1,822	0,816	0,300	0,276	2,043	0,862	0,238
0,385	1,794	0,808	0,310	0,288	2,015	0,856	0,246
0,398	1,770	0,801	0,318	0,299	1,980	0,851	0,254
0,416	1,740	0,792	0,330	0,312	1,945	0,844	0,263
0,433	1,713	0,784	0,340	0,325	1,920	0,838	0,272
0,450	1,695	0,775	0,348	0,338	1,888	0,831	0,281
0,463	1,673	0,769	0,356	0,348	1,861	0,826	0,288
0,480	1,655	0,760	0,364	0,360	1,842	0,820	0,294
0,497	1,636	0,752	0,374	0,373	1,815	0,814	0,303
0,514	1,615	0,743	0,382	0,386	1,790	0,807	0,312
0,531	1,598	0,735	0,390	0,398	1,770	0,801	0,318
0,549	1,582	0,726	0,398	0,412	1,750	0,794	0,326
0,566	1,565	0,717	0,406	0,425	1,727	0,788	0,335
0,577	1,560	0,712	0,411	0,433	1,718	0,784	0,338
				0,446	1,698	0,777	0,346
				0,458	1,680	0,771	0,353
				0,472	1,667	0,764	0,360
				0,484	1,650	0,758	0,366
				0,497	1,636	0,752	0,374
				0,510	1,620	0,745	0,380
				0,522	1,604	0,739	0,386
				0,535	1,595	0,733	0,392
				0,548	1,583	0,726	0,398
				0,560	1,572	0,720	0,403
				0,574	1,560	0,713	0,408

$$A_a = \frac{\mu\,\%}{100}\ bh_0 = \frac{M}{\zeta\, h_0 m_a R_a}$$

BUDAPESTI MŰSZAKI EGYETEM KÖZPONTI KÖNYVTÁRA 1848

BIBLIOGRAFIE

1. * * * *Comité Européen du Béton* (CEB), Bulletins d'information, *6—11, 15, 17, 19, 24.*
2. * * * *Recomandations pratiques unifiées pour le calcul et l'éxécution des ouvrages en béton armé*, Comité Européen du Béton, Paris, 1964.
3. * * * *STAS 8000—67, Calculul elementelor de beton, beton armat şi beton precomprimat. Metoda la stări-limită.*
4. * * * *Normativ experimental pentru proiectarea şi executarea elementelor de construcţii din beton armat cu agregate de granulit*, Redactarea I, INCERC, 1962.
5. I. Tertea, T. Oneţ, *Fisurarea şi ruperea elementelor încovoiate din beton uşor cu granulit în domeniul armării minime*, Buletinul ştiinţific al Institutului politehnic Cluj, vol. **11/1** (1968).
6. И. З. Симонов, *Бетон и железобетон на пористых заполнителях*, Москва, ГИЛСА 1955.
7. I. Tertea, T. Oneţ, *Influenţa contracţiei şi a curgerii lente asupra săgeţii grinzilor din beton uşor armat*, Construcţii şi materiale de construcţie, *1* (1970).
8. St. Soretz, *Beitrag zur Überfestigkeit in biegebeanspruchten Stahlbetonbalken* (traduction française), Bulletin d'Information CEB, *22* (1960).

METODA DE REPARTIZARE A ÎNCĂRCĂRILOR ORIZONTALE LA CLĂDIRILE ETAJATE REALIZATE CU DIAFRAGME VERTICALE AȘEZATE NESIMETRIC

de I. GIURGIU și LUCIA GIURGIU
Institutul politehnic Cluj
Liceul industrial de construcții Cluj

Metoda distribuirii încărcării orizontale funcție de centrul de rigiditate al clădirii se recomandă la calculul construcțiilor în zone seismice, deoarece evită efectul defavorabil de supraîncărcare prin torsiune a diafragmelor verticale la o distribuție asimetrică în planul clădirii.

Clădirile cu diafragme sînt sisteme spațiale static nedeterminate și distribuția încărcării orizontale depinde de rigiditatea diafragmei.

Conlucrarea spațială a diafragmelor verticale de diverse forme în planul clădirii este asigurată de diafragme orizontale (planșee), suficient de rigide pentru ca deplasările prin translație și rotație a tuturor elementelor verticale să fie egale.

1. RIGIDITATEA DIAFRAGMELOR

La clădirile cu diafragme verticale așezate nesimetric și de formă oarecare, centrul de rigiditate nu corespunde cu centrul de greutate. Să considerăm cazul unei clădiri cu diafragme nesimetric în plan (fig. 1). Caracteristic este faptul că partiul clădirii se compune din diafragme care în secțiune au formă de I, T, L, U etc. și există un punct de răsucire a întregii structuri, denumit centru de rigiditate (centru de răsucire). Pentru fiecare secțiune de diafragmă se determină centrul de greutate (C_G) și centrul de răsucire (C_R), calculîndu-se momentele de inerție I_1 și I_2 după axele principale *1* și *2* (fig. 2). Pe înălțimea unui nivel h, deplasările sînt Δ_1 și Δ_2 după direcția *1* și *2*.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 6, 1971, P. 1419 – 1428

Deplasările Δ_1 și Δ_2 se efectuează prin forțele P_1 și P_2', aplicate în centrul de răsucire (C_R) al diafragmei:

$$P_1 = \frac{I_1}{K} \cdot \Delta_1; \quad P_2 = \frac{I_2}{K} \cdot \Delta_2.$$

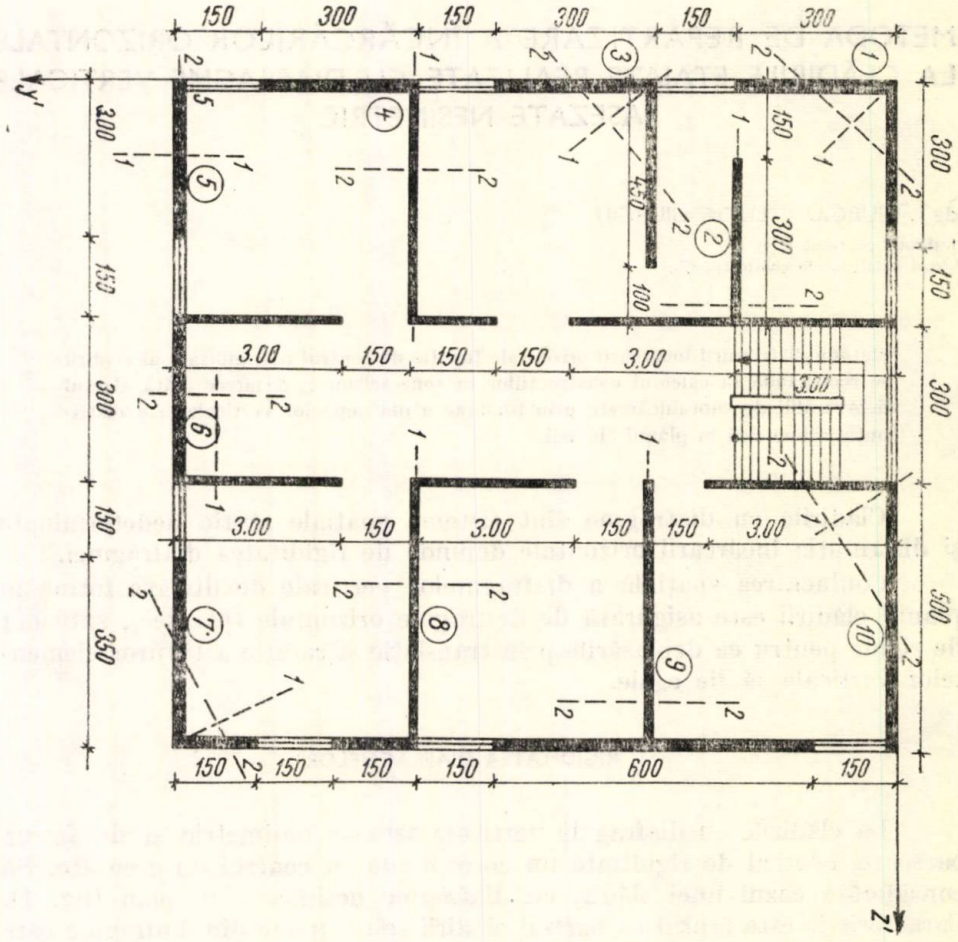


Fig. 1

Coeficientul K este o caracteristică a diafragmei:

$$K = \frac{\alpha \cdot h^3}{3E}.$$

unde

E este modulul de elasticitate al materialului din care este alcătuită diafragma,

h — înălţimea etajului,

α — influenţa de goluri din diafragma verticală:

$$\alpha = f(\varepsilon),$$

ε — raportul dintre lăţimea golului şi lungimea diafragmei (fig. 3 şi tabela 1).

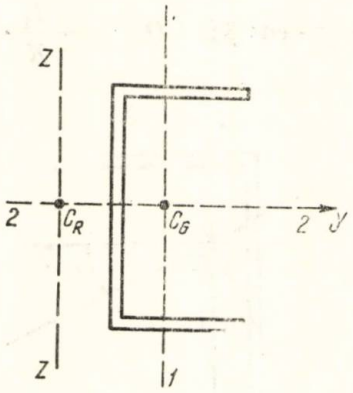


Fig. 2

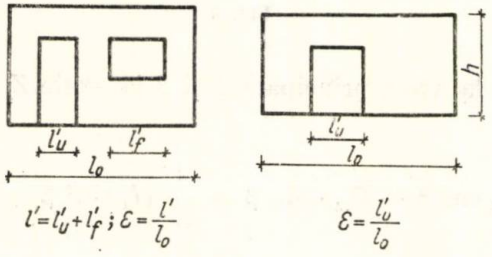


Fig. 3

Tabela 1

$\varepsilon \leqslant 0{,}55$	$0{,}55 < \varepsilon \leqslant 0{,}7$	0,7
$\alpha = 3{,}46\,\varepsilon + 1$	$\frac{1}{\sqrt[3]{(1-\varepsilon)^4}}$	0

Pentru perete plin $\alpha = 1$.

Luînd în centrul de rigiditate (C_R) axele Y şi Z, determinăm forţa exterioară orizontală care deplasează punctul C_R în direcţia Y sau în

direcţia Z, deplasări egale cu unitatea, obţinîndu-se astfel caracteristicile de rigiditate ale diafragmei.

Considerînd că axa Z nu coincide cu nici una din axele principale *1* sau *2* şi nici forţa exterioară care acţionează nu este paralelă cu axa Z, atunci forţa exterioară se descompune în componentele R_{zz} şi R_{zy} pe axa Z, respectiv axa Y.

Notăm cu β unghiul dintre axa Z şi axa principală *1*. Atunci axa Z este deplasată cu cos β faţă de axa *1* şi cu -sin β faţă de axa Z, determinînd forţele care acţionează după direcţiile principale *1* şi 2 (fig. 4):

$$Q_{z1} = \frac{I_2}{K} \cdot \cos \beta ; \qquad Q_{z2} = -\frac{I_1}{K} \cdot \sin \beta .$$

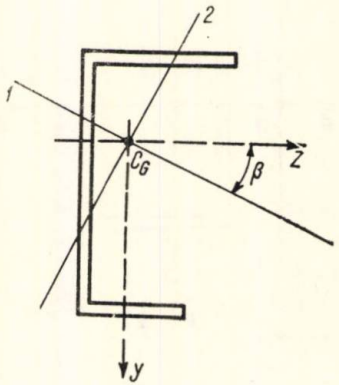


Fig. 4

Trecerea de la axele principale *1* şi *2* la axele Z şi Y se efectuează prin relaţiile

$$R_{zz} = Q_{z1} \cos \beta - Q_{z2} \cdot \sin \beta = \frac{1}{K} (I_1 \sin^2 \beta + I_2 \cos^2 \beta),$$

$$R_{zy} = Q_{z1} \sin \beta + Q_{z2} \cdot \cos \beta = -\frac{\cos \beta \cdot \sin \beta}{K} (I_1 - I_2). \qquad (1)$$

Pentru deplasarea lui C_R în direcţia Y vor apărea componentele R_{yy} şi R_{yz}, determinate cu relaţiile

$$R_{yy} = \frac{1}{K} (I_1 \cos^2 \beta + I_2 \sin^2 \beta),$$

$$R_{yz} = -\frac{\cos \beta \cdot \sin \beta}{K} (I_1 - I_2). \qquad (1')$$

Caracteristicile de rigiditate ale secțiunii diafragmei sînt R_{zz}; R_{zy}; R_{yy} și R_{yz}.

2. CENTRUL DE RIGIDITATE AL STRUCTURII

Pentru determinarea centrului de rigiditate a întregii structuri se presupune că forța orizontală egală cu unitatea este paralelă cu axa Z și că planșeul nu se rotește, ci suferă doar o translație în direcția Z egală cu Δ_{zz} și în direcția Y egală cu Δ_{yy}.

Considerînd forța orizontală unitară la nivelul j, determinăm caracteristicile de rigiditate ale structurii identic ca la secțiunile de diafragme cu relațiile

$$\Delta_{zz} \sum_1^n R_{zz}^i + \Delta_{zy} \sum_1^n R_{zy}^i = 1,$$

$$\Delta_{zz} \sum_1^n R_{yz}^i + \Delta_{zy} \sum_1^n R_{yy}^i = 0.$$

În aceste relații, R_{zz}^i, R_{zy}^i, R_{yy}^i sînt caracteristicile de rigiditate ale diafragmei i, iar suma se referă la toate diafragmele care alcătuiesc structura la nivelul de calcul j.

Notăm

$$A = \Sigma R_{zz}^i; \quad B = \Sigma R_{yy}^i; \quad C = \Sigma R_{zy}^i; \quad D = A \cdot B - C^2. \tag{2}$$

Din sistemul de ecuații se determină deplasările

$$\Delta_{zz} = \frac{B}{D}, \quad \Delta_{zy} = -\frac{C}{D}.$$

Cunoscînd pentru forța orizontală unitară paralelă cu axa Z deplasările Δ_{zz} și Δ_{zy}, repartizarea pe diafragma i a forței orizontale unitare după direcția Z respectiv Y, este

$$P_{zz}^i = \Delta_{zz} R_{zz}^i + \Delta_{zy} R_{zy}^i = \frac{1}{D}(B \cdot R_{zz}^i - C \cdot R_{zy}^i),$$

$$P_{zy}^i = \Delta_{zz} R_{zy}^i + \Delta_{zy} R_{yy}^i = \frac{1}{D}(B \cdot R_{zy}^i - C \cdot R_{yy}^i),$$

forțe în echilibru cu cele exterioare.

La fel se determină repartizarea forţei orizontale pe o diafragmă i dacă forţa este paralelă cu axa Y, calculînd deplasările cu relaţia

$$\Delta_{yy} = \frac{A}{D}\ ; \quad \Delta_{yz} = -\frac{C}{D}$$

şi repartizările cu relaţia

$$P^i_{yy} = \frac{1}{D}(A \cdot R^i_{yy} - C \cdot R^i_{zy}),$$

$$P^i_{yz} = \frac{1}{D}(A \cdot R^i_{zy} - C \cdot R^i_{zz}).$$

Repartizarea forţei orizontale unitare la pereţi este în echilibru cu forţa orizontală unitară ce acţionează în centrul de rigiditate al structurii (fig. 5), obţinînd

$$\sum_1^n (Z'_i \cdot P^i_{zy} - Y'_i \cdot P^i_{zz}) = Y'_c \cdot 1,$$

$$Y'_c = \frac{B}{D}\left[\sum_1^n Y'_i \cdot R^i_{zz} - \sum_1^n Z'_i \cdot R^i_{zy}\right] + \frac{C}{D}\left[\sum_1^n Z'_i \cdot R^i_{yy} - \sum_1^n Y'_i \cdot R^i_{yy}\right], \tag{3}$$

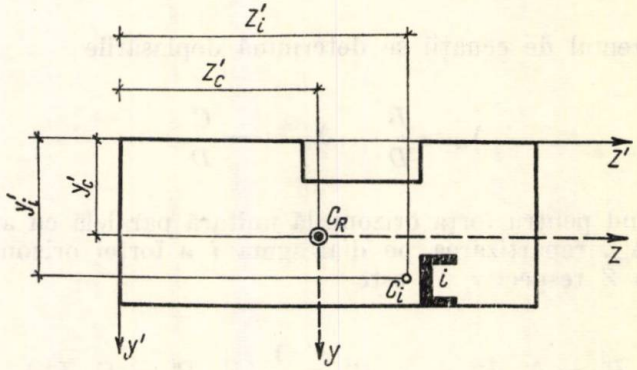


Fig. 5

analog se obţine

$$Z'_c = \frac{A}{D}\left[\sum_1^n Z'_i \cdot R^i_{yy} - \left|\sum_1^n Y'_i \cdot R^i_{yz}\right] + \frac{C}{D}\left[\sum_1^n Y'_i \cdot R^i_{zz} - \sum_1^n Z'_i \cdot R^i_{yz}\right]. \tag{3'}$$

Prin valorile Y'_c şi Z'_c determinăm coordonatele centrului de rigiditate (C_R).

Considerînd că în planul planşeului acţionează un moment ($M_{cR} = 1$ tm) unitar şi că sub acţiunea acestuia planşeul indeformabil se roteşte în jurul punctului C_R cu unghiul φ, atunci deplasarea în direcţia Z va fi φ_{zi}, iar în direcţia Y va fi φ_{yi} pentru diafragma i.

Repartizarea încărcării din momentul unitar la diafragme este în echilibru cu momentul unitar care produce rotirea planşeului indeformabil cu unghiul φ, obţinînd

$$Z_i \cdot P^i_{\varphi y} - Y_i \cdot P^i_{\varphi z} = \varphi \left[\sum_1^n Y_i^2 \cdot R^i_{zz} - 2 \sum_1^n Z_i \cdot Y_i \cdot R^i_{zy} + \sum_1^n Z_i^2 \cdot R^i_{yy} \right] = 1.$$

Notăm

$$G = \sum_1^n Y_i^2 \cdot R^i_{zz} - 2 \sum_1^n Z_i \cdot Y_i \cdot R^i_{zy} + \sum_1^n Z_i^2 \cdot R^i_{yy};$$

atunci

$$Z_i \cdot P^i_{\varphi y} - Y_i \cdot P^i_{\varphi z} = \varphi \cdot G = 1. \tag{4}$$

Rotirea planşeului pentru un moment unitar este egală cu $\varphi = \frac{1}{G}$, de unde

$$P^i_{\varphi z} = \frac{1}{G} [Z_i \cdot R^i_{zy} - Y_i \cdot R^i_{zz}],$$

$$P^i_{\varphi y} = \frac{1}{G} [Z_i \cdot R^i_{yy} - Y_i \cdot R^i_{zy}].$$

Repartizarea încărcării din momentul unitar la diafragme datorită rotirii cu unghiul φ a planşeului indeformabil în planul său se calculează cu relaţiile

$$P^i_{\varphi z} = \varphi (Z_i \cdot R^i_{zy} - Y_i \cdot R^i_{zz}),$$

$$P^i_{\varphi y} = \varphi (Z_i \cdot R^i_{yy} - Y_i \cdot R^i_{zy}),$$

unde

$Z_i = Z'_i - Z'_c$ şi $Y_i = Y'_i - Y'_c$ pentru diafragma i.

Pentru o încărcare dată care acţionează orizontal asupra clădirii, valorile P^i_{zz}, P^i_{yz}, $P^i_{\varphi z}$ după direcţia Z şi P^i_{yy}, P^i_{zy}, $P^i_{\varphi y}$ după direcţia Y sînt coeficienţi de repartiţie pentru încărcări orizontale sistematizaţi în tabela 2.

Tabela 2

$A \times a\ Z$		
P^i_{zz}	P^i_{zy}	$P^i_{\varphi z}$
$\frac{1}{D}\left[B \cdot R^i_{zz} - C \cdot R^i_{zy}\right];$	$\frac{1}{D}\left[B \cdot R^i_{zy} - C \cdot R^i_{yy}\right];$	$\frac{1}{G}\left[Z_i \cdot R^i_{zy} - Y_i \cdot R^i_{zz}\right]$
$A \times a\ Y$		
P^i_{yy}	P^i_{yz}	$P^i_{\varphi y}$
$\frac{1}{D}\left[A \cdot R^i_{yy} - C \cdot R^i_{zz}\right];$	$\frac{1}{D}\left[A \cdot R^i_{yy} - C \cdot R^i_{zy}\right];$	$\frac{1}{G}\left[Z_i \cdot R^i_{yy} - Y_i \cdot R^i_{zy}\right]$

Verificarea calculelor se face cu relaţiile

$$\sum_1^n P^i_{zz} = \sum_1^n P^i_{yy} = 1,$$

$$\sum_1^n P^i_{yz} = \sum_1^n P^i_{zy} = \sum_1^n P^i_{\varphi y} = \sum_1^n P^i_{\varphi z} = 0.$$

3. MODUL DE CALCUL

a) Stabilirea pe planul clădirii a formei diafragmei şi numerotarea diafragmelor.

b) Stabilirea caracteristicilor geometrice pentru fiecare diafragmă.

c) Determinarea caracteristicelor de rigiditate pentru fiecare diafragmă (relaţia (1) şi (1′).

d) Determinarea coeficienţilor de calcul: A, B, C, D (relaţia (2)).

e) Determinarea coordonatelor centrului de rigiditate al structurii: Y'_c şi Z'_c (relaţia (3) şi (3′), precum şi coordonatele fiecărei diafragme faţă de centrul de rigiditate: Z_i şi Y_i.

f) Determinarea unghiului de rotire φ (relaţia (4)).

g) Determinarea coeficienţilor de repartiţie pentru încărcarea orizontală (după relaţiile din tabela 2).

h) Determinarea rezultantei încărcărilor orizontale (R_{vj}) la nivelul de calcul j:

$$R_{vj} = p \cdot L \cdot h_j,$$

unde

p este presiunea de calcul a vîntului,
L — lungimea de clădire pe care acţionează presiunea vîntului,
h_j — înălţimea etajului.

i) Determinarea momentului dat de rezultanta R_{vj} care acţionează în planul planşeului:

$$M_{cR} = R_{vj} \cdot d,$$

unde

$$d = Z_c' - \frac{L_z}{2} \text{ dacă } R_{vj} \| \text{ axa } Y,$$

$$d = Y_c' - \frac{L_y}{2} \text{ dacă } R_{vj} \| \text{ axa } Z$$

sau, dacă R_{vj} este de o direcţie oarecare, se determină valoarea lui d ca în figura 6, cunoscînd unghiul φ de acţiune a forţei orizontale faţă de planul vertical al clădirii.

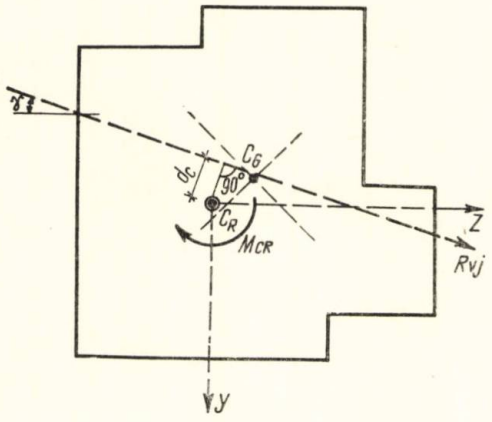


Fig. 6

j) Repartizarea încărcării orizontale la diafragmele verticale după direcţiile de bază Z şi Y se face cu relaţiile

$$R_{vz}^i = P_{zz}^i \cdot R_z + P_{yz}^i \cdot R_y + P_{\varphi z}^i \cdot M_{cR},$$

$$R_{vy}^i = P_{zy}^i \cdot R_z + P_{yy}^i \cdot R_y + P_{\varphi y}^i \cdot M_{cR},$$

unde R_z şi R_y sînt proiecţia rezultantei forţelor orizontale R_{vj} după direcţia Z şi Y.

Se calculează la diafragma i forţele orizontale aferente pentru fiecare nivel.

k) Determinarea forţelor tăietoare T^i_{yj}, respectiv T^i_{zj}, şi a momentelor încovoietoare M^i_{yj}, respectiv M^i_{zj}, pentru diafragmă (i) după direcţiile Y şi Z la fiecare nivel (j).

Notă. Prin i se notează numărul diafragmei şi prin j numărul nivelului.

Metoda prezentată se recomandă pentru calculul construcţiilor în zone seismice, deoarece evită efectul defavorabil de supraîncălzire prin torsiune a diafragmelor verticale la o distribuţie asimetrică în planul clădirii.

Primită la redacţie la 11 mai 1970

BIBLIOGRAFIE

1. OVIDIU MÎRŞU, *Structuri de beton armat*, Institutul politehnic Timişoara, 1966.
2. M. HANGAN, *Construcţii de beton armat*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1963.
3. T. Y. LYN, *Lateral Force Distribution in a Concrete Building Story*, Journal of the ACI, *4* (1951).
4. S. SAHLIN, *Structural interaction of walls and foor slabs*, Journal of the ACI, *4* (1959).
5. K. SÁNDOR, *Vizszintes erökkel terhelt teherhordófalas épületek számitása*, Magyar Épitöipar, *12* (1962).

O METODĂ NUMERICĂ PENTRU STUDIUL MECANISMULUI MANOMETRELOR CU TUB BOURDON

de L. BEINER
Întreprinderea aparate de măsură și control, Otopeni

În lucrare se indică o metodă numerică pentru studiul analitic al mecanismului manometrelor cu tub Bourdon, concretizată în doi algoritmi convenabili tratării pe calculator. Unul dintre algoritmi servește la verificarea funcționării unui mecanism dat, în timp ce altul se folosește la proiectarea și la optimizarea unui mecanism, pornind de la anumite date inițiale.

1. INTRODUCERE

Manometrele cu tub Bourdon se numără printre cele mai răspîndite aparate pentru măsurarea presiunii, datorită construcției lor simple și robuste, bazată pe proprietățile tubului Bourdon, care este elementul elastic de măsurare. Tubul Bourdon este un arc tubular metalic cu secțiunea transversală necirculară (ovală, eliptică sau de profil special), avînd în plan forma unui arc de cerc cu un unghi la centru de 200—270°. Dacă tubul Bourdon este închis la capătul liber, iar capătul deschis este rigidizat în piesa de racord la presiune (fig. 1), atunci, datorită suprapresiunii din interiorul tubului, secțiunea își schimbă forma, tinzînd să devină mai circulară; aceasta provoacă o schimbare a curburii tubului, astfel încît capătul închis se deplasează cu o distanță proporțională cu presiunea

$$\lambda = kp, \tag{1}$$

unde k este o expresie care conține caracteristicile materialului și dimensiunile tubului, iar p presiunea din interiorul tubului în unități compatibile [1]. Din figura 1 se vede că deplasarea totală λ se poate descompune

într-o componentă radială λ_r şi una tangenţială $\lambda_t (\lambda = \sqrt{\lambda_r^2 + \lambda_t^2})$ după cum urmează:

$$\lambda_r = \lambda \frac{1 - \cos\gamma}{\Gamma}, \qquad \lambda_t = \lambda \frac{\gamma - \sin\gamma}{\Gamma}, \tag{2}$$

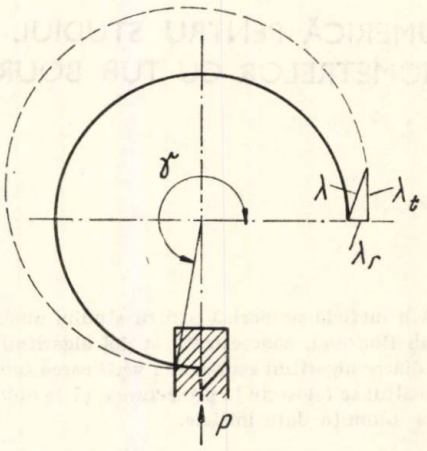


Fig. 1

unde γ este unghiul la centru al tubului Bourdon, iar $\Gamma = \sqrt{(1 - \cos\gamma)^2 + (\gamma - \sin\gamma)^2}$.

Deplasarea λ a extremităţii libere a tubului Bourdon este amplificată şi transformată într-o rotaţie a acului indicator al aparatului prin intermediul mecanismului reprezentat schematic în figura 2. Tija CM este articulată cu un capăt în punctul C solidar cu extremitatea liberă a tubului Bourdon, iar cu celălalt capăt în punctul M aparţinînd plajei de reglare $M_i M_s$, situată în interiorul zonei de reglare AB a sectorului dinţat S. Sectorul dinţat se poate roti în jurul articulaţiei A şi este angrenat cu pinionul P, care face corp comun cu acul indicator, rotindu-se în jurul articulaţiei O (articulaţiile O şi A sînt solidare cu carcasa aparatului, OA fiind distanţa dintre axe a angrenajului pinion-sector).

Cînd punctul C se deplasează în C_1 (fig. 3), punctul M se mişcă pe un arc de cerc de rază AM cu centrul în A pînă în $M_1 (M_1C_1 = MC)$, provocînd o rotire a sectorului dinţat cu unghiul $\alpha = \sphericalangle MAM_1$, care se traduce printr-o rotire a pinionului cu unghiul

$$\Pi = \alpha \frac{z_S}{z_P}, \tag{3}$$

unde z_S şi z_P reprezintă numărul de dinţi al sectorului dinţat (ca roată întreagă), respectiv pinionului. Raportul de amplificare necesar al meca-

nismului se obține prin tatonare, variind poziția punctului M de-a lungul plajei de reglare M_iM_s, unde punctul M_i corespunde amplificării maxime, iar M_s amplificării minime.

În figura 3 sînt reprezentate două variante constructive uzuale ale zonei de reglare AB, și anume:

1) arc de cerc cu centrul în C, tija CM avînd lungimea fixă (cu linie plină în figură);

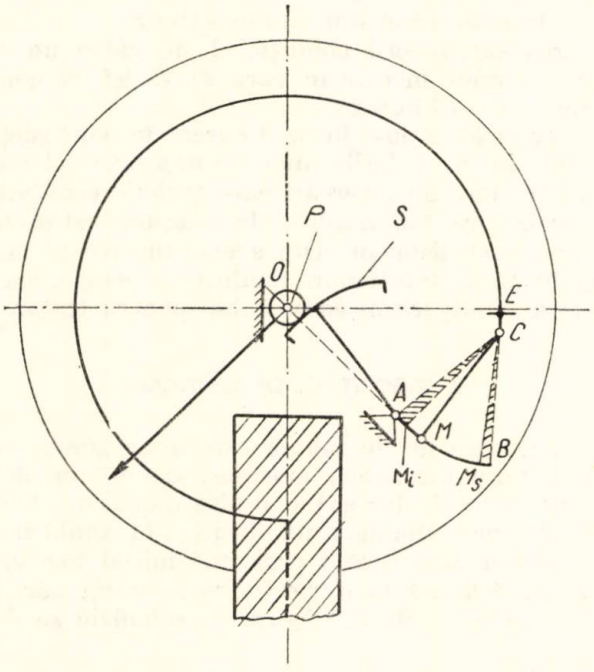


Fig. 2

2) segment rectiliniu în prelungirea axei AD a sectorului dințat, tija CM avînd lungimea reglabilă (cu linie — punct în figură);

Ambele soluții, pe care le vom denumi în continuare varianta 1, respectiv 2, prezintă avantajul că schimbarea poziției punctului de articulație M de-a lungul plajei de reglare nu modifică poziția de repaus a sectorului dințat în raport cu pinionul.

La manometrele cu tub Bourdon din oțel, caracteristicile materialului și menținerea eforturilor unitare sub limita admisibilă conduc, în general, la valori mici ale deplasării Λ la presiunea maximă, de ordinul a 2—3 mm. Ținînd seama și de considerentele de precizie ale aparatului, de eventualele imprecizii de execuție ale elementului elastic și de faptul că mecanismul trebuie amplasat în interiorul unui spațiu limitat, rezultă că este necesară satisfacerea simultană a următoarelor două condiții:

— *condiția I*: pentru poziții ale punctului M situate în limitele plajei de reglare M_iM_s, mecanismul să asigure transformarea oricărei deplasări a tubului Bourdon cuprinse în intervalul 0,8 — 1,2 Λ (adică $\Lambda = kp_{max}$, afectat de abateri posibile de $\pm 20\%$) într-o rotație de 270°

a acului indicator, menținînd erorile de neliniaritate ale mecanismului (respectiv ale transformării deplasării în rotație) sub o anumită limită prescrisă;

— *condiția II*: mecanismul să se înscrie în spațiul disponibil și să fie cît mai compact.

Condițiilor de mai sus li se poate adăuga un criteriu de optimizare, constînd în a maximiza în condițiile date numărul de dinți z_p al pinionului în scopul ameliorării preciziei aparatului.

În practică, problemele care pot apărea în legătură cu mecanismele manometrelor cu tub Bourdon sînt de două tipuri:

— verificarea satisfacerii condiției I de către un mecanism dat;

— proiectarea unui mecanism care să satisfacă condițiile I și II și eventual criteriul de optimizare.

Condițiile de precizie impuse în mod curent în construcția de aparate de măsură, accentuate de valorile mici ale deplasării elementului elastic, precum și numărul mare de încercări care trebuie efectuate atît la verificare, cît și la proiectare, fac inaplicabile metodele estimative sau grafice obișnuite în teoria mecanismelor. Din aceste motive se indică în cele ce urmează o modalitate de soluționare analitică a celor două tipuri de probleme sub forma unor algoritmi convenabili pentru tratare pe calculator.

2. ALGORITMUL DE VERIFICARE

În practica fabricației de manometre apar adesea situații cînd se încearcă folosirea unui mecanism existent, fie cu un alt tub Bourdon compatibil cu mecanismul, dar avînd o altă deplasare, fie cu același tub Bourdon, dar la altă presiune maximă, deci tot în condițiile unei deplasări diferite de cea pentru care fusese proiectat inițial mecanismul. În asemenea cazuri se procedează la o verificare a funcționării mecanismului în noile condiții; cu notațiile din figura 3, calculele se desfășoară după cum urmează:

a) datele inițiale:

— componentele radială și tangențială ale deplasării extremității E a tubului Bourdon la presiunea maximă, Λ_r și Λ_t;

— modulul angrenajului, m; numărul de dinți al pinionului, z_P; numărul de dinți al sectorului dințat, z_S;

— coordonatele punctului de articulație C al tubului Bourdon, x_C, y_C; unghiul de poziție al extremității E a tubului Bourdon față de axa Ox, $\beta = \sphericalangle EOx$; unghiul liniei centrelor OA cu axa Ox, $\psi = \sphericalangle AOx$; unghiul zonei de reglare AB în raport cu punctul C, $\zeta = \sphericalangle ACB$; segmentele neutilizabile constructiv la capetele zonei de reglare, AM_i și BM_s;

b) pe baza datelor, din considerații cinematice și geometrice rezultă (fig. 3):

— distanța dintre axe a angrenajului:

$$OA = \frac{m}{2}(z_P + z_S) = r_{d_P} + r_{d_S}; \tag{4}$$

— coordonatele punctului de articulație ale sectorului dințat:

$$x_A = OA \cos \psi, \qquad y_A = OA \sin \psi; \tag{5}$$

— unghiul de rotație al sectorului dințat, necesar pentru a asigura (la presiunea maximă) o rotație de 270° a pinionului

$$\Omega = 270 \frac{z_P}{z_S}; \tag{6}$$

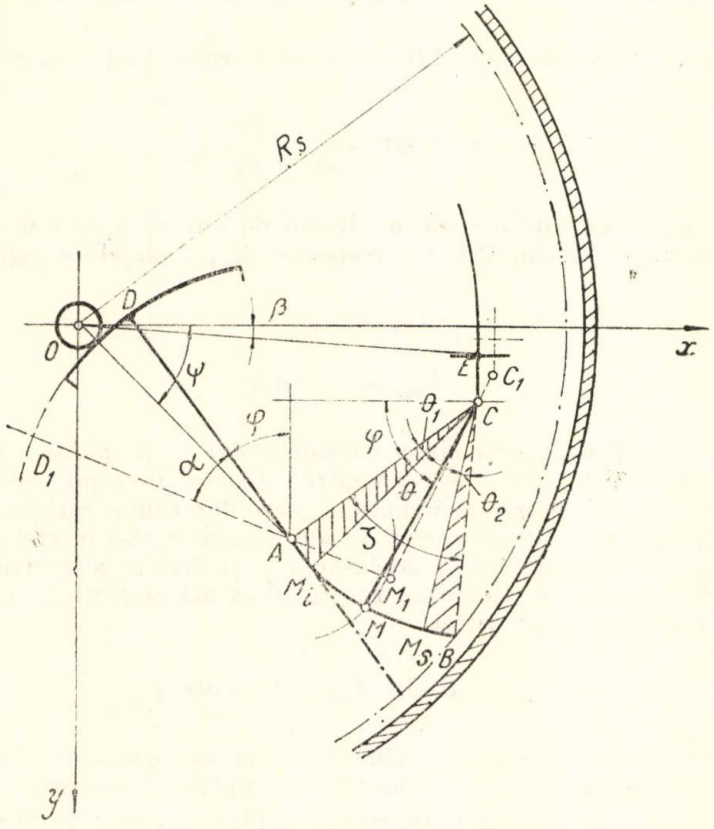


Fig. 3

— raza zonei de reglare AB (varianta 1) :

$$AC = \sqrt{(x_C - x_A)^2 + (y_C - y_A)^2}; \tag{7}$$

— unghiurile moarte corespunzătoare segmentelor neutilizabile AM_i și BM_s :

$$\text{varianta 1} \quad \begin{cases} \theta_1 = 2 \arcsin \dfrac{AM_i}{2 \cdot AC}, \\ \theta_2 = 2 \arcsin \dfrac{BM_s}{2 \cdot AC}; \end{cases} \tag{8}$$

$$\text{varianta 2} \quad \begin{cases} \theta_1 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{AM_i}{AC}, \\ \theta_2 = \operatorname{arc\,tg} \dfrac{BM_s \cos \zeta}{\dfrac{AC}{\cos \zeta} - BM_s \sin \zeta}; \end{cases} \tag{8'}$$

— unghiul dintre axa AD a tijei sectorului dinţat şi verticală :

$$\varphi = \operatorname{arc\,tg} \frac{y_C - y_A}{x_C - x_A}; \tag{9}$$

— limitele de variaţie ale unghiului de poziţie a tijei de reglare θ, corespunzătoare extremităţii M_i, respectiv M_s, a plajei de reglare :

$$\begin{aligned} \theta_{min} &= \theta_1, \\ \theta_{max} &= \zeta - \theta_2; \end{aligned} \tag{10}$$

c) se verifică funcţionarea mecanismului la amplificarea maximă, adică pentru $\theta = \theta_{min}$ şi $\lambda = \Lambda$; pentru aceasta, folosind subprogramul SUB1 descris mai departe la punctul f (care determină rotaţia α a sectorului dinţat şi erorile de neliniaritate ale mecanismului în trei puncte ale scalei, cînd se dau unghiul θ, deplasarea λ şi datele geometrice x_C, y_C, x_A, y_A, AC, β, φ), se calculează rotaţia maximă realizabilă a sectorului dinţat, scrisă condensat astfel :

$$\alpha_{max} = \text{SUB1}\ (\theta_{min};\ \Lambda;\ \text{date}); \tag{11}$$

d) se compară valoarea obţinută α_{max} cu cea necesară Ω şi, funcţie de rezultatul comparaţiei, se adoptă una dintre următoarele decizii :

— dacă $\alpha_{max} \leqslant \Omega$, amplificarea mecanismului este insuficientă sau suficientă la limită, neputînd acoperi eventualitatea unei abateri în minus a deplasării Λ; verificarea se opreşte, fiind necesară modificarea parametrilor constructivi ai mecanismului;

— dacă $\alpha_{max} > \Omega$, se dau în continuare unghiului θ valori crescătoare din grad în grad pînă la $\theta = \theta_{max}$ şi se determină pentru fiecare θ rotaţia α şi erorile corespunzătoare, verificînd de fiecare dată dacă s-a obţinut $\alpha \leqslant \Omega$, ceea ce ar însemna obţinerea amplificării necesare;

— dacă şi la amplificarea minimă, adică pentru $\theta = \theta_{max}$ şi $\lambda = \Lambda$, valoarea rotaţiei minime a sectorului dinţat :

$$\alpha_{min} = \text{SUB1}\ (\theta_{max};\ \Lambda;\ \text{date}), \tag{12}$$

satisface inegalitatea $\alpha_{min} \geqslant \Omega$, înseamnă că amplificarea mecanismului este prea mare, fiind necesară modificarea parametrilor săi constructivi;

e) dacă s-a obținut amplificarea necesară $\alpha = \Omega$ pentru un unghi θ cuprins în interiorul plajei de reglare $\theta_{min} - \theta_{max}$, se verifică cu ajutorul subprogramului SUB2 descris mai departe la punctul g funcționarea mecanismului în cazul cînd Λ este afectat de abateri de $\pm 20\%$, situație care poate apărea în practică din diferite cauze (erorile metodei teoretice de calcul a deplasării Λ, erori dimensionale la fabricația tubului Bourdon, variații ale caracteristicilor materialului, erori de montaj etc.), în acest scop se verifică dacă pentru $\lambda = 0{,}8$ și $\lambda = 1{,}2\ \Lambda$ se poate realiza condiția de funcționare $\alpha = \Omega$ cu unghiuri θ cuprinse în intervalul $\theta_{min} - \theta_{max}$, ceea ce revine la a verifica satisfacerea simultană a inegalităților

$$\begin{aligned} \alpha_{max}^{-0{,}2\Lambda} &= \text{SUB2}\ (\theta_{min};\ 0{,}8\ \Lambda;\ \text{date}) > \Omega, \\ \alpha_{min}^{+0{,}2\Lambda} &= \text{SUB2}\ (\theta_{max};\ 1{,}2\ \Lambda;\ \text{date}) < \Omega; \end{aligned} \tag{13}$$

În cazul cînd chiar și numai una dintre inegalitățile (13) nu este satisfăcută, este necesară, în general, modificarea parametrilor constructivi ai mecanismului pentru a asigura satisfacerea ambelor inegalități; în același mod trebuie procedat dacă se constată că erorile de neliniaritate depășesc limita prescrisă.

f) *subprogramul SUB1* furnizează:

— rotația α a sectorului dințat funcție de datele θ, $\Lambda(\Lambda_r; \Lambda_t)$, x_C, y_C, x_A, y_A, AC, β, φ;

— erorile de neliniaritate ale mecanismului $\varepsilon_{0.25}$, $\varepsilon_{0.50}$, $\varepsilon_{0.75}$ calculate la 25, 50 și, respectiv, 75% din domeniul de măsurare funcție de aceleași date.

Calculele se desfășoară după cum urmează:

— coordonatele articulației deplasate C_1 a tubului Bourdon (fig. 4):

$$\begin{aligned} x_{C_1} &= x_C + \Lambda_r \cos\beta \pm \Lambda_t \sin\beta, \\ y_{C_1} &= y_C + \Lambda_r \sin\beta \mp \Lambda_t \cos\beta, \end{aligned} \tag{14}$$

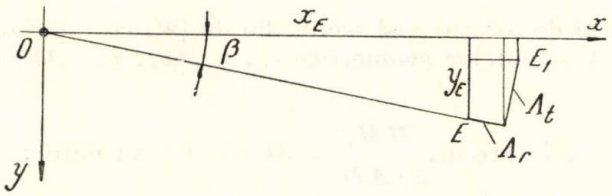


Fig. 4

unde semnul superior sau inferior corespunde, respectiv, cazurilor $y_E > 0$ sau $y_E < 0$;

— raza cercului pe care se poate deplasa punctul M:

$$\begin{aligned} AM &= 2 \cdot AC \sin\frac{\theta}{2} \qquad \text{(varianta 1)}, \\ AM &= AC\ \text{tg}\ \theta \qquad\quad \text{(varianta 2)}; \end{aligned} \tag{14'}$$

— distanţa CM:

$$CM = AC \quad \text{(varianta 1)}, \qquad CM = \frac{AC}{\cos\theta} \quad \text{(varianta 2)}; \tag{14''}$$

— coordonatele punctului M:

$$x_M = x_C - CM \cdot \cos(\varphi + \theta), \qquad y_M = y_C + CM \cdot \sin(\varphi + \theta); \tag{14'''}$$

— din intersecţia cercurilor $(x-x_A)^2+(y-y_A)^2=AM^2$ şi $(x-x_{C_1})^2 + (y-y_{C_1})^2 = CM^2$ rezultă coordonatele punctului deplasat M_1:

$$y_{M_1} = 0{,}5\,(-a_7/a_6 + \sqrt{(a_7/a_6)^2 - 4a_8/a_6}), \qquad x_{M_1} = a_4 y_{M_1} + a_5, \tag{15}$$

unde

$$a_1 = 2(x_A - x_{C_1}); \quad a_2 = 2(y_A - y_{C_1}),$$

$$a_3 = x_{C_1}^2 - x_A^2 + y_{C_1}^2 - y_A^2 + AM^2 - CM^2,$$

$$a_4 = -a_2/a_1; \quad a_5 = -a_3/a_1; \quad a_6 = a_4^2 + 1, \tag{16}$$

$$a_7 = 2a_4a_5 - 2a_4x_{C_1} - 2y_{C_1},$$

$$a_8 = a_5^2 - 2a_5x_{C_1} + x_{C_1}^2 + y_{C_1}^2 - CM^2;$$

— coarda MM_1 care subîntinde unghiul $\alpha = \sphericalangle MAM_1$:

$$MM_1 = \sqrt{(x_M - x_{M_1})^2 + (y_M - y_{M_1})^2}, \tag{17}$$

— unghiul de rotaţie α al sectorului dinţat, corespunzător unghiului θ, deplasării Λ şi datelor geometrice x_C, y_C, x_A, y_A, AC, β, φ utilizate în calcul:

$$\alpha = \arcsin\frac{MM_1}{2 \cdot AM} = \text{SUB1}\,(\theta;\ \Lambda;\ \text{date}); \tag{18}$$

— rotaţiile ideale ale sectorului dinţat (în cazul unei dependenţe liniare ideale între λ şi α) în trei puncte echidistante ale domeniului de măsurare:

$$\alpha^i_{0{,}25} = 0{,}25\alpha, \qquad \alpha^i_{0{,}50} = 0{,}50\alpha, \qquad \alpha^i_{0{,}75} = 0{,}75\alpha; \tag{19}$$

— se reia calculul de la relaţia (14), dînd succesiv deplasării valorile 0,25, 0,50 şi 0,75 Λ şi calculînd rotaţiile reale corespunzătoare ale sectorului dinţat:

$$\alpha^r_{0,25} = \text{SUB1}\ (\theta\,;\ 0{,}25\Lambda\,;\ \text{date}),$$
$$\alpha^r_{0,50} = \text{SUB1}\ (\theta\,;\ 0{,}50\Lambda\,;\ \text{date}), \tag{20}$$
$$\alpha^r_{0,75} = \text{SUB1}\ (\theta\,;\ 0{,}75\Lambda\,;\ \text{date})\,;$$

— rezultă erorile procentuale de neliniaritate ale mecanismului (ale scalei):

$$\varepsilon_{0,25} = \frac{\alpha^r_{0,25} - \alpha^i_{0,25}}{\alpha^i_{0,25}} 100\,\%,$$
$$\varepsilon_{0,50} = \frac{\alpha^r_{0,50} - \alpha^i_{0,50}}{\alpha^i_{0,50}} 100\,\%, \tag{21}$$
$$\varepsilon_{0,75} = \frac{\alpha^r_{0,75} - \alpha^i_{0,75}}{\alpha^i_{0,75}} 100\,\%.$$

g) *Subprogramul SUB2* utilizează datele θ_{min}, θ_{max}, $\Lambda(\Lambda_r\,;\ \Lambda_i)$, $x_C, y_C, x_A, y_A, AC, \beta, \varphi$. Introducînd succesiv în grupul de formule (14) — — (18) valorile 0,8 şi 1,2 Λ pentru deplasare, obţinem rotaţiile corespunzătoare ale sectorului dinţat necesare pentru verificarea satisfacerii condiţiilor (13):

$$\alpha^{-0,2\Lambda}_{max} = \text{SUB2}\ (\theta_{min}\,;\ 0{,}8\,\Lambda\,;\ \text{date}),$$
$$\alpha^{+0,2\Lambda}_{min} = \text{SUB2}\ (\theta_{max}\,;\ 1{,}2\,\Lambda\,;\ \text{date}). \tag{22}$$

Din cele de mai sus reiese că ecuaţia care descrie în mod global cinematica mecanismului, legînd rotaţia α a sectorului dinţat de poziţia θ a tijei de reglare, de deplasarea Λ a extremităţii tubului Bourdon şi de datele geometrice ale mecanismului, este relaţia (18), scrisă sub forma

$$\alpha = \arcsin \frac{MM_1(\theta, \Lambda, \text{date})}{2 \cdot AM(\theta, \text{date})}. \tag{23}$$

Simpla examinare a ecuaţiei transcendente (23) ne relevă imposibilitatea soluţionării directe a problemei verificării mecanismului, soluţionare care ar fi constat în rezolvarea în raport cu necunoscuta θ a ecuaţiei

$$\alpha = \Omega \tag{24}$$

pentru a găsi unghiul θ, care asigură rotirea sectorului dinţat cu valoarea necesară Ω. Acest lucru nefiind posibil, singura modalitate de a verifica

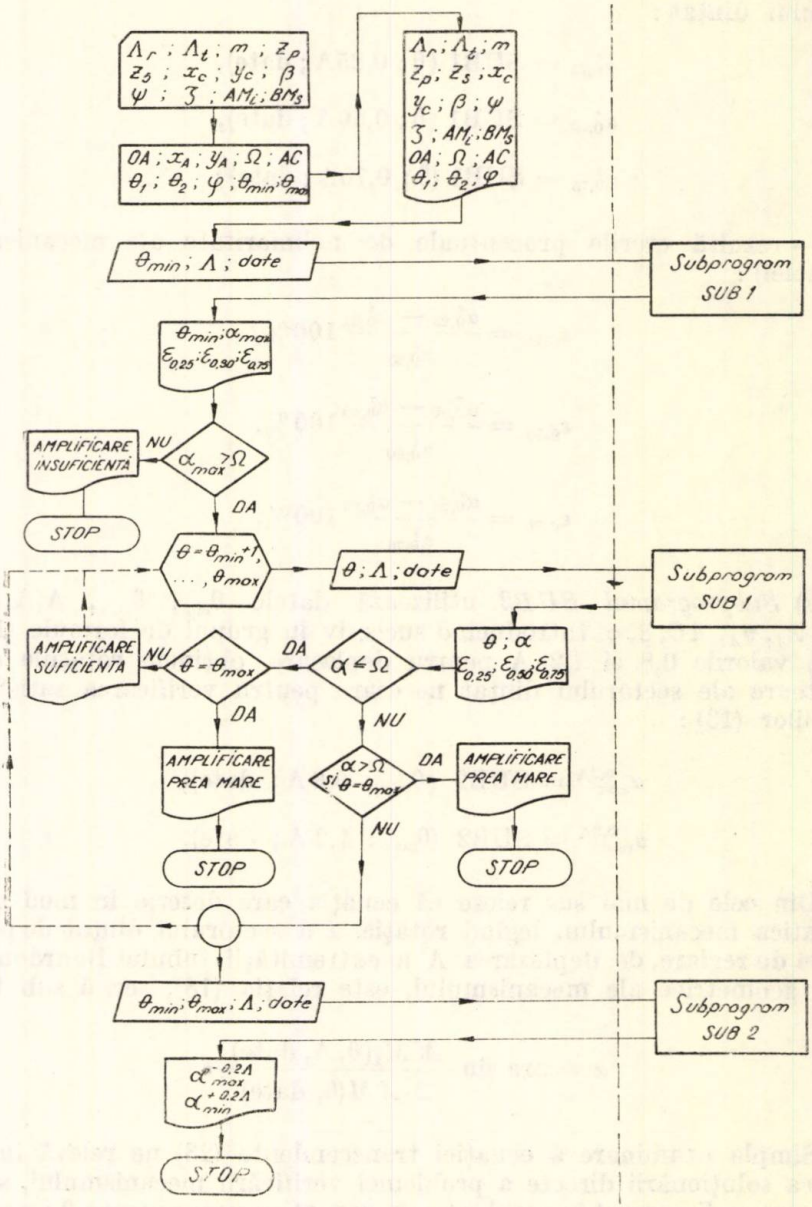

Λ_r ; Λ_t ; m ; z_p
z_s ; x_c ; y_c ; β
ψ ; $\Im$; AM_t ; BM_s
OA ; x_A ; y_A ; Ω ; AC
θ_1 ; θ_2 ; φ ; θ_{min} ; θ_{max}
θ_{min} ; Λ ; date
Subprogram SUB 1
θ_{min} ; α_{max}
$\varepsilon_{0,25}$; $\varepsilon_{0,50}$; $\varepsilon_{0,75}$
AMPLIFICARE INSUFICIENTĂ
NU
$\alpha_{max} > \Omega$
DA
STOP
$\theta = \theta_{min}+1, \ldots, \theta_{max}$
θ ; Λ ; date
Subprogram SUB 1
AMPLIFICARE SUFICIENTĂ
NU
$\theta = \theta_{max}$
DA
$\alpha \leq \Omega$
θ ; α
$\varepsilon_{0,25}$; $\varepsilon_{0,50}$; $\varepsilon_{0,75}$
DA
NU
AMPLIFICARE PREA MARE
STOP
$\alpha > \Omega$ și $\theta = \theta_{max}$
DA
AMPLIFICARE PREA MARE
NU
STOP
θ_{min} ; θ_{max} ; Λ ; date
Subprogram SUB 2
$\alpha_{max} - 0,2\Lambda$
$\alpha_{min} + 0,2\Lambda$
STOP

Fig. 5

analitic funcţionarea unui mecanism dat este cea prin încercări succesive pe calculator în conformitate cu algoritmul descris mai sus (punctele *a-g*) şi reprezentat sintetic în schema logică din figura 5 (simbolurile folosite sînt cele recomandate ISO pentru scheme-bloc de prelucrare a informaţiei).

3. ALGORITMUL DE PROIECTARE ŞI DE OPTIMIZARE

Algoritmul de proiectare şi de optimizare poate fi descris în linii generale astfel:

— alegerea mărimilor OA şi ψ ca parametri care pot varia între limitele OA_{min} şi OA_{max}, respectiv ψ_{min} şi ψ_{max}, stabilite iniţial pe considerente constructive şi de spaţiu disponibil (fig. 6);

— parcurgerea în paşi convenabili a domeniului valorilor admisibile OA — ψ (haşurat în fig. 6) şi proiectarea cîte unui mecanism corespunzător fiecărei perechi de valori OA — ψ şi celorlalte date iniţiale, satisfăcînd condiţia I şi alte eventuale condiţii constructive impuse;

— examinarea ansamblului soluţiilor obţinute şi alegerea soluţiei optime care să realizeze o valoare cît mai mare pentru z_P, menţinînd totodată erorile de neliniaritate ale scalei sub limita admisă şi realizînd un mecanism cît mai compact (în cazul de faţă s-a considerat că alegerea soluţiei optime se face direct de către proiectant prin examinarea rezultatelor obţinute de la calculator; dacă numărul de variante ce se analizează este mare, alegerea poate fi şi ea programată, introducînd în program condiţiile respective).

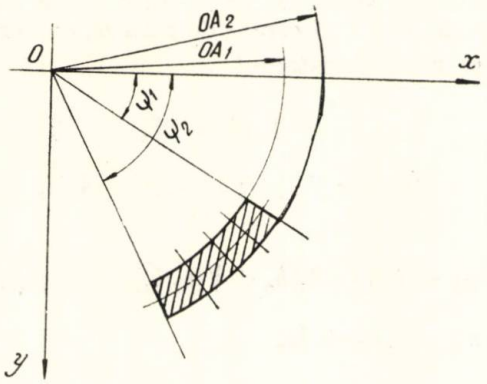


Fig. 6

Se poate remarca imediat că, în timp ce influenţa unghiului ψ asupra criteriului de optimizare nu poate fi anticipată, creşterea distanţei dintre axe OA face să crească numărul de dinţi z_P.

Ne putem permite astfel să limităm investigarea pe direcţia OA la cîteva valori în jurul cotei OA maxime, acceptabilă din punct de vedere constructiv, în special pentru a evita situaţia cînd din cauza alegerii unei valori OA prea mari plaja de reglare ar deveni prea scurtă (mai mică, de exemplu, de 10°).

Desfăşurat, algoritmul de proiectare şi de optimizare se prezintă în modul următor:

a) datele iniţiale (fig. 3):

— componentele radiale şi tangenţială ale deplasării extremităţii E a tubului Bourdon la presiunea maximă, Λ_r şi Λ_t;

— modulul angrenajului, m;

— raza spaţiului disponibil în cadranul xOy, R_s;

— caracteristicile geometrice ale mecanismului: coordonatele punctului de articulaţie C al tubului Bourdon, x_c, y_c; unghiul $\beta = \sphericalangle EOx$; segmentele neutilizabile constructiv de la capetele zonei de reglare AB, AM_i şi M_sB;

— limitele de variaţie ale înclinării ψ a liniei centrelor OA faţă de axa Ox, ψ_{min} şi ψ_{max};

— limitele de variaţie ale distanţei dintre centre OA, OA_{min} şi OA_{max};

b) se introduce prima pereche de valori $\psi - OA$ şi se calculează coordonatele x_A, y_A cu relaţia (5) şi unghiul cu relaţia (9);

c) în funcţie de valoarea φ obţinută se ia una dintre următoarele decizii:

— dacă $\varphi > [(90° - \psi) + 10°]$, adică AD este în stînga lui AO cu mai mult de circa 10°, soluţia este constructiv inacceptabilă, rămînînd prea mulţi dinţi inactivi (de obicei sînt necesari 4—5 dinţi, ca o rezervă în cazul erorilor de montaj); calculul se opreşte şi se reia cu următoarea pereche de valori $\psi - OA$;

— dacă $\varphi < [(90° - \psi) + 10°]$, calculul se continuă;

d) se determină AC, θ_1 şi θ_2 cu relaţiile (7) şi (8) sau (8′);

— se calculează coordonatele extremităţii B a zonei de reglare AB la intersecţia dintre linia AB şi cercul de rază R_s cu centrul în 0;

varianta 1: se rezolvă sistemul

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R_s^2, \\ (x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 &= AC^2, \end{aligned} \tag{25}$$

obţinîndu-se

$$\begin{aligned} y_B &= 0{,}5\,(-b_7/b_6 + \sqrt{(b_7/b_6)^2 - 4b_8/b_6}), \\ x_B &= b_4 y_B + b_5, \end{aligned} \tag{26}$$

unde

$$b_1 = 2x_c;\quad b_2 = 2y_c;\quad b_3 = AC^2 - R_s^2 - x_c^2;\quad b_4 = -b_2/b_1,$$

$$b_5 = -b_3/b_1;\quad b_6 = b_4^2 + 1;\quad b_7 = 2b_4b_5;\quad b_8 = b_5^2 - R_s^2; \tag{27}$$

— *varianta 2*: se rezolvă sistemul

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= R_s^2, \\ y - y_A &= \operatorname{ctg} \varphi (x - x_A), \end{aligned} \tag{28}$$

obținîndu-se

$$x_B = 0{,}5(-c_3/c_2 + \sqrt{(c_3/c_2)^2 - 4c_4/c_2}),$$
$$y_B = x_B \operatorname{ctg}\varphi + c_1, \tag{29}$$

unde

$$c_1 = y_A - x_A \operatorname{ctg}\varphi; \quad c_2 = 1 + \operatorname{ctg}^2\varphi,$$
$$c_3 = 2c_1 \operatorname{ctg}\varphi; \quad c_4 = c_1^2 - R_s^2; \tag{30}$$

— se calculează unghiul $\zeta = \sphericalangle ACB$ al zonei de reglare AB, luîndu-se în considerație următoarele trei situații posibile:

$$x_B - x_C < 0, \quad \zeta = \operatorname{arc\,tg}\frac{y_B - y_C}{x_B - x_C} - \varphi,$$
$$x_B - x_C = 0, \quad \zeta = 90° - \varphi, \tag{31}$$
$$x_B - x_C > 0, \quad \zeta = \operatorname{arc\,tg}\frac{x_B - x_C}{y_B - y_C} + 90° - \varphi;$$

— rezultă mărimea unghiulară a plajei de reglare M_iM_S:

$$p = \zeta - (\theta_1 + \theta_2); \tag{32}$$

e) în funcție de valoarea p obținută, se ia una dintre următoarele decizii:

— dacă $p \leqslant p_a$ (de obicei valoarea minimă admisibilă este $p_a \cong 10°$), soluția nu este constructiv acceptabilă și calculul se reia cu următoarea pereche de valori $\psi - OA$;

— dacă $p > p_a$, calculul se continuă;

f) limitele de variație ale unghiului θ:

$$\theta_{min} = \theta_1,$$
$$\theta_{max} = p + \theta_{min}; \tag{33}$$

g) se dau unghiului θ valori succesive din grad în grad de la θ_{min} la θ_{max}, calculîndu-se pentru fiecare θ, cu ajutorul subprogramului SUB1, rotația sectorului dințat α și erorile de neliniaritate $\varepsilon_{0.25}$, $\varepsilon_{0.50}$, $\varepsilon_{0.75}$ corespunzătoare;

h) în continuare se determină:

— rotația medie a sectorului dințat:

$$\alpha_{med} = \frac{\alpha_{min} + \alpha_{max}}{2}; \tag{34}$$

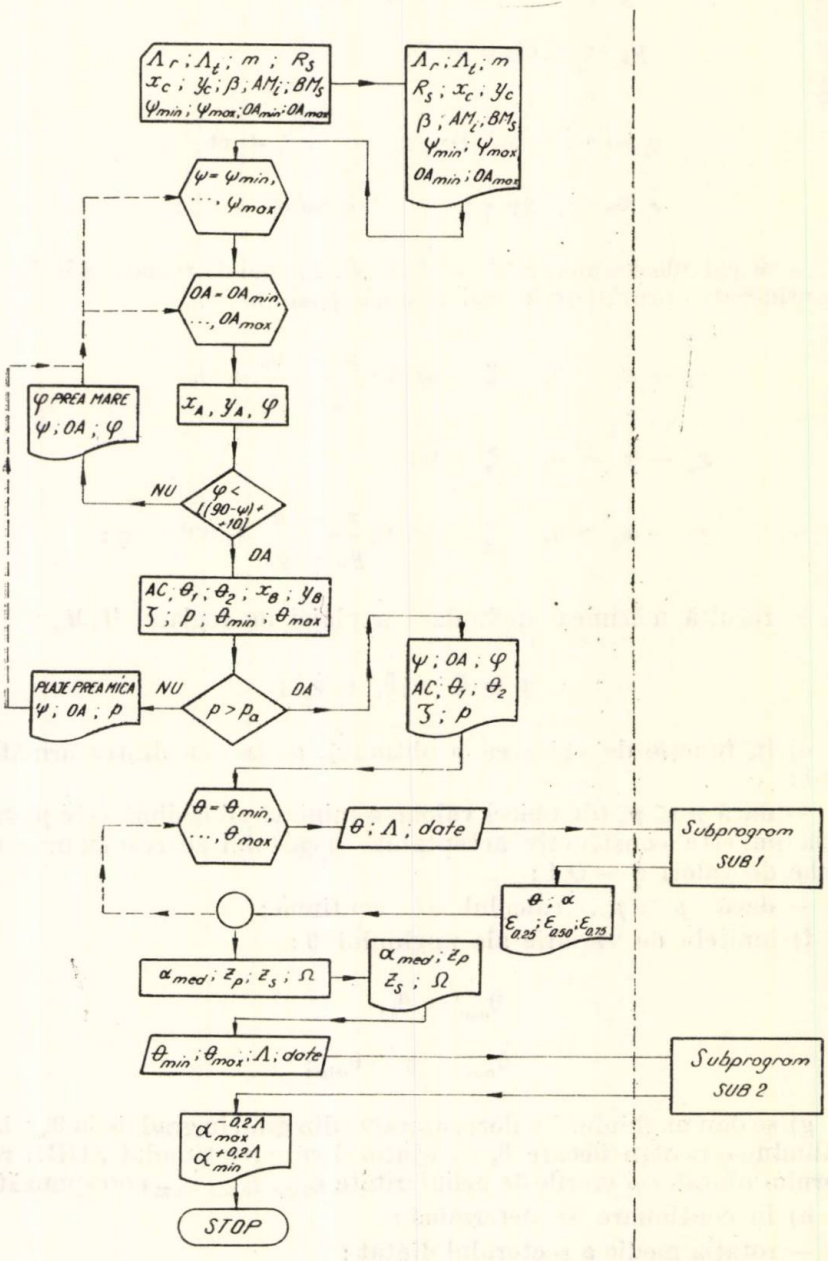

Λ_r; Λ_t; m; R_s
x_c; y_c; β; AM_t; BM_s
ψ_{min}; ψ_{max}; OA_{min}; OA_{max}
Λ_r; Λ_t; m
R_s; x_c; y_c
β; AM_t; BM_s
ψ_{min}; ψ_{max}
OA_{min}; OA_{max}
$\psi = \psi_{min}, \ldots, \psi_{max}$
$OA = OA_{min}, \ldots, OA_{max}$
x_A, y_A, φ
φ PREA MARE
ψ; OA; φ
NU
$\varphi < [(90-\psi)+10]$
OA
AC; θ_1; θ_2; x_B; y_B
ζ; p; θ_{min}; θ_{max}
PUJIN PREA MICA
ψ; OA; p
NU
$p > p_a$
OA
ψ; OA; φ
AC; θ_1; θ_2
ζ; p
$\theta = \theta_{min}, \ldots, \theta_{max}$
θ; Λ; date
Subprogram SUB 1
θ; α
$\varepsilon_{0,25}$; $\varepsilon_{0,50}$; $\varepsilon_{0,75}$
α_{med}; z_p; z_s; Ω
α_{med}; z_p
z_s; Ω
θ_{min}; θ_{max}; Λ; date
Subprogram SUB 2
$\alpha_{max}^{-0,2\Lambda}$
$\alpha_{min}^{+0,2\Lambda}$
STOP

Fig. 7

— numerele de dinți ale pinionului și sectorului dințat care rezultă din condițiile cinematice :

$$\alpha_{med} = 270\frac{z_P}{z_S},$$
$$OA = \frac{m}{2}(z_P + z_S), \tag{35}$$

obținîndu-se

$$z_P = \frac{2 \cdot OA}{m\left(1 + \frac{270}{\alpha_{med}}\right)},$$
$$z_S = \frac{2 \cdot OA}{m} - z_P \tag{36}$$

și

$$\Omega = 270\frac{z_P}{z_S}, \tag{37}$$

unde z_P se rotunjește la un număr întreg, iar z_S rezultă în numere întregi dacă la alegerea datelor inițiale s-au luat măsuri ca OA/m să se împartă exact, ceea ce nu este dificil.

Determinarea caracteristicilor angrenajului folosind pentru α valoarea medie sporește șansele ca mecanismul să satisfacă la extremitățile plajei condițiile de funcționare (13) în cazul cînd deplasarea nominală a extremității tubului Bourdon este afectată de abateri ;

i) se verifică cu ajutorul subprogramului SUB2 satisfacerea condițiilor (13) ;

j) se reia calculul cu următoarea pereche de valori $\psi - OA$ pînă la epuizarea acestora.

Schema logică a algoritmului de proiectare și de optimizare este reprezentată în figura 7.

4. APLICAȚIE

Să se verifice funcționarea unui mecanism de manometru cu tub Bourdon la care se cunosc :

$m = 0{,}2$ mm ; $z_P = 16$ dinți ; $z_S = 294$ dinți,

$x_c = 37$ mm ; $y_c = 7$ mm ; $\beta = 0°$,

$\psi = 45°$; $\zeta = 45°$; $AM_i = BM_i = 6$ mm,

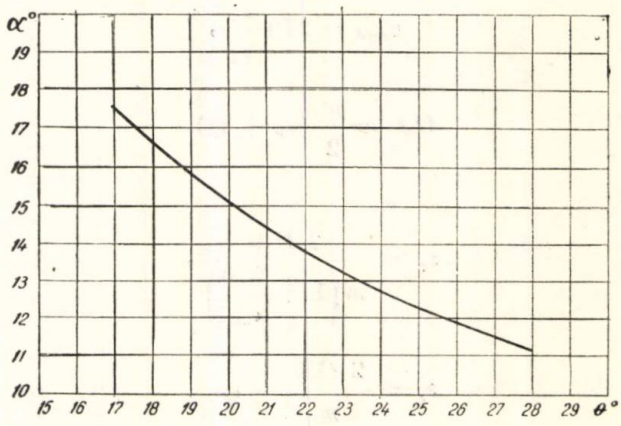

α°
19
18
17
16
15
14
13
12
11
10
15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 θ°

Fig. 8

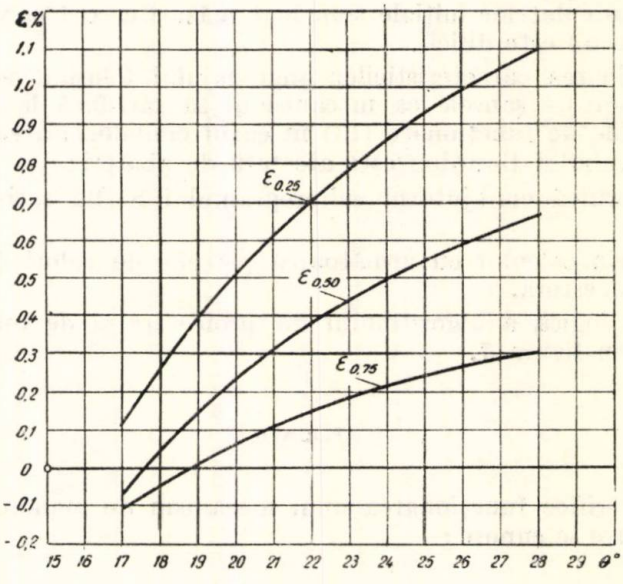

ε%
1.1
1.0
0.9
0.8
0.7
0.6
0.5
0.4
0.3
0.2
0.1
0
- 0.1
- 0.2
ε 0,25
ε 0,50
ε 0,75
15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 θ°

Fig. 9

știind că componentele deplasării nominale a extremității tubului Bourdon la presiunea maximă au valorile

$$\Lambda_r = 0{,}48 \text{ mm}; \qquad \Lambda_t = 1{,}9 \text{ mm}.$$

Desfășurînd calculele în conformitate cu algoritmul de verificare, programul principal ne dă

$$OA = 31 \text{ mm}; \qquad \Omega = 14{,}7°; \qquad AC = 21{,}2 \text{ mm},$$

$$\theta_1 = \theta_2 = 16{,}3°; \qquad p = 12{,}4°; \qquad \varphi = 44{,}7°.$$

Se adoptă valorile

$$\theta_{min} = 17°; \qquad \theta_{max} = 28°$$

și, cu ajutorul subprogramului SUB1, obținem valorile din tabela următoare, reprezentate în figurile 8 și 9.

$\theta°$	$\alpha°$	$\varepsilon_{0,25}$ %	$\varepsilon_{0,50}$ %	$\varepsilon_{0,75}$ %
17	17,5	0,11	−0,07	−0,11
18	16,6	0,26	0,04	−0,05
19	15,8	0,40	0,15	0,01
20	15,1	0,51	0,23	0,06
21	14,4	0,61	0,31	0,11
22	13,8	0,70	0,38	0,14
23	13,2	0,78	0,44	0,18
24	12,7	0,86	0,50	0,21
25	12,3	0,93	0,55	0,24
26	11,9	0,99	0,59	0,26
27	11,5	1,05	0,63	0,28
28	11,1	1,10	0,67	0,31

Rotația medie a sectorului dințat rezultă

$$\alpha_{med} = \frac{\alpha_{min} + \alpha_{max}}{2} = \frac{11{,}1 + 17{,}5}{2} = 14{,}3°$$

și se vede că rotația necesară $\Omega = 14{,}7°$ este în vecinătatea valorii α_{med}, așa cum este recomandabil, realizîndu-se cu un unghi $\theta \cong 20{,}5°$; de asemenea erorile de neliniaritate ale mecanismului sînt mici, în majoritate sub 1%.

Cu subprogramul SUB2 se capătă

$$\alpha_{max}^{-0,2\Lambda} = 14° < \Omega,$$

$$\alpha_{min}^{+0,2\Lambda} = 13{,}3° < \Omega,$$

observînd astfel că mecanismul poate acoperi la amplificarea minimă o eroare de + 20% a deplasării nominale a tubului Bourdon, dar nu şi o eroare de — 20% la amplificarea maximă. Printr-o simplă interpolare se găseşte că la amplificarea maximă mecanismul poate acoperi cel mult o eroare de —15% a deplasării tubului, întrucît

$$\alpha_{max}^{-0,15\Lambda} = \text{SUB2}\,(\theta_{min}\,;\,0{,}85\,\Lambda\,;\,\text{date}) = 14{,}9^\circ > \Omega.$$

Primită la redacţie la 8 iunie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. D. Boiangiu, Gh. Paizi, N. Enescu, *Elementele elastice ale maşinilor*, Bucureşti, Edit. tehnică, 1967.

CONSIDERAȚII PRIVIND CALCULUL ȘI CONSTRUCȚIA UNEI MESE DINAMOMETRICE UNIVERSALE PENTRU MĂSURAREA FORȚELOR DE AȘCHIERE

de GH. ZGURĂ
Institutul politehnic București

În lucrare se prezintă construcția unei mese dinamometrice universale pentru măsurarea forțelor de așchiere fără influența lor reciprocă. Universalitatea construcției propuse constă în folosirea acestei mese dinamometrice la operații de frezare, rabotare, găurire, alezare, broșare etc.

În vederea determinării forțelor de așchiere și a momentului de tensiune în procesul prelucrării mecanice a fost proiectat și construit în cadrul catedrei TCM o masă dinamometrică universală. Masa dinamometrică permite măsurarea simultană și independentă a celor trei componente ale forței de așchiere, precum și a momentului de așchiere, putînd fi utilizată pentru cazul prelucrărilor de frezare, rabotare, găurire, alezare etc.

Principial, masa dinamometrică (fig. 1) este alcătuită din plăcile rigide *1* și *2*, între care se găsesc elementele elastice *3*.

Pentru a înlătura greutățile de ordin practic ce se ivesc la construcția unui astfel de dinamometru dintr-o singură bucată, în cazul de față s-a adoptat o soluție asamblată prin sudură, legătura dintre elementele elastice și plăcile rigide făcîndu-se așa cum rezultă din figura 2.

Măsurarea forțelor se face cu ajutorul unor traductori rezistivi pe principiul elementului elastic circular. Acest principiu constă în următoarele.

Dacă asupra inelului din figura 3*a* acționează o forță radială P, în punctele *1* și *4* (secțiunea I — II) iau naștere eforturi unitare maxime de întindere, iar în punctele *2* și *3* de compresiune. Lipind în aceste locuri mărci tensometrice sub influența forței aplicate P, rezistența electrică a mărcilor *1* și *4* se va mări, iar a mărcilor *2* și *3* se va micșora. Prin legarea acestor mărci în punte Wheatstone, această variație a rezistenței mărcilor va provoca în diagonala de măsurare un dezechilibru ΔU.

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 6, 1971, P. 1447–1460

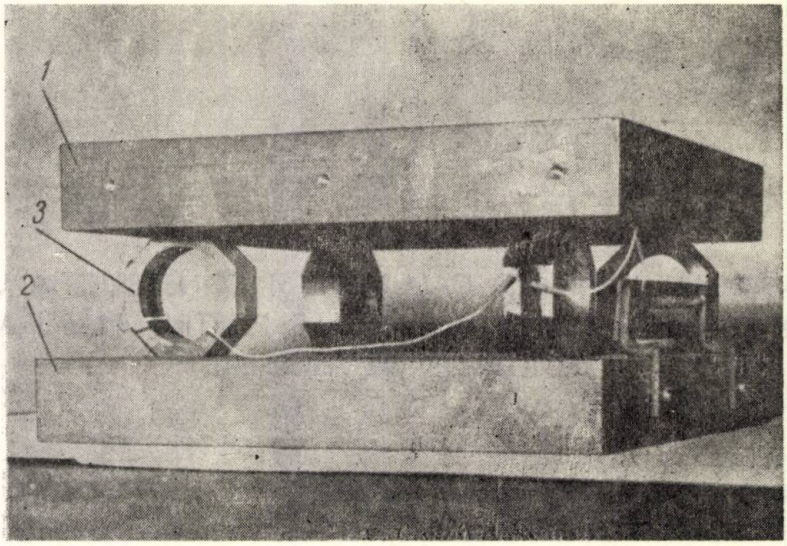


Fig. 1

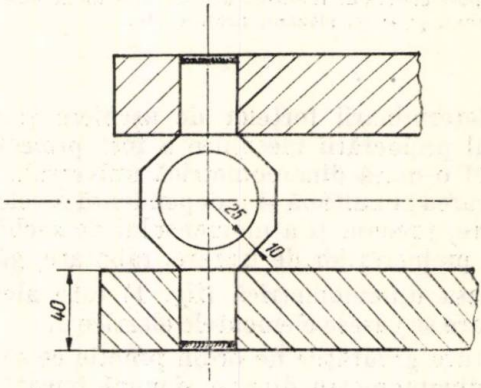


Fig. 2

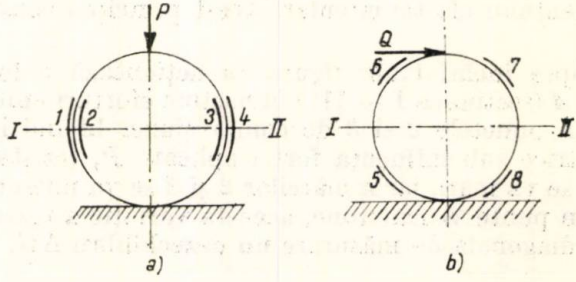


Fig. 3

Diferența de potențial U dintre capetele diagonalei punții Wheatstone se poate calcula cunoscînd tensiunea de alimentare E și rezistențele mărcilor R_1, R_2, R_3 și R_4:

$$U = \frac{ER_1}{R_1 + R_3} - \frac{ER_2}{R_2 + R_4}. \tag{1}$$

În momentul aplicării forței P, mărcile își modifică rezistența electrică, ceea ce va conduce la crearea unei diferențe de potențial suplimentare ΔU, care se poate calcula din expresia funcției diferenței de potențial $U = f(R_1, R_2, R_3, R_4)$. Astfel, dezechilibrul punții de măsurare se poate determina prin intermediul diferențialei totale a funcției U, considerînd variabile rezistențele R_1, R_2, R_3, R_4 prin aplicarea forței P:

$$\mathrm{d}U = \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_1}\mathrm{d}R_1 + \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_2}\mathrm{d}R_2 + \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_3}\mathrm{d}R_3 + \frac{\partial U_{AB}}{\partial R_4}\mathrm{d}R_4. \tag{2}$$

Aplicînd formula diferențialei totale (2) expresiei (1), se obține

$$\mathrm{d}U = E\left[\frac{R_3}{(R_1+R_3)^2}\mathrm{d}R_1 - \frac{R_4}{(R_2+R_4)^2}\mathrm{d}R_2 - \frac{R_1}{(R_1+R_3)^2}\mathrm{d}R_3 + \frac{R_2}{(R_2+R_4)^2}\mathrm{d}R_4\right]. \tag{3}$$

Făcînd observația că mărcile tensometrice se aleg cu rezistență egală R, pentru a putea echilibra puntea Wheatstone și scriind expresia (3) cu creșteri finite, se ajunge la

$$\Delta U = \frac{E}{4R}(\Delta R_1 + \Delta R_4 - \Delta R_2 - \Delta R_3). \tag{4}$$

Dar cum mărcile *1* și *4* sînt întinse, iar *2* și *3* comprimate, au aceeași bază și sînt simetric dispuse, rezultă că între variațiile de rezistență ale lor există relația

$$|\Delta R_1| = |\Delta R_2| = |\Delta R_3| = |\Delta R_4| = \Delta R. \tag{5}$$

Cu aceste considerente, expresia (4) devine

$$\Delta U = \frac{E}{R}\Delta R. \tag{6}$$

Rezultă deci că sensibilitatea măsurării depinde de numărul mărcilor tensometrice, de modul de dispunere a lor pe elementul elastic și depoziția lor reciprocă în puntea Wheatstone.

Dacă asupra elementului elastic circular (fig. 3*b*) acţionează forţa tangenţială Q, aceasta va produce în punctele *5* şi *7* eforturi de întindere, iar în *6* şi *8* de compresiune. Lipind în aceste puncte mărcile tensometrice R_5, R_6, R_7, R_8 şi legîndu-le în punte Wheatstone, se obţine în diagonala de măsurare un dezechilibru $\Delta' U$:

$$\Delta' U = \frac{E}{4R} [\Delta R_6 + \Delta R_7 - \Delta R_5 - \Delta R_8]. \tag{7}$$

Dar, cum

$$|\Delta R_6| = |\Delta R_7| = |\Delta R_8| = |\Delta R_9| = \Delta' R, \tag{8}$$

rezultă că

$$\Delta' U = \frac{E}{R} \Delta' R. \tag{9}$$

Pornind de la principiul elementului elastic circular descris mai sus, s-a proiectat şi s-a construit masa dinamometrică prezentată schematic în figura 4. Masa dinamometrică foloseşte patru elemente circulare A, B, C, D pentru măsurarea forţelor P, Q_1, Q_2 şi a momentului de torsiune M.

Măsurarea componentei P. Componenta P exercită o apăsare asupra celor patru elemente circulare. În vederea măsurării acestei forţe pe inelele circulare sînt lipite mărcile tensometrice *1*, *3*, *5*, *7*, în care iau naştere eforturi de întindere, şi *2*, *4*, *6*, *8*, care sînt supuse la compresiune. Faţă de solicitarea menţionată, mărcile tensometrice sînt legate într-o punte Wheatstone, aşa cum se arată în figura 5 *a*.

La diagonala de măsură a punţii Wheatstone alimentate cu potenţialul E, apare un dezechilibru ΔU_p :

$$\Delta U_P = \frac{E}{4R} (\Delta R_1 + \Delta R_3 + \Delta R_5 + \Delta R_7 - \Delta R_2 - \Delta R_4 - \Delta R_6 - \Delta R_8). \tag{10}$$

După cum mărcile folosite au aceleaşi caracteristici, se vede că

$$\Delta R_1 = \Delta R_3 = \Delta R_5 = \Delta R_7 = -\Delta R_2 = -\Delta R_4 = -\Delta R_6 = -\Delta R_8 = \Delta R, \tag{11}$$

Cu care relaţia (10) devine

$$\Delta U_P = \frac{2E}{R} \Delta R. \tag{12}$$

Măsurarea componentelor Q_1 *sau* Q_2. Pentru măsurarea componentei Q_1 se folosesc elementele elastice A și C, iar pentru componenta Q_2, B și D. În acest caz, componenta Q_1 sau Q_2 acționează tangențial asupra elementelor elastice, așa cum se arată principial în figura 3 *a*.

Puntea Wheatstone pentru măsurarea componentei Q_1 este alcătuită din mărcile tensometrice *9*, *10*, *11*, *12*, iar pentru măsurarea lui Q_2 din *13*, *14*, *15*, *16*. Mărcile *10* și *11* sînt supuse la întindere, iar *9* și *12* la compresiune.

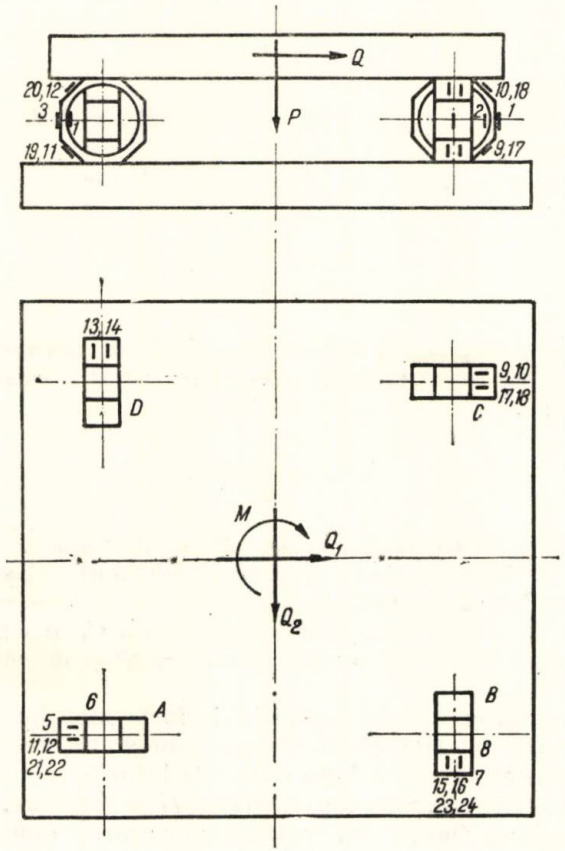
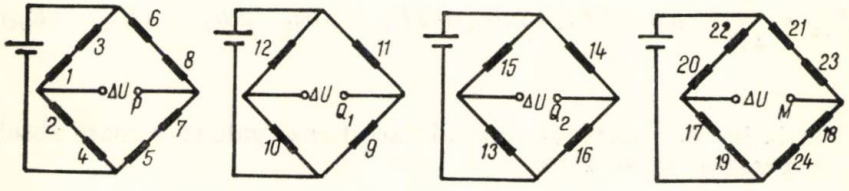


Fig. 4



a) b) c) d)

Fig. 5

Similar pentru Q_2, mărcile *14* şi *16* sînt solicitate cu eforturi de întindere, iar *13* şi *15* de compresiune. Legarea mărcilor pentru măsurarea acestor componente este arătată în figurile 5 *b* şi 5*c*.

Dezechilibrul care apare la diagonala de măsură a punţii din figurile 5 *b* şi 5 *c* se poate calcula cu relaţia

$$\Delta U_{a_1} = \frac{E}{4R}(\Delta R_{10} + \Delta R_{11} - \Delta R_9 - \Delta R_{12}). \tag{13}$$

Din considerentele amintite mai sus avem

$$\Delta R_{10} = \Delta R_{11} = -\Delta R_9 = -\Delta R_{12} = \Delta R. \tag{14}$$

Cu acestea, relaţia (12) se poate scrie sub forma

$$\Delta U_{a_1} = \frac{E}{R}\Delta R.$$

Pentru componenta Q_2, relaţia de calcul este aceeaşi, cu deosebirea că mărimea ΔR va reprezenta în acest caz variaţia rezistenţei mărcilor *13*, *14*, *15*, *16*:

$$\Delta U_{a_2} = \frac{E}{R}\Delta R.$$

Măsurarea momentului de torsiune M. Pentru măsurarea momentului de torsiune M se folosesc toate cele patru elemente elastice. Solicitarea creată de momentul M asupra elementelor elastice este similară aplicării unor forţe egale în sensul lui Q_1 pentru elementul C, în sens invers pentru elementul A, în sensul lui Q_2 pentru elementul B şi în sens invers pentru elementul D.

Din solicitarea creată de cuplurile de forţe menţionate se crează pe semiinelele dinspre exterior eforturi de compresiune, respectiv întindere conform principiului expus în figura 3*b*. Pe laturile înclinate ale elementelor elastice s-au lipit mărcile tensometrice *17* — *24*, care, legate în punte Wheatstone conform figurii *5d*, permit măsurarea momentului de torsiune. Dezechilibrul care se obţine la diagonala de măsură este

$$\Delta U_M = \frac{E}{4R}(\Delta R_{17}+\Delta R_{19}+\Delta R_{21}+\Delta R_{23}-\Delta R_{18}-\Delta R_{20}-\Delta R_{22}-\Delta R_{24}). \tag{14}$$

Variaţiile de rezistenţă sînt şi în acest caz egale în valoare absolută, ceea ce permite să se scrie

$$\Delta U_M = \frac{2E}{R}\Delta R. \tag{15}$$

Montajele în punte Wheatstone sînt astfel făcute, încît componentele nu se influențează reciproc. Dezechilibrul ce se obține ca urmare a măsurării unei componente sau a momentului nu depinde de prezența celorlalte mărimi. Acest lucru se poate pune în evidență prin analizarea caracterului deformațiilor mărcilor tensometrice și modul cum au fost legate în punte.

Calculul de rezistență. Pentru a cunoaște solicitarea elementelor elastice și a mărcilor tensometrice lipite pe acestea s-a făcut un calcul de rezistență spre a avea siguranța că acestea nu ies din zonele de liniaritate. După cum funcționarea mesei dinamometrice are loc în domeniul elastic se va studia problema solicitării elementelor elastice prin suprapunerea efectelor. Astfel vom considera că asupra elementelor elastice acționează pe rînd forța radială P și, respectiv, tangențială Q.

Încărcarea cu forța P. Considerăm că asupra fiecărui inel acționează cîte o forță $P' = \frac{P}{4}$. Așa cum se vede în schema de calcul din figura 6, studiul se poate face pe o jumătate de cerc.

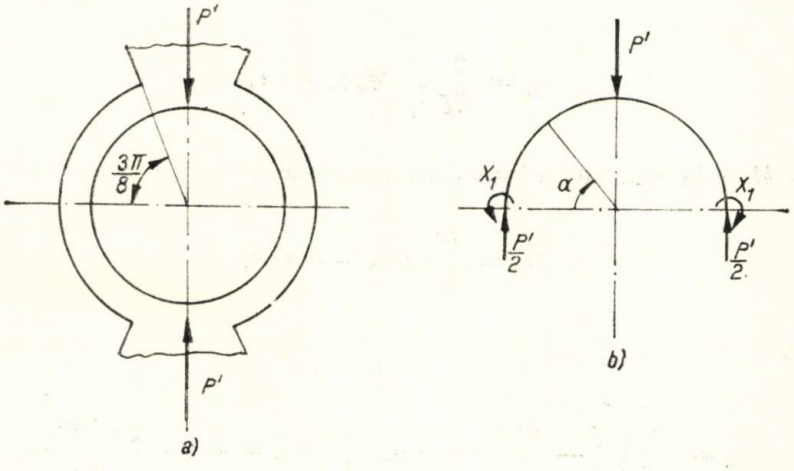


Fig. 6

Din ecuațiile de echilibru pe verticală în secțiune, avem

$$X_2 = \frac{P'}{2}, \tag{16}$$

Momentul încovoietor în secțiune se va calcula aplicînd metoda Maxwell-Mohr. Necunoscuta se notează cu X_1.

Ecuația de deplasare în acest caz este

$$\delta_{11}X_1 + \delta_{10} = 0, \tag{17}$$

pentru care este necesar să se calculeze δ_{11} și δ_{10} :

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} m^2 R\,\mathrm{d}\,\alpha, \tag{18}$$

în care m este momentul unitar.

Momentul unitar $m = -1$

$$\delta_{11} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} R\,\mathrm{d}\,\alpha = 2{,}36\,\frac{R}{EI}. \tag{19}$$

Coeficientul δ_{11} se calculează cu formula

$$\delta_{10} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} M_0\, m\, R\,\mathrm{d}\,\alpha, \tag{20}$$

în care M_0 este momentul încărcării exterioare :

$$M_0 = \frac{P'}{2} R(1 - \cos\alpha), \tag{21}$$

cu care

$$\delta_{10} = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}}\left[-\frac{P'R}{2}(1 - \cos)\right] R\,\mathrm{d}\,\alpha = -\,0{,}157\,\frac{P'R^2}{EI}, \tag{22}$$

rezultînd

$$X_1 = \frac{\delta_{10}}{\delta_{11}} = -\,0{,}0675\,P'R. \tag{23}$$

Momentul într-o secțiune oarecare se determină acum cu formula

$$M_\alpha = -\,0{,}0675\,P'R + \frac{P'R}{2}(1 - \cos\alpha). \tag{24}$$

Pentru $\alpha = \frac{3\pi}{8}$, momentul $M_\alpha = 0{,}2411 P'R$ are valoarea maximă, iar pentru $\alpha = 30°10'$ devine egal cu zero.

Forța normală într-o secțiune oarecare se calculează cu formula

$$N_\alpha = -\frac{P'}{2}\cos\alpha. \tag{25}$$

Diagramele de momente și de forțe normale sînt reprezentate pentru cazul solicitării inelului cu forța P' în figurile 7 *a* și *b*.

Încărcarea cu forța Q. Considerăm că asupra fiecărui inel acționează o forță tangențială Q, așa cum se vede din schema de calcul din figura 8.

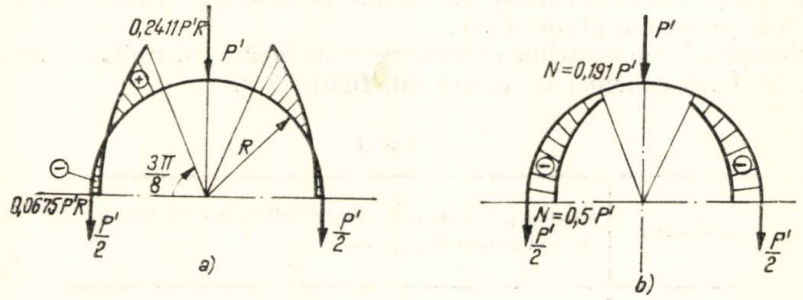


Fig. 7

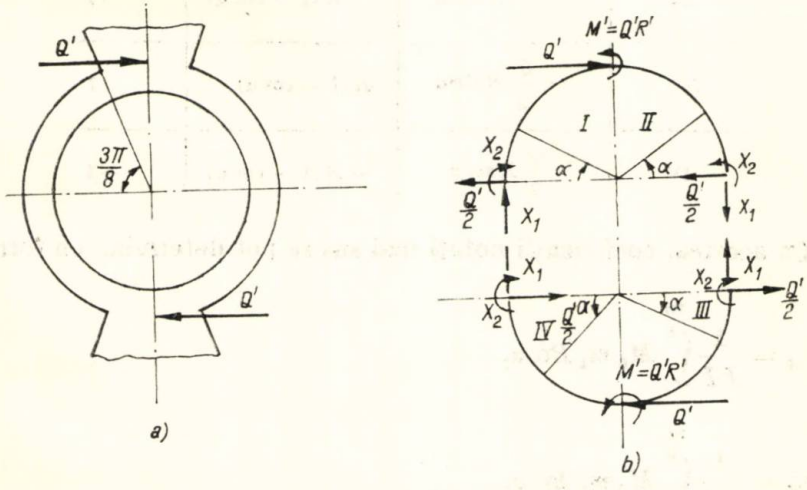


Fig. 8

Din echilibrul elementului în ansamblu se determină momentul M' din porțiunile încastrate:

$$M = QR. \tag{26}$$

Calculul se face pe cele două jumătăți de cerc, așa cum se arată în schema din figura 8*b*.

Necunoscutele X_1 și X_2, notate pe sistemul de bază, se determină cu metoda Maxwell-Mohr, folosind sistemul de ecuații

$$\begin{aligned} \delta_{11}X_1 + \delta_{12}X_2 + \delta_{10} = 0, \\ \delta_{21}X_1 + \delta_{22}X_2 + \delta_{20} + 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Determinarea coeficienților δ_{11}, δ_{12}, δ_{10}, δ_{21}, δ_{22} și δ_{20} se face luînd în considerație deformațiile ce se produc pe cele patru porțiuni I — IV, delimitate pe sistemul de bază.

Momentele încărcărilor exterioare și al încărcării unitare sînt determinate pe baza schemei de calcul din figura 8 *b*.

Tabela 1

Porțiunea	Momentul încărcării exterioare M_0	Momentul încărcării unitare	
		m_1	m_2
I	$\frac{Q'}{2}R\sin\alpha$	$R(1-\cos\alpha)$	1
II	$-\frac{Q'}{2}R\sin\alpha$	$-R(1-\cos\alpha)$	−1
III	$-\frac{Q'}{2}R\sin\alpha$	$R(1-\cos\alpha)$	1
IV	$\frac{Q'}{2}R\sin\alpha$	$-R(1-\cos\alpha)$	−1

Cu acestea, coeficienții notați mai sus se pot determina cu formulele

$$\delta_{10} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} M_0 m_1 R\,d\alpha,$$

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} M_0 m_1 R\,d\alpha,$$

$$\delta_{11} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} m_1^2 R\mathrm{d}\,\alpha, \tag{28}$$

$$\delta_{12} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} m_1 m_2 R\mathrm{d}\,\alpha,$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} m_2^2 R\mathrm{d}\,\alpha.$$

Înlocuind în relațiile (28) datele din tabela 1, se determină

$$\delta_{10} = 0\,;\ \delta_{20} = 0, \tag{29}$$

de unde se trage concluzia că

$$X_1 = 0,\ X_2 = 0. \tag{30}$$

Cu aceste elemente determinate se poate calcula momentul M_α într-o secțiune oarecare :

$$M_\alpha = \frac{Q'}{2} R \sin\alpha. \tag{31}$$

Valoarea maximă a momentului $M_\alpha = 0{,}462\ Q'R$ se obține pentru $\alpha = \frac{3\pi}{8}$.

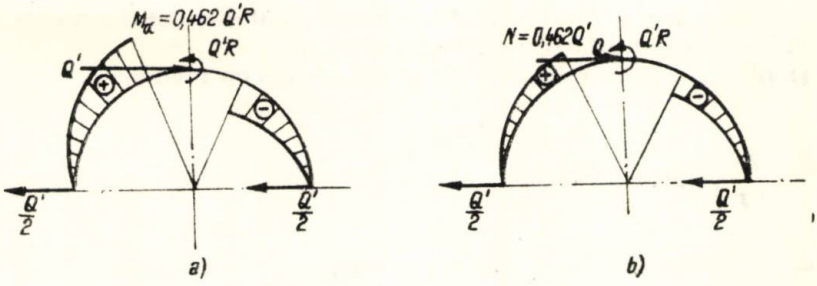


Fig. 9

Forța normală într-o secțiune oarecare este

$$N_\alpha = \frac{Q'}{2} R \sin\alpha \tag{32}$$

și are valoarea maximă $N_\alpha = 0{,}462\ Q'$ pentru unghiul $\alpha = \frac{3\pi}{8}$.

Verificarea eforturilor unitare maxime. Eforturile unitare care apar în elementele elastice trebuie să fie mai mici decît eforturile admisibile pentru a evita ieşirea acestora şi a mărcilor tensometrice din domeniul de liniaritate.

Valoarea acestor eforturi se determină cu relaţiile [1]

$$\sigma_{max} = \frac{N}{A} + \frac{M}{eA} \cdot \frac{d_1}{R_1}, \qquad \sigma_{min} = \frac{N}{A} - \frac{M}{eA} \cdot \frac{d_2}{R_2}, \tag{33}$$

în care

N reprezintă rezultanta forţelor normale în secţiune, în kgf,
A — aria secţiunii, în mm²,
e — distanţa dintre axa secţiunii şi fibra neutră în mm,
R_1, R_2 — razele interioară şi exterioară ale elementului elastic, în mm;
d_1, d_2 — distanţele dintre suprafeţele extreme şi stratul neutru, în mm.

În cazul cînd dinamometrul este încărcat simultan cu o forţă radială $P = 400$ kgf şi o forţă tangenţială Q_1 sau $Q_2 = 400$ kgf, înlocuind în formulele de mai sus datele expuse anterior precum şi elementele de ordin constructiv, se obţin pentru $\sigma_{max} = 12{,}4$ kgf/mm² şi $\sigma_{min} = -8{,}9$ kgf/mm² valori care nu depăşesc limitele admise.

Verificarea rigidităţii elementelor elastice. Verificarea elementelor elastice din punctul de vedere al rigidităţii se face pe baza deformaţiilor care pot apărea datorită forţelor P şi Q.

a) *Rigiditatea în sens vertical.* Deplasarea pe verticală a elementului elastic se va calcula folosind metoda Maxwell-Mohr, considerînd sistemul de bază încărcat cu o forţă verticală unitară.

Deplasarea datorită forţei P' se calculează cu formula

$$v_P = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{3\pi}{8}} M.m.\, R d\alpha, \tag{34}$$

$$M = -0{,}0675\, P'R + \frac{P'}{2} R(1 - \cos\alpha),$$

$$m = r(1 - \cos\alpha),$$

$$v_P = \frac{2}{EI} \int_0^{\frac{3\pi}{8}} \left[-0{,}0675\, P'R + \frac{P'}{2} R(1 - \cos\alpha) \right] R(1 - \cos\alpha)\, R d\alpha =$$

$$= 0{,}062 \frac{P'R^3}{EI}, \tag{35}$$

iar deplasarea datorită forței Q' cu formula

$$v_Q = \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} \frac{Q'}{2} R^3 \sin\alpha(1-\sin\alpha)\,d\alpha + \frac{1}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} -\frac{Q'}{2} R^3\sin\alpha(1-\sin\alpha)d\alpha = 0. \tag{36}$$

Cu aceasta, deplasarea totală pe verticală este egală cu

$$v_P = 0{,}062\,\frac{P'R^3}{EI}$$

și rigiditatea pe verticală este

$$R_V = \frac{P'}{v_P} = \frac{EI}{0{,}062\ R^3} = 7900 \text{ kgf/mm}. \tag{37}$$

Pentru două inele care lucrează simultan, rigiditatea este de două ori mai mare : $R_{v_1} = 15\,800$ kgf/mm.

b) *Rigiditatea pe orizontală.* Deplasarea pe orizontală nu poate apărea decît datorită forței tangențiale Q.

Folosind metodologia expusă mai sus, prin aplicarea unei forțe orizontale, $Q = 1$, se determină cu metoda Maxwell-Mohr deformația unui element elastic :

$$h_Q = \frac{2}{EI}\int_0^{\frac{3\pi}{8}} M\,m\,R\,d\,\alpha, \tag{38}$$

$$M = \frac{Q}{2} R\sin\alpha,$$

$$m = R\sin\alpha.$$

Efectuînd calculele conform relației (38), se determină

$$h_Q = 0{,}286\,\frac{Q'R^3}{EI},$$

relație cu care se determină rigiditatea orientativă a două elemente elastice care lucrează simultan :

$$R_h = \frac{Q'}{h_Q} = \frac{EI}{0{,}286\ R^3} = 17\,600 \text{ kgf/mm}.$$

Rigiditățile astfel obținute permit a se trage concluzia că masa dinamometrică proiectată și construită în Laboratorul de tehnologia construcției de mașini din Institutul politehnic București oferă posibilitatea determinării forțelor de așchiere și a momentului de torsiune pentru regimuri de așchiere folosite în mod curent în prelucrarea mecanică (fig. 10).

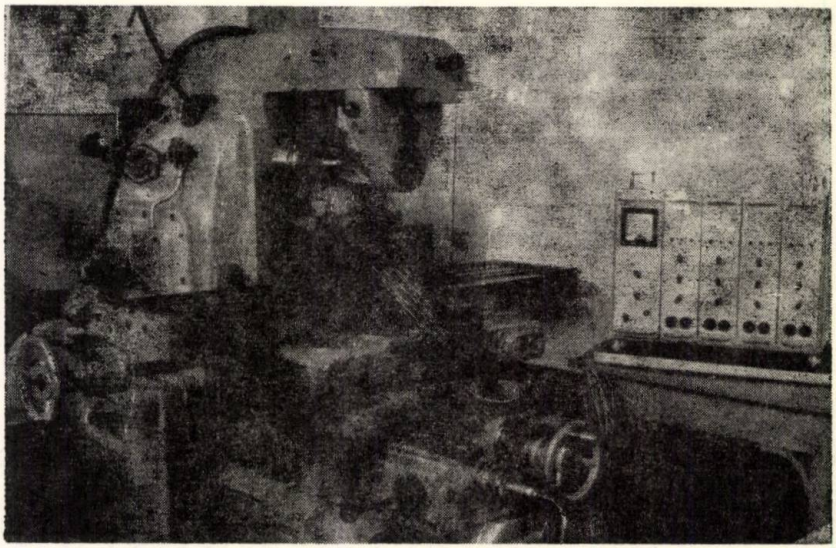


Fig. 10

Dinamometrul prezentat este utilizat cu rezultate bune în cercetarea unor fenomene dinamice la prelucrarea prin așchiere, prezentînd avantajul că cele trei componente și momentul nu se influențează reciproc. Independența măsurării forțelor depinde de lipirea corectă a mărcilor tensometrice, pentru care se recomandă în prealabil un trasaj cît mai îngrijit.

Avantajul construcției descrise constă în faptul că ea se poate utiliza la mai multe genuri de prelucrări, ca frezare, găurire, alezare, rabotare, broșare, rectificare etc.

Primită la redacție la 20 martie 1971

BIBLIOGRAFIE

1. Gh. Buzdugan, *Rezistența materialelor*, București, Edit. tehnică, 1970.
2. N. H. Cook, *Machine-Tool dynamometers*, American machinist, **98**, *10* (1954).
3. M. F. Poletica, *Pribori dlia izmerenia sil rezania i crutiașcih momentov*, Moskva, Mașghiz, 1963.

SISTEM DE AUTOREGLARE PE CALE HIDRAULICĂ A VITEZEI DE AVANS LA MAŞINILE DE PRELUCRAT PRIN PROCEDEUL ELECTROLITIC

de MIRCEA IVAN şi GLIGOR RUSAN
Institutul politehnic Braşov

Pornind de la posibilitatea reglării pe cale hidraulică a vitezei de avans la prelucrarea electrolitică a metalelor, în lucrare se prezintă un sistem nou de reglare. Pentru acest sistem se deduce ecuaţia vitezei de avans în funcţie de mărimea interstiţiului de lucru ca urmare a asimilării celulei electrochimice de prelucrare cu o rezistenţă variabilă. Relaţia obţinută este verificată experimental pe o instalaţie hidraulică.

Un procedeu de prelucrare a materialelor dure şi a suprafeţelor complexe, care se impune din ce în ce mai mult pe plan mondial, tinzînd uneori să înlocuiască prelucrarea prin electroeroziune şi alteori numai s-o completeze, îl constituie prelucrarea electrolitică.

Acest procedeu prezintă unele avantaje în raport cu prelucrarea prin electroeroziune, prin aceea că productivitatea este substanţial mărită, iar electrodul-sculă nu se uzează şi deci în timpul prelucrării nu se introduc erori de formă şi de dimensiune.

Prelucrarea electrolitică a materialelor omogene, la care echivalenţii electrolitici se păstrează constanţi în tot timpul prelucrării, reprezintă cazul ideal de prelucrare. Cazurile reale cuprind şi prelucrări în materiale neomogene, la care, echivalenţii electrochimici fiind variabili, se obţin viteze variabile de dizolvare a materialului şi prin aceasta, la viteze constante de avans, pericolul de scurtcircuitare creşte. Din această cauză, maşinile-unelte de prelucrat prin procedeul electrolitic trebuie să fie dotate cu sisteme de autoreglare a vitezelor de avans a electrozilor-sculă.

În cazul pieselor cu suprafeţe variabile în diferitele secţiuni perpendiculare pe direcţia de avans a electrodului-sculă (locaşuri de matriţe etc.), prelucrarea cu viteze de avans constante prezintă dezavantajul că nu utilizează raţional capacitatea instalaţiei şi nu asigură obţinerea unei productivităţi maxime. Acest lucru se explică prin aceea că vitezele de avans se stabilesc pentru densităţile minime de curent, determinate

ST. CERC. MEC. APL., TOM. 30, NR. 6, 1971, P. 1461–1475

prin raportul dintre curentul maxim furnizat de generator şi suprafaţa finală a piesei, care, în cazul prelucrării suprafeţelor complexe, este maximă. La începutul prelucrării, cînd suprafaţa este minimă, densităţile de curent şi, respectiv, vitezele de avans pot avea valori superioare celor finale.

În cazul prelucrării pe maşini cu avans în trepte, dezavantajul arătat anterior se menţine în cadrul unei trepte de reglare, iar sistemul de programare şi de cuplare a treptelor este pretenţios şi complicat.

Prelucrarea electrolitică a suprafeţelor complexe (suprafeţe variabile în diferitele secţiuni perpendiculare pe direcţia de avans), ca şi cea a suprafeţelor simple (suprafeţe constante în diferitele secţiuni perpendiculare pe direcţia de avans), necesită sisteme de autoreglare a vitezelor de avans. Prelucrarea cu viteze de avans autoreglabile, realizate pe cale electrolitică în funcţie de curentul total absorbit, prezintă în cazul suprafeţelor complexe mari dificultăţi. La aceste suprafeţe, la care raportul dintre suprafaţa finală şi de început a prelucrării este foarte mare (în cazurile extreme infinit), evitarea scurtcircuitelor este dificilă. Acest lucru se datoreşte faptului că raportul mare dintre suprafeţe atrage după sine un raport mare între curentul absorbit în fazele de sfîrşit şi de început ale prelucrării, iar sistemele practice cu asemenea domeniu de reglare sînt greu sau chiar imposibil de executat.

În urma studiilor făcute şi prezentate în lucrarea [1] s-a ajuns la concluzia că pentru maşinile-unelte de prelucrat electrolitic vitezele de avans pot fi autoreglate pe cale hidraulică, variaţia presiunii electrolitului la intrare în zona de lucru constituind mărimea variabilă a impulsului de intrare în sistemul de reglare a avansului.

Pornind de la această posibilitate, în lucrare se studiază teoretic şi experimental un sistem original de autoreglare a vitezelor de avans pe cale hidraulică, superior sistemelor electrice de autoreglare, datorită simplităţii lui constructive şi a unei sensibilităţi mai mari. Acest sistem de autoreglare permite prelucrarea cu viteze de avans autoreglabile şi a suprafeţelor complexe, lucru foarte dificil de realizat cu sistemele electrice de autoreglare.

Sistemul de autoreglare elaborat (fig. 1) se compune din următoarele părţi principale : rezervor de lichid *1*, filtru-sorb *2*, pompă cu roţi dinţate *3*, supapă maximală *4*, manometru *5*, distribuitor cu sertar *6* pentru inversarea sensului de mişcare, sertar de autoreglare a avansului *7*, motor hidraulic *8* pentru mişcarea de avans, rezistenţă variabilă *9*, traductor de presiune cu silfon *10* care acţionează asupra sertarului distribuitorului *7*, arc reglabil *11*, electrod-sculă *12*, piesă de prelucrat *13* şi rezistenţă variabilă pentru circuitul electrolitului *14*.

Sistemul cuprinde două circuite distincte :

— un circuit pentru electrolit, care este circuitul de comandă;

— un circuit pentru ulei, care este circuitul de execuţie.

Interstiţiul de prelucrare δ se reglează în prealabil la valoarea optimă, valoare care determină, în funcţie de forma lui şi de debitul de electrolit necesar, o presiune de intrare în zona de lucru p_1. Presiunea p_1 se transmite traductorului cu silfon *10*, care acţionează asupra sertarului distribuitorului *7* şi prin aceasta asupra arcului reglabil *11*. Prin deplasarea sertarului distribuitorului se variază secţiunea de trecere a debitului de ulei, care determină, la rîndul său, deplasarea motorului hidraulic de avans,

8, variindu-se astfel şi viteza de avans a electrodului-sculă *12*. Presiunea de evacuare din cilindrul hidraulic se reglează cu ajutorul rezistenţei variabile *9*.

Pentru prelucrarea unei piese dintr-un anumit material cu un anumit echivalent electrochimic, interstiţiul optim este δ_0, căruia îi corespunde

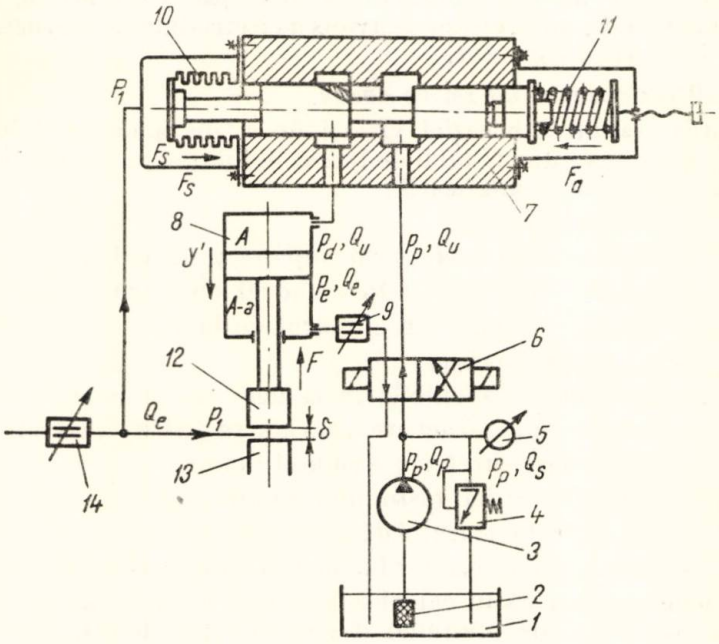


Fig. 1

presiunea p_{10} de intrare în zona de lucru, care determină şi o poziţie corespunzătoare a sertarului distribuitorului. Această poziţie a sertarului determină o anumită secţiune de trecere a uleiului din circuitul de execuţie, asigurîndu-se o viteză de deplasare a motorului hidraulic şi deci a electrodului-sculă, egală cu viteza de dizolvare a materialului de prelucrat. În acest caz, interstiţiul de lucru se păstrează constant.

Dacă în materialul piesei ce se prelucrează există zone neomogene cu echivalenţii electrochimici diferiţi de cei ai materialului de bază, viteza de dizolvare va fi diferită de viteza de avans.

Pentru cazul cînd viteza de dizolvare este mai mică ca cea de avans, interstiţiul δ se micşorează şi determină o creştere a presiunii în zona de lucru. Prin intermediul traductorului cu silfon, această creştere de presiune determină o creştere a forţei axiale aplicate sertarului distribuitorului, învingerea forţei arcului *11* şi o deplasare spre dreapta a sertarului. Prin această deplasare se micşorează secţiunea de trecere a uleiului şi deci viteza de avans a electrodului-sculă, împiedicîndu-se astfel scurtcircuitarea electrozilor.

Nu este necesară o schemă pentru inversarea mişcării de avans în timpul prelucrării, fiind suficientă numai micşorarea vitezei avans sau oprirea sistemului.

În cazul cînd viteza de dizolvare este mai mare decît cea de avans, interstiţiul δ se măreşte şi determină o mişcare a presiunii electrolitului la intrarea în zona de lucru. Datorită acestei micşorări a presiunii, forţa axială aplicată sertarului distribuitorului prin intermediul traductorului cu silfon se micşorează, iar arcul *11* determină o deplasare a sertarului spre stînga. Prin această deplasare se măreşte secţiunea de curgere a uleiului şi deci se va mări viteza de avans a electrodului-sculă, asigurîndu-se astfel un interstiţiu constant.

Stabilirea ecuaţiei vitezei de avans

Pentru stabilirea ecuaţiei vitezei de avans a electrodului-sculă în funcţie de mărimea interstiţiului de lucru, se folosesc notaţiile din figura 1, care au următoarele semnificaţii :

Q_p — debitul pompei ;
Q_s — debitul care trece prin supapa maximală ;
Q_u — debitul util necesar în cilindrul de lucru ;
Q_e — debitul evacuat din cilindrul de lucru ;
p_p — presiunea pompei ;
p_d — presiunea disponibilă în camera activă a cilindrului ;
p_e — presiunea de evacuare din camera pasivă a cilindrului ;
A — secţiunea activă a pistonului motor ;
a — secţiunea tijei pistonului motor ;
d — diametrul sertarului distribuitorului ;
p_1 — presiunea electrolitului la intrarea în zona de lucru.

Trebuie precizat că în calculele următoare nu se iau în considerare pierderile hidraulice (de presiune) şi volumice (de debit).

Dacă se consideră o celulă electrolitică (fig. 2) formată din doi electrozi (sculă şi piesă) de formă dreptunghiulară şi dacă alimentarea cu electrolit se face perpendicular pe latura mare, celelalte două părţi fiind etanşe, debitul de electrolit Q_E care trece prin zona de lucru se poate exprima cu relaţia lui Bernoulli, celula electrolitică putînd fi asimilată cu o rezistenţă variabilă (drosel) :

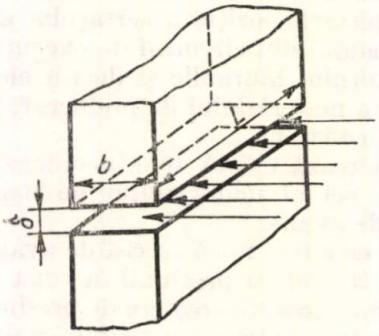


Fig. 2

$$Q_E = K_E \cdot \alpha_E \, L \cdot \delta(t) \cdot \sqrt{p_1 - p_2}, \qquad (1)$$

în care

$k_E = \sqrt{\frac{2g}{\gamma_E}}$, g fiind acceleraţia gravitaţiei,
γ_E este greutatea specifică a electrolitului ;

α_E — un coeficient de debit,
L — lungimea secţiunii de curgere,
δ — interstiţiul de prelucrare,
p_1 — presiunea electrolitului la intrare în zona de lucru,
p_2 — presiunea electrolitului la ieşirea din zona de lucru.

În cazul prelucrării electrolitice, presiunea p_2 este zero, deoarece electrolitul, după ce parcurge zona de lucru, iese în atmosferă, iar relaţia (1) devine

$$Q_E = K_E \cdot \alpha_E \cdot L \cdot \delta(t) \cdot \sqrt{p_1}. \tag{2}$$

Dacă prelucrarea are loc la un debit constant de electrolit, presiunea electrolitului la intrarea în zona de lucru p_1 se poate determina cu relaţia

$$p_1 = \left(\frac{Q_E}{K_E \cdot \alpha_E \cdot L} \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2(t)}. \tag{3}$$

Această presiune se transmite traductorului cu silfon *10*. Forţa care acţionează pe silfon, determinată de presiunea p_1, se calculează cu relaţia

$$F_s = p_1 A_{ef} = p_1 \cdot \pi R^2, \tag{4}$$

în care A_{ef} este suprafaţa efectivă a silfonului, iar

$$R = \frac{R_e + R_i}{2}, \tag{5}$$

R_e şi R_i fiind razele exterioare şi interioare ale tubului gofrat, măsurate la suprafaţa mediană.

Înlocuind pe (5) în (4), se obţine relaţia cu care se determină forţa ce acţionează pe silfon :

$$F_s = p_1 \pi \left(\frac{R_e + R_i}{2} \right)^2. \tag{6}$$

Această forţă, care acţionează asupra sertarului distribuitorului, este echilibrat de forţa F_a, dată de arcul elicoidal *11*. Forţa F_a se determină cu relaţia

$$F_a = k \cdot f, \tag{7}$$

unde k este constanta elastică arcului şi f săgeata sub sarcină.

Dacă se neglijează frecările, pentru poziţia de echilibru cele două forţe F_s şi F_a sînt egale. În acest caz, egalînd expresiile lor şi explicitînd săgeata, rezultă

$$f = \frac{p_1}{k} \cdot \pi \cdot \left(\frac{R_e + R_i}{2} \right)^2, \tag{8}$$

Secţiunea de curgere a debitului de ulei, necesar motorului hidraulic de avans, depinde de valoarea săgeţii f şi deci de valoarea presiunii p_1.

Pentru determinarea secţiunii de curgere trebuie cunoscute forma şi dimensiunile orificiului de curgere (fig. 3).

S-a ales această formă a orificiului, ţinîndu-se cont de încercările făcute pînă în prezent [2], [3] pentru obţinerea debitelor mici în instalaţiile hidraulice.

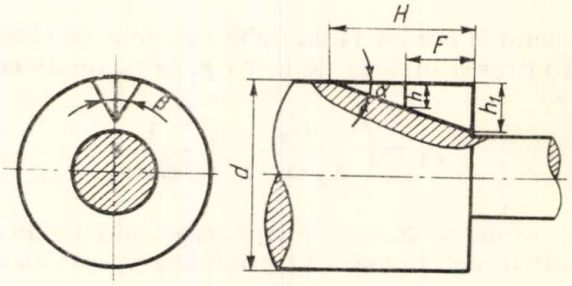


Fig. 3

Secţiunea maximă a orificiului este cea corespunzătoare înălţimii h_1, care se poate determina folosind notaţiile din figura 4.

Din triunghiul AOC rezultă că latura $AC = 2.\frac{d}{2} \cdot \sin\frac{x}{4} = d \sin\frac{x}{4}$.

Dacă în triunghiul ACD se aplică teorema sinusului, se obţine

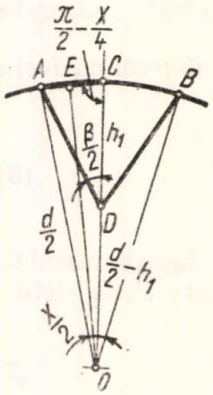


Fig. 4

$$\frac{h_1}{\sin\left[90 - \left(\frac{\beta}{2} - \frac{x}{4}\right)\right]} = \frac{d \sin\frac{x}{4}}{\sin\frac{\beta}{2}}$$

sau

$$\frac{h_1}{\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{x}{4}\right)} = \frac{d \cdot \sin\frac{x}{4}}{\sin\frac{\beta}{2}},$$

Separînd necunoscuta, rezultă

$$\cos\left(\frac{\beta}{2} - \frac{x}{4}\right) \cdot \sin\frac{x}{4} = \frac{h_1}{d} \sin\frac{\beta}{2}. \qquad (9)$$

Ţinînd cont de formulele de transformare a produselor în sume, relaţia (9) devine

$$\sin\frac{x-\beta}{2} = \left(\frac{2h_1}{d} - 1\right)\sin\frac{\beta}{2}; \qquad (10)$$

Rezultă că x are valoarea

$$X = \beta + 2 \text{ arc sin}\left[\left(\frac{2h_1}{d} - 1\right) \sin\frac{\beta}{2}\right]. \qquad (11)$$

Suprafața sectorului circular AOB, cu unghiul la centru x, se poate determina cu relația

$$s_1 = \frac{\pi d^2}{4} \cdot \frac{x}{360} = \frac{\pi d^2}{4} \left\{ \frac{\beta + 2 \arcsin \left[\left(\frac{2h_1}{d} - 1 \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]}{360} \right\}, \quad (12)$$

Secțiunea maximă a orificiului (ADB) se obține dacă se scoate din sectorul circular AOB de două ori suprafața triunghiului AOD. Suprafața triunghiului AOD se calculează cu relația

$$s_2 = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin C = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - h_1 \right) \sin \frac{x}{2} \quad (13)$$

sau

$$s_2 = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - h_1 \right) \cdot \sin \left\{ \frac{\beta + 2 \arcsin \left[\left(\frac{2h_1}{d} - 1 \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]}{2} \right\}, \quad (14)$$

Rezultă că suprafața maximă a orificiului (ADB) se obține cu relația

$$S_1 = s_1 - 2 s_2 = \frac{\pi d^2}{4} \left\{ \frac{\beta + 2 \arcsin \left[\left(\frac{2h_1}{d} - 1 \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]}{360} \right\} -$$

$$- \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - h_1 \right) \sin \left\{ \frac{\beta + 2 \arcsin \left[\left(\frac{2h_1}{d} - 1 \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]}{2} \right\}. \quad (15)$$

Din figura 3 se observă că h_1 poate fi exprimată în funcție de H cu relația

$$h_1 = H \cdot \operatorname{tg} \alpha. \quad (16)$$

Dacă se înlocuiește în relația (15) această expresie a lui h_1, se obține relația finală pentru calculul secțiunii maxime:

$$S_1 = \frac{\pi d^2}{4} \left\{ \frac{\beta + 2 \arcsin \left[\left(\frac{2H}{d} \operatorname{tg} \alpha - 1 \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]}{360} \right\} -$$

$$- \frac{d}{2} \left(\frac{d}{2} - H \operatorname{tg} \alpha \right) \sin \left\{ \frac{\beta + 2 \arcsin \left[\left(\frac{2H}{d} \operatorname{tg} \alpha - 1 \right) \sin \frac{\beta}{2} \right]}{2} \right\}, \quad (17)$$

Orificiul de curgere poate fi asimilat cu o piramidă. În acest caz este valabilă relaţia

$$\frac{S_1}{S} = \left(\frac{h_1}{h}\right)^2, \tag{18}$$

unde S este secţiunea de curgere corespunzătoare înălţimii h.

Din relaţia (18) rezultă

$$S = \frac{S_1}{h_1^2} \cdot h^2 \tag{19}$$

sau, ţinînd cont şi de relaţia (16),

$$S = \frac{S_1}{H^2 \operatorname{tg}^2 \alpha} h^2, \tag{20}$$

Din figura 3 rezultă că

$$h = (H - f) \operatorname{tg} \alpha,$$

iar relaţia (20) devine

$$S = \frac{S_1}{H^2}\left(H - f\right)^2. \tag{21}$$

Dacă înlocuim în relaţia (21) săgeata f cu expresia ei din relaţia (8) se obţine

$$S = \frac{S_1}{H^2}\left[H - \frac{p^1}{k} \cdot \pi\left(\frac{R_e + R_i}{2}\right)^2\right]^2 \tag{22}$$

sau, ţinînd cont şi de relaţia (3),

$$S = \frac{S_1}{H^2}\left[H - \left(\frac{Q_E}{K_E\, \alpha_E L}\right)^2 \frac{1}{\delta^2(t)} \cdot \frac{\pi}{k}\left(\frac{R_e + R_i}{2}\right)^2\right]^2. \tag{23}$$

Debitul de ulei Q_u care trece prin această secţiune şi ajunge în cilindrul de lucru, se determină folosind relaţia lui Bernoulli :

$$Q_u = k_1 \cdot \alpha_1 S \sqrt{p_p - p_d} \tag{24}$$

(coeficienţii k_1, α_1 se referă la ulei, cu valori diferite de K_E şi α_E).

Dacă se ţine cont de secţiunea S dată de relaţia (23), relaţia (24) devine

$$Q_u = K_1 \cdot \alpha_1 \cdot \frac{S_1}{H^2}\left[H - \left(\frac{Q_E}{K_E \cdot \alpha_E \cdot L}\right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2(t)} \cdot \frac{\pi}{2}\left(\frac{R_e + R_i}{2}\right)^2\right]^2 \sqrt{p_p - p_d}. \tag{25}$$

Viteza de avans a pistonului și deci a electrodului-sculă se obține cu relația

$$y' = \frac{Q_u}{A} = \frac{K_1 \cdot \alpha_1 \cdot S_1}{AH^2}\left[H - \left(\frac{Q_E}{K_E \cdot \alpha_E L}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{k}\left(\frac{R_e + R_i}{2}\right)^2 \frac{1}{\delta^2(t)}\right]^2 \sqrt{p_p - p_d}. \quad (26)$$

Dacă se notează

$$\frac{K_1 \cdot \alpha_1 \cdot S_1}{AH^2} = C_4; \frac{\pi}{k} \cdot \left(\frac{Q_E}{K_E \alpha_E L}\right)^2 \left(\frac{R_e + R_i}{2}\right)^2 = C_5,$$

relația (26) devine

$$y' = C_4\left(H - \frac{C_5}{\delta^2(t)}\right)^2 \cdot \sqrt{p_p - p_d} \cdot \quad (27)$$

Folosind această relație, se poate determina presiunea disponibilă p_d din camera activă a cilindrului în funcție de viteza de avans y' :

$$p_d = p_p - \left[\frac{y'}{C_4\left(H - \frac{C_5}{\delta^2(t)}\right)^2}\right]^2 \cdot \quad (28)$$

Dacă se face echilibrul dinamic al pistonului, se poate scrie

$$p_d \cdot A = p_e\,(A - a) + F + my'' + \mu y', \quad (29)$$

unde

F este forța de apăsare pe tija pistonului, determinată de presiunea din zona de lucru;

m — masa ansamblului mobil: piston, tije, electrod-sculă;

μ — coeficientul de frecare lichidă pentru contactul dintre piston și cilindru.

Înlocuind în relația (29) presiunea disponibilă p_d dată de relația (28), se obține

$$\left\{p_d - \left[\frac{y'}{C_4\left(H - \frac{C_5}{\delta^2(t)}\right)^2}\right]^2\right\} A = p_e(A - a) + F + my'' + \mu y', \quad (30)$$

dar

$$F = \frac{p_1}{2} A_1 = \frac{A_1}{2}\left(\frac{Q_E}{K_E \cdot \alpha_E \cdot L}\right)^2 \frac{1}{\delta^2(t)}, \quad (31)$$

în care A_1 este suprafața de lucru a electrodului-sculă.

În cele de mai sus s-a considerat că variația presiunii în zona de lucru este liniară și scade de la valoarea maximă (presiunea de intrare)

la cea minimă (presiunea de ieşire).

Pentru cazul cînd alimentarea cu electrolit a zonei de lucru se face printr-un orificiu central cu suprafaţa frontală a_1, forţa axială F devine

$$F = \frac{A_1 + a_1}{2} \cdot \left(\frac{Q_E}{K_E \cdot \alpha_E \cdot L} \right)^2 \cdot \frac{1}{\delta^2(t)}. \tag{32}$$

Dacă se notează $\frac{A_1 + a_1}{2} \left(\frac{Q_E}{K_E \cdot \alpha_E \cdot L} \right)^2 = C_6$, relaţia (32) devine

$$F = \frac{C_6}{\delta^2(t)}. \tag{33}$$

Ţinînd cont şi de relaţia (33), relaţia (30) poate fi scrisă sub forma

$$p_p \cdot A - \frac{(y)^2}{C_4^2 \left(H - \frac{C_5}{\delta^2(t)} \right)^4} A = p_e(A - a) + \frac{C_6}{\delta^2(t)} + my'' + \mu y' \tag{34}$$

sau, dacă se notează

$$p_p \cdot A = a_1'; \; \frac{A}{C_4^2} = a_2'; \; p_e(A - a) = a_3',$$

relaţia devine

$$a_1' - a_2' \frac{(y')^2}{(H\delta^2(t) - C_5)^4} \delta^2(t) = a_3' + \frac{C_6}{\delta^2(t)} + my'' + \mu y' \tag{35}$$

sau

$$y'' + \frac{a_2'}{m} \frac{\delta^2(t)}{(H \cdot \delta^2(t) - C_5)^4} (y')^2 + \frac{\mu}{m} y' + \frac{C_6}{\delta^2(t) \cdot m} + \frac{a_3' - a_1'}{m} = 0. \tag{36}$$

Această ecuaţie devine de tip Riccati, care se poate rezolva numai dacă se găseşte o soluţie particulară. În cazul de faţă, soluţia particulară este însă foarte greu de găsit.

Din cauză că sistemul hidraulic asigură viteze mici de avans (0,3—3 mm/min) şi că variaţia acestor viteze în timpul prelucrării este foarte mică, sistemul sesizînd variaţiile foarte mici ale interstiţiului de lucru, termenii my'' şi $\mu y'$ pot fi neglijaţi, relaţia (35) devenind

$$a_1' - a_2' \frac{\delta^8(t)}{(H\delta^2(t) - C_5)^4} \cdot (y')^2 = a_3' + \frac{C_6}{\delta^2(t)} \tag{37}$$

sau, explicitînd pe y',

$$y' = \frac{(H\,\delta^2(t) - C_5)^2}{\delta^5(t)} \sqrt{\frac{(a_1' - a_3')\,\delta^2(t) - C_6}{a_2'}}. \tag{38}$$

Dacă se efectuează ridicarea la pătrat și se notează

$$\frac{a_1' - a_3'}{a_2'} = b_1\,;\ \frac{C_6}{a_2'} = b_2,$$

rezultă

$$y' = \left(H^2 \frac{1}{\delta(t)} - 2HC_5 \frac{1}{\delta^3(t)} + C_5 \frac{1}{\delta^5(t)}\right)\sqrt{b_1\delta^3(t) - b_2} \tag{39}$$

sau, notînd $\frac{b_1}{b_2} = a$,

$$y' = \left(H^2 \frac{1}{\delta(t)} - 2HC_5 \frac{1}{\delta^3(t)} + C_5 \frac{1}{\delta^5(t)}\right)\sqrt{b_2}\cdot\sqrt{a\,\delta^2(t) - 1}\,, \tag{40}$$

care reprezintă viteza de avans a sistemului hidraulic în funcție de mărimea interstițiului de lucru δ și caracteristicile constructive ale sistemului.

Pentru următoarele valori adoptate, calculate sau determinate experimental: $H = 5$ mm; $d = 12$ mm; $\alpha = 23°30'$; $\beta = 60°$; $p_p = 6$ kgf/cm^2; $p_e = 2{,}5$ kgf/cm^2; $A = 78{,}5$ cm^2; $a = 3{,}14$ cm^2; $A_e = 4{,}52$ cm^2; $k = 5{,}26$ kgf/mm; $S_1 = 2{,}42$ mm^2; $k_E \cdot \alpha_E = 0{,}57$; $k_1 = 0{,}885$; $\alpha_1 = 0{,}64$; $L = 31{,}4$ mm; $A_1 = 6{,}2$ cm^2, rezultă următoarele valori pentru constante: $C_4 = 0{,}115$; $C_5 = 0{,}55$ mm^3. $C_6 = 2{,}09$ kgf/mm^2; $a_1' = 471$ kgf; $a_2' = 59{,}2 \cdot 10^2$; $a_3' = 188$ kgf; $b_1 = 4{,}78 \cdot 10^{-2}$; $b_2 = 3{,}4.10^{-4}$; $a = 140$ mm^{-2}, iar relația (40) primește forma

$$y' = 0{,}095 \left(\frac{5}{\delta(t)} - \frac{1{,}1}{\delta^3(t)} + \frac{0{,}0605}{\delta^5(t)}\right)\cdot\sqrt{130\ \delta^2(t) - 1}\ \text{[mm/s]}. \tag{41}$$

Reprezentarea grafică a acestei relații este prezentată în figura 5.

Domeniul de definiție este

$$\delta \in (-\infty, -0{,}084] \cup [+0{,}084, +\infty).$$

La prelucrarea electrolitică are sens numai $\delta > 0$, căci $\delta \leqslant 0$ înseamnă scurtcircuitare și deci distrugerea suprafeței piesei ce se prelucrează și a electrodului-sculă. De asemenea sistemul cu caracteristicile prezentate anterior folosește numai domeniul $\delta > 0{,}33$ mm, căci pentru valori inferioare se stabilizează o asemenea presiune de intrare în zona

de lucru p_1, care determină închiderea completă a orificiului de curgere a uleiului şi prin aceasta oprirea sistemului de avans.

Pentru obţinerea unui interstiţiu minim, $\delta < 0{,}33$ mm, trebuie să se folosească un arc cu o constantă elastică k mai mare, capabil să preia

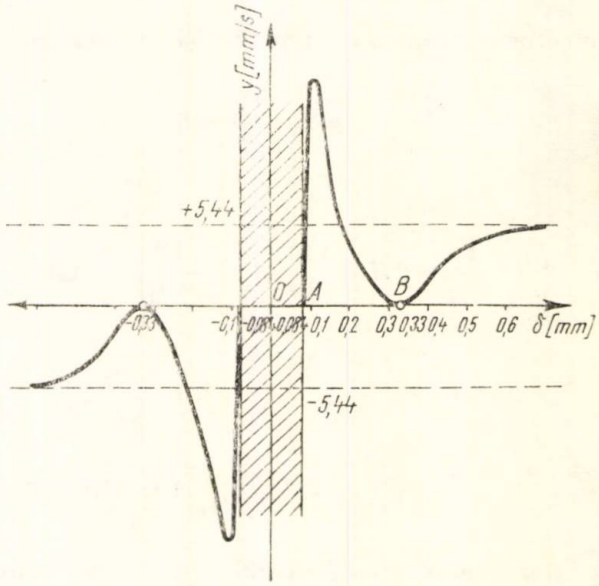


Fig. 5

forţe axiale mai mari, determinate de presiuni mai mari de intrare în zona de lucru.

O dată cu mărirea constantei elastice a arcului, punctul B se deplasează spre A, punct care reprezintă interstiţiul minim ce poate fi atins de către sistem. Pentru acest interstiţiu se creează o presiune în zona de lucru care determină oprirea sistemului.

Dacă se măreşte presiunea la pompă ($p_p = 7$ Kgf/cm^2), interstiţiu minim se micşorează ($\delta_{min} = 0{,}075$), deoarece sistemul poate prelua forţe axiale mai mari şi deci presiuni mai mari în zona de lucru.

Dacă se măreşte presiunea în camera pasivă a cilindrului ($p_c = 3$ kgf/cm^2), se micşorează forţa axială care poate fi preluată şi deci presiunea din zona de lucru. O dată cu micşorarea acestei presiuni se măreşte interstiţiul de lucru minim ($\delta_{min} = 0{,}091$).

Nu este necesar să se ajungă la asemenea valori (mici) ale interstiţiului de lucru, căci în acest caz pericolul de scurtcircuitare este foarte mare, iar suprafaţa piesei ce se prelucrează se distruge repede. De asemenea este nevoie de o presiune foarte mare la intrarea electrolitului în zona de lucru şi deci de construcţii foarte complexe ale pompei de electrolit. Interstiţiile de lucru asigură productivităţi ridicate şi evitarea scurtcircuitărilor, avînd valori cuprinse între 0,25 şi 0,4 mm.

Cu ajutorul relaţiei (40) se pot determina vitezele de avans ale sistemului hidraulic în funcţie de mărimea interstiţiului de lucru şi de caracteristicile constructive ale sistemului.

Pentru verificarea relației s-a folosit dependența dintre mărimea interstițiului δ și presiunea electrolitului la intrarea în zona de lucru p_1, dedusă teoretic și verificată experimental [1].

Astfel, pentru diferite valori ale interstițiului δ s-au determinat valorile corespunzătoare ale presiunii de intrare în zona de lucru. Aceste presiuni, obținute cu ajutorul unui panou hidraulic, au fost trimise traductorului cu silfon prin intermediul unui rezervor de ulei R etanș (fig. 6), simulîndu-se astfel condițiile de lucru ale sistemului de avans hidraulic.

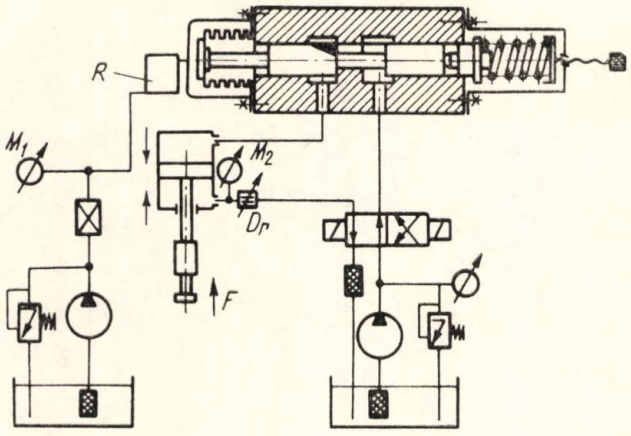


Fig. 6

Dar pentru respectarea tuturor condițiilor de lucru trebuie ca asupra tijei pistonului să acționeze o forță F, determinată de presiunea din zona de lucru.

Pentru o secțiune constantă a electrodului-sculă și pentru un anumit interstițiu de lucru, forța F este constantă și se poate calcula. Această forță va fi aplicată pistonului motorului hidraulic prin creșterea corespunzătoare a presiunii din camera pasivă, presiune ce se reglează cu ajutorul rezistenței variabile D_r și se citește la manometrul M_2.

După reglarea instalației, conform metodicii de mai sus, pentru diferite presiuni ale pompei sistemului de avans și pentru diferite suprafețe frontale ale electrodului-sculă, s-a cronometrat timpul necesar pentru parcurgerea unui anumit spațiu, detrminîndu-se atsfel viteza de deplasare a electrodului-sculă.

O vedere de ansamblu a instalației experimentale se prezintă în figura 7.

Cu urmare a experimentărilor făcute cu electrozi-sculă cu diametrul de 24 mm, în figura 8 s-au trasat cu linii continue curbele experimentale de dependență între vitezele de avans și interstițiul de lucru pentru șase valori diferite ale presiunii pompei sistemului de avans. Pentru comparație, în figură s-au trasat cu linii întrerupte și curbele teoretice ale dependenței vitezei de avans de interstițiul de lucru.

Pentru obținerea punctelor în vederea trasării diagramei teoretice s-a utilizat o mașină electronică de calcul tip Olivetti 101. Reprezentările grafice s-au făcut numai pentru $\delta > 0{,}33$ mm, deoarece sub această valoare se obțin presiuni în zona de lucru, care determină, prin intermediul sistemului de reglare, oprirea sistemului de avans.

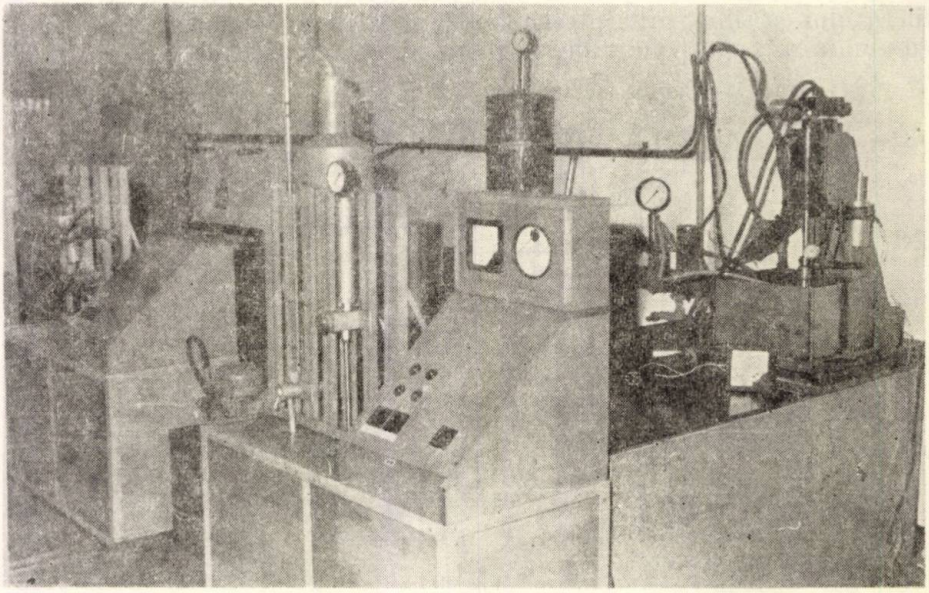


Fig. 7

Din figura 7 se constată o apropiere între curbele teoretice și cele experimentale, observîndu-se totuși o deplasare în jos a curbelor experimentale. Această deplasare se datorește faptului că în calcule nu s-a ținut cont de forțele de frecare dintre piston și cilindrul motorului hidraulic, precum și dintre tija pistonului și capacul cilindrului. Aceste forțe ce se opun deplasării electrodului sculă determină o micșorare a vitezelor reale față de cele teoretice. Influența acestor forțe este mare la viteze mari de avans, dar mică la viteze mici de avans. Din cauză că sistemul lucrează la viteze mici de avans, se confirmă ipoteza pusă în partea teoretică că pentru prelucrarea electrolitică forțele de frecare care apar pot fi neglijate.

Pentru aceeași presiune a pompei, vitezele de avans ale sistemului cresc o dată cu creșterea interstițiului. Mărirea interstițiului determină o scădere a presiunii la intrarea în zona de lucru, precum și a forței aplicate sertarului de autoreglare prin intermediul traductorului cu silfon. O dată cu micșorarea forței, arcul de reglare deplasează sertarul în sensul măririi secțiunii de curgere a uleiului, determinînd astfel mărirea debitului util și a vitezei de avans. Dar începutul prelucrării electrolitice decurge în sensul micșorării vitezei de avans a electrodului-sculă ca urmare a micșorării interstițiului de la o valoare mare la valoarea optimă (1 mm/min pentru $\delta = 0{,}34$ mm).

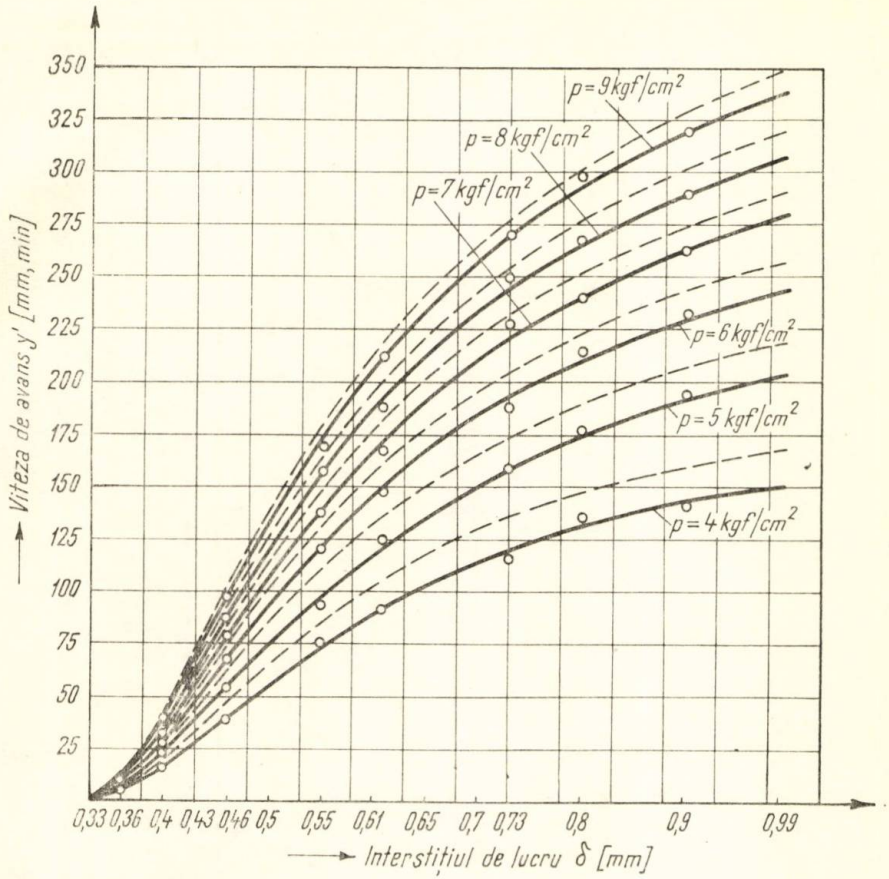


Fig. 8

În concluzie, sistemul prezentat asigură păstrarea cît mai constantă a interstiţiului de lucru optim reglat iniţial, precum şi protecţia maşinii-unelte la scurtcircuitare, prin micşorarea vitezei de avans o dată cu micşorarea interstiţiului de lucru.

Primită la redacţie la 15 septembrie 1970

BIBLIOGRAFIE

1. M. Ivan, G. Rusan, *Studiul posibilităţilor de autoreglare a vitezelor de avans pe cale hidraulică la maşinile de prelucrat electrolitic*, Buletinul Institutului politehnic Braşov, **X**, (1970).
2. S. Acél, *Oelhydraulische Drosselung bei Steuerungen und Regelungen von Werkzeugmaschinen*, Technische Rundschau, *39* (1961).
3. E. Birckel, S. Acél, *Verschmutzungsdrosselung und Filterwirkung in hydraulischen Oelkreisläufer von Werkzeugmaschinen*, Technische Rundschau, *6* (1962).

RECENZII

Werner Albring, *Angewandte Strömungslehre* (Mecanica fluidelor aplicată), Verlag Theodor Steinkopff, Dresden, 1970, XVI + 461 p., 450 fig.

O privire generală asupra conținutului acestui manual, ajuns în nouă ani la a patra ediție, pune în evidență faptul că nu lipsește din el nici una dintre principalele probleme ale mecanicii fluidelor, într-o tratare de bun nivel teoretic, dar cu o grijă specială pentru aspectele aplicative.

Prezentarea materiei urmează una dintre cele cîteva căi ajunse clasice în astfel de manuale. Se începe astfel cu statica lichidelor și gazelor, trecîndu-se apoi la tratarea elementară a mișcării fluidelor ideale. Mișcările potențiale plane se bucură de o atenție deosebită, prezentîndu-se printre altele metoda singularităților, aplicațiile reprezentării conforme și bazele teoriei profilelor și aripilor de anvergură finită. Urmează o tratare destul de sumară a teoriei valurilor și cîteva probleme de capilaritate, de tensiune superficială și de cavitație, acestea trei din urmă grupate destul de arbitrar în același capitol cu cîteva considerații asupra mișcărilor tridimensionale și sufleriilor aerodinamice.

Un capitol interesant este acela consacrat studiului mișcărilor plane pe baza diverselor analogii existente. În alte opt capitole sînt tratate problemele fundamentale ale dinamicii gazelor, mișcările subsoni ce și supersonice, precum și teoria rețelelor de profile în curent supersonic.

Alte șapte capitole cuprind principalele probleme ale mișcării fluidelor vîscoase. Apar aici toate problemele clasice, corespunzînd la soluții exacte sau aproximative ale ecuațiilor Navier-Stokes, precum și principalele aspecte ale teoriei stratului-limită. Problema stabilității mișcărilor laminare este tratată sumar, iar aspectele de interes aplicativ ale teoriei elementare a mișcărilor turbulente sînt diseminate în mai multe capitole.

Ultimul capitol cuprinde o serie de considerații asupra scurgerii în turbomașini.

Fiecare capitol este însoțit de exemple de calcul și de exerciții rezolvate.

Bibliografia, destul de bogată, cuprinde 246 de titluri, în mare parte din literatura germană de specialitate.

Materialul grafic care însoțește textul este în general de bună calitate și sugestiv.

Prezentarea problemelor teoretice într-un mod suficient de riguros și accesibil în același timp, specific școlii germane de mecanică a fluidelor, indică pentru această lucrare o primă destinație ca manual de învățămînt. Ea poate fi însă utilă și specialiștilor, îndeosebi pentru o serie de date experimentale pe care le conține.

T. Oroveanu

RECTIFICARE*

Pag.	rîndul	în loc de	se va citi
1112	6 de sus	$N_{1+1}, \ldots, N_{1+m}$	$N_1 + 1, \ldots, N_1 + m$
1112	7 de sus	$\overset{N}{\ldots \prod \ldots}$ $k = N_{1+m+1}$	$\overset{N}{\ldots \prod \ldots}$ $k = N_1 + m + 1$
1199	13 de sus	$z_{Ap} = \dfrac{\ldots + a(A^2+B^2) + \sin \varphi_1 \ldots}{K}$	$z_{A_p} = \dfrac{\ldots a(A^2+B^2) \sin \varphi_1 \ldots}{K}$
1201	13 de sus	$- \dfrac{aAC \cos \varphi_1 + \ldots}{K}$	$- \dfrac{- aA \cos \varphi_1 + \ldots}{K}$
1208	formula (12)	$\widetilde{\mathcal{L}}^v_{M_0} B \left(E - \dfrac{1}{\delta} m\widetilde{m}B \right) A_0 + \ldots$	$L^v_{M_0} B \left(E - \dfrac{1}{\delta} m\widetilde{m}B \right) (A_0 + \ldots$

*) St. cerc. mec. apl., **30**, 5 (1971)

STUDII ŞI CERCETĂRI DE MECANICĂ APLICATĂ

1971

INDEX ALFABETIC

	Tomul	Nr.	Pag.
ALEXANDRU P. vezi MANOLESCU N. I.	30	3	581
ANTON IOAN, Influenţa parametrilor geometrici şi cinematici asupra caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale turbinelor axiale, I	30	3	495
ANTON IOAN, Influenţa parametrilor geometrici şi cinematici asupra caracteristicilor energetice şi cavitaţionale ale turbinelor axiale, II	30	4	755
ANTONESCU N. N., TH. HUIDU, Stabilirea eforturilor unitare din eclisele lanţurilor cu role şi zale scurte prin metoda fotoelasticităţii	30	3	627
ANTONESCU PĂUN, Calculul cursei elementului condus la mecanismele spaţiale cu patru elemente	30	1	73
ANTONESCU PĂUN, Contribuţii la sinteza cinematică a mecanismelor plane cu patru elemente	30	4	915
APOSTOLESCU N. vezi SĂVULESCU ŞT. N.	30	4	811
ATANASIU M., I. ROŞCA, Clasificarea mecanismelor plane cu ajutorul grafului asociat	30	2	401
BĂDOIU TR. vezi LIBRESCU L.	30	6	1313
BALOGH ELISABETA vezi BRĂDEANU P.	30	4	799
BĂNUŢ V., vezi RĂUTU S.	30	1	197
BEINER L., O metodă numerică pentru studiul mecanismului manometrelor cu tub Bourdon	30	6	1429
BIŢĂ OLGA, Cercetări experimentale privind comportarea politetrafluoretilenei în condiţiile frecării cu alunecare uscată	30	3	559
BLUMENFELD M., CORINA VOICU, H. GHEORGHIU, Calculul iterativ al frecvenţelor proprii de vibraţie la barele drepte cu secţiune variabilă în trepte pe baza metodei celor trei necunoscute	30	6	1353
BOB CORNELIU, Starea de solicitare limită a elementelor de beton armat încovoiate	30	1	209
BOGDAN R. C., D. LARIONESCU, Program la calculatorul electronic pentru tabelarea şi trasarea parametrilor cinematici ai mecanismelor	30	2	363
BOGDAN VIRGIL, Asupra stărilor de eforturi unitare şi de deformaţii dintr-un disc axial-simetric în mişcare de rotaţie	30	4	925
BOTEZ-POPESCU GH. vezi EFTIMIE AL.	30	5	1217
BRĂDEANU P., ELISABETA BALOGH, Stratul-limită disipativ pe corpuri ale căror suprafeţe au temperatură variabilă (soluţii automodelate)	30	4	799
CETĂŢEANU STELIAN, Problema plană a teoriei elasticităţii în coordonate poligonale	30	1	131
CHIRIACESCU SERGIU T. vezi DRĂGHICI GHERMAN	30	4	975
CHIROIU VETURIA vezi RĂUTU S.	30	1	197
CHIROIU VETURIA vezi RĂUTU S.	30	2	307
CHISĂLIŢĂ A., Teorema momentului cinetic în raport cu axa instantanee de rotaţie în mişcarea plană	30	6	1309
CONONOVICI S. vezi PELECUDI CHR.	30	2	385
CONONOVICI S. vezi PELECUDI CHR.	30	3	611
CONONOVICI S. vezi SAVA I.	30	4	869

	Tomul	Nr.	Pag.
CONSTANTINESCU-CĂTUNEȘTI S., O recrudescență a relaxării de efort la elemente longitudinale din oțel supuse la coroziune sub tensiune	30	5	1247
COȘA DAN, Unele aspecte legate de studiul stabilității arcelor prin metoda micilor deplasări	30	5	1203
COZMA CIPRIAN vezi IONESCU VASILE	30	1	25
COZMA CIPRIAN vezi IONESCU VASILE	30	3	535
COZMA CIPRIAN vezi IONESCU VASILE	30	5	1017
CRĂCIUN I., Algoritmi în calculul sistemelor „în lanț" și „ramificate" cu ajutorul grefelor liniare de fluență	30	5	1075
DARABONT A. V., Vibrațiile transversale ale plăcilor plane cu mase concentrate atașate	30	6	1331
DIMITROV B. vezi STĂNESCU C.	30	5	1269
DODOC P., Contribuții la cercetarea mecanismului apariției erorilor la rectificarea și frezarea de înaltă precizie a pieselor cu suprafețe de revoluție	30	5	1257
DODOC P., Contribuții la studiul mecanismului apariției erorilor de prelucrare la frezarea și rectificarea de înaltă precizie a suprafețelor plane cu scule cilindrice (disc)	30	3	721
DRĂGHICI GHERMAN, SERGIU T. CHIRIACESCU, Calculul durabilității sculei și regimului de așchiere folosind programarea matematică	30	4	975
DUCA N. vezi VASILCA GH.	30	4	1001
DUMITRESCU H. vezi TOMA V.	30	2	453
EFTIMIE AL., GH. BOTEZ-POPESCU, Deplasările punctelor și mărimea tasărilor pentru un teren de fundație transversal anizotrop în cazul problemei plane	30	5	1217
FLOREA CORNELIA, Contribuții la studiul cinematic al unui mecanism bielă-manivelă spațial	30	5	1167
GHEORGHIU H. vezi BLUMENFELD M.	30	6	1353
GIURGIU IOAN, LUCIA GIURGIU, Metodă de repartizare a încărcărilor orizontale la clădirile etajate realizate cu diafragme verticale așezate nesimetric	30	6	1419
GIURGIU LUCIA vezi GIURGIU IOAN	30	6	1419
GIUROVICI G. M. vezi PELECUDI CHR.	30	4	881
GOLDENVEIZER A. L., Despre ecuațiile bidimensionale ale teoriei liniare generale a învelitorilor elastice subțiri	30	2	257
HUIDU TH. vezi ANTONESCU N. N.	30	3	627
IONESCU VASILE, CIPRIAN COZMA, Asupra unor condiții la limită în dezlocuirea necapilară în medii poroase	30	1	25
IONESCU VASILE, CIPRIAN COZMA, Mișcarea bifazică necapilară în medii poroase neomogene	30	3	535
IONESCU VASILE, CIPRIAN COZMA, Problema generală a dezlocuirii plane necapilare și negravitaționale în medii poroase omogene și neomogene	30	5	1017
IONUȚ V., L. MORAR, Aspecte ale corectării abaterilor de formă la honuirea bucșelor cu pereți subțiri	30	4	955
ISPAS CONSTANTIN vezi ZGURĂ GHEORGHE	30	1	237
IVAN M., G. RUSAN, Sistem de autoreglare pe cale hidraulică a vitezei de avans la mașinile de prelucrat prin procedeul electrolitic	30	6	1461
KLEPP HORST I., Studiul autooscilațiilor cvasiarmonice datorite frecării uscate	30	2	317
LARIONESCU D. vezi BOGDAN R. C.	30	2	363
LIBRESCU L., TR. BĂDOIU, Efectul orientării ortotropicității în problema flutterului supersonic al structurilor subțiri, eterogene, cilindrice circulare, de lungime infinită	30	6	1313
LIBRESCU L., ELEONORA MALAIU, Stabilitatea aeroelastică a structurilor plane de tip sandviș plasate într-un curent de gaz supersonic	30	1	171
MALAIU ELEONORA vezi LIBRESCU L.	30	1	171
MALAIU ELEONORA vezi PATRAULEA N. N.	30	6	1299
MANOLESCU N. I., P. ALEXANDRU, Contribuții la analiza cinematică a mecanismelor de direcție ale autovehiculelor rutiere	30	3	581
MANOLESCU N. I., GH. C. POPA, Contribuții la stabilirea formei curbelor (r_c), Γ_0 și Γ_j cu ajutorul ecuației Veldkamp	30	5	1137
MARINESCU P. V., Elemente de amplificare cu fluid	30	3	733
MARINOV R., Determinarea eforturilor de legătură în sistemele statice combinate prin utilizarea modelelor reduse	30	1	225

	Tomul	Nr.	Pag.
MOLDOVAN S. vezi VASILCA GH	30	4	1001
MORAR L. vezi IONUȚ V.	30	4	955
MOȘU NICOLAE, Determinarea pulsațiilor proprii torsionale ale arborilor cotiți	30	4	833
MOȘU N., Momentul de inerție redus pentru mecanismul bielă-manivelă generală	30	2	409
MUNTEANU F. vezi PANTAZOPOL D.	30	2	421
MURGULESCU S., vezi POSEA N.	30	4	851
NIȚESCU GHEORGHE, VIRGIL OLARU, Asupra vibrațiilor de torsiune ale arborelui cotit	30	3	673
NIȚESCU GH., V. OLARIU, M. TOFAN, Asupra unui program de calcul al vibrațiilor proprii de torsiune ale arborelui cu mai mulți volanți	30	5	1111
NIȚESCU GH., P. SIMA, Contribuții la studiul proprietăților dinamice ale cutiilor de viteze ale tractoarelor	30	2	327
NOVOTNY P. vezi POPESCU M.	30	2	469
OLARIU VIRGIL vezi NIȚESCU GH.	30	3	673
OLARIU V. vezi NIȚESCU GH.	30	5	1111
ONEȚ TR. vezi TERTEA I.	30	6	1399
ORĂNESCU A., Cinematica patrulaterului articulat spațial rezolvată prin metode plane	30	5	1195
OROVEANU T., Asupra injecției fluidelor calde în zăcămintele de petrol, I.	30	3	521
OROVEANU T., Asupra injecției fluidelor calde în zăcămintele de petrol, II	30	4	823
OROVEANU T., Asupra transferului de căldură în gaura de sondă în timpul injecției unui lichid cald în zăcământ	30	5	1061
OROVEANU T., I. SPULBER, Asupra difuziei convective în tuburi de secțiune circulară	30	6	1287
PANAITESCU VALERIU, Asupra stabilității liniare a unei curgeri laminare plane	30	3	549
PANAITESCU VALERIU, În legătură cu mișcarea permanentă plană a două fluide în contact	30	5	1035
PANTAZOPOL D., F. MUNTEANU, Studiul local al scurgerilor însoțite de unde de șoc și de combustie cu ajutorul unui nou tip de polară	30	2	421
PATRAULEA N. N., O metodă aleatorie pentru ecuația lui Boltzmann	30	6	1281
PATRAULEA N. N., ELEONORA MALAIU, N. POSTELNICU, Aplicarea unei noi metode aleatorii la calculul pseudoșocului	30	6	1299
PELECUDI CHR., Determinarea matriceală a deplasărilor în mecanismele spațiale	30	1	53
PELECUDI CHR., G. M. GIUROVICI, Precizia determinării pozițiilor în mecanismele plane mono și bicontururi	30	4	881
PELECUDI CHR., I. SAVA, Optimizări în sinteza numerică a mișcării mecanismelor cu came	30	5	1149
PELECUDI CHR., I. SAVA, S. CONONOVICI, Comportarea mecanismelor cu came la viteze ridicate, I.	30	2	385
PELCUDI CHR., I. SAVA, S. CONONOVICI, Comportarea mecanismelor cu came la viteze ridicate, II, Asupra vibrațiilor longitudinale și torsionale din mecanismele cu came	30	3	611
PETCU VALERIU, Compatibilitatea rotirilor articulațiilor plastice în calculul plastic optim al structurilor continue de beton armat	30	3	645
POPA GH. C. vezi MANOLESCU N. I.	30	5	1137
POPESCU M., C. STERE, P. NOVOTNY, Model matematic pentru calculul oscilațiilor maxime din castele și din sisteme de castele de echilibru	30	2	469
POSEA MAGDALENA, O metodă exactă pentru calculul ondulării circumferențiale a flanșelor	30	4	935
POSEA MAGDALENA, O metodă nouă pentru calculul flanșelor	30	6	
POSEA N., S. MURGULESCU, Asupra amortizării vibrațiilor la oscilații după formele proprii	30	4	851
RAICU A., Variante structurale ale mecanismelor tip nc = 04,05	30	1	89
RAȘEEV D., V. ULMANU, Solicitările la oboseală a îmbinărilor filetate ale racordurilor speciale și metodologia de cercetare a rezistenței acestora	30	5	1229
RAZILLIER V. vezi VASILCA GH.	30	4	1001

	Tomul	Nr.	Pag.
RĂUTU S., VETURIA CHIROIU, Determinarea capacităţii portante a structurilor static nedeterminate supuse la momente încovoietoare şi forţe axiale	30	2	307
RĂUTU S., VETURIA CHIROIU, V. BĂNUŢ, Determinarea sarcinii de stabilizare a deformaţiilor structurilor formate din bare supuse la sarcini repetate	30	1	197
ROŞCA I. vezi ATANASIU M.	30	2	401
RUSAN G. vezi IVAN M.	30	6	1461
SAVA I., S. CONONOVICI, Asupra vibraţiilor de încovoiere ale tachetului în funcţionarea mecanismelor cu came	30	4	869
SAVA I. vezi PELECUDI CHR.	30	2	385
SAVA I. vezi PELECUDI CHR.	30	3	611
SAVA I. vezi PELECUDI CHR.	30	5	1149
SĂVULESCU ŞT. N., N. APOSTOLESCU, Soluţii numerice în curgerea tranziţională şi turbulentă prin conducte şi canale	30	4	811
SĂVULESCU ŞT. N. vezi TOMA V.	30	2	453
SIMA P. vezi NIŢESCU GH.	30	2	327
SOARE MIRCEA, Încovoierea cilindrică a reţelelor spaţiale planar pătrate diagonale	30	2	275
SPULBER I. vezi OROVEANU T.	30	6	1278
STAICU ŞTEFAN, Mişcarea supersonică în jurul unui ampenaj cruciform avînd planul orizontal cu bordul de atac supersonic, considerînd desprinderile de curent de la bordurile de atac subsonice ale plăcii	30	1	39
STAICU ŞT., Studiul scurgerii supersonice în jurul aripilor delta cu antisimetrie forţată ţinînd seama de desprinderea curentului la bordurile de atac	30	2	431
STĂNESCU C., B. DIMITROV, Unele aspecte ale frecării şi uzurii cuplelor fir-captator în tracţiunea electrică, I.	30	5	1269
STERE C. vezi POPESCU M.	30	2	469
TAŞCĂ D., GH. ZIDARU, Studiul reţelelor circulare de profile subţiri şi alcătuite din arce de spirale logaritmice prin transformare conformă pe reţele liniare Weinig	30	5	1047
TEODORESCU-ŢINTEA C., Consideraţii teoretice asupra curgerii prin ajutaje cu reţele depresive	30	4	773
TEODORESCU-ŢINTEA CONSTANTIN, Efecte acustice datorite jeturilor de gaze	30	1	3
TERTEA I., TR. ONEŢ, Ruperea elementelor încovoiate din beton uşor cu granulit, armate cu bare netede (OB 38) şi cu profil periodic (PC 52)	30	6	1399
TOFAN M. vezi NIŢESCU GH.	30	5	1111
TOMA V., H. DUMITRESCU, ŞT. N. SĂVULESCU, Cercetări experimentale asupra scurgerii de intrare cu jeturi însoţitoare	30	2	453
ŢOPA N., Studiul vibraţiilor barajelor în arc cu aplicaţie la calculul solicitărilor seismice, folosindu-se determinări experimentale pe model	30	3	693
ULMANU V. vezi RAŞEEV D.	30	5	1229
VASILCA GH., S. MOLDOVAN, V. RASZILLIER, N. DUCA, Influenţa neomogenităţilor structurale ale materialului asupra apariţiei fenomenului de oboseală în mişcarea de rostogolire	30	4	1001
VOICU CORINA vezi BLUMENFELD M.	30	6	1353
ZĂTREANU GHEORGHE, Soluţii dinamice raţionale la motoarele în patru timpi cu două linii paralele de cilindri	30	1	101
ZGURĂ GH., Consideraţii privind calculul şi construcţia unei mese dinamometrice universale pentru măsurarea forţelor de aşchiere	30	6	1447
ZGURĂ GHEORGHE, CONSTANTIN ISPAS, Cercetări privind construcţia unui dinamometru pentru studierea celor trei componente ale forţei de aşchiere	30	1	237
ZIDARU GH. vezi TAŞCĂ D.	30	5	1047
RECENZII	30	1	251
		2	487
		3	751
		4	1013
		6	1477

1948 KÖNYVTÁRA